

基于部分测量增强量子隐形传态过程的量子 Fisher 信息

武莹 李锦芳 刘金明

Enhancement of quantum Fisher information of quantum teleportation by optimizing partial measurements

Wu Ying Li Jin-Fang Liu Jin-Ming

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 67, 140304 (2018) DOI: 10.7498/aps.67.20180330

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.67.20180330>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2018/V67/I14>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

[基于量子隐形传态的量子保密通信方案](#)

Quantum communication scheme based on quantum teleportation

物理学报.2017, 66(23): 230303 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.230303>

[两个独立全光纤多通道光子纠缠源的 Hong-Ou-Mandel 干涉](#)

Hong-Ou-Mandel interference between two independent all-fiber multiplexed photon sources

物理学报.2017, 66(12): 120302 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.120302>

[基于 cluster 态的信道容量可控的可控量子安全直接通信方案](#)

Cluster state based controlled quantum secure direct communication protocol with controllable channel capacity

物理学报.2017, 66(18): 180303 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.180303>

[基于 Bell 态粒子和单光子混合的量子安全直接通信方案](#)

Quantum secure direct communication protocol based on the mixture of Bell state particles and single photons

物理学报.2016, 65(23): 230301 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.230301>

[利用信息流方法优化多激发自旋链中的量子态传输](#)

Optimizing quantum state transfer in multi-excitation spin chains via information flux

物理学报.2015, 64(16): 160305 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.160305>

基于部分测量增强量子隐形传态过程的量子 Fisher 信息*

武莹 李锦芳 刘金明†

(华东师范大学, 精密光谱科学与技术国家重点实验室, 上海 200062)

(2018年2月13日收到; 2018年4月3日收到修改稿)

量子 Fisher 信息 (QFI) 是量子度量学中的一个重要物理量, 可给出预估参数精度的最优值. 本文研究如何引入弱测量和测量反转操作, 来提高有限温环境下以 Greenberger-Horne-Zeilinger 态作为量子通道的隐形传态过程中的 QFI. 依据隐形传态过程中量子比特的传输情形, 考虑了三种不同方案相应的 QFI. 首先, 通过构造每种量子隐形传态方案的量子线路图, 分析了 QFI 与推广振幅衰减噪声参数的变化关系. 随后对各种方案中的受噪声粒子施加弱测量和测量反转操作, 并对相应的部分测量参数进行优化, 着重探讨了施加最优部分测量操作后 QFI 的改进量. 结果表明, 经过优化后的部分测量操作能有效提高有限温环境下量子隐形传态过程输出态的 QFI; 而且量子系统所处的环境温度越低, QFI 的提高效果可越显著.

关键词: 量子隐形传态, 推广振幅衰减, 弱测量, 量子 Fisher 信息

PACS: 03.67.Hk, 03.67.-a, 42.50.Lc

DOI: 10.7498/aps.67.20180330

1 引言

量子通信作为量子力学和信息学相结合的新兴研究领域, 是指基于量子纠缠特性进行信息传递的一种通讯方式. 近年来, 国内外关于量子通信的研究发展迅速, 相关成果和新技术不断涌现. 2016年, 世界上首颗量子卫星“墨子号”成功发射, 标志着我国的量子通信技术达到国际领先水平^[1,2]. 量子隐形传态是量子通信领域的一个重要分支, 其原创性思想由 Bennett 等^[3]在1993年首次提出. 此后, 关于量子隐形传态的研究及其应用受到人们的极大关注^[4,5], 陆续拓展了多种推广的量子隐形传态方案, 如连续变量隐形传态^[6-9]、量子秘密分享^[10-12]、可控隐形传态^[13-17]、概率隐形传态^[18-21]、双向隐形传态^[22,23]等. 1997年, 奥地利的 Zeilinger 小组^[24]首先在线性光学系统中实验实现了单光子态的隐形传送; 2017年, 国内潘建伟团

队^[25]首次实现了从地面到卫星千公里级的量子隐形传态.

量子隐形传态过程中, 量子系统不可避免地将与周围环境发生相互作用, 使系统的相干性遭受损失, 导致被传递信息的失真. 保真度是表征量子隐形传态的一个重要物理量, 它描述输入态和输出态之间的偏差程度. 在度量学中, 量子 Fisher 信息 (QFI) 同样占据着不容忽视的地位^[26,27], 它是在经典 Fisher 信息基础上的推广, 可量化预估计参数所携带的信息量^[28]. 研究表明, QFI 极易受到环境噪声的影响, 导致测量精度的下降, 因此提高 QFI 尤为重要. 20世纪80年代, Aharonov 等^[29]提出了弱测量的概念, 弱测量及其反转操作又被称为部分测量^[30,31]. 相对于传统的 von Neumann 测量, 弱测量对量子系统有较小的扰动, 且施加弱测量之后加入适当反转操作可使量子态以一定的概率恢复至其初始态, 起到保护量子态的作用. 因此, 弱测量方法被广泛应用于一些量子信息任务^[32-34], 如

* 国家重点研发专项 (批准号: 2016YFB0501601) 和国家自然科学基金 (批准号: 11174081) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: jmliu@phy.ecnu.edu.cn

保护开放系统的退相干^[35-39]、增强量子关联^[40,41]和提高传输量子态的保真度^[42]等. 实验上, 人们已在线性光学系统^[43,44]和超导体系^[45,46]中成功地实现了弱测量.

Pramanik 和 Majumdar^[47]以及 Qiu 等^[48]利用弱测量方法分别提出了改进零温振幅衰减噪声下量子隐形传态过程保真度的方案. Xiao 等^[49]研究了零温环境下弱测量对基于 EPR 态的量子隐形传态过程中 QFI 的影响, 并分析了如何采用部分测量操作来提高量子隐形传态过程中的 QFI. 实际上, 零温环境仅是一种理想情况, 真实量子系统无法达到零温情形, 因此温度的影响通常是不能忽略的^[38]. 鉴于此, 本文研究有限温环境下部分测量操作对以 Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ) 态作为纠缠通道隐形传送单比特态过程中的 QFI 的影响, 并通过优化部分测量操作来改善推广振幅衰减噪声下输出态的 QFI. 结果表明, 合适的部分测量操作可显著增加非零温环境下的 QFI; 且环境温度越低, 增加效果越好.

2 基本概念

2.1 有限温环境下的振幅衰减通道

零温环境下, 描述单量子比特 S 和二能级环境 E 的振幅衰减 (AD) 噪声具有如下的变换关系^[50]:

$$\begin{cases} |0\rangle_S |0\rangle_E \rightarrow |0\rangle_S |0\rangle_E, \\ |1\rangle_S |0\rangle_E \rightarrow \sqrt{1-p}|1\rangle_S |0\rangle_E + \sqrt{p}|0\rangle_S |1\rangle_E. \end{cases} \quad (1)$$

其中 $p \in [0, 1]$ 表示量子比特从激发态 $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T$ 跃迁到基态 $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T$ 的概率, T 为转置操作. 采用 Kraus 算符, 单量子比特态 ρ 经历 AD 噪声可表示成如下形式:

$$\varepsilon_{AD}(\rho) = \sum_{i=0}^1 \mathbf{F}_i \rho \mathbf{F}_i^\dagger, \quad (2)$$

其中

$$\mathbf{F}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

然而, 零温环境只是理想情况, 真实物理系统不可能达到. 有限温环境下, 单量子比特不仅能通过自发辐射从激发态跃迁到基态, 同时也可以从环境中吸收能量由基态跳变到激发态. 有限温情形下,

单量子比特态经历推广的振幅衰减 (GAD) 噪声^[38]可表示为

$$\varepsilon_{GAD}(\rho) = \sum_{i=0}^3 \mathbf{E}_i \rho \mathbf{E}_i^\dagger, \quad (4)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= \sqrt{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{E}_1 &= \sqrt{r} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{E}_2 &= \sqrt{1-r} \begin{pmatrix} \sqrt{1-p} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{E}_3 &= \sqrt{1-r} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{p} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5)$$

这里 $r = \frac{1}{1 + \exp[-\hbar\omega/(k_B T)]}$, $\hbar\omega$ 表示量子系统中激发态至基态的跃迁能量, k_B 为玻尔兹曼常数, T 表示系统的温度. 当 $T \rightarrow 0$ 时, 参数 $r \rightarrow 1$, GAD 噪声可约化为 AD 噪声.

2.2 弱测量和弱测量反转操作

弱测量操作可使量子比特的初态以一定的概率跃迁到基态, 而弱测量反转操作则可使量子比特的末态以某种概率恢复至初态. 因此, 某种程度上实施弱测量和测量反转操作可以起到抑制量子纠缠态的退相干和保护量子态的作用. 本文采取以下作用于量子比特 l ($l = 1, 2, 3$) 的弱测量算符^[42,43]:

$$\mathbf{M}_l = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-w_0} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

相应的作用于量子比特 l 的弱测量反转算符可表示为

$$\mathbf{R}_l = \begin{pmatrix} \sqrt{1-w_1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

其中参数 w_0, w_1 分别表示弱测量操作和弱测量反转操作的强度, w_0, w_1 的取值范围均为 $[0, 1]$.

2.3 量子 Fisher 信息

在物理学中, 人们非常关心测量的精度问题. QFI 提供了一种估计参数测量精度的有效方法. 众

所周知, 基于布洛赫球表示, 任意单量子比特态可写为

$$\rho = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{q} \cdot \hat{\sigma}), \quad (8)$$

其中 $\mathbf{q} = (q_x, q_y, q_z)^T$ 表示布洛赫矢量, $\hat{\sigma} = (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z)$ 表示 Pauli 矩阵. 对于单量子比特态, 编码在该态的参数 ϕ 的 QFI 可表示为 [27,49]

$$F^\phi = \begin{cases} |\partial_\phi \mathbf{q}|^2 + \frac{\mathbf{q} \cdot \partial_\phi \mathbf{q}}{1 - |\mathbf{q}|^2}, & |\mathbf{q}| < 1, \\ |\partial_\phi \mathbf{q}|^2, & |\mathbf{q}| = 1, \end{cases} \quad (9)$$

其中 ∂_ϕ 表示对矢量 \mathbf{q} 中的参数 ϕ 求偏导.

3 GAD 噪声环境下引入弱测量方法的量子隐形传态过程

本节描述噪声情形下基于 GHZ 态作为纠缠资源的量子隐形传态协议. 假定初始 GHZ 纠缠态的形式为

$$|\psi_{\text{GHZ}}\rangle_{123} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle_{123} + |111\rangle_{123}),$$

待传输的单量子比特态为

$$|\varphi_{\text{in}}\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} |1\rangle,$$

这里 θ, ϕ 是与输入态有关的参数. 下面考虑三种 GAD 噪声情况下量子隐形传态过程中的 QFI.

3.1 单粒子通过 GAD 噪声

假设 Alice 事先制备了一个三粒子 GHZ 态 $|\psi_{\text{GHZ}}\rangle_{123}$, 现将粒子 3 发送给 Bob, 该粒子在传送过程中设想与周围环境发生 GAD 退相干作用, 粒子 1 和 2 仍保留在 Alice 处. 整个量子隐形传态过程的量子逻辑线路 [17] 见图 1 (a), 其中 “•” 表示控制位, “ \oplus ” 表示对目标位实施泡利 σ_x 操作, H 表示 Hadamard 操作, X, Z 分别表示泡利操作 σ_x 和 σ_z , “ \boxtimes ” 表示单比特正交测量, 双线表示经典通讯. 依据 (4) 式, GHZ 态在粒子 3 经历 GAD 噪声后将演化为

$$\rho_{\text{GAD1}} = \sum_{i=0}^3 (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \otimes \mathbf{E}_i) |\psi_{\text{GHZ}}\rangle_{123} \langle \psi_{\text{GHZ}}| (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \otimes \mathbf{E}_i^\dagger). \quad (10)$$

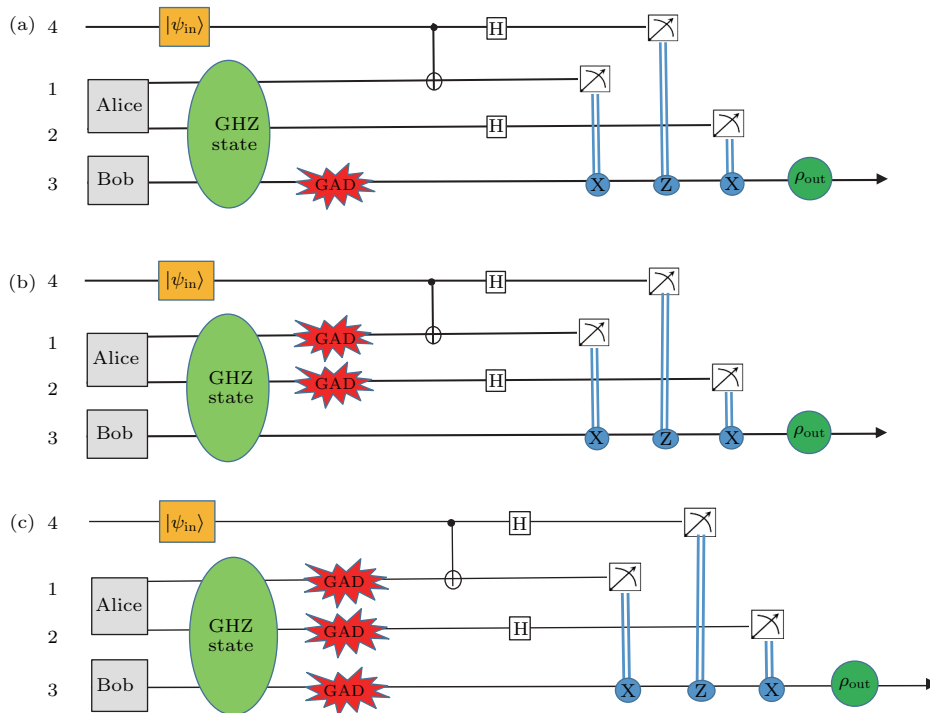


图 1 基于 GHZ 态隐形传送单比特态的量子线路图 (a) 粒子 3 遭受 GAD 噪声; (b) 粒子 1 和 2 遭受 GAD 噪声; (c) 粒子 1, 2 和 3 同时遭受 GAD 噪声

Fig. 1. A quantum circuit for teleportation of a single-qubit state via a GHZ state: (a) Only qubit 3 undergoes decoherence; (b) qubits 1 and 2 undergo decoherence; (c) qubits 1, 2 and 3 simultaneously undergo decoherence.

根据量子线路图 1 (a), 量子隐形传态过程的输出态可写为

$$\rho_{\text{out}1} = \text{tr}_{4,1,2} \left\{ \mathbf{U}_{\text{qt}} (|\varphi_{\text{in}}\rangle_4 \langle\varphi_{\text{in}}| \otimes \rho_{\text{GAD}1}) \mathbf{U}_{\text{qt}}^\dagger \right\}, \quad (11)$$

其中, 么正操作

$$\mathbf{U}_{\text{qt}} = (\sigma_x)_{2 \rightarrow 3} (\sigma_z)_{4 \rightarrow 3} (\sigma_x)_{1 \rightarrow 3} H_2 H_4 (\sigma_x)_{4 \rightarrow 1},$$

这里 $(\sigma_\lambda)_{n \rightarrow m}$ 表示两比特控制旋转操作; n 为控制比特; m 为目标比特; $\lambda = x, z$; $n = 1, 2, 4$; $m = 1, 3$; H_2 和 H_4 分别表示对粒子 2 和 4 实施 Hadamard 操作。

经过解析计算, 输出态的密度矩阵可表示为

$$\rho_{\text{out}1} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix},$$

其中

$$\begin{aligned} k_{11} &= \frac{1}{2} (1 + \cos\theta) - \frac{1}{3-r} p \cos\theta, \\ k_{12} &= \frac{1}{3-r} \sqrt{1-p} \sin\theta e^{-i\phi}, \\ k_{21} &= \frac{1}{3-r} \sqrt{1-p} \sin\theta e^{i\phi}, \\ k_{22} &= \frac{1}{2} (1 - \cos\theta) + \frac{1}{3-r} p \cos\theta. \end{aligned}$$

由 (9) 式可导出输出态 $\rho_{\text{out}1}$ 的 QFI 为

$$F_1^\phi = \frac{4\sin^2\theta (1-p)}{(3-r)^2}. \quad (12)$$

令 $\theta = \pi/2$, 由 (12) 式可知, p 一定的情况下, r 增大, F_1^ϕ 也增大。

为考虑部分测量操作对 QFI 的影响, 在粒子 3 发送前和经过噪声通道后, 分别由 Alice 和 Bob 对粒子 3 执行弱测量和弱测量反转操作, 见图 2。这样在粒子 3 经历 GAD 噪声, 并被实施前置弱测量和后置测量反转操作后, 量子隐形传态的输出态可表示为

$$\rho_{\text{out}1, \text{wm}} = \text{tr}_{4,1,2} \left\{ \mathbf{U}_{\text{qt}} (|\varphi_{\text{in}}\rangle_4 \langle\varphi_{\text{in}}| \otimes \mathbf{Y}_{\text{wm}}) \mathbf{U}_{\text{qt}}^\dagger \right\}, \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{\text{wm}} &= (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \otimes \mathbf{R}_3) \\ &\times \sum_{i=0}^3 (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \otimes \mathbf{E}_i) [(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \otimes \mathbf{M}_3) \\ &\times |\psi_{\text{GHZ}}\rangle_{123} \langle\psi_{\text{GHZ}}| (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \otimes \mathbf{M}_3^\dagger)] \end{aligned}$$

$$\times (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \otimes \mathbf{E}_i^\dagger) (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \otimes \mathbf{R}_3^\dagger).$$

依据 (9) 式和 (13) 式, 执行部分测量操作后输出态的 QFI 可写为

$$F_{1, \text{wm}}^\phi = \frac{4\sin^2\theta (1-p) (1-w_0) (1-w_1)}{(\varpi_1 + \varpi_2)^2}, \quad (14)$$

其中

$$\begin{aligned} \varpi_1 &= (1-w_0) (2-r-prw_1), \\ \varpi_2 &= pw_1 (1-r) + (1-w_1). \end{aligned}$$

基于 (14) 式, 可求出 $F_{1, \text{wm}}^\phi$ 取最优值时所对应的参数 w_0 和 w_1 分别为:

$$\begin{aligned} w_0 &= 1 - \sqrt{\frac{(1-r)(pr-p+1)}{r(2-pr-r)}}, \\ w_1 &= 1 - \sqrt{\frac{(1-r)(2-pr-r)}{r(pr-p+1)}}. \end{aligned} \quad (15)$$

根据 (15) 式, 因为 w_1 的取值为 $[0, 1]$, 可知相应参数 r 的有效取值应为 $2 - \sqrt{2} \leq r < 1$ 。

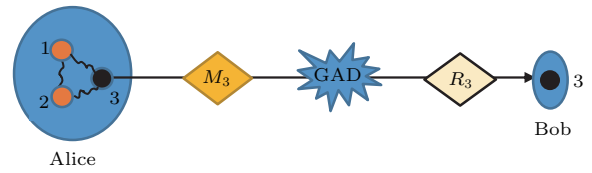


图 2 对粒子 3 实施前置弱测量和后置测量反转操作

Fig. 2. Performing a weak measurement and a measurement reversal on particle 3.

将 (15) 式中的 w_0 和 w_1 代入 (14) 式, 可得到输出态的 QFI 的最优值 $F_{1, \text{wm}}^{\phi, \text{opt}}$. 对于给定的参数 p 和 r , 现定义对粒子 3 引入部分测量操作后相应的 QFI 最优值 $F_{1, \text{wm}}^{\phi, \text{opt}}$ 与未引入部分测量操作的 QFI 值 F_1^ϕ 之差为

$$\Delta F_1 = F_{1, \text{wm}}^{\phi, \text{opt}} - F_1^\phi.$$

图 3 给出了 QFI 的改进量 ΔF_1 随参数 r 和 θ 以及参数 r 和 p 的变化. 从图中可知, 量子隐形传态输出态的 QFI 改进量 ΔF_1 总是非负的. 图 3 (a) 表明, 对于给定的 r 值, ΔF_1 随 θ 的增加而增大, 当 $\theta = \pi/2$ 时, QFI 的改进量最多. 从图 3 (b) 可看出, 在 r 和 p 取不同的值时, 最佳弱测量和测量反转操作对 QFI 的改善效果不尽相同; 对于给定的较大 p 值, ΔF_1 随着 r 的变大而增大, 在 r 接近 1 时显著增加。

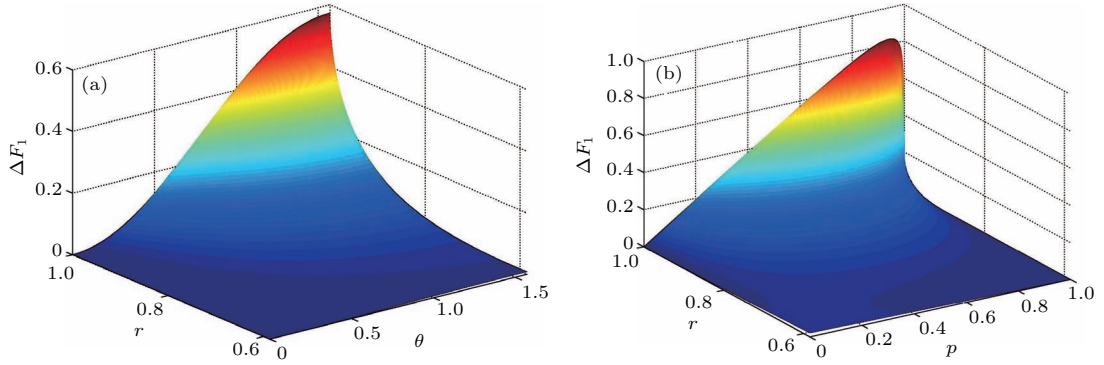


图3 (a) 当 $p=0.6$ 时, QFI 的改进量 ΔF_1 随参数 r 和 θ 的变化; (b) 当 $\theta = \pi/2$ 时, QFI 的改进量 ΔF_1 随参数 r 和 p 的变化
Fig. 3. (a) The improved QFI ΔF_1 by optimal partial measurements is plotted as a function of r and θ for $p=0.6$; (b) the improved QFI ΔF_1 by optimal partial measurements is plotted as a function of r and p for $\theta = \pi/2$.

图4给出了 ΔF_1 随噪声参数 p 的变化情况. 从图4可知, 当 r 值给定时, ΔF_1 随 p 的增大先增加而后减小; r 越大, ΔF_1 的峰值越高, 峰值处对应的 p 值也越大. 物理上可以理解为: 对于给定的 r 值, p 较小时, GAD 噪声对 QFI 的影响较弱, 输出态 QFI 的信息损失较小, 部分测量操作的优化对提高 QFI 的效果微弱; 随着噪声参数 p 的逐渐增大, 输出态 QFI 的信息损失变大, 此时部分测量凸显出对 QFI 的保护作用, 且 p 值越大效果越明显; 当 p 增大到一定值时, 部分测量对 QFI 的改进作用达到极值; 随着参数 p 的继续增大, 作为量子通道的纠缠资源逐渐趋于经典态, 则用于抑制量子态消相干的弱测量操作效果逐渐退化, 因而导致 QFI 的改进幅度减小. 在非零温环境下, 输出态的 QFI 改进量依赖于参数 p 和 r . 注意到参数 r 是温度 T 的反关联函数, 即在低温环境下, 选取合适的 p 值, 部分测量操作可显著提高输出态的 QFI, 这有助于实现量子计量和相关量子信息任务.

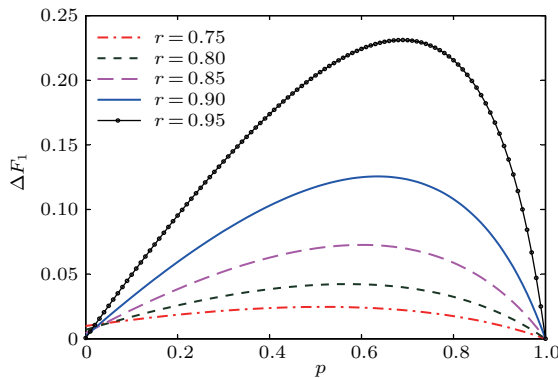


图4 当 $\theta = \pi/2$ 时, 对于不同的 r 值, QFI 的改进量 ΔF_1 随参数 p 的变化

Fig. 4. The improved QFI ΔF_1 by optimal partial measurements is plotted as a function of p with different values of parameters r for $\theta = \pi/2$.

3.2 两个粒子通过 GAD 噪声

假设 Bob 事先制备三粒子 GHZ 态 $|\psi_{\text{GHZ}}\rangle_{123}$, 现将粒子 1 和 2 发送给 Alice, 两粒子在传送过程中设想与周围环境发生独立 GAD 相互作用, 噪声参数分别为 $\{r_1, p_1\}$ 和 $\{r_2, p_2\}$, 粒子 3 仍保留在 Bob 处. 整个量子隐形传态过程的量子线路见图 1(b). 粒子 1 和 2 通过 GAD 噪声后, GHZ 态的演化可表示为

$$\rho_{\text{GAD}2} = \sum_{i,j=0}^3 (\mathbf{E}_i \otimes \mathbf{E}_j \otimes \mathbf{I}) |\psi_{\text{GHZ}}\rangle_{123} \times \langle \psi_{\text{GHZ}} | (\mathbf{E}_i^\dagger \otimes \mathbf{E}_j^\dagger \otimes \mathbf{I}). \quad (16)$$

为简便起见, 假设粒子 1, 2 受到相同噪声的影响, 即 $r_1 = r_2 = r, p_1 = p_2 = p$. 类似地, 基于 (11) 式, 最终输出态的密度矩阵可表示为

$$\rho_{\text{out}2} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix},$$

其中

$$\begin{aligned} l_{11} &= \frac{1}{2} (1 + \cos\theta) - \frac{p \cos\theta}{N_2} (1 + r - r^2), \\ l_{12} &= \frac{1}{N_2} [(1 - p) \sin\theta e^{-i\phi}], \\ l_{21} &= \frac{1}{N_2} [(1 - p) \sin\theta e^{i\phi}], \\ l_{22} &= \frac{1}{2} (1 - \cos\theta) + \frac{p \cos\theta}{N_2} (1 + r - r^2), \\ N_2 &= (2 - r)^2 + 1. \end{aligned}$$

由 (9) 式可导出输出态 $\rho_{\text{out}2}$ 的 QFI 为

$$F_2^\phi = \frac{4 \sin^2\theta (1 - p)^2}{[(2 - r)^2 + 1]^2}. \quad (17)$$

由 (17) 式可知, p 增大及 r 减小时, F_2^ϕ 表征的 QFI 将减小.

为考虑部分测量操作对 QFI 的影响, 在粒子 1 和 2 发送前和各自经过噪声通道后, 分别由 Bob 和 Alice 对两粒子执行弱测量和弱测量反转操作, 见图 5. 在粒子 1 和 2 经历 GAD 噪声, 并被实施前置弱测量和后置测量反转操作后, 量子隐形传送的输出态可表示为

$$\rho_{\text{out}2,\text{wm}} = \text{tr}_{4,1,2} \left\{ U_{\text{qt}} \left(|\varphi_{\text{in}}\rangle_4 \langle \varphi_{\text{in}}| \otimes \mathcal{Y}'_{\text{wm}} \right) U_{\text{qt}}^\dagger \right\}, \quad (18)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}'_{\text{wm}} = & (\mathbf{R}_1 \otimes \mathbf{R}_2 \otimes \mathbf{I}) \sum_{i,j=0}^3 (\mathbf{E}_i \otimes \mathbf{E}_j \otimes \mathbf{I}) \\ & \times [(\mathbf{M}_1 \otimes \mathbf{M}_2 \otimes \mathbf{I}) |\psi_{\text{GHZ}}\rangle_{123} \langle \psi_{\text{GHZ}}| \\ & \times (\mathbf{M}_1^\dagger \otimes \mathbf{M}_2^\dagger \otimes \mathbf{I})] (\mathbf{E}_i^\dagger \otimes \mathbf{E}_j^\dagger \otimes \mathbf{I}) \\ & \times (\mathbf{R}_1^\dagger \otimes \mathbf{R}_2^\dagger \otimes \mathbf{I}). \end{aligned}$$

依据 (9) 式和 (18) 式, 此时输出态的 QFI 可导出为

$$F_{2,\text{wm}}^\phi = \frac{4\sin^2\theta(1-p)^2(1-w_0)^2(1-w_1)^2}{(\varpi_1^2 + \varpi_2^2)^2}, \quad (19)$$

这里 $\varpi_1 = (1-w_0)(2-r-prw_1)$ 和 $\varpi_2 = pw_1(1-r) + (1-w_1)$.

数学分析表明, 当弱测量参数 $w_0 = \frac{(1-p)w_1 + (1-r)}{2-r-prw_1}$ 和弱测量反转参数 $w_1 = 1 - \sqrt{\frac{(1-r)(2-pr-r)}{r(pr-p+1)}}$ 时, 可获得输出态的 $F_{2,\text{wm}}^\phi$ 的最优值为

$$F_{2,\text{wm}}^{\phi,\text{opt}} = \frac{\sin^2\theta(1-p)^2}{[\sqrt{(2-pr-r)(pr-p+1)} + p\sqrt{r(1-r)}]^4}. \quad (20)$$

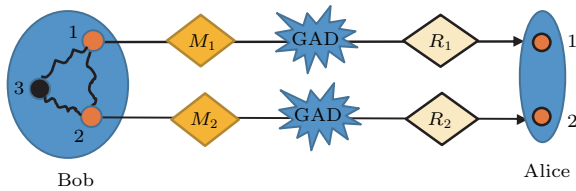


图 5 粒子 1, 2 传输过程中实施前置弱测量和后置测量反转操作

Fig. 5. Performing prior weak measurements and subsequent measurement reversals on particles 1 and 2 during the two qubit transmission processes.

因为 w_1 的取值为 $[0, 1]$, 可知相应参数 r 的有效取值也应为 $2-\sqrt{2} \leq r < 1$.

现定义对粒子 1 和 2 引入部分测量操作后相应的 QFI 最优值 $F_{2,\text{wm}}^{\phi,\text{opt}}$ 与未引入部分测量操作的 QFI 值 F_2^ϕ 之差为 QFI 的改进量, 即

$$\Delta F_2 = F_{2,\text{wm}}^{\phi,\text{opt}} - F_2^\phi.$$

图 6 给出了当 $\theta = \pi/2$ 时, ΔF_2 随 GAD 噪声参数 r 和 p 的变化. 从图 6(a) 中可知, 量子隐形传输出态的 QFI 改进量 ΔF_2 总是非负的, 即经实施最优弱测量和测量反转操作后输出态的 QFI 较之无部分测量情形下的 QFI 都有提高. 从图 6(b) 可发现, 当 r 值较大时, ΔF_2 随 p 的增大先逐渐增加而后慢慢减小; r 越大对应的 ΔF_2 的峰值也越高. 因此, 从图 6 所得到的结果与图 3 和图 4 所得的结果类似. 换句话说, 在量子系统所处的环境温度较低时, 选取合适的 p 值, 优化部分测量操作可显著地提高传送初始态 $|\varphi_{\text{in}}\rangle$ 的 QFI, 有效抑制输出态

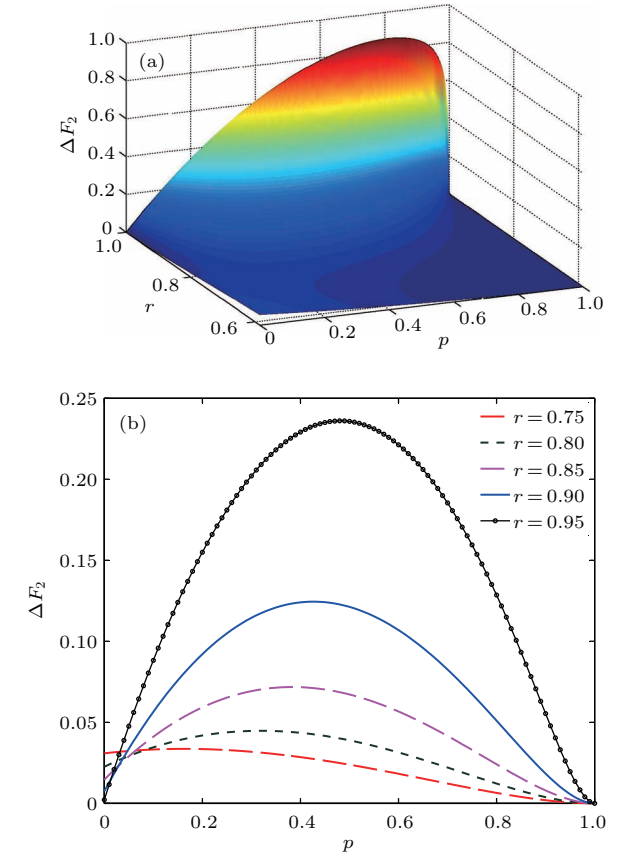


图 6 (a) 当 $\theta = \pi/2$ 时, QFI 的改进量 ΔF_2 随参数 r 和 p 的变化; (b) 图 (a) 在给定参数 r 时的二维图

Fig. 6. (a) The improved QFI ΔF_2 by optimal partial measurements is plotted as a function of r and p for $\theta = \pi/2$; (b) the two-dimensional figure of panel (a) for the given r .

QFI的信息损失, 这对于相关量子通信和量子计量研究非常重要.

3.3 三个粒子通过GAD噪声

假设Charlie事先制备三粒子GHZ态 $|\psi_{\text{GHZ}}\rangle_{123}$, 现将粒子1和2发送给Alice, 粒子3发送给Bob, 三粒子在传送过程中设想与周围环境各自发生独立的GAD相互作用, 噪声参数分别为 $\{r_1, p_1\}$, $\{r_2, p_2\}$ 和 $\{r_3, p_3\}$. 整个量子隐形传态过程的量子逻辑线路见图1(c). 粒子1, 2, 3同时经过GAD噪声可表示为

$$\rho_{\text{GAD3}} = \sum_{i,j,k=0}^3 (\mathbf{E}_i \otimes \mathbf{E}_j \otimes \mathbf{E}_k) |\psi_{\text{GHZ}}\rangle_{123} \times \langle \psi_{\text{GHZ}} | (\mathbf{E}_i^\dagger \otimes \mathbf{E}_j^\dagger \otimes \mathbf{E}_k^\dagger). \quad (21)$$

简单起见, 假定三粒子受到相同的GAD噪声影响, 即 $r_1 = r_2 = r_3 = r, p_1 = p_2 = p_3 = p$.

根据(11)式, 并采用前两个小节类似的方法, 量子隐形传输出态的QFI表达式可写为

$$F_3^\phi = \frac{4\sin^2\theta(1-p)^3}{[1 + (2-r)^3 + 2p^{3/2}(1-r)^3]^2}. \quad (22)$$

令 $\theta = \pi/2$, F_3^ϕ 随 p 和 r 的变化见图8(a). 从图中可知, 当 p 增大或 r 减小时, F_3^ϕ 表征的QFI将减小.

现考虑部分测量操作对QFI的影响, 在三个粒子发送前假设由Charlie对它们分别实施前置的弱测量操作, 各自经过独立的GAD噪声后, 分别被实施后置的弱测量反转操作, 如图7所示. 不失一般性, 假定 $M_1 = M_2 = M_3$ 且 $R_1 = R_2 = R_3$. 类似于前两小节的方法, 执行部分测量操作后隐形传送的输出态可表示为

$$F_{3,\text{wm}}^\phi = \frac{4\sin^2\theta(1-p)^3(1-w_0)^3(1-w_1)^3}{(A_1 + A_2)^2}, \quad (23)$$

其中

$$A_1 = [1 - w_1(1-p+pr)]^3 + (1-w_0)^3(2-r-prw_1)^3$$

$$\text{和 } A_2 = 2p^{3/2}(1-r)^3(1-w_0)^{3/2}.$$

根据(23)式, 在给定参数 θ, r, p 的情形下, 数值分析表明, 通过选取合适的部分测量参数 w_0 和 w_1 可使得 $F_{3,\text{wm}}^\phi$ 达到最优值 $F_{3,\text{wm}}^{\phi,\text{opt}}$. 定义QFI的改进值 $\Delta F_3 = F_{3,\text{wm}}^{\phi,\text{opt}} - F_3^\phi$. 令 $\theta = \pi/2$, ΔF_3 随参数 r 和 p 的变化见图8(b). 从图中可知, 量子隐形传输出态的QFI改进量 ΔF_3 也总是非负的, 换句话说, 优化部分测量操作也可提高量子隐形传过程中三个粒子同时经历GAD噪声后输出态的QFI, 且改进效果显著.

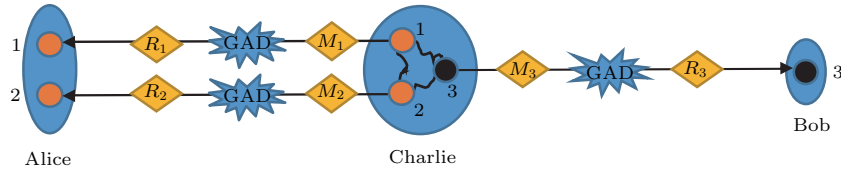


图7 粒子1, 2, 3传输过程中都实施前置弱测量和后置弱测量反转操作

Fig. 7. Performing prior weak measurements and subsequent measurement reversals on particles 1, 2 and 3 during the three qubit transmission processes.

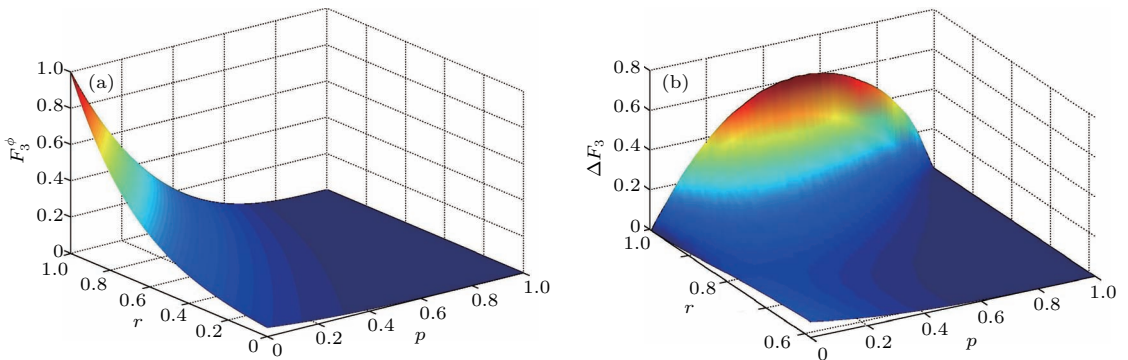


图8 当 $\theta = \pi/2$ 时, QFI F_3^ϕ (a) 和QFI的改进量 ΔF_3 (b) 随参数 r 和 p 的变化

Fig. 8. QFI F_3^ϕ (a) and the improved QFI ΔF_3 (b) is plotted versus p and r for $\theta = \pi/2$.

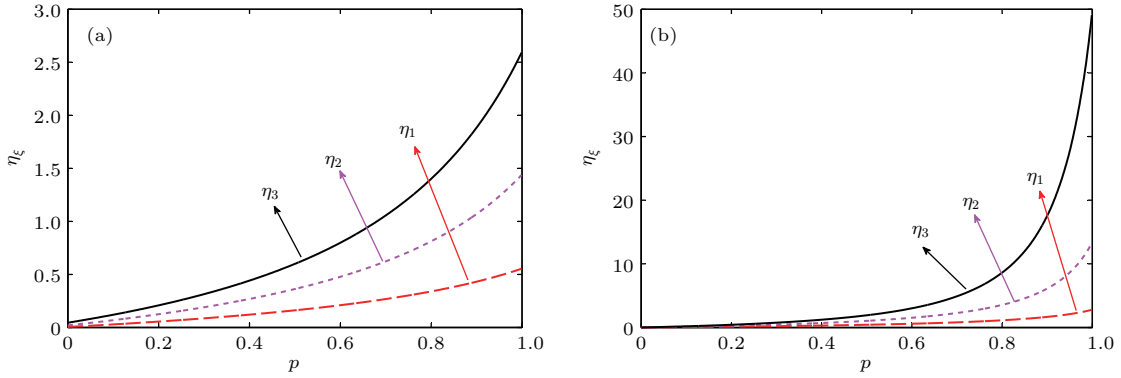


图9 优化部分测量操作对三种传输方案遭受GAD噪声影响下QFI的改进效率 η_ξ 随参数 p 的变化 (a) $r = 0.85$; (b) $r = 0.95$

Fig. 9. The improvement efficiency η_ξ of QFI is plotted versus the parameter p for three kinds of teleportation schemes suffering from GAD noises after the optimization of partial measurements: (a) $r = 0.85$; (b) $r = 0.95$.

通过以上分析量子隐形传态过程中粒子遭受GAD噪声以及实施部分测量操作的三种情况,可以发现:尽管三种传输方案不尽相同,但优化部分测量操作后的QFI的改进量总是非负的,也即弱测量操作可起到保护量子态,提高QFI的作用;而且量子系统的环境温度越低,部分测量操作对提高QFI越有效.为了对比三种传输方案受到噪声的影响,图9给出了优化部分测量操作对量子隐形传输出态QFI的改进效率 η_ξ 随参数 p 的变化,这里定义

$$\eta_\xi = \frac{F_{\xi, \text{wm}}^{\phi, \text{opt}} - F_\xi^\phi}{F_\xi^\phi} = \frac{\Delta F_\xi}{F_\xi^\phi} \quad (\xi = 1, 2, 3).$$

从图9可知,在 r 值取定时,改进效率 η_ξ 随参数 p 的变大而增加,且数值分析表明总存在 $\eta_3 > \eta_2 > \eta_1$.换言之,部分测量操作的优化对QFI的改进效率与遭受GAD噪声的粒子数有关;受噪声的粒子数越多,所需实施的部分测量优化操作也相应地增加,QFI的改进效率随之提高.

4 结 论

本文研究了采用部分测量方法改进推广振幅衰减噪声下以GHZ态作为量子信道的单比特态隐形传送过程的量子Fisher信息.考虑了三种粒子遭受噪声的情形,分析了部分测量的引入对各种情形的影响,并解析导出了三种情形下的QFI以及单个和两个粒子受GAD噪声下优化后的QFI.对于三个粒子同时经历GAD噪声的情况,鉴于解析式复杂,通过数值分析得到了相应的最优QFI.研究表明,在噪声参数 p 增大或 r 减小时,GAD噪声

影响下三种输出态对应的Fisher信息(即 F_1^ϕ, F_2^ϕ ,和 F_3^ϕ)都减小.对于单粒子和两粒子经历GAD噪声的情形,最优的弱测量参数 w_0 和测量反转参数 w_1 都是 p 和 r 的函数;而且三种粒子受噪声的情形下QFI的改进量 $\Delta F_1, \Delta F_2$ 和 ΔF_3 总是非负的,这隐含着经引入最优弱测量和弱测量反转操作后输出态的QFI较之未引入情形下的QFI都有所提高.此外,受GAD噪声的粒子数越多,优化部分测量操作对QFI的改进效率越高.进一步分析表明,在低温环境下,选取合适的 p 值,部分测量操作可显著提高GAD噪声影响下输出态的QFI,这有利于相关量子参数估计和量子信息任务的实现.本文结果可加深对部分测量技术应用于量子隐形传态方案的理解,也对研究如何抑制量子通信过程中QFI信息的退相干具有一定的启发和参考意义.

参考文献

- [1] Yin J, Cao Y, Li Y H, et al. 2017 *Science* **356** 1140
- [2] Liao S K, Cai W Q, Handsteiner J, et al. 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 030501
- [3] Bennett C H, Brassard G, Crépeau C, Jozsa R, Peres A, Wootters W K 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 1895
- [4] Gottesman D, Chuang I L 1999 *Nature* **402** 390
- [5] Yang L, Ma H Y, Zheng C, Ding X L, Gao J C, Long G L 2017 *Acta Phys. Sin.* **66** 230303 (in Chinese) [杨璐, 马鸿洋, 郑超, 丁晓兰, 高健存, 龙桂鲁 2017 物理学报 **66** 230303]
- [6] Braunstein S L, Kimble H J 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 869
- [7] Yonezawa H, Aoki T, Furusawa A 2004 *Nature* **431** 430
- [8] Zhang J, Peng K C 2000 *Phys. Rev. A* **62** 064302
- [9] Dell'Anno F, de Siena S, Illuminati F 2010 *Phys. Rev. A* **81** 012333

- [10] Hillery M, Buzek V, Berthiaume A 1999 *Phys. Rev. A* **59** 1829
- [11] Bell B A, Markham D, Herrera-Martí D A, Marin A, Wadsworth W J, Rarity J G, Tame M S 2014 *Nat. Commun.* **5** 5480
- [12] Kogias I, Xiang Y, He Q Y, Adesso G 2017 *Phys. Rev. A* **95** 012315
- [13] Deng F G, Li C Y, Li Y S, Zhou H Y, Wang Y 2005 *Phys. Rev. A* **72** 022338
- [14] Zhou P, Li X H, Deng F G, Zhou H Y 2007 *J. Phys. A: Math. Theor.* **40** 13121
- [15] Man Z X, Xia Y J, An N B 2007 *Phys. Rev. A* **75** 052306
- [16] Huelga S F, Plenio M B, Vaccaro J A 2002 *Phys. Rev. A* **65** 042316
- [17] Han X P, Liu J M 2008 *Phys. Scr.* **78** 015001
- [18] Li W L, Li C F, Guo G C 2000 *Phys. Rev. A* **61** 034301
- [19] Pati A K, Agrawal P 2007 *Phys. Lett. A* **371** 185
- [20] Chen X B, Du J Z, Wen Q Y, Zhu F C 2008 *Chin. Phys. B* **17** 771
- [21] Yan F L, Yan T 2010 *Chin. Sci. Bull.* **55** 902
- [22] Zha X W, Zou Z C, Qi J X, Song H Y 2013 *Int. J. Theor. Phys.* **52** 1740
- [23] Li Y H, Nie L P 2013 *Int. J. Theor. Phys.* **52** 1630
- [24] Bouwmeester D, Pan J W, Mattle K, Eibl M, Weinfurter H, Zeilinger A 1997 *Nature* **390** 575
- [25] Ren J G, Xu P, Yong H L, et al. 2017 *Nature* **549** 70
- [26] Braunstein S L, Caves C M 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 3439
- [27] Zhong W, Sun Z, Ma J, Wang X, Nori F 2013 *Phys. Rev. A* **87** 022337
- [28] Giovanetti V, Lloyd S, Maccone L 2004 *Science* **306** 1330
- [29] Aharonov Y, Albert D Z, Vaidman L 1988 *Phys. Rev. Lett.* **60** 1351
- [30] Paraoanu G S 2011 *EPL* **93** 64002
- [31] Korotkov A N, Keane K 2010 *Phys. Rev. A* **81** 040103
- [32] Branczyk A M, Mendonca P E M F, Gilchrist A, Doherty A C, Bartlett S D 2007 *Phys. Rev. A* **75** 012329
- [33] Sun Q Q, Amri M A, Zubairy M S 2009 *Phys. Rev. A* **80** 033838
- [34] Song W, Yang M, Cao Z L 2014 *Phys. Rev. A* **89** 014303
- [35] Man Z X, Xia Y J, An N B 2012 *Phys. Rev. A* **86** 012325
- [36] Liao X P, Fang M F, Fang J S, Zhu Q Q 2014 *Chin. Phys. B* **23** 020304
- [37] Xiao X 2014 *Phys. Scr.* **89** 065102
- [38] Wang S C, Yu Z W, Zou W J, Wang X B 2014 *Phys. Rev. A* **89** 022318
- [39] Huang J 2017 *Acta Phys. Sin.* **66** 010301 (in Chinese) [黄江 2017 物理学报 **66** 010301]
- [40] Guo J L, Wei J L 2015 *Ann. Phys.* **354** 522
- [41] Shi J D, Wang D, Ma W C, Ye L 2015 *Quantum Inf. Process.* **14** 3569
- [42] Yang R Y, Liu J M 2017 *Quantum Inf. Process.* **16** 125
- [43] Kim Y S, Lee J C, Kwon O, Kim Y H 2012 *Nat. Phys.* **8** 117
- [44] Xu X Y, Kedem Y, Sun K, Vaidman L, Li C F, Guo G C 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 033604
- [45] Katz N, Neeley M, Ansmann M, Bialczak R C, Hofheinz M, Lucero E, O'Connell A, Wang H, Cleland A N, Martinis J M, Korotkov A N 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 200401
- [46] Groen J P, Riste D, Tornberg L, Cramer J, Degroot P C, Picot T, Johansson G, Dicarolo L 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 090506
- [47] Pramanik T, Majumdar A S 2013 *Phys. Lett. A* **377** 3209
- [48] Qiu L, Tang G, Yang X Q, Wang A M 2014 *Ann. Phys.* **350** 137
- [49] Xiao X, Yao Y, Zhong W J, Li Y L, Xie Y M 2016 *Phys. Rev. A* **93** 012307
- [50] Nielsen M A, Chuang I L 2000 *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge: Cambridge University Press) p380

Enhancement of quantum Fisher information of quantum teleportation by optimizing partial measurements*

Wu Ying Li Jin-Fang Liu Jin-Ming[†]

(State Key Laboratory of Precision Spectroscopy, East China Normal University, Shanghai 200062, China)

(Received 13 February 2018; revised manuscript received 3 April 2018)

Abstract

The purpose of quantum teleportation is to achieve perfect transmission of quantum information from one site to another distant site. In the teleportation process, the quantum system is inevitably affected by its surrounding environment, causing the system to lose its coherence, which will result in distortion of the transmitted information. In recent years, weak measurement and measurement reversal have been proposed to suppress the decoherence of quantum entanglement and protect some quantum states. On the other hand, quantum Fisher information (QFI) is an important physical quantity in quantum metrology, which can give the optimal value estimating the accuracy of parameters. As is well known, QFI is highly susceptible to environmental noise and can lead its measurement accuracy to decrease. Therefore, it is of great importance to examine how to protect QFI from being influenced by the external circumstance during the teleportation procedure. In this paper, we study how to improve the QFI of teleporting a single-qubit state via a Greenberger-Horne-Zeilinger state in a finite temperature environment with the technique of weak measurement and weak measurement reversal. According to different qubit transmission cases of three quantum teleportation schemes, we consider their respective QFIs in detail. After constructing the quantum logic circuit of each teleportation scheme, we first analyze the variance trend of QFI against the generalized amplitude damping noise parameters. Then by introducing weak measurement and measurement reversal on each noise particle of the three schemes, we optimize the related partial measurement parameters and explore the corresponding improved QFI, namely, the difference between the QFI with optimal partial measurements and that without partial measurements. We find that optimizing partial measurements can efficiently enhance the QFI of the teleported state for the three kinds of teleportation schemes at finite temperature. Moreover, with the value of p fixed, the lower the environment temperature, the larger the value of the improved QFI is. Our results could be useful in further understanding the applications of weak measurement and measurement reversal to the quantum communication process and may shed light on estimating some relevant quantum parameters and implementing quantum information tasks.

Keywords: quantum teleportation, generalized amplitude damping, weak measurement, quantum Fisher information

PACS: 03.67.Hk, 03.67.-a, 42.50.Lc

DOI: 10.7498/aps.67.20180330

* Project supported by the National Key Research and Development Program of China (Grant No. 2016YFB0501601) and the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11174081).

† Corresponding author. E-mail: jmliu@phy.ecnu.edu.cn