物理学报 Acta Physica Sinica
Chinese Physical Society
Institute of Physics, CAS

分数阶Willis环脑迟发性动脉瘤时滞系统混沌分析

高飞　胡道楠　童恒庆　王传美

Chaotic analysis of fractional Willis delayed aneurysm system

Gao Fei　Hu Dao-Nan　Tong Heng-Qing　Wang Chuan-Mei

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 67, 150501 (2018)　DOI: 10.7498/aps.67.20180262
在线阅读 View online: http://dx.doi.org/10.7498/aps.67.20180262
当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2018/V67/I15

您可能感兴趣的其他文章
Articles you may be interested in

分段Filippov系统的簇发振荡及擦边运动机理
Bursting oscillations and mechanism of sliding movement in piecewise Filippov system
物理学报.2018, 67(11): 110501　http://dx.doi.org/10.7498/aps.67.20172421

具有早期后除极化现象的可激发系统中螺旋波破碎方式研究
Spiral wave breakup manner in the excitable system with early afterdepolarizations
理学报.2018, 67(9): 090501　http://dx.doi.org/10.7498/aps.67.20172505

基于Lorenz模型的集合预报与单一预报的比较研究
Comparative study of Lorenz model based ensemble forecasting and single forecasting
物理学报.2018, 67(7): 070501　http://dx.doi.org/10.7498/aps.67.20172144

反应扩散模型在图灵斑图中的应用及数值模拟
Application of reaction diffusion model in Turing pattern and numerical simulation
物理学报.2018, 67(5): 050503　http://dx.doi.org/10.7498/aps.67.20171791

一种具有隐藏吸引子的分数阶混沌系统的动力学分析及有限时间同步
Dynamic analysis and finite time synchronization of a fractional-order chaotic system with hidden attractors
物理学报.2018, 67(5): 050502　http://dx.doi.org/10.7498/aps.67.20172354

分数阶Willis环脑迟发性动脉瘤时滞系统混沌分析*

高飞† 胡道楠 童恒庆 王传美

(武汉理工大学理学院, 武汉 430070)

(2018 年 2 月 2 日收到; 2018 年 4 月 16 日收到修改稿)

在脑血动脉瘤的临床研究中, Willis 环脑动脉血管瘤系统 (Willis aneurysm system, WAS) 起着重要作用, 分数阶 WAS 尽管能进一步加深该系统的机理刻画, 但是不能描述原因不明的迟发性动脉瘤. 鉴于此, 本文提出分数阶 Willis 环脑迟发性动脉瘤时滞系统 (fractional Willis aneurysm system with time-delay, FWASTD) 并验证了其有效性; 利用时间序列图、相图、Poincaré 截面等证实了 FWASTD 的混沌特性; 研究时滞对于系统的重要生理参量的影响, 发现了血流阻力系数在时滞状态下对系统稳定的重要性; 根据分数阶时滞系统的稳定性理论, 设计相应线性控制器, 对 FWASTD 进行了有效控制, 同时也探讨了时滞系统的自同步控制. 本文完善了脑动脉瘤系统的理论基础.

关键词: 时滞, 分数阶, Willis 环脑动脉血管瘤系统, 混沌控制

PACS: 05.45.–a, 05.45.Gg, 05.45.Pq **DOI:** 10.7498/aps.67.20180262

1 引 言

Willis 环脑动脉血管瘤是一种高致死率疾病[1], 治疗过程中有可能会因基于植入血流导向装置[2–4]和支架联合弹簧圈[5]等治疗方式引起不明原因的迟发性动脉瘤破裂[6]. 动脉瘤的延迟性破裂危害巨大, 一旦出现将严重危及病人生命.

生理上动脉瘤破裂与否与血流速度密切相关, 故以血流速度为主要研究对象, 以血流动力学相关原理建立的脑动脉血管瘤动力学模型系统[7–10]在临床及理论研究中发挥了重要作用. 动脉瘤破裂表现为血流速度的巨大改变, 亦即出现“尖峰”, 虽然不是所有尖峰都会引起动脉瘤破裂, 但是没有尖峰意味着血流流速稳定, 病情稳定, 系统表现为稳定状态; 反之, 存在尖峰的系统则表示为混沌状态.

最初的 Willis 环脑动脉血管瘤系统 (Willis aneurysm system, WAS) 由 Austin[11] 利用实验模拟得到, 现有研究多以整数阶阻尼项脑动脉瘤系统[12]为基本模板, 对其进行混沌理论分析[13–15]和模型改进[16,17]. 在模型改进方面, 近年来主要有基于药物的整数阶 WAS 模型[16]和基于血液软物质性[18]、黏弹性[19]特性的分数阶 WAS[17]等. 但是, 对于不明原因引起的迟发性动脉瘤破裂, 也就是系统中尖峰延迟出现的情况 (即“时滞”), 上述模型并不能给出合理的描述和解释.

近年来, 分数阶微积分作为一种有用的数学工具被广泛应用于生物及医学方面[20,21]; 而时滞一直存在于现实中并影响着系统的动态, 故分数阶时滞系统引起了学者们的广泛研究和关注[22,23]. 时滞加入后, 会破坏原来系统的稳定性并影响着系统

* 国家自然科学基金重大研究计划 (批准号: 91324201)、中央高校基本科研业务费 (批准号: 2018IB017)、湖北省自然科学基金 (批准号: 2014CFB865) 和教育部人文社科青年基金项目 (批准号: 14YJCZH143) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: hgaofei@gmail.com

© 2018 中国物理学会 Chinese Physical Society http://wulixb.iphy.ac.cn

动力学行为, 使系统变得更加复杂, 而临床上脑动脉瘤里血管内情况亦是错综复杂. 现有WAS的相关机理及理论滞后于临床现实, 因此, 研究带有时滞的相关模型, 将在一定程度上为脑动脉血管瘤的临床诊断给出理论指导.

鉴于此, 本文构造了分数阶Willis环脑迟发性动脉瘤时滞系统(fractional Willis aneurysm system with time-delay, FWASTD)并对其进行了数值仿真和理论分析: 通过与非时滞分数阶Willis环脑动脉血管瘤系统(fractional Willis aneurysm system, FWAS)做对比, 验证了其时滞有效性; 用传统动力学方法验证系统混沌, 探究了时滞给系统带来的丰富动力学行为; 利用分数阶时滞稳定性原理实现了FWASTD的混沌控制和自同步混沌控制. 本文为脑动脉瘤系统研究和临床诊断提供了相应的理论基础和相关参考.

2 理论知识

本文中 ${}_{\alpha}\mathrm{D}_t^q$ 表示Caputo分数阶微分.

定义1[24] 设 α 是一个正实数, 令 $n-1\leqslant\alpha<n$, n 为一个正整数, 函数 $f(t)$ 定义在区间 $[a,b]$ 上, 称

$$ {}_{t_0}^{C}\mathrm{D}_t^q f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t\frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}\mathrm{d}\tau $$

为函数 $f(t)$ 的 α 阶Caputo分数阶导数, 其中 $t\in[a,b]$, $\Gamma(z)$ 表示Gamma函数.

定理1[25] 对于带初值的时滞系统

$$ \begin{cases} {}_{t_0}\mathrm{D}_t^{\alpha}x(t)=f\left(t,x(t),x(t-\tau)\right), & t\geqslant t_0,\\ x^{(k)}(t)=\varphi_k(t), & t_0-r\leqslant t\leqslant t_0, \end{cases} $$

函数 f 在点 $(t_0,\varphi(t_0),\varphi(t_0-\tau))$ 的某邻域内连续. 若 f 除 t 外所有变元满足Lipschitz条件, 初始函数 $\varphi_k(t)\in C[t_0-r,t_0]$, 则系统在 $t_0\leqslant t\leqslant t_0+h$ 上存在惟一连续解, h 充分小.

定理2[26] 对于分数阶时滞非线性系统, $\mathrm{D}^{\alpha}x(t)=f(x(t),x(t-\tau))$, 当分数阶微分阶次 $0<\alpha<1$, $f(x(t),x(t-\tau))$ 满足Lipschiz条件时, 若存在正定矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和半正定矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 对于任意的状态变量 $x(t)\in\mathbb{R}^N$, 分数阶时滞非线性系统仍然满足

$$ x^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\mathrm{D}_t^{\alpha}x(t)+x^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}x(t) - x^{\mathrm{T}}(t-\tau)\boldsymbol{Q}x(t-\tau)\leqslant 0, $$

则分数阶时滞非线性系统是Lyapunov稳定的.

3 FWASTD及其性质

3.1 建立FWASTD

从文献[17]可知, FWAS如下:

$$ \begin{cases} \mathrm{D}_*^{q_1}x=y,\\ \mathrm{D}_*^{q_2}y=F\cos(\omega t)-\mu y-\alpha x+\beta x^2-\gamma x^3,\\ 0<q_1,\ q_2<2, \end{cases} \tag{1} $$

其中, x 和 y 分别为血流变化率和变化率的加速度; F 和 μ 作为重要的生理参量, 分别代表脉冲压和血流阻力; ω, α,β,γ 是涉及到心率和血管的生理参量指数, 在病理上与动脉瘤状况息息相关[14]; q_1 和 q_2 作为分数阶次可以精细刻画脑动脉瘤系统.

由于临床中血流速度呈现上下波动、不断改变的状态, 说明血流加速度存在于血流运动变化中并起着推动血流速度改变的重要作用. 一旦血流有显著变化, 最开始的病变一定是从血流加速度开始, 故引言中提到的尖峰延迟的根源应在血流加速度上, 而表现在血流速度上. 取时滞因子为 τ, 将其加入到血流加速度中, 构造时滞系统FWASTD如下:

$$ \begin{cases} \mathrm{D}_*^{q_1}x=y(t-\tau),\\ \mathrm{D}_*^{q_2}y=F\cos(\omega t)-\mu y(t-\tau)-\alpha x\\ \qquad +\beta x^2-\gamma x^3,\quad 0<q_1+q_2<2. \end{cases} \tag{2} $$

3.2 FWASTD的有效性

本节用FWAS(系统(1))与FWASTD(系统(2))做对比来说明FWASTD 的时滞有效性. 根据参考文献[17], 取FWAS在混沌状态下的系数, 即: $\alpha=0.9$, $\beta=3$, $\gamma=2$, $F=0.1$, $\mu=0.1$, $\omega=1$, $q_1=1$, $q_2=0.95$, 对于时滞 τ, 尝试性地取为1, 设FWAS 与FWASTD 的血流速度分别为 x_1 和 x_2, 利用Matlab 2015b进行仿真, 用修正的Adams-Bashforth-Moulton方法[27,28]分别求解FWAS与FWASTD的血流速度, 得到两者血流速度的时间序列图如图1所示.

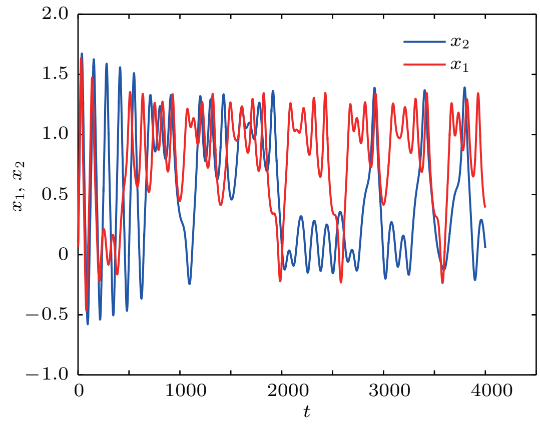

图 1 血流速度 x_1 和 x_2 的时间序列图

Fig. 1. Time course of blood speed x_1 and x_2.

从图 1 可以看出, x_1 和 x_2 在区间 $[700, 2000]$ 内几乎重合, 但从第 2000 个时间点左右开始, 相比于 x_1, x_2 的尖峰值出现延后, 延后的时间点大约为 800 个时间点, 从该时间点后, x_1 和 x_2 仅有部分重合. 从引言部分可知, 尖峰延后意味着动脉瘤有延迟性破裂的可能. 由此可见, FWASTD 可以描述不明原因引起的迟发性动脉瘤破裂, 也证明了 FWASTD 的时滞有效性.

3.3 FWASTD 的取值和仿真

3.3.1 FWASTD 的分数阶次取值

FWASTD 的分数阶次是整数阶次的推广. 分数阶算子本身具有记忆性而优于整数阶算子, 符合刻画系统生理病情的需要. 为了观察分数阶次取值对于系统状态的影响, 以期得到最佳刻画混沌状态的取值, 现分别取两组组合, 第一组组合中固定 q_1 取值分别为 0.8, 0.975 和 1, 得到关于 q_2 的分岔图和最大 Lyapunov 指数图; 第二组组合中固定 q_2 取值分别为 0.75, 0.95 和 1.15, 得到关于 q_1 的分岔图和最大 Lyapunov 指数图. 具体结果如图 2 所示, 其中, 图 2 (a)、图 2 (c)、图 2 (e) 对应第一组组合, 图 2 (b)、图 2 (d)、图 2 (f) 对应第二组组合, 其他参数参照 3.2 节进行取值.

图 2 (a)、图 2 (c)、图 2 (e) 中, 对于固定取值的 $q_1 \in [0.3, 1.3]$, q_2 的取值区间也在 $[0.3, 1.3]$; 图 2 (b)、图 2 (d)、图 2 (f) 中, 对于固定取值的 $q_2 \in [0.3, 1.3]$, q_1 的取值区间也在 $[0.3, 1.3]$. 而且从图 2 明显可以看出, $q_1 + q_2 < 2$. 分数阶取值不仅限于 1 以下, 故其为整数阶的推广. 相比整数阶系统[14], FWASTD 动力学行为表现得更为复杂, 更贴合脑动脉瘤错综复杂的状态.

从图 2 整体来看, 在 q_1 和 q_2 的所有组合里, 时滞系统 FWASTD 均通过倍周期分岔道路通往混沌, 分岔图形基本一致, 只是取值范围不同, 故可从图 2 得出描述混沌的最佳取值区间, 从而解决分数阶次取值问题. 图 2 (c) 和图 2 (d) 取值区间类似, 其最大值均逼近 1, 在分岔图中刚好互为固定参数, 本文选其组合 ($q_1 = 0.975$, $q_2 = 0.95$) 为下文所用.

3.3.2 FWASTD 的时滞取值

为了研究时滞对于系统 (2) 的影响, 给出关于时滞的分岔图, 目的是研究时滞可能的取值范围等问题, 为后续研究做铺垫. 取 $\alpha = 0.9$, $\beta = 3$, $\gamma = 2$, $F = 0.1$, $\mu = 0.1$, $\omega = 1$, $q_1 = 0.975$, $q_2 = 0.95$, 变动时滞参数 τ, 可以得到 $h\tau$ ($h = 0.05$ 为步长) 的分岔图, 如图 3 所示.

从图 3 (a) 可知, 随着时滞的增加, FWASTD 系统 (2) 从混沌到稳定. 为了更细致地研究时滞的区间段, 图 3 (a) 里混沌部分被放大得到图 3 (b), 从图 3 (b) 可以看出, 混沌主要集中在 $h\tau = 0.05$ 和 $h\tau = 0.1$ 这两个点上, 其他地方并未出现散点, 这说明 FWASTD 仿真的时滞点是离散点, 由此可以确定混沌状态下的时滞 τ 的具体数值分别为 $\tau = 1$ 和 $\tau = 2$, 即这两个值是产生系统混沌的关键. 之后进行的关于 FWASTD 仿真的取值点将从这两个点中选取.

3.3.3 FWASTD 的仿真

FWASTD 作为整数阶 WAS 的推广, 亦能刻画迟发性脑动脉瘤系统的混沌状态, 下面针对 FWASTD (系统 (2)) 进行仿真验证. 取 $\tau = 2$, $\alpha = 0.9$, $\beta = 3$, $\gamma = 2$, $F = 0.1$, $\mu = 0.1$, $\omega = 1$, $q_1 = 0.975$, $q_2 = 0.95$ 作为参数, 可以把 FWASTD (系统 (2)) 写为

$$\begin{cases} \mathrm{D}_*^{0.975} x = y\,(t-2)\,, \\ \mathrm{D}_*^{0.95} y = 0.1\cos t - 0.1 y\,(t-2) \\ \qquad - 0.9x + 3x^2 - 2x^3. \end{cases} \tag{3}$$

图 4 为系统 (3) 在时滞状态的时间序列图、相图和 Poincaré 截面.

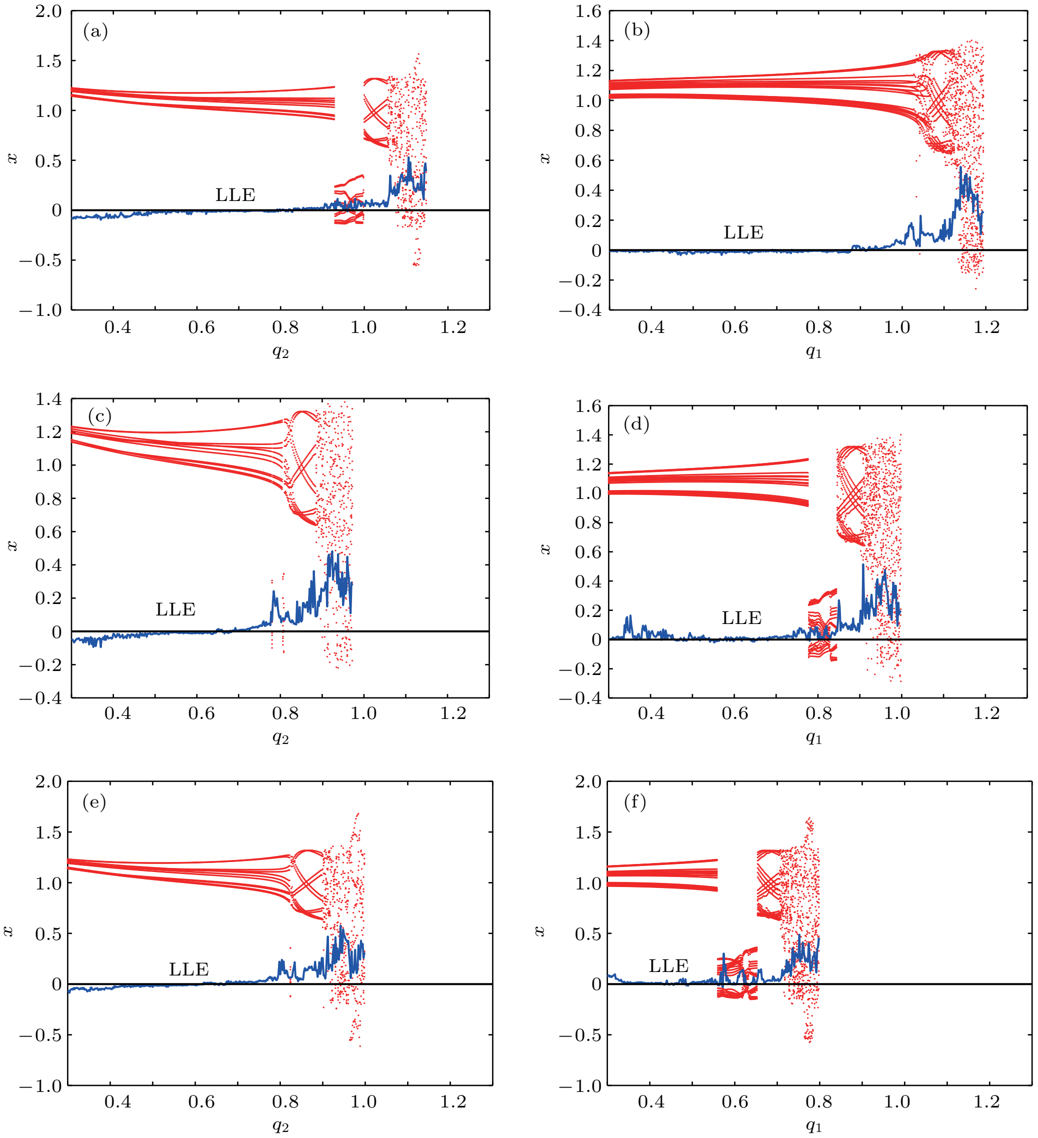

图2　系统在给定初值下, q_1 = (a) 0.8, (c) 0.975, (e) 1时 q_2 的分岔图和最大Lyapunov指数图以及 q_2 = (b) 0.75, (d) 0.95, (f) 1.15时 q_1 的分岔图和最大Lyapunov指数图

Fig. 2. With a given initial value, bifurcation and largest Lyapunov exponent (LLE) diagram of system versus q_2 when q_1 = (a) 0.8, (c) 0.975, (e) 1; bifurcation and largest Lyapunov exponent diagram of system versus q_1 when q_2 = (b) 0.75, (d) 0.95, (f) 1.15.

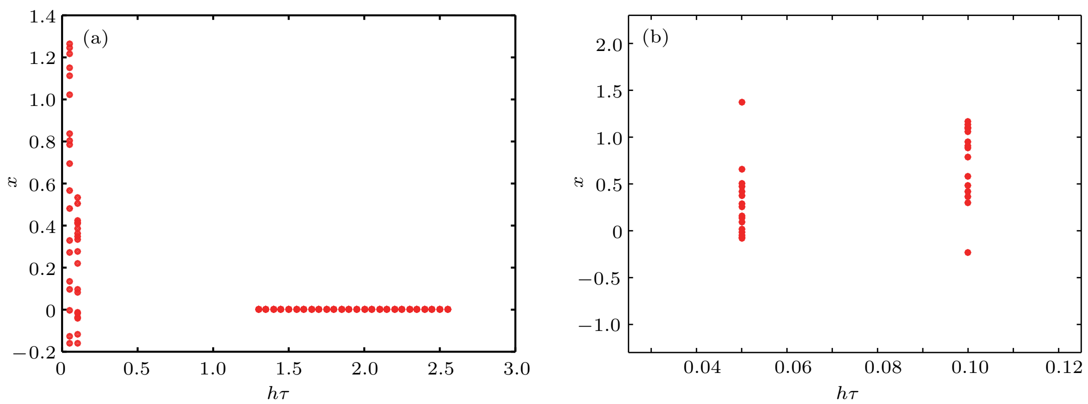

图3　时滞影响下系统的分岔图　(a) $h\tau \in [0, 3]$; (b) $h\tau \in [0.03, 0.12]$

Fig. 3. Bifurcation diagram of the system with time-delay: (a) $h\tau \in [0, 3]$; (b) $h\tau \in [0.03, 0.12]$.

从图4(a)和图4(b)可以看出, 血流速度紊乱, 频频出现尖峰, 说明系统呈现出混沌状态; 从图4(c)可以看出, 其轨迹无规律; 再结合图4(d)中系统(3)的Poincaré截面里具有层次结构且成片密集的点, 亦证明了系统(3)处于混沌状态, 说明阶次为分数的FWASTD也可刻画系统的混沌状态.

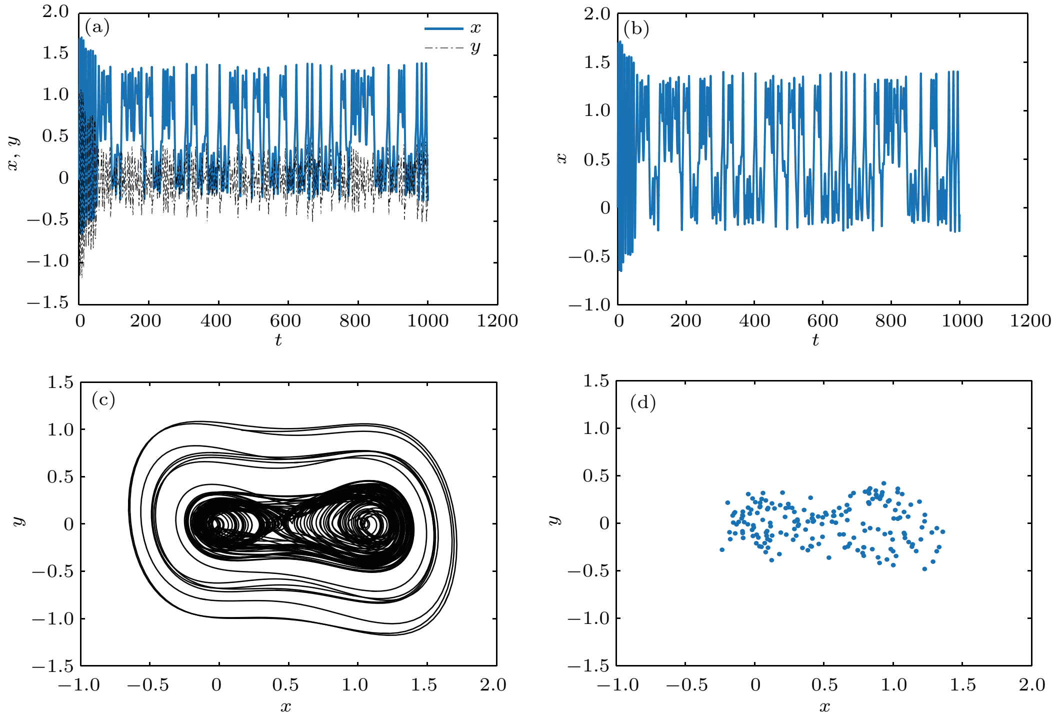

图4 系统在给定初值下, (a) x-t, y-t 的时间历程图, (b) x-t 的时间历程图, (c) 相图, (d) Poincaré 截面

Fig. 4. The system with a given initial value: (a) Time course of x-t, y-t; (b) time course of x-t; (c) phase diagram; (d) Poincaré section.

3.4 FWASTD中脉冲压和血流阻力系数对系统的影响

在系统(2)中分别把脉冲压F和血流阻力系数μ作为变量, 其他参数参照系统(3)保留不变, 得到关于脉冲压和血流阻力系数的分岔图和最大Lyapunov指数图, 如图5所示.

多数文献[14, 16, 17]把研究的重点放在生理参量脉冲压F上, 控制也是从脉冲压这一生理参量入手, 但从图5(a)分岔图结合最大Lyapunov指数可以看出, 其最大Lyapunov指数一直处于0以上, 系统持续处于混沌状态.

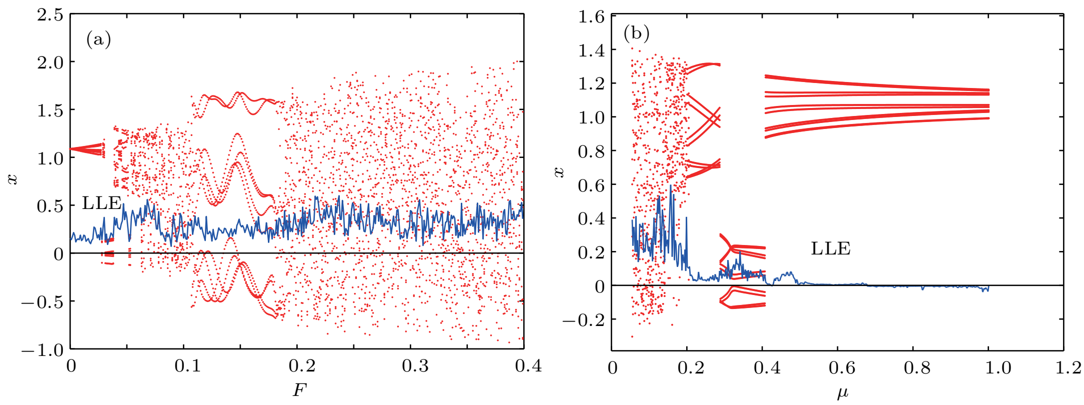

图5 (a) 系统随脉冲压F变化的分岔图和最大Lyapunov指数图; (b) 系统随血流阻力系数μ变化的分岔图和最大Lyapunov指数图

Fig. 5. (a) Bifurcation and largest Lyapunov exponent diagram of versus pulse pressure F; (b) bifurcation and largest Lyapunov exponent diagram of versus coefficient of blood flow damping μ.

从图5(b)分岔图可以看出,随着血流阻力μ的增大,系统从开始处于混沌状态逐渐变为分岔,直至稳定.结合μ的最大Lyapunov指数图可证实系统会随着血流阻力的增加而稳定,临床上亦有促进血栓形成来辅助治疗的记载[14],以上种种均说明时滞状态下研究血流阻力系数对于临床诊断具有重大意义.

4 FWASTD的控制

由于FWASTD的混沌状态表现为迟发性脑动脉瘤破裂,第一要义是避免动脉瘤破裂,控制混沌.故本节将根据分数阶时滞系统稳定性定理对FWASTD进行控制并实现同步控制.

4.1 时滞系统解的惟一性分析

下面将证明具有初值条件的FWASTD存在惟一解且满足Lipschitz 条件.

定理3 构造具有初值条件的系统如下:

$$\begin{cases} {}_0\mathrm{D}_t^q \boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{F}(t)+\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{X}(t-\tau))+\boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{X}(t)), \\ \boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{X}_0, \end{cases} \tag{4}$$

其中,

$$\boldsymbol{X}(t)=(x_1(t),x_2(t))^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{X}(t-\tau)=(x_1(t-\tau),x_2(t-\tau))^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{X}_0=(x_{10},x_{20})^{\mathrm{T}},$$

$$q=(q_1,q_2),\quad \boldsymbol{F}(t)=\begin{pmatrix}0\\ F\cos\omega t\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{X}(t-\tau))=\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -\mu\end{pmatrix}\boldsymbol{X}(t-\tau)\right) =\begin{pmatrix}x_2(t-\tau)\\ -\mu x_2(t-\tau)\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{X}(t))=\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ -\alpha+\beta x_1(t)-\gamma x_1^2(t) & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{X}(t)\right) =\begin{pmatrix}0\\ -\alpha x_1(t)+\beta x_1^2(t)-\gamma x_1^3(t)\end{pmatrix},$$

则含有初值条件的FWASTD (4)存在惟一解.

证明 取$|\cdot|$和$\|\cdot\|$分别为向量范数和矩阵范数.令$\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{X}(t))=\boldsymbol{F}(t)+\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{X}(t-\tau))+\boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{X}(t))$.对于$\forall\delta>0$,区间$[\boldsymbol{X}_0-\delta,\boldsymbol{X}_0+\delta]$连续并有界.取$\forall\boldsymbol{X}(t),\boldsymbol{Y}(t)\in[\boldsymbol{X}_0-\delta,\boldsymbol{X}_0+\delta]$,有

$$\begin{aligned} &|\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{X}(t))-\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{Y}(t))|\\ \leqslant{}& |\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{X}(t-\tau))-\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{Y}(t-\tau))|\\ &+|\boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{X}(t))-\boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{Y}(t))|. \end{aligned}$$

对于$|\boldsymbol{F_2}(\boldsymbol{X}(t))-\boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{Y}(t))|$,有

$$\begin{aligned} &|\boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{X}(t))-\boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{Y}(t))|\\ ={}&\left|\begin{pmatrix}0\\ -\alpha(x_1-y_1)+\beta(x_1^2-y_1^2)-\gamma(x_1^3-y_1^3)\end{pmatrix}\right|\\ \leqslant{}&|-\alpha(x_1-y_1)+\beta(x_1^2-y_1^2)-\gamma(x_1^3-y_1^3)|\\ \leqslant{}&|(x_1-y_1)|\\ &\cdot\left|-\alpha+\beta(x_1+y_1)-\gamma(x_1^2+x_1y_1+y_1^2)\right|\\ \leqslant{}&|(x_1-y_1)|\\ &\cdot\left|-\alpha+2\beta(|\boldsymbol{X}_0|+\delta)+\gamma(|\boldsymbol{X}_0|+\delta)^2\right|\\ \leqslant{}&|\boldsymbol{X}(t)-\boldsymbol{Y}(t)|\\ &\cdot\left|-\alpha+2\beta(|\boldsymbol{X}_0|+\delta)+\gamma(|\boldsymbol{X}_0|+\delta)^2\right|. \end{aligned}$$

取$L_1=\left|-\alpha+2\beta(|\boldsymbol{X}_0|+\delta)+\gamma(|\boldsymbol{X}_0|+\delta)^2\right|$,则因区间$[\boldsymbol{X}_0-\delta,\boldsymbol{X}_0+\delta]$连续有界,$\alpha,\beta,\gamma$是有范围的生理参数,因此$L_1$是个常数,于是对于$|\boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{X}(t))-\boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{Y}(t))|$有

$$|\boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{X}(t))-\boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{Y}(t))|\leqslant L_1\,|\boldsymbol{X}(t)-\boldsymbol{Y}(t)|.$$

而对于$|\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{X}(t-\tau))-\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{Y}(t-\tau))|$,有

$$\begin{aligned} &|\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{X}(t-\tau))-\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{Y}(t-\tau))|\\ ={}&\left|\begin{pmatrix}x_2(t-\tau)\\ -\mu x_2(t-\tau)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}y_2(t-\tau)\\ -\mu y_2(t-\tau)\end{pmatrix}\right|\\ ={}&\left|\begin{pmatrix}1\\ -\mu\end{pmatrix}\right|\cdot|x_2(t-\tau)-y_2(t-\tau)|\\ \leqslant{}&\left|\begin{pmatrix}1\\ -\mu\end{pmatrix}\right|\cdot|X(t-\tau)-Y(t-\tau)|. \end{aligned}$$

设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1\\ -\mu\end{pmatrix}$,有

$$\begin{aligned} &|\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{X}(t-\tau))-\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{Y}(t-\tau))|\\ \leqslant{}&\|\boldsymbol{A}\|\cdot|\boldsymbol{X}(t-\tau)-\boldsymbol{Y}(t-\tau)|. \end{aligned}$$

取 $L = \max\{L_1, \|\boldsymbol{A}\|\}$ 得

$$|\boldsymbol{G}(t, \boldsymbol{X}(t)) - \boldsymbol{G}(t, \boldsymbol{Y}(t))| \\ \leqslant L(|\boldsymbol{X}(t) - \boldsymbol{Y}(t)| + |\boldsymbol{X}(t-\tau) - \boldsymbol{Y}(t-\tau)|).$$

故 $\boldsymbol{G}(t, \boldsymbol{X}(t))$ 除 t 外所有变元满足 Lipschitz 条件, 根据已知条件 $\boldsymbol{G}(t, \boldsymbol{X}(t))$ 在给定初值的邻域内连续, 所以 $\boldsymbol{G}(t, \boldsymbol{X}(t))$ 满足定理1, 即具有初值条件的FWASTD存在惟一解. 定理3证毕.

4.2 FWASTD的混沌控制

取和系统(3)相同的参数, 得到有初值条件的FWASTD如下:

$$\begin{cases} \mathrm{D}_*^{0.975} x = y\,(t-2)\,, \\ \mathrm{D}_*^{0.95} y = 0.1\cos t - 0.1 y\,(t-2) \\ \qquad - 0.9x + 3x^2 - 2x^3, \\ x(0) = 0, y(0) = 1. \end{cases} \tag{5}$$

从图4的仿真结果可以看出相图轨线无规律, Poincaré截面具有一定层次结构和形状, 因此具有初值条件的系统(5)不处于稳定状态.

对系统(5)设计线性控制器:

$$\begin{cases} \mathrm{D}_*^{0.975} x = y\,(t-2) - k_1 x, \\ \mathrm{D}_*^{0.95} y = 0.1\cos t - 0.1 y\,(t-2) \\ \qquad - 0.9x + 3x^2 - 2x^3 + k_2 y(t-2) \\ \qquad - k_3\Big(y + \dfrac{1}{10k_3}\Big), \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 1. \end{cases} \tag{6}$$

定理4　当 $k_1 \geqslant 0.5$, $0 \leqslant k_2 \leqslant 0.9$, $k_3 \geqslant 1.95$ 时, 系统(5)稳定.

证明　取正定矩阵 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 和半正定矩阵 $\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 构造正定函数:

$$\begin{aligned} & x^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\mathrm{D}_t^{\alpha} x(t) + x^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}x(t) - x^{\mathrm{T}}(t-\tau)\boldsymbol{Q}x(t-\tau) \\ = {} & xy(t-\tau) - k_1 x^2 + 0.1y\cos t - 0.1yy\,(t-\tau) - 0.9xy + 3x^2 y - 2x^3 y \\ & + k_2 yy\,(t-\tau) - k_3 y^2 - 0.1y + y^2 - y^2\,(t-\tau) \\ \leqslant {} & \frac{x^2 + y^2(t-\tau)}{2} - k_1 x^2 + \Big(\frac{1}{10} + k_2\Big)\frac{y^2 + y^2\,(t-\tau)}{2} + \frac{9}{10}\frac{x^2 + y^2}{2} \\ & + (1 - k_3)\,y^2 - y^2\,(t-\tau) + 3\frac{x^4 + y^2}{2} - 2\frac{x^4 + x^2 y^2}{2} \\ \leqslant {} & \Big(\frac{1}{2} - k_1\Big)x^2 + \Big(\frac{k_2}{2} - \frac{9}{20}\Big)y^2\,(t-\tau) + \Big(\frac{3}{2} + \frac{k_2}{2} - k_3\Big)y^2 - \frac{y^4}{2}. \end{aligned}$$

若取 $k_1 \geqslant 0.5$, $0 \leqslant k_2 \leqslant 0.9$, $k_3 \geqslant 1.95$, 则有

$$x^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\mathrm{D}_t^{\alpha} x(t) + x^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}x(t) \\ - x^{\mathrm{T}}(t-\tau)\boldsymbol{Q}x(t-\tau) \leqslant 0.$$

根据定理2, 系统(6)是Lyapunov稳定的.

取 $k_1 = 0.5$, $k_2 = 0.9$, $k_3 = 1.95$, 系统(6)仿真结果如图6所示.

从图6(a)和图6(b)可以看出, x, y 随着时间增长在 $[-0.2, 0.1]$ 波动, 仿真结果证明, 该控制器可以把FWASTD控制在一个比较稳定的范围之内, 虽然有周期性波动, 但是波动振幅小(上下不超过0.1), 满足混沌控制需要. 图6(c)和图6(d)也说明了具有线性控制器的FWASTD处于比较稳定的状态, 体现在实际中表现为血管中血流速度和加速度基本保持稳定, 病情处于可控状态. 近年来, 在血管内使用血流导向装置成为治疗脑动脉瘤的一种主流办法. 血流导向装置可以通过改变血流速度和加速度等血流动力学因子来改善动脉瘤内部的血流情况从而达到治疗疾病的目的, 但现有的血流导向装置在设计和材料使用上仍有缺陷[29], 本文为其提供了相关的设计参考.

4.3 FWASTD的同步控制

下面考虑FWASTD同步控制, 把FWAS作为驱动系统:

$$\begin{cases} \mathrm{D}_*^{q_1} x = y, \\ \mathrm{D}_*^{q_2} y = F\cos(\omega t) - \mu y - \alpha x + \beta x^2 - \gamma x^3, \\ \quad 0 < q_1, \quad q_2 < 2. \end{cases}$$

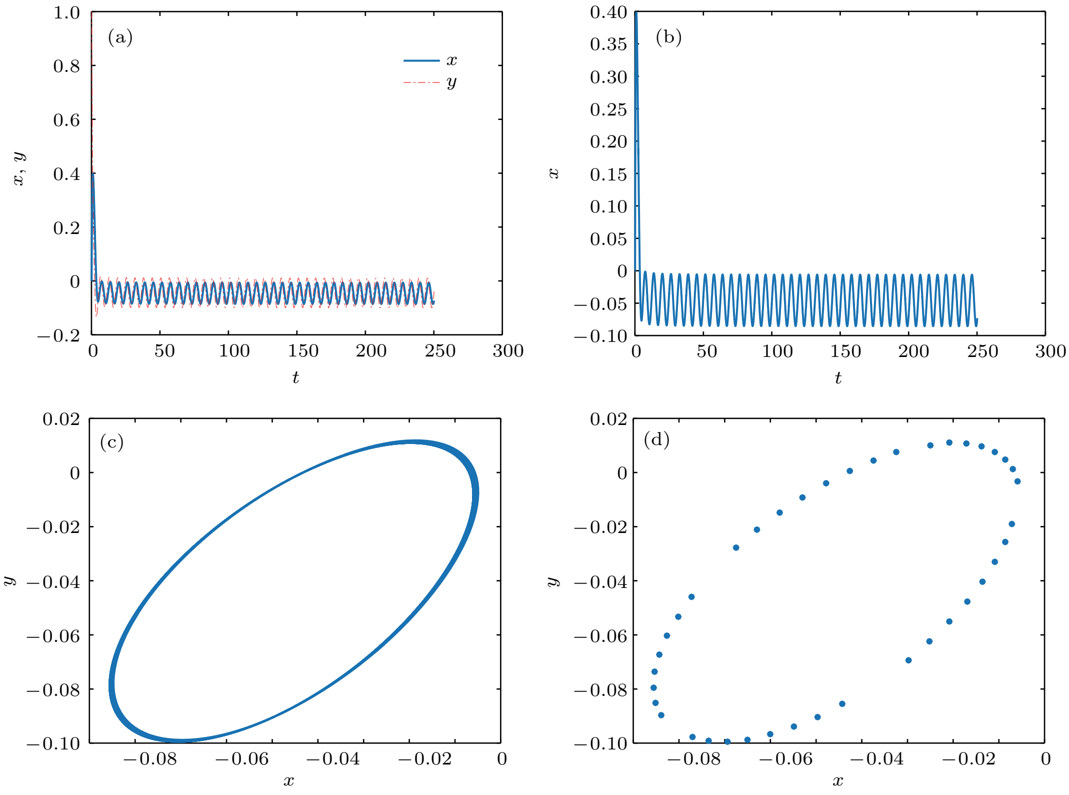

图6 (a) x-t 曲线, y-t 曲线; (b) 时间历程; (c) 相图; (d) Poincaré 截面

Fig. 6. (a) Curves of x-t and y-t; (b) time course; (c) phase diagram; (d) Poincaré section.

把带控制器的FWASTD作为响应系统:

$$\begin{cases} \mathrm{D}_*^{q_1} x = y(t-\tau) + u_1, \\ \mathrm{D}_*^{q_2} y = F\cos(\omega t) - \mu y(t-\tau) - \alpha x \\ \qquad + \beta x^2 - \gamma x^3 + u_2, \\ \qquad 0 < q_1 + q_2 < 2. \end{cases}$$

误差系统为

$$\begin{cases} \mathrm{D}_*^{q_1} e_1 = y(t-\tau) - y(t) + u_1, \\ \mathrm{D}_*^{q_2} e_2 = -\mu(y(t-\tau) - y(t)) - \alpha(x_2 - x_1) \\ \qquad + \beta(x_2^2 - x_1^2) - \gamma(x_2^3 - x_1^3) + u_2, \\ \qquad 0 < q_1 + q_2 < 2. \end{cases}$$

令 $e_i = u_i(t) - x_i(t)$, $e_i(t-\tau) = u_i(t-\tau) - x_i(t)$, $i = 1, 2$, 取控制器 $\boldsymbol{u} = [u_1, u_2]^{\mathrm{T}}$, 其中 $u_1 = k_1 e_1$, $u_2 = k_2 e_2 + k_3 e_2(t-\tau) + \alpha(x_2 - x_1) - \beta(x_2^2 - x_1^2) + \gamma(x_2^3 - x_1^3)$, 整理后可以得到FWASTD和FWAS之间的自时滞误差系统为

$$\begin{cases} \mathrm{D}^{\alpha_1} e_1 = e_2(t-\tau) + k_1 e_1, \\ \mathrm{D}^{\alpha_2} e_2 = (k_3 - \mu) e_2(t-\tau) + k_2 e_2. \end{cases}$$

取正定矩阵 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 和半正定矩阵 $\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 构造正定函数为

$$\begin{aligned} & e^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\mathrm{D}_t^{\alpha} e(t) + e^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}e(t) \\ & - e^{\mathrm{T}}(t-\tau)\boldsymbol{Q}e(t-\tau) \\ = {} & k_1 e_1^2(t) + (k_2+1)e_2^2(t) + e_1(t)e_2(t-\tau) \\ & + (k_3-\mu)e_2(t)e_2(t-\tau) - e_2^2(t-\tau) \\ \leqslant {} & \left(k_1 + \frac{1}{2}\right)e_1^2(t) + \left(k_2 + 1 + \frac{|k_2-\mu|}{2}\right)e_2^2(t) \\ & + \left(\frac{|k_3-\mu|-1}{2}\right)e_2^2(t-\tau). \end{aligned}$$

若取 $\mu = 0.1$, $k_1 \leqslant -0.5$, $k_2 \leqslant -2.1$, $0 \leqslant k_3 \leqslant 1.1$, 误差系统满足 $e^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\mathrm{D}_t^{\alpha} e(t) + e^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}e(t) - e^{\mathrm{T}}(t-\tau)\boldsymbol{Q}e(t-\tau) \leqslant 0$, 根据定理2, 自时滞误差系统是Lyapunov稳定的, 即FWASTD和FWAS之间可以实现自时滞同步.

数值仿真验证时, 取 $\tau = 2$, $\alpha = 0.9$, $\beta = 3$, $\gamma = 2$, $F = 0.1$, $\omega = 1$, $q_1 = 0.975$, $q_2 = 0.95$, $\mu = 0.1$, $k_1 = -0.5$, $k_2 = -2.1$, $k_3 = 1.1$, t 表示时间, 误差系统仿真结果如图7所示.

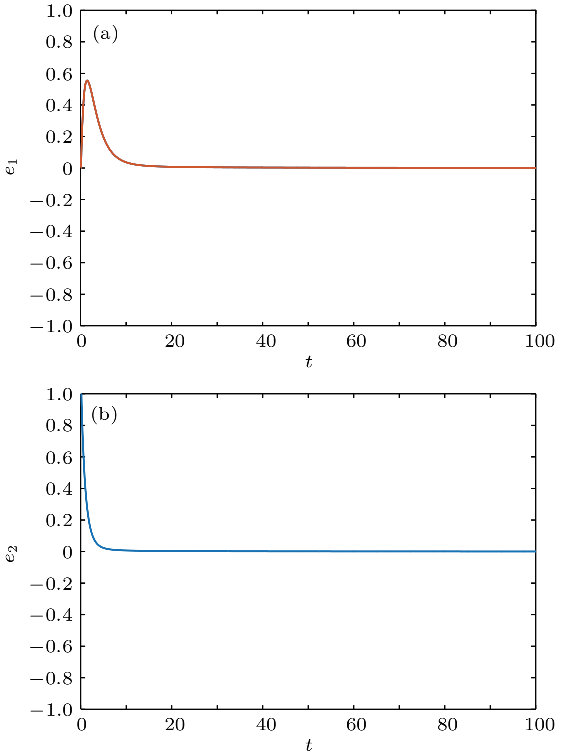

图 7 (a) e_1 随时间的变化; (b) e_2 随时间的变化
Fig. 7. (a) Curve of e_1 with time change; (b) curve of e_2 with time change.

从图 7 (a) 和图 7 (b) 可以看出, 其误差逐渐趋于 0, 由此可见, FWASTD 和 FWAS 可以实现同步. 实际治疗中, 由于许多生理参数无法确定等原因, 时滞系统 FWASTD 无法得到像 4.2 节那样精准的混沌控制, 然而从自同步控制过程可以看出, 其控制参数主要依赖于血流阻力参数, 控制变量少且易得, 而 FWAS 可以通过脉冲药物等进行控制, 操作简单可控, 更符合实际.

5 结 论

鉴于治疗过程中有可能会因治疗方式等不明原因引起迟发性动脉瘤破裂的实际情况, 本文提出 FWASTD, 经过与非时滞系统的对比, 说明了时滞的有效性, 通过理论证明和数值仿真, 论证了其丰富的混沌性质并分析了时滞对系统造成的影响. 其中尤为重要的是, 研究表明 FWASTD 系统在一定条件下随血流阻力的增加而稳定, 与临床上的促进血栓形成来辅助治疗 [10] 形成较为明确的对应关系, 说明血流阻力系数研究对于临床诊断具有一定意义.

同时, 利用分数阶时滞系统的稳定性理论设计了合适的线性控制器以对 FWASTD 进行有效控制及同步控制. 本文提出的 FWASTD 对脑动脉瘤里的时滞研究提供了理论基础, 在一定程度上为脑动脉血管瘤的临床诊断和治疗提出了理论指导.

参考文献

[1] Lan Q 2015 *Chin. J. Neurosurg.* **31** 541 (in Chinese) [兰青 2015 中华神经外科杂志 **31** 541]

[2] Liang S K, Jiang C H 2016 *Chin. J. Neurosurg.* **32** 1071 (in Chinese) [梁士凯, 姜除寒 2016 中华神经外科杂志 **32** 1071]

[3] Liu A H 2017 *Chin. J. Stroke* **12** 850 (in Chinese) [刘爱华 2017 中国卒中杂志 **12** 850]

[4] Fiorella D, Woo H H, Albuquerque F C, Nelson P K 2008 *Neurosurgery* **62** 1115

[5] Liu J, Jing L K, Wang C, Paliwal N, Wang S Z, Zhang Y, Xiang J P, Siddiqui A H, Meng H, Yang X J 2016 *J. Neurointerv. Surg.* **8** 1140

[6] Zhang Y, Yang X J 2016 *Chin. J. Cerebrovasc. Dis.* **7** 372 (in Chinese) [张莹, 杨新健 2016 中国脑血管病杂志 **7** 372]

[7] Radaelli A G, Augsburger L, Cebral J R, Ohta M, Rufenacht D A, Balossino R, Benndorf G, Hose D R, Marzo A, Metcalfe R, Mortier P, Mut F, Reymond P, Socci L, Verhegghe B, Frangi A F 2008 *J. Bio.* **41** 2069

[8] Connolly J E S, Rabinstein A A, Carhuapoma J R, Derdeyn C P, Dion J, Higashida R T, Hoh B L, Kirkness C J, Naidech A M, Ogilvy C S, Patel A B, Thompson B G, Vespa P, Council A H A S, Int C C R, Nursing C C, Anesthes C C S, Cardiology C C 2012 *Stroke* **43** 1711

[9] Gonzalez C F, Cho Y I, Ortega H V, Moret J 1992 *Am. J. Neuroradiol.* **13** 181

[10] Dai X, Qiao A K 2016 *J. Med. Biomech.* **31** 461 (in Chinese) [戴璇, 乔爱科 2016 医用生物力学 **31** 461]

[11] Austin G 1971 *Math. Biosci.* **11** 163

[12] Cao J D, Liu T Y 1993 *J. Biomath.* **8** 9 (in Chinese) [曹进德, 刘天一 1993 生物数学学报 **8** 9]

[13] Yang C H, Zhu S M 2003 *Acta Sci. Nat. Univ. Sunyatseni* **43** 1 (in Chinese) [杨翠红, 朱思铭 2003 中山大学学报 (自然科学版) **43** 1]

[14] Gu Y F, Xiao J 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 160501 (in Chinese) [古元凤, 肖剑 2014 物理学报 **63** 160501]

[15] Li Y M, Yu S 2008 *J. Biomath.* **23** 235 (in Chinese) [李医民, 于霜 2008 生物数学学报 **23** 235]

[16] Sun M H 2016 *M. S. Thesis* (Chongqing: University of Chongqing) (in Chinese) [孙梦晗 2016 硕士学位论文 (重庆: 重庆大学)]

[17] Gao F, Li T, Tong H Q, Ou Z L 2016 *Acta Phys. Sin.* **65** 230502 (in Chinese) [高飞, 李腾, 童恒庆, 欧卓玲 2016 物理学报 **65** 230502]

[18] Lu K Q, Liu J X 2009 *Physics* **38** 453 (in Chinese) [陆坤权, 刘寄星 2009 物理 **38** 453]

[19] Zhu K Q 2009 *Mech. Pract.* **31** 104 (in Chinese) [朱克勤 2009 力学与实践 **31** 104]

[20] Ahmed E, El-Sayed A M A, El-Saka H A A 2007 *J. Math. Anal. Appl.* **325** 542

[21] Dokoumetzidis A, Macheras P 2009 *J. Pharmacokinet. Pharmacodyn.* **36** 165

[22] Liang Y, Wang X Y 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 018901 (in Chinese) [梁义, 王兴元 2013 物理学报 **62** 018901]

[23] Ouyang C, Lin W T, Cheng R J, Mo J Q 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 060201 (in Chinese) [欧阳成, 林万涛, 程荣军, 莫嘉琪 2013 物理学报 **62** 060201]

[24] Podlubny I 1999 *Fractional Differential Equations* (New York: Academic Press) p41

[25] Huo R, Wang X L, Wu G R 2014 *J. Inner Mongolia Agric. Univ. (Nat. Sci. Edn.)* **35** 167 (in Chinese) [霍冉, 王晓丽, 吴国荣 2014 内蒙古农业大学学报 **35** 167]

[26] Hu J, Lu G, Zhang S, Zhao L 2015 *Commun. Nonlinear Sci.* **20** 905

[27] Bhalekar S, Daftardar-Gejji V 2010 *Commun. Nonlinear Sci.* **15** 2178

[28] Diethelm K, Neville F 2002 *Nonlinear Dynam.* **29** 3

[29] Guan M, Shi H, Zhang G 2017 *Chin. J. Cerebrovasc Dis.* **14** 46 (in Chinese) [关明浩, 史怀璋, 张广 2017 中国脑血管病杂志 **14** 46]

Chaotic analysis of fractional Willis delayed aneurysm system*

Gao Fei† Hu Dao-Nan Tong Heng-Qing Wang Chuan-Mei

(*School of Science, Wuhan University of Technology, Wuhan 430070, China*)

(Received 2 February 2018; revised manuscript received 16 April 2018)

Abstract

The dynamic system of Willis aneurysm (WAS) has played an important role in theoretical and clinical research of cerebral aneurysms. Fractional differential is an effective mathematical tool that can describe the cerebral aneurysm system accurately and profoundly. However, the existing fractional Willis aneurysm system (FWAS) cannot describe the delayed aneurysm rupture of unknown cause in reality. Therefore, by introducing the time-delay factors into the existing fractional Willis aneurysm system as a rational extension, a new fractional Willis aneurysm system with time-delay (FWASTD) is proposed in this paper.

First, FWASTD is introduced in the context, and the comparison of time sequences map between FWAS and FWASTD proves that FWASTD is feasible in the depiction of time-delay situations. The bifurcation diagram and the largest Lyapunov exponent diagram as well as the phase diagram of fractional order also confirm the chaotic characteristics of the FWASTD.

Then, the classical analysis methods in chaotic dynamics, such as time series diagram, phase diagram and Poincaré section are used to analyze FWASTD in detail. When studying the diagrams of time-delay factors for the important physiological parameters of the system, we find that blood flow resistance coefficient can exert a remarkable effect on the system stability under time-delay. Besides, the experimental results show that the FWASTD becomes stable with the increase of blood flow resistance under a certain condition. Usually, promoting thrombosis is a kind of adjunctive therapy in clinic for cerebral aneurysm. The results of this part can accord with the treatment in clinic and has great significance in clinical diagnosis.

Finally, as the chaotic state of the time-delay system indicates that cerebral aneurysm is in a dangerous situation, the primary task of the control for this new system is to achieve stability rather than synchronization. The stability theory of fractional time-delayed system is adopted in a strict proof of the uniqueness of solution for the FWASTD. To make FWASTD stable, a corresponding linear controller is designed based on the stability theory of fractional order delay system. The numerical simulation indicates that the linear controller can control the blood flow velocity and speed up the periodic fluctuation within a small range, which illustrates that it is not easy to rupture the cerebral aneurysm. We also make self-synchronization control between FWASTD and FWAS just in case that the coefficients of the system are not clear.

The research results in this paper, to some extent, can serve as theoretical guidance for the clinical diagnosis and the treatment of aneurysm.

Keywords: time delay, fraction order, Willis aneurysm system, chaos control

PACS: 05.45.–a, 05.45.Gg, 05.45.Pq **DOI:** 10.7498/aps.67.20180262

* Project supported by the Major Research Plan of the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 91324201), the Fundamental Research Funds for the Central Universities, China (Grant No. 2018IB017), the Natural Science Foundation of Hubei Province, China (Grant No. 2014CFB865), and the Humanity and Social Science Youth foundation of Ministry of Education of China (Grant No. 14YJCZH143).

† Corresponding author. E-mail: hgaofei@gmail.com