

Lipkin-Meshkov-Glick 模型中的能级劈裂与宇称振荡研究

喻益湘 宋凝芳 刘伍明

Energy level splitting and parity oscillation in Lipkin-Meshkov-Glick model

Yu Yi-Xiang Song Ning-Fang Liu Wu-Ming

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, **67**, 182101 (2018) DOI: 10.7498/aps.67.20181069

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.67.20181069>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2018/V67/I18>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

[Lipkin-Meshkov-Glick 模型中的能级劈裂与宇称振荡研究](#)

Energy level splitting and parity oscillation in Lipkin-Meshkov-Glick model

物理学报.2018, 67(18): 182101 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.67.20181069>

[具有面内四极磁场的旋转玻色-爱因斯坦凝聚体的基态结构研究](#)

Ground state of a rotating Bose-Einstein condensate with in-plane quadrupole field

物理学报.2017, 66(13): 130305 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.130305>

[Hubbard 模型中的相位弦效应与交互 Chern-Simons 理论](#)

Phase string effect and mutual Chern-Simons theory of Hubbard model

物理学报.2015, 64(21): 217101 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.217101>

Lipkin-Meshkov-Glick模型中的能级劈裂 与宇称振荡研究*

喻益湘^{1)2)†} 宋凝芳¹⁾ 刘伍明²⁾

1)(北京航空航天大学仪器科学与光电工程学院, 光电技术研究所, 北京 100191)

2)(中国科学院物理研究所, 北京凝聚态物理国家研究中心, 北京 100190)

(2018年5月31日收到; 2018年6月12日收到修改稿)

Lipkin-Meshkov-Glick (LMG) 模型原本描述的是核物理系统, 然而近年来, 人们发现它广泛存在于凝聚态物理、量子信息、量子光学中, 因此对其研究兴趣正在升温. 本文采用精确对角化的方法以及量子微扰理论计算和分析了 LMG 模型在费米子数量为有限 N 时的能谱结构. 在 $U(1)$ 极限下给出它的能级精确解, 发现其相互交错成渔网结构. 而离开 $U(1)$ 极限, 系统的能级总是奇偶宇称成对地分组, 形成束缚态, 并且宇称会发生振荡, 给出了宇称交叉点的临界塞曼场的位置. 而达到 Z_2 极限, 系统能级则在零塞曼场附近形成劈裂, 解析地计算了这些能隙与塞曼场之间关系, 并发现对于奇数和偶数的 N , 各能态宇称的行为有所差别, 具体而言, 奇数 N 系统各态在零塞曼场处会发生宇称改变, 而偶数 N 不会.

关键词: 宇称振荡, 能级劈裂, 微扰理论

PACS: 21.45.-v, 21.60.Fw

DOI: 10.7498/aps.67.20181069

1 引言

Lipkin-Meshkov-Glick (LMG) 模型最初在核物理中被提出, 用来描述核子的集体行为^[1-3]. 近年来, 这个模型也被用来描述具有无穷维量子自旋系统的统计物理^[4]、腔量子电动力学系统^[5]等. 1999年, Pan 和 Draayer^[6]用基于 Bethe ansatz 的无穷维代数方法证明了这个模型是可积的, 并找到了其在某些极限下的解析解. 另外, LMG 模型在热力学极限下的能谱也具有丰富的结构^[7,8]. 这些研究对了解和应用 LMG 模型是非常重要的, 但是 Bethe ansatz 方法给出的结果对于计算很多物理量比如关联函数是没有用的, 另外它们都是基于热力学极限下的多体理论, 而有限尺寸效应在能谱中会呈现出多体系统没有的特征. 最近文献^[9]则对没

有自旋交换相互作用时的有限尺寸 LMG 模型做了一些解析工作, 其中给出了粒子数为 2, 3, 4 时的能级表达式.

本文研究了包含 N 个费米子的有限尺寸的 LMG 模型, 为了获得它的解, 首先将其映射到角动量空间, 变成一个约化的 LMG 模型, 其维度从 2^N 变成 $2J + 1$. 在总自旋守恒的 $U(1)$ 极限下可以轻易地将哈密顿量对角化, 其能谱呈网状结构; 在 Z_2 极限下, 能级解析解较复杂, 本文采用了量子微扰理论来研究在零塞曼场附近形成束缚态的子能级之间的劈裂行为; 而对于更一般的情况, 各束缚态将会发生宇称振荡行为, 本文也给出了宇称交叉点的临界塞曼场. 同时本文还使用精确对角化获得了能谱的数值结果, 与解析结果形成对照. 本文还通过调节相互作用参数呈现了系统从 $U(1)$ 到 Z_2 的渡越.

* 国家重点研发计划 (批准号: 2016YFA0301500)、国家自然科学基金 (批准号: 11434015, 61227902, 11611530676) 和中国科学院战略性先导科技专项 (B 类) (批准号: XDB01020300, XDB21030300) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: yyxxx@buaa.edu.cn

2 LMG 模型

LMG 模型描述的是 N 个费米子的系统, 它们分布在两个 N 重简并的能级上, 两能级之间的能量差为 h (下文会看到, 这个能量差有塞曼磁场的意义). 可以用自旋来描述这两个能级, 分别记为 \uparrow 和 \downarrow , 而用 i 来标记 N 重简并中的第 i 个简并态, 其中 $i = 1, 2, \dots, N$. 考虑两类二体相互作用, 一个是两个能级之间成对的不改变各自简并态的序号的散射, 即一对下(上)能级的粒子散射成一对上(下)能级的粒子, 或者以自旋的语言来描述, 即一对自旋 $\downarrow(\uparrow)$ 的费米子散射成一对自旋 $\uparrow(\downarrow)$ 的费米子, 所以这一项引起自旋 z 分量不守恒, 用 V 来标记其强度; 另一个是自旋交换相互作用, 是角动量守恒的, 用 W 来标记其作用强度. 这样, 整个系统的哈密顿量表达为

$$H = \frac{h}{2} \sum_{i=1}^N (c_{i\uparrow}^\dagger c_{i\uparrow} - c_{i\downarrow}^\dagger c_{i\downarrow}) - \frac{V}{2} \sum_{i,j} (c_{i\uparrow}^\dagger c_{j\uparrow}^\dagger c_{j\downarrow} c_{i\downarrow} + \text{h.c.}) - \frac{W}{2} \sum_{i,j} (c_{i\uparrow}^\dagger c_{j\downarrow}^\dagger c_{j\uparrow} c_{i\downarrow} + \text{h.c.}), \quad (1)$$

式中, $c_{i\sigma}$ ($c_{i\sigma}^\dagger$) 是处于简并态 i 上的自旋为 σ 的费米子湮没(产生)算符, 满足费米子对易关系 $\{c_{i\sigma}, c_{j\sigma'}^\dagger\} = \delta_{ij} \delta_{\sigma\sigma'}$. 对于任何量子数 i 都有上下两个能级, 所以系统对应的 Hilbert 空间维度为 2^N . 通常可以引入如下的角动量算符

$$J_+ = \sum_{i=1}^N c_{i\uparrow}^\dagger c_{i\downarrow}, \quad J_- = \sum_{i=1}^N c_{i\downarrow}^\dagger c_{i\uparrow}, \\ J_z = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (c_{i\uparrow}^\dagger c_{i\uparrow} - c_{i\downarrow}^\dagger c_{i\downarrow}), \quad (2)$$

它们满足角动量的对易关系 $[J_z, J_\pm] = \pm J_\pm$, $[J_+, J_-] = 2J_z$. (1) 式可以重新写成

$$H = hJ_z - \frac{W}{2} (J_+ J_- + J_- J_+) - \frac{V}{2} (J_+^2 + J_-^2), \quad (3)$$

可以验证总角动量的平方 $J^2 = \frac{1}{2}(J_+ J_- + J_- J_+) + J_z^2$ 与哈密顿量 (3) 对易, 是个守恒量. 因此, 可以根据不同的 J 将系统的 Hilbert 空间约化成不同的 $2J + 1$ 维的子空间. 无相互作用时, 哈密顿量简化为 $H = hJ_z$, 对应的基态是 $m_z = -\text{sign}(h) \frac{N}{2}$, 这

对应于最大的子空间 $J = N/2$, 下文只关注这个子空间.

选取 J^2 与 J_z 的共同本征态为基矢,

$$J^2 |m\rangle_J = J(J+1) |m\rangle_J, \quad J_z |m\rangle_J = m |m\rangle_J, \quad (4)$$

其中, $m = -J, -J+1, \dots, J$; J_z 是角动量的 z 方向分量. 可以看到宇称算符

$$P = e^{i\pi(\frac{N}{2} - S_z)} = \prod_{i=1}^N \sigma_z^i, \quad (5)$$

是个守恒量, 即哈密顿量 (3) 有一个 Z_2 对称性. 当 $V = 0$ 时, (3) 式有一个 $U(1)$ 对称性, 即在 $\{J_\pm, J_z\} \rightarrow \{e^{\pm i\theta} J_\pm, J_z\}$ 变换下, 哈密顿量保持不变. 接下来, 本文将详细分析哈密顿量 (3) 的能谱结构和物理特征.

3 结果与讨论

首先, 来看两个极限的情形.

一个是 $U(1)$ 极限, $V = 0$, 哈密顿量在基矢 $|m\rangle_J$ 下是对角化的, 本征能量为

$$E_m = -W [J(J+1) - m^2] + mh. \quad (6)$$

能级结构如图 1 所示, 可以看到 $N + 1$ 个能级相互交织成网状, 交点很容易算出, 比如基态就是被 E_m 与 E_{m+1} 相交的 N 个交点隔开, 所以容易得到

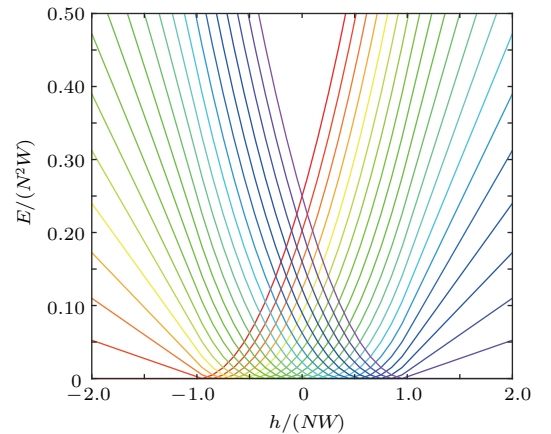


图 1 $U(1)$ 极限下, LMG 模型的能级分布图 (这里, 基态的能量已经从能谱中扣除了, 所以基态能量对应于零, 颜色从红色到紫色的线条依次对应于 m 从 J 变到 $-J$, 这里取 $N = 2J = 20$)

Fig. 1. Energy-level structures of LMG model in the $U(1)$ limit. Here, the ground-state energy has been subtracted from all levels. Different colors of levels denotes different values of m , where red is for $m = J$, violet is for $m = -J$ and so on, where $N = 2J = 20$.

交点处有

$$h_c = -W(2m + 1). \quad (7)$$

随着塞曼场由负逐渐变到正, 基态也会经历 N 次能级交叉, 基态各段对应的 m 也会从 J 变到 $-J$. 更高能级的交叉点也同样满足 (7) 式, 只是交点数量逐渐减少.

另一个极限称为 Z_2 极限, 对应于 $W = V$ 的情形, 系统的哈密顿量变成

$$H = -2WJ_x^2 + hJ_z, \quad (8)$$

显然 J_z 不再是一个守恒量, 即系统没有 $U(1)$ 对称性, 只有一个 Z_2 对称性, 此情形下能级结构如图 2 所示. 可以看到在 $h = 0$ 附近, 各能级都是由一个奇宇称和一个偶宇称的态形成的二重简并束缚态. 这里需要分成两种情况, 对于 N 为奇数, 经过零点时宇称会发生交叉, 比如在 $h > 0$ 和 $h < 0$ 两端, 系统的基态有不同的宇称, 这是很好理解的, 只需看 $|h| \gg W$ 时, 系统在两端对应的基态分别是 $m = -J$ 和 J , 而这两个态是具有不同宇称的, 所以相应的两个子能级一定会发生交叉; 而对于偶数 N , 对应的两端的基态 $m = -J$ 和 J 具有相同的宇称, 所以两子能级不交叉.

那么, 构成一个束缚态能级的两个不同宇称的子能级之间的劈裂是怎样在 $h = 0$ 处, 趋近于零的呢? 要回答这个问题, 需要对于 $h \ll W$ 做微扰理论. 显然, $h = 0$ 时, 哈密顿量 $H_0 = -2WJ_x^2$ 的本征能量很容易得到, 它们就是 $m_x = \pm J, \pm(J + 1), \dots$ 对应的 $\left\lceil \frac{N+1}{2} \right\rceil$ 个能级, 这里 $\lceil \dots \rceil$ 表示向 $+\infty$ 取整, 对于偶数 N , 最上面的能级是没有简并的, 而其余的能级都是二重简并的. 做微扰计算时, 要将形成束缚态的两个无微扰子能级 $|m_x\rangle_J$ 与 $| -m_x\rangle_J$ 通过微扰项 hJ_z 联结起来才能给出能隙的贡献, 所以只有考虑到 $2|m_x|$ 阶的微扰才能得到一个不为零的修正, 也就是说, 两子能级之间的间隔具有 h^{2m_x} 的行为, 这也解释了奇数 N 时发生能级交叉的原因, 由于 $2m_x$ 是奇数, 对于 $h > 0$ 和 $h < 0$ 两边能隙具有不同的符号, 而偶数 N 则有相同符号.

接下来计算 Z_2 极限时的能级劈裂. 以基态为例, 形成束缚态的两个无微扰子能级是 $|J\rangle_J$ 与 $| -J\rangle_J$ (为书写方便以下略去了下标 x , 但要注意这不是 J_z 的本征态), 微扰项是 $H' = hJ_z$, 显然零阶

的修正是零, 而二阶和其他高阶的修正项对于两个能级都是一样的, 不能打开能隙, 直到 $2J$ 阶的修正才有非零的非对角项出现, 这个非对角修正的计算如下:

$$\begin{aligned} E_{J,-J}^{(N)} &= \frac{\langle J|H'|J-1\rangle\langle J-1|H'|J-2\rangle\cdots\langle 1-J|H'| -J\rangle}{(E_J - E_{J-1})(E_J - E_{J-2})\cdots(E_J - E_{1-J})} \\ &= \frac{2NW}{(N-1)!} \left(\frac{h}{4W}\right)^N. \end{aligned} \quad (9)$$

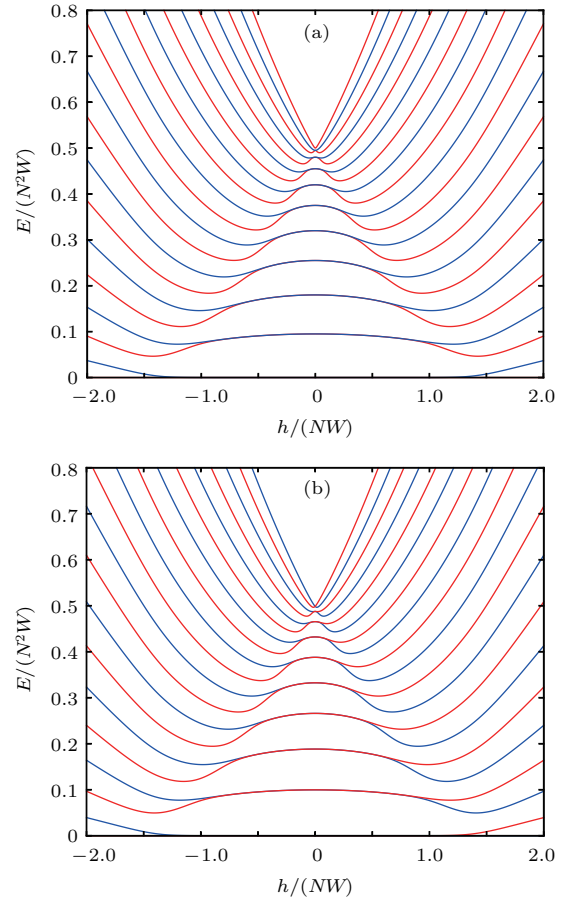


图 2 Z_2 极限下, 系统能级分布图 (红色代表偶宇称能级, 蓝色代表奇宇称) (a) $N = 20$; (b) $N = 19$; 可以看到由于奇偶不同, 它们呈现明显差别, (a) 的各束缚态的子能级不交叉, 而 (b) 则会发生宇称交叉, 如 (b) 的基态在 $h < 0$ 具有偶宇称, 而在 $h > 0$ 具有奇宇称

Fig. 2. Energy-level structures of LMG model in the Z_2 limit. Here, the ground-state energy has been subtracted from all levels. Red lines denote levels with even parity, while blue lines denote levels with odd parity: (a) For $N = 20$, two levels with opposite parities in each bound state get touched without crossing at $h = 0$; (b) for $N = 19$, two levels with opposite parity in a bound state cross each other at $h = 0$, e.g. the parity of ground state is even at $h < 0$ and odd at $h > 0$.

同样另一个非对角项也是一样, 所以对角化后

$$\text{diag} \begin{bmatrix} & E_{J,-J}^{(N)} \\ E_{-J,J}^{(N)} & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{J,-J}^{(N)} & \\ & -E_{J,-J}^{(N)} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

分别对两个子能级提升和降低 $E_{J,-J}^{(N)}$, 所以能隙大小为

$$\Delta = \frac{4NW}{(N-1)!} \left(\frac{h}{4W} \right)^N. \quad (11)$$

对于激发能级, 也可以做类似的微扰计算, 不再赘述.

离开上述两个极限, 对于一般的情况 W 与 V 不相等, 结果又是如何? 系统仍然只有 Z_2 对称性, 它不同于 $U(1)$ 的情况, 相同宇称之间的交叉不再发生, 给定一个任意小的 V 都能使相同宇称之间的能级交叉打开能隙, 而不同宇称之间的交叉继续

存在, 但是交点位置会随着 V 的不同而移动. 如果重新来观察基态, 就会发现随着塞曼场的连续变化, 基态会在奇偶宇称之间来回振荡, 这个现象在另一个系统——光学腔 Dicke 模型中也有发现^[10], 所以说明它是普遍存在的. 图 3 给出了不同的 V 对应的能级图, 可以看到系统是如何从 $U(1)$ 极限逐步地过渡到 Z_2 极限的. 随着 V 由零逐渐增大到 W , 各个束缚态的能隙不断减小, 而子能级之间的交叉点不断向零点靠近, 而有几个交叉点就对应于 Z_2 极限下, 能隙是 h 的几阶无穷小. 通过计算发现在 $V \neq W$ 时, 奇偶能级之间的交点仍然可以解析地得到

$$h_c = -\sqrt{W^2 - V^2} (2m + 1), \quad (12)$$

这与 $U(1)$ 极限的交点位置也是一致的.

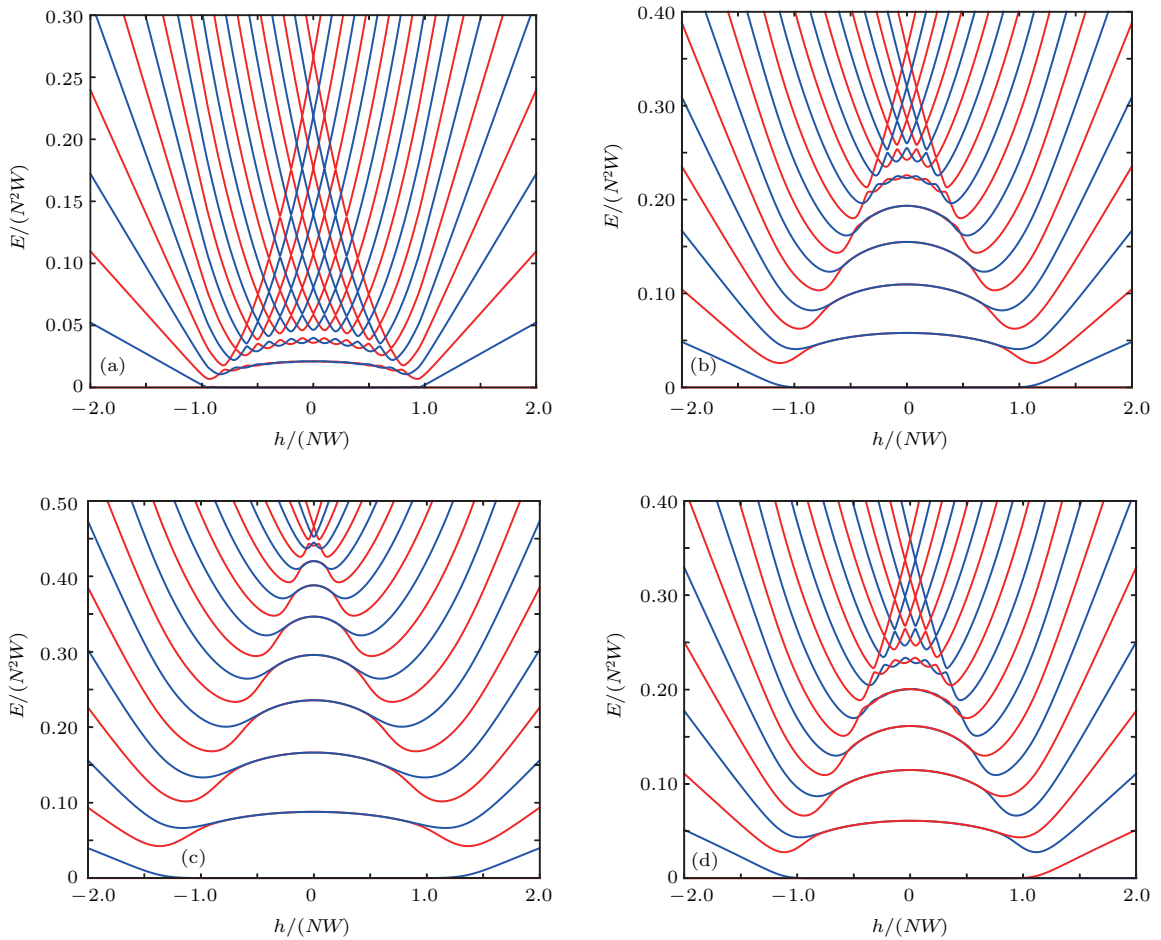


图 3 V 取不同值时的能级图 (a) $N = 20, V = 0.1W$; (b) $N = 20, V = 0.5W$; (c) $N = 20, V = 0.9W$; (d) $N = 19, V = 0.5W$

Fig. 3. Energy-level structures for different values of V : (a) $N = 20, V = 0.1W$; (b) $N = 20, V = 0.5W$; (c) $N = 20, V = 0.9W$; (d) $N = 19, V = 0.5W$.

4 结 论

LMG模型在包含核物理在内的多个领域都有广泛的研究价值. 模型看似相对简单, 实际上蕴含着许多深刻的物理, 自提出以来, 不断有新的研究结果出现. 比如, 清华大学的Huang等最近利用大 N 展开的方法研究了有限尺寸的LMG模型的自发对称性破缺动力学行为^[11], 发现该系统与Wilczek提出的破缺时间平移对称性的时间晶体^[12,13]的概念极其相似, 激发态的寿命是格点数的三次方形式. 本文从能级结构的分析入手, 发现了 $U(1)$ 极限、 Z_2 极限, 以及介于它们之间更一般情况下的物理特征, 在解析和数值两个方面呈现出了系统的能级劈裂行为, 以及宇称振荡现象. 尤其是宇称振荡, 我们之前已经在原子与光子纠缠的模型中发现了这一现象^[10], 该模型中驱动这种宇称振荡的不是塞曼场, 而是原子与光子之间的耦合强度, 而本文在一个完全不同的模型中再次出现宇称振荡效应, 可能也暗示了它们之间存在某种联系. 除了以上两个系统, 我们发现早在十几年前, 在一个描述分子磁体的双轴自旋系统中^[14–16], 研究者就已经发现了类似的宇称随外场振荡的效应, 他们采用的是费曼路径积分的方法得到相关结果, 与本文的数值和微扰论的结果一致. 因此, 我们认为宇称振荡现象是普遍存在的, 未来如果在更多系统中发现这一现象, 应该能总结出其一般规律. 目前, 已经有一些实验方案被提出, 用来模拟LMG模型, 比如用光学腔量子电动力学的方法来模拟有耗散的LMG模型^[5,17], 又如用金刚石中的NV色心来模拟LMG模型中的自旋^[18], 并使用微波来调控自旋之间的相互作用, 以及用光学腔中的玻色-爱因斯坦

凝聚体诱导LMG模型^[19]. 但是该模型仍然没有真正在实验室实现. LMG模型之所以被研究半个世纪还热度不减, 正因为其中还有许多未被探索的物理, 而已经发现的效应对其他方向的研究也具有启发意义.

参考文献

- [1] Lipkin H J, Meshkov N, Glick A J 1965 *Nucl. Phys.* **62** 188
- [2] Meshkov N, Glick A J, Lipkin H J 1965 *Nucl. Phys.* **62** 199
- [3] Glick A J, Lipkin H J, Meshkov N 1965 *Nucl. Phys.* **62** 211
- [4] Dusuel S, Vidal J 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 237204
- [5] Morrison S, Parkins A S 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 040403
- [6] Pan F, Draayer J P 1999 *Phys. Lett. B* **451** 1
- [7] Ribeiro P, Vidal J, Mosseri R 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 050402
- [8] Ribeiro P, Vidal J, Mosseri R 2008 *Phys. Rev. E* **78** 021106
- [9] Co'G, de Leo S 2018 *Int. J. Mod. Phys. E* **27** 1850039
- [10] Yu Y X, Ye J, Zhang C 2016 *Phys. Rev. A* **94** 023830
- [11] Huang Y, Li T, Yin Z Q 2018 *Phys. Rev. A* **97** 012115
- [12] Wilczek F 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 160401
- [13] Shapere A, Wilczek F 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 160402
- [14] Kou S P, Liang J Q, Zhang Y B, Pu F C 1999 *Phys. Rev. B* **59** 11792
- [15] Liang J Q, Müller-Kirsten H J W, Park D K, Pu F C 2000 *Phys. Rev. B* **61** 8856
- [16] Jin Y H, Nie Y H, Liang J Q, Chen Z D, Xie W F, Pu F C 2000 *Phys. Rev. B* **62** 3316
- [17] Larson J 2010 *Europhys. Lett.* **90** 54001
- [18] Zhou Y, Ma S L, Li B, Li X X, Li F L, Li P B 2017 *Phys. Rev. A* **96** 062333
- [19] Chen G, Liang J Q, Jia S 2009 *Opt. Express* **17** 19682

Energy level splitting and parity oscillation in Lipkin-Meshkov-Glick model*

Yu Yi-Xiang^{1)2)†} Song Ning-Fang¹⁾ Liu Wu-Ming²⁾

1) (*Institute of Optics and Electronics, School of Instrument Science and Opto-electronics Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China*)

2) (*Beijing National Laboratory for Condensed Matter Physics, Institute of Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China*)

(Received 31 May 2018; revised manuscript received 12 June 2018)

Abstract

The Lipkin-Meshkov-Glick (LMG) model originally describes a Fermionic many-body system in nuclear physics. However, in recent years, it has been widely found in condensed matter physics, quantum information systems, and quantum optics, and it is of wider and wider interest. Previous studies on this model mainly focused on the physics under the thermal dynamical limit, such as quantum phase transitions and quantum entanglement. There are also some researches about LMG model with finite size in some special limits, but the finite-size effect on energy spectrum is not very clear yet. This is the main motivation of this work.

In this paper, the exact diagonalization method and the quantum perturbation theory are used to calculate and analyze the energy-level structure of the LMG model at a finite N . To solve it, we first map this model into the angular-momentum space to obtain a reduced LMG model. By this mapping, the dimension of Hilbert space is reduced to $N + 1$ from 2^N . The exact solution of its energy levels can be obtained easily in the $U(1)$ limit where the total spin is conserved. We find that the levels are woven into a fishing-net structure in the $U(1)$ limit. While away from the $U(1)$ limit, the crossings between even and odd levels will open a gap, and the system's energy levels will be grouped into pairs with an odd and an even level, forming some bound states, called doublet states, and the parity of each doublet state will oscillate as the Zeeman field increases. This work gives the values of the critical Zeeman field for the parity crossings. These critical values shift as the interacting parameters and disappear at zero in the Z_2 limit. In the Z_2 limit, the system energy levels form splittings near the zero Zeeman field. In this article, we analytically calculate the relationship between these energy gaps and the Zeeman field. For odd and even number N , the parity of each state has a different behavior. Specifically, the ground state and the doublet excited states of the system with odd N will suffer a parity reversion at zero Zeeman field, while the states with even N will not. By tuning the interacting parameters, we also study the crossover from the $U(1)$ limit to the Z_2 limit. The parity oscillation we find in this system is a very important physical phenomenon, which also exists in some other systems like optical cavity quantum electrodynamics and magnetic molecule system.

Keywords: parity oscillation, energy-level splitting, perturbation theory

PACS: 21.45.-v, 21.60.Fw

DOI: 10.7498/aps.67.20181069

* Project supported by the National Key Research and Development Program of China (Grant No. 2016YFA0301500), the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11434015, 61227902, 11611530676), and the Strategic Priority Research Program (B) of the Chinese Academy of Sciences (Grant Nos. XDB01020300, XDB21030300).

† Corresponding author. E-mail: yyxxx@buaa.edu.cn