

等离子环境中带电体能量的 Collin 变分

谭康伯 路宏敏 苏涛

Collin variational study of charged conductors' energy in plasma environment

Tan Kang-Bo Lu Hong-Min Su Tao

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 67, 209401 (2018) DOI: 10.7498/aps.67.20180504

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.67.20180504>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2018/V67/I20>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

[针-板空气间隙流注放电起始过程的三螯 IC/MCC 仿真研究](#)

Three-dimensional PIC/MCC numerical study on the initial process of streamer discharge in a needle-plate electrode in atmospheric air

物理学报.2018, 67(4): 045101 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.67.20172309>

[流注放电低温等离子体中电子输运系数计算的蒙特卡罗模型](#)

Monte Carlo simulations of electron transport coefficients in low temperature streamer discharge plasmas

物理学报.2017, 66(19): 195101 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.195101>

[空间站快速充电效应的物理过程及特征](#)

Physical process and characteristics for rapid charging events at international space station

物理学报.2013, 62(22): 229401 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.229401>

[航天器内部孤立导体表面带电面积效应研究](#)

Area effect of isolated conductor's surface charging inside spacecraft

物理学报.2013, 62(14): 149402 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.149402>

[等离子体环境下孤立导体表面充电时域特性研究](#)

Characteristics plasma environment isolated conductor surface charging time domain

物理学报.2013, 62(14): 149401 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.149401>

等离子环境中带电体能量的Collin变分

谭康伯[†] 路宏敏 苏涛

(西安电子科技大学, 天线与微波国家重点实验室, 西安 710071)

(2018年3月20日收到; 2018年8月3日收到修改稿)

基于系统性电磁兼容的考虑, 对等离子环境中在轨航天器导体充放电现象中的能量特征进行了变分研究. 通过电磁Collin原理, 对等离子环境中导体系统几何尺度与所带电能的变分联系进行了理论分析. 在此基础上, 推广了更具一般性的数值估值分析方法, 并对复杂导体系统电磁参数、等离子环境特征与系统能量间的关系进行了实例分析. 研究结果对于等离子环境中复杂带电体的能量控制及相关的电磁环境效应与防护等研究具有积极意义.

关键词: 等离子, 带电导体, 静电能量, 变分

PACS: 94.05.Jq, 51.10.+y, 42.65.Tg

DOI: 10.7498/aps.67.20180504

1 引言

等离子是物质存在的一种特殊形态^[1-7], 对处于其中的导体系统形成影响. 在等离子环境工程中, 导体充放电现象将导致在轨故障, 对在轨航天器的有效运行以及功能发挥构成严重威胁^[8-16]. 等离子环境中航天器的带电分析是系统性电磁兼容领域中需要持续研究的重点问题.

近年来, 针对空间系统的静电防护, 电磁结合统计的等离子环境的物理模拟为相关研究的不断深入提供了重要的基础支撑. 从动力学角度来看, 等离子环境中的导体系统会受到来自周围大量粒子的轰击, 进而在系统表面形成电荷积累^[10-15]. 这就构成了由导体与其周围等离子环境相关联的特殊动力学共同体, 并呈现特定的能量规律.

对于动力学系统能量特征的探讨, 变分方法原理简洁^[17-21], 在分析力学中有着重要的物理意义, 可以深入刻画相关动力学的本质规律. 在电磁研究中, 变分方法对于系统特征的评估具有应用价值. 因此, 等离子环境中带电体能量的变分研究成为相关系统性电磁兼容理论研究中必须进一步深入探讨的问题.

本文基于变分原理, 通过电磁Collin分析对等离子环境中与导体目标相关的能量估计问题进行讨论.

2 等离子中导体系统的Collin变分原理

在轨航天器与其周围等离子环境构成了特殊的动力学系统, 其导体系统能量受两方面共同影响. 一方面, 由于等离子环境中具有一定能量的电子与离子随机运动^[8-15], 在导体表面上将产生带电粒子的聚集作用. 在高温环境中, 电子和离子有近似相同的热力学温度, 即 $T_e \approx T_i$. 电子质量 m_e 远小于离子质量 m_i , 处于平衡态时电子速度远大于离子速度, 即 $v_e \gg v_i$. 由统计理论可知, 到达导体目标表面的电子数目将大于离子数目. 于是, 导体表面形成大量负电荷聚集, 构成负电能积累. 另一方面, 由电磁理论可知^[22,23], 导体的静电能量为 $E_e = Q^2/(2C)$, 其中 C 是导体结构的电容, 为导体系统自身属性, 导体电位 U 及电量 Q 的变化受其约束. 当导体处于电位稳定状态后, 其静电特征满足关系: $Q = CU$. 将该关系与导体系统能量关系共

[†] 通信作者. E-mail: kbtan@mail.xidian.edu.cn

同考虑,可以得到

$$E_e = \frac{CU^2}{2}. \quad (1)$$

从(1)式可以看出,当导体电位确定时,孤立导体电容的变化与系统静电能量的变化间形成约束联系.

为了确定导体电位,需要借助于对电子和离子的聚集作用的分析.当导体系统处于等离子环境中时,由于导体表面负场阻碍作用的影响,电子只有沿表面法向具有大到足够克服相应负势能的能量时,才能到达导体表面.于是有能量关系: $-eU = m_e v_{e\perp \min}^2/2$,其中 e 为电子电量, $v_{e\perp \min}$ 为电子到达导体所具有的最小速率.在此基础上,依据等离子体中粒子的运动特性,从统计分析及麦克斯韦分布出发,可得电子流密度 Γ_e 为

$$\Gamma_e = \int_{|v_{e\perp \min}|}^{\infty} d\Gamma_e = n_e \sqrt{\frac{kT_e}{2\pi m_e}} \exp\left[\frac{eU}{kT_e}\right]. \quad (2)$$

离子流密度 Γ_i 为

$$\Gamma_i = \int_0^{\infty} d\Gamma_i = n_i \sqrt{\frac{kT_i}{2\pi m_i}}, \quad (3)$$

其中 k 为玻尔兹曼常数, n_e 和 n_i 为电子和离子密度.在粒子流作用下,等离子环境中孤立导体的电位平衡特征可由理论确定[13-15].负场的增强对电子向导体表面聚集形成阻碍作用,进而使流向导体表面的电子流密度逐渐减少,其中二次电子效应对表面电子数目也将产生影响.当到达孤立导体表面的电子流、离子流以及二次电子流作用平衡时,表面电位将达到稳定状态.此时有流平衡关系: $\Gamma_e = \Gamma_i + \Gamma_{se}$,其中, Γ_{se} 为二次电子流密度. $\Gamma_{se} = \delta_e \Gamma_e + \delta_i \Gamma_i$,其中 δ_e 为目标表面材料由电子引起的二次电子系数, δ_i 则为由离子引起的二次电子系数.结合(2)式、(3)式,将其代入流平衡关系,可得(1)式中所需的平衡电位 U .

由上面分析可知,在等离子环境中的带电导体系统呈现一定的能量特征,对其进行研究需要考虑电容的实际情况. Collin原理是变分在电磁研究中的重要延拓,可以对导体系统电容进行实用分析[24,25].为了探讨问题的内在联系,本文引入变分方法进行研究.由该原理可知,较大的孤立导体有着较大的电容.

图1中所示的导体结构 $S_1 \subset S_* \subset S_2$, $C_1 < C_* < C_2$,其中 S_* 表示电容为 C_* 的导体所对应的空间几何构型.对此, Collin原理可表示为如下变

分形式:

$$\delta C|_{\delta S=0} = 0. \quad (4)$$

在相同电位和相同平均电荷密度条件下,该形式表明相同的表面积有相同的总电荷,于是对应相同的电容.在此理论原理基础上,当电位得到一致性的确定后,由几何尺度所确定的电容将形成对于平衡态等离子系统中静电能的直接变分估计:

$$\delta E_e|_{\delta S=0} = 0. \quad (5)$$

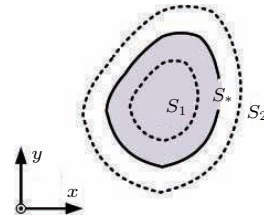


图1 Collin原理图

Fig. 1. Collin's principle.

3 实例分析和一般性数值推广

首先通过简单实例,对 Collin 变分分析的应用进行探讨.考虑空间尺度为 $a \times a \times a$ 的方形导体目标.根据上一节中的变分条件,对该目标做相同表面积估值,所对应的等效半径为 $R_* = a\sqrt{3/(2\pi)}$,则可得到其相应的电容估值为

$$C \approx 4\pi\epsilon a \sqrt{\frac{3}{2\pi}}. \quad (6)$$

将(6)式代入(1)式,并结合所得平衡电位,可得平衡态下孤立方形导体电能的理论估值为

$$E_e \approx \sqrt{6\pi\epsilon a} \left\{ \frac{kT_e}{e} \ln \left[\frac{n_i(1+\delta_i)}{n_e(1-\delta_e)} \sqrt{\frac{T_i m_e}{T_e m_i}} \right] \right\}^2. \quad (7)$$

从上面的结果可以看到,对于方形目标,电能与几何尺度在变分条件下成线性比例关系.该结果和文献[15]所得的电能与面积关系在物理上保持一致.对于电子所引起的二次效应,类似于[14, 15, 26, 27],取 $\delta = \delta_i \approx \delta_e$ 且 $n_i \approx n_e$,可得到二次电子效应对带电体能量的影响,其结果如图2所示.显然,上面方法在对一些相对简单结构的电能特征的分析应用方面具有理论优势.

作为一种较好的实用分析方法, Collin 变分原理为处理等离子环境中更复杂的导体系统提供了理论工具.为了有利于更普遍的应用,以面对复杂

结构所提出的一般性分析要求, 下面将基于变分原理(5)式, 同时考虑等离子平衡态分析理论中的统计平均性, 引入数值离散技术, 对分析理论方法做进一步的推广.

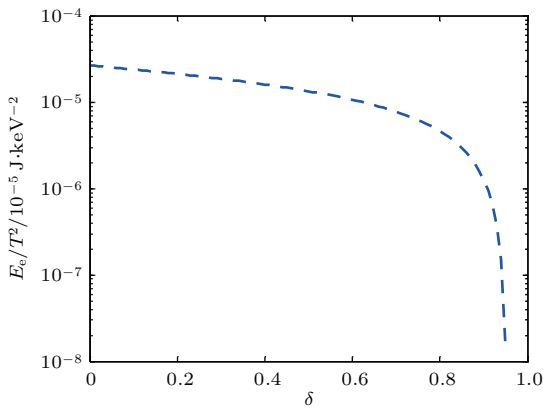


图2 二次电子效应对等离子环境中带电立方的影响
Fig. 2. Effect of secondary electron emission on cube in plasma environment.

在等离子环境中, 电子和离子流作用于导体系统表面的法向方向, 形成电荷及能量积累. 考虑到叠加特性, 可将目标表面的待求区域进行 N 次离散剖分, 以离散面片近似积分微元. 通过离散, 使得原有导体目标的几何构型 S_* 近似为离散剖分几何构型 S , 其过程如图3所示. 平衡态时, 设 ρ 表示目标上的电荷密度函数, 则由空间电位关系可得如下积分算子方程:

$$L\rho = \int_S \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon R} ds' = U, \quad (8)$$

其中 L 表示静场积分算子, $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, 待求的未知函数是产生目标电位的电荷密度 ρ .

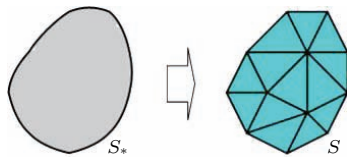


图3 导体构型的空间离散

Fig. 3. Spatial discreteness of conductor configuration.

电子和离子流作用于各导体面片法向. 根据几何构型进行离散, 采用基函数 f_n 将待求电荷密度函数展开, 有 $\rho(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N a_n f_n(\mathbf{r})$. 从该式可以看出, 只要求得系数 a_n , 就可进一步得到电荷密度的分布情况. 定义该问题的内积为 $\langle f, g \rangle = \int_S f(\mathbf{r})g(\mathbf{r})ds$. 将前面电荷密度的展开式

代入内积表达式中, 并且依据典型的矩阵向量形式[28], 取检验采样函数为 $w_m(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m)$, 其中 \mathbf{r}_m 为每个离散面片的中点, 以此标定法向流作用的空间特征. 至此, (8)式转化为相应的矩阵代数方程:

$$[l_{m,n}][a_n] = [b_m], \quad (9)$$

其中 $l_{m,n} = \langle w_m, Lf_n \rangle$, $b_m = \langle w_m, U \rangle$. 通过求解上面矩阵代数方程, 得到平衡态电荷密度分布函数的系数 $[a_n] = [l_{m,n}]^{-1}[b_m]$, 进而得到电荷密度函数. 于是, 在前面数值离散分析的基础上, 即可得到等离子环境中相应导体目标的平衡态系统的能量估值:

$$E_e \approx \frac{U \int_S \rho ds'}{2}. \quad (10)$$

通过理论分析可以看到, (10)式是(1)式在Collin原理下的离散近似, 其结果与实际目标的离散度相关.

下面将基于Collin变分的离散方法应用于具体的等离子环境中导体目标的静电能量分析中, 并进行讨论. 分析中计及电子所引起的二次效应, 并取 $T = T_e \approx T_i$. 首先, 考虑处于等离子环境中 $a = 0.5$ m的立方导体, 通过(7)式和(10)式, 可以分别得到其静电能量理论分析和数值分析估值(图4).

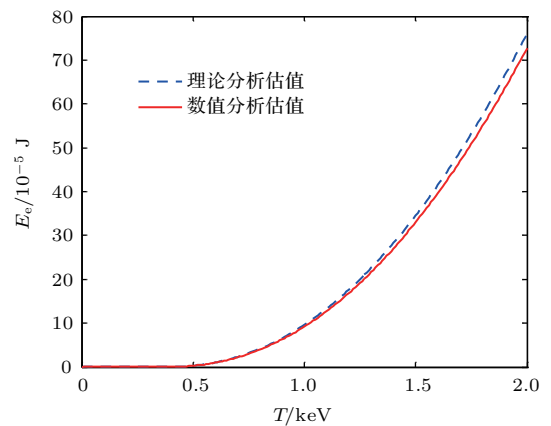


图4 等离子环境中方形导体能量特征的估值对比
Fig. 4. Comparison for estimated energy of cube in plasma environment.

由上面结果可以看到, 对于该方形导体目标, 理论与数值分析具有一定的符合度. 在等离子环境中, 较高的等离子体温度对应于更为激烈的粒子运动, 于是在粒子流作用下, 导体结构上积累了更多能量. 其次, 考虑到数值途径为研究更复杂的导体系统提供了便利, 下面给出具体实例分析. 考虑

半径为0.25 m球体子部分和边长为0.5 m立方体子部分的组合结构,其中两个子部分的体心间距为0.43 m,通过分析可以得到该带电系统在等离子环境中的能量特性(图5).由结果可知,在相同的等离子温度时,该组合系统较之单一立方体的几何形体更大,自身的能量更高.由于该组合结构较之方形于几何构型上的变化,在等离子温度为2 keV时,系统所带能量提升了约15.3%.通过分析可以看到,数值估值能够较为普遍地处理等离子环境中的复杂导体系统,在应用方面具有一定的一般性.值得注意的是,对于复杂系统,在研究其能量特性时,需具体考虑其整体几何构型特征.

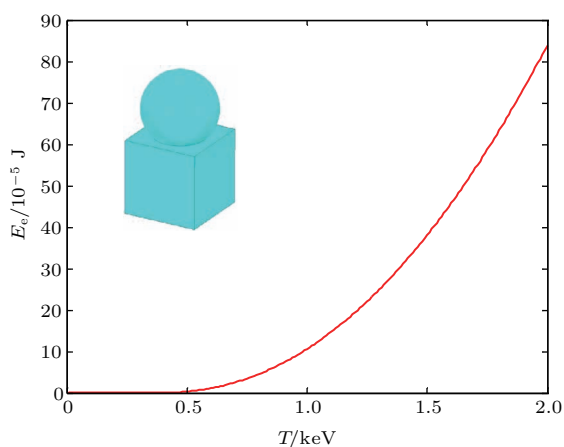


图5 等离子环境中复杂系统的数值估值

Fig. 5. Numerical estimation of the composited system in plasma environment.

4 结 论

本文基于变分原理,探讨了导体目标几何构型与电能间的电磁Collin联系,对等离子环境中导体的电能进行了较为简洁的变分估值分析.出于Collin原理在处理复杂导体系统时实用性的考虑,在理论研究的基础上,本文结合数值分析技术,为等离子环境中导体系统电能的估值提供了更具实用价值的一般性分析方法.本文研究有利于等离子环境中复杂带电体的能量控制及相关的电磁环境效应与防护技术的深入.

参考文献

[1] Higgins A B, Starling R L C, Götz D, Mereghetti S, Wiersema K, Maccarone T, Osborne J P, Tanvir N R, O'Brien P T, Bird A J, Rowlinson A, Gehrels N 2017 *MNRAS* **470** 314

[2] Chen F F 2006 *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion* (New York: Springer) pp120–203

[3] Hu T P, Luo Q 2007 *Chin. Phys. B* **16** 179

[4] Liu W Z, Wang H, Zhang D J, Zhang J 2014 *Plasma Sci. Technol.* **16** 344

[5] Jiao J, Tong J S, Ma C G, Guo J Y, Bo Y, Zhao Q 2018 *Acta Phys. Sin.* **67** 015202 (in Chinese) [焦蛟, 童继生, 马春光, 郭佳琦, 薄勇, 赵青 2018 物理学报 **67** 015202]

[6] Ma H J, Wang G L, Luo J, Liu L P, Pan D X, Zhang J, Xing Y L, Tang F 2018 *Acta Phys. Sin.* **67** 025201 (in Chinese) [马昊军, 王国林, 罗杰, 刘丽萍, 潘德贤, 张军, 邢英丽, 唐飞 2018 物理学报 **67** 025201]

[7] Li Q, Chen Q, Zhong J 2018 *Acta Phys. Sin.* **67** 027303 (in Chinese) [李群, 陈谦, 钟景 2018 物理学报 **67** 027303]

[8] Cao J B, Wang X Y, Zhou G C, Chen T 2000 *Chin. J. Geophys.* **43** 459 (in Chinese) [曹晋滨, 汪学毅, 周国成, 陈涛 2000 地球物理学报 **43** 459]

[9] Cai M H, Han J W, Li X Y, Li H W, Zhang Z L 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 6659 (in Chinese) [蔡明辉, 韩建伟, 李小红, 李宏伟, 张振力 2009 物理学报 **58** 6659]

[10] Huang J G, Chen D 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 961 (in Chinese) [黄建国, 陈东 2004 物理学报 **53** 961]

[11] Huang J G, Chen D 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1611 (in Chinese) [黄建国, 陈东 2004 物理学报 **53** 1611]

[12] Huang J G, Han J W 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2907 (in Chinese) [黄建国, 韩建伟 2010 物理学报 **59** 2907]

[13] Huang B C, Tong J Y 2010 *Space Environment Engineering* (Beijing: Chinese Science and Technology Press) p451 (in Chinese) [黄本诚, 董靖宇 2010 空间环境工程学报(北京: 中国科学技术出版社) 第451页]

[14] Cao H F, Liu S H, Sun Y W, Yuan Q Y 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 149401 (in Chinese) [曹鹤飞, 刘尚合, 孙永卫, 原青云 2013 物理学报 **62** 149401]

[15] Cao H F, Liu S H, Sun Y W, Yuan Q Y 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 149402 (in Chinese) [曹鹤飞, 刘尚合, 孙永卫, 原青云 2013 物理学报 **62** 149402]

[16] Witze A 2016 *Nature* **539** 15

[17] Goldstein H 1950 *Classical Mechanics* (Cambridge, MA: Addison-Wesley) pp68–96

[18] Courant R, Hilbert D (translated by Qian M, Guo D R) 1958 *Methods of Mathematical Physics vol. I* (Beijing: Science Press) p129–210 (in Chinese) [柯朗 R, 希尔伯特 D 著(钱敏, 郭敦仁 译) 1958 数学物理方法 卷I(北京: 科学出版社) 第129–210页]

[19] Chien W Z 2000 *Applications of Green Functions and Variational Methods in Electromagnetic Field and Wave Computation* (Shanghai: Shanghai University Press) pp1–85 (in Chinese) [钱伟长 2000 格林函数和变分法在电磁场和电磁波计算中的应用(上海: 上海大学出版社) 第1–85页]

[20] Mei F X 1988 *Special Problems of Analytical Mechanics* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) pp68–158 (in Chinese) [梅凤翔 1988 分析力学专题(北京: 北京工业学院出版社) 第68–158页]

[21] Ding G T 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 044503 (in Chinese) [丁光涛 2011 物理学报 **60** 044503]

- [22] Stratton J A 1941 *Electromagnetic Theory* (New York: McGraw-Hill) pp104–136
- [23] Jackson J D 1975 *Classical Electrodynamics* (New York: Wiley) pp236–240
- [24] Collin R E 1960 *Field Theory of Guided Waves* (New York: McGraw-Hill) pp338–348
- [25] Liang C H, Su T, Wan J X 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 0001 (in Chinese) [梁昌洪, 苏涛, 万继响 2004 物理学报 **53** 0001]
- [26] Murali S 2000 *J. Electron Spectrosc. Relat. Phenom.* **106** 93
- [27] Kazami Y, Junichiro K, Norio O, Michikazu K, Naoki H, Ryuji S, Kenichirou S, Takeshi T 2009 *Appl. Surf. Sci.* **256** 958
- [28] Harrington R F 1993 *Field Computation by Moment Methods* (New York: Wiley-IEEE Press) pp1–50

Collin variational study of charged conductors' energy in plasma environment

Tan Kang-Bo[†] Lu Hong-Min Su Tao

(National Key Laboratory of Antennas and Microwave Technology, Xidian University, Xi'an 710071, China)

(Received 20 March 2018; revised manuscript received 3 August 2018)

Abstract

Plasma, as a special state of matter, has an effect on its inner conductors. Practically in the plasma environment, the effect may induce surface to charge and discharge, and may degrade the performance of spacecraft. Therefore, this effect needs to be further studied in the electromagnetic compatibility. The energy in a conductors' system is a key factor of the effect, which can also be used to depict the system consisting of relevant conductors and plasma environment. In order to investigate the essence of the system, the variational method is adopted. So with considering the electromagnetic compatibility and protection of this system, the energy of related conductors should be estimated by the theoretical method in the plasma environment. In the stochastic movement, electrons are faster than the irons. Therefore, the negative energy is cumulated. Considering the definition of capacitance, the system energy can be represented by the conductor capacitance and charging potential. Meanwhile, from the plasma kinetic theory, the potential can be obtained in the steady state. Thus, the relations among electromagnetic parameters of conductors, environmental features of plasma, and systematic energy are established, from which the corresponding Collin principle is also investigated. The principle indicates the system essence in the complex electromagnetic environment. In order to illustrate the utility of the variational principle, a simple cubic model is theoretically analyzed directly. From the typical instance, the relation between the geometric dimension and electric energy is illustrated, which is in consistence with the results in the early literature. The relation between secondary electrons and systematic energy is also analyzed. Starting from these theoretical investigations, in order to estimate the complicated structures, the analysis needs to be generalized further. With the assistance of discrete technology, the numerical method is established for analyzing the system energy of the complex conductive system in plasma environment. The generalized method is based on the equation with integral operator, in the calculation of which the method of moment is practically employed. As an application, the estimated energy of cube in plasma environment is compared with the theoretical estimation and the numerical estimation, which are in good agreement with each other. And then a composited structure is numerically analyzed. Obviously, the variational analysis is beneficial to investigating the physical and principal regulation for conductors in the plasma environment, and the generalized method has wide potential applications in controlling the energy of complex charged conductors, electromagnetic protection, compatibility engineering in plasma environment, etc.

Keywords: plasma, charged conductor, electrostatic energy, variational

PACS: 94.05.Jq, 51.10.+y, 42.65.Tg

DOI: 10.7498/aps.67.20180504

[†] Corresponding author. E-mail: kbtan@mail.xidian.edu.cn