

前缘曲率对三维边界层内被激发出非定常横流模态的影响研究

陆昌根 沈露予

Influence of leading-edge curvature on excited unsteady cross-flow vortices in three-dimensional boundary-layer

Lu Chang-Gen Shen Lu-Yu

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 67, 214702 (2018) DOI: 10.7498/aps.67.20181343

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.67.20181343>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2018/V67/I21>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

[合成冷/热射流控制超声速边界层流动稳定性](#)

Linear stability of supersonic boundary layer with synthetic cold/hot jet control

物理学报.2017, 66(23): 234701 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.234701>

[三维边界层内诱导横流失稳模态的感受性机理](#)

Receptivity mechanism of cross-flow instability modes induced in three-dimensional boundary layer

物理学报.2017, 66(20): 204702 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.204702>

[无限薄平板边界层前缘感受性过程的数值研究](#)

Numerical study of leading-edge receptivity on the infinite-thin flat-plate boundary layer

物理学报.2016, 65(19): 194701 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.194701>

[三维边界层内定常横流涡的感受性研究](#)

Receptivity of the steady cross-flow vortices in three-dimensional boundary layer

物理学报.2017, 66(1): 014703 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.014703>

[壁面局部吹吸边界层感受性的数值研究](#)

Numerical study on boundary-layer receptivity with localized wall blowing/suction

物理学报.2015, 64(22): 224702 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.224702>

# 前缘曲率对三维边界层内被激发出非定常横流模态的影响研究\*

陆昌根<sup>†</sup> 沈露予

(南京信息工程大学海洋科学学院, 南京 210044)

(2018年7月11日收到; 2018年7月29日收到修改稿)

三维边界层感受性问题是三维边界层层流向湍流转捩的初始阶段, 是实现三维边界层转捩预测与控制的关键环节. 在高湍流度的环境下, 非定常横流模态的失稳是导致三维边界层流动转捩的主要原因; 但是, 前缘曲率对三维边界层感受性机制作用的研究也是十分重要的课题之一. 因此, 本文采用直接数值模拟方法研究在自由来流湍流作用下具有不同椭圆形前缘三维(后掠翼平板)边界层内被激发出非定常横流模态的感受性机制; 揭示不同椭圆形前缘曲率对三维边界层内被激发出非定常横流模态的扰动波波包传播速度、传播方向、分布规律、感受性系数以及分别提取获得一组扰动波的幅值、色散关系和增长率等关键因素的影响; 建立在不同椭圆形前缘曲率情况下, 三维边界层内被激发出非定常横流模态的感受性问题与自由来流湍流的强度和运动方向变化之间的内在联系; 详细分析了不同强度各向异性的自由来流湍流在激发三维边界层感受性机制的物理过程中起着何种作用等. 通过上述研究将有益于拓展和完善流动稳定性理论, 为三维边界层内层流向湍流转捩的预测与控制提供依据.

**关键词:** 感受性, 前缘曲率, 非定常横流模态

**PACS:** 47.20.Pc, 47.20.-k, 47.27.ek

**DOI:** 10.7498/aps.67.20181343

## 1 引言

三维边界层内层流向湍流转捩的预测与控制一直是流体力学的前沿热点课题之一. 边界层感受性问题是转捩过程的初始阶段, 是实现边界层流动转捩预测与控制的关键过程. 早期感受性问题的研究主要集中在二维边界层感受性问题, 然而大多数工程实际问题都属于三维边界层流动, 比如飞行器的后掠机翼表面、带攻角的圆锥以及流体叶片机械等. 因此, 三维边界层感受性问题的研究有着更加重要的理论意义<sup>[1]</sup>.

通过风洞实验<sup>[2]</sup>发现, 在低湍流度情况下, 定常横流模态主导着三维边界层流动的转捩过程; 在高湍流度情况下, 非定常横流模态在三维边界层流

动的转捩过程中占据绝对的主导作用. 另外, 风洞实验还发现, 自由来流湍流是激发三维边界层内产生非定常横流模态的主要原因, 而自由来流中的声波扰动在三维边界层内被激发出非定常横流模态的作用是十分微弱的, 可以忽略不计.

早期的三维边界层感受性研究多数都集中在定常横流模态占主导的感受性过程, 比如, Radeztsky等<sup>[3]</sup>, Deyhle和Bippes<sup>[4]</sup>, Reibert和Saric<sup>[5]</sup>, Kurz和Kloker<sup>[6]</sup>分别研究了壁面局部粗糙的几何形状、大小和位置等因素对三维边界层感受性机制的影响; Betrolotti<sup>[7]</sup>以及Collis和Lele<sup>[8]</sup>研究了非平行性对三维边界层感受性机制的作用. 直到最近, 人们才开展涡扰动、自由来流湍流作用下三维边界层感受性问题的数值和实验研究.

\* 国家自然科学基金(批准号: 11472139)、江苏省高等学校自然科学研究面上项目(批准号: 17KJB130008)和江苏高校优势学科建设工程(PAPD)资助的课题.

<sup>†</sup> 通信作者. E-mail: cglu@nuist.edu.cn

例如, Schrader 等 [9,10] 采用直接数值模拟方法研究了自由来流涡扰动作用下三维边界层内被激发产生非定常横流模态的感受性过程. Tempelmann 等 [11,12] 通过直接数值模拟方法和抛物化稳定方程法求解线性不可压 Navier-Stokes 方程, 详细研究光滑后掠翼边界层内被激发产生非定常横流模态的感受性问题. Borodulin 等 [13] 实验研究了自由来流涡扰动和壁面局部粗糙作用下三维边界层内被激发出非定常横流模态的感受性过程. 本课题组近年来也开展了三维边界层内被激发出横流模态的感受性问题的相关研究 [14,15], 获得了一些有意义的结果. 但是以上研究都忽略了平板前缘曲率变化对三维边界层感受性问题的作用. Lin 和 Malik [16] 以及文献 [17] 的研究可知, 前缘顶端曲率变化对二维边界层感受性过程有着显著的影响和作用. 因此, 开展不同前缘顶端曲率变化对三维边界层内被激发出非定常横流模态的感受性机制的作用研究具有重要的理论意义和实际应用价值.

## 2 控制方程和数值方法

### 2.1 控制方程

为便于研究, 选取椭圆形前缘后掠翼平板为物理模型, 并以椭圆形前缘的短轴长度  $b$  为特征长度、无穷远来流速度  $U_\infty$  为特征速度以及流体密度  $\rho$  为特征密度, 可获得三维、无量纲不可压缩 Navier-Stokes 方程:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{V}, \end{cases} \quad (1)$$

其中, 速度为  $\mathbf{V} = \mathbf{U} + \mathbf{V}'$ ,  $\mathbf{V}' = \{u, v, w\}^T$  为扰动速度,  $\mathbf{U} = \{U, V, W\}^T$  为数值求解 Navier-Stokes 方程获得椭圆形前缘后掠翼平板边界层基本流;  $p$  为压力; 雷诺数  $Re = (U_\infty b)/\nu$ , 且  $\nu$  为流体的运动黏性系数. 通过雅克比行列式变换  $J \equiv \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)}$ , 将曲线坐标系  $(x, y, z)$  化为直角坐标系  $(\xi, \eta, \zeta)$  问题进行数值计算 [18]. 控制方程的离散方法为: 时间偏导数采用四阶修正后的 Runge-Kutta 格式; 空间偏导数在  $x$  和  $y$  方向上采用紧致有限差分格式, 即对流项为五阶精度迎风紧致有限差分格式, 压力梯度项为六阶精度紧致有限差分, 在  $z$  向采用傅里叶级数展开; 黏性项为六阶精度紧

致有限差分格式; 压力方程利用四阶精度的有限差分格式迭代求解 [19].

### 2.2 自由来流湍流模型

自由来流中的扰动主要有以下形式: 声波扰动、涡波扰动以及自由来流湍流. 声波扰动以压力脉动的形式来激发感受性机制, 涡波扰动以单波扰动的形式来激发感受性过程以及自由来流湍流是以一群涡波扰动来激发感受性的物理现象. 在自然界和工程技术实践中, 自由来流湍流是普遍存在的; 通过构造一组单波扰动组成的波群来模拟自由来流湍流模型, 使研究课题更加接近于真实的物理问题. 本文依据文献 [20] 的思想, 构建各向异性的轴对称自由来流湍流模型, 表达式为

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\infty &= \begin{pmatrix} u_\infty \\ v_\infty \\ w_\infty \end{pmatrix} \\ &= \varepsilon \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N \sum_{j=-J}^J \begin{pmatrix} \hat{u}_\infty \\ \hat{v}_\infty \\ \hat{w}_\infty \end{pmatrix} \\ &\quad \times \exp[\mathbf{I}(m\kappa_1 x + j\kappa_2 y + n\kappa_3 z - m\kappa_1 t)], \end{aligned} \quad (2)$$

其中,

$$\begin{cases} \hat{u} = \sqrt{\Phi_1} e^{I\theta_1}, \\ \hat{v} = -\frac{\kappa_x \kappa_y}{\kappa_T^2} \sqrt{\Phi_1} e^{I\theta_1} - \frac{\kappa_z}{\kappa_T} \sqrt{\Phi_P - \frac{\kappa_x^2}{\kappa_T^2} \Phi_1} e^{I\theta_2}, \\ \hat{w} = -\frac{\kappa_x \kappa_z}{\kappa_T^2} \sqrt{\Phi_1} e^{I\theta_1} + \frac{\kappa_y}{\kappa_T} \sqrt{\Phi_P - \frac{\kappa_x^2}{\kappa_T^2} \Phi_1} e^{I\theta_2}, \end{cases}$$

这里  $I = \sqrt{-1}$ ;  $u_\infty$ ,  $v_\infty$  和  $w_\infty$  分别为无穷远来流中的自由来流湍流在  $x$ ,  $y$  和  $z$  方向上的扰动速度, 且  $\hat{u}_\infty$ ,  $\hat{v}_\infty$  和  $\hat{w}_\infty$  分别为  $u_\infty$ ,  $v_\infty$  和  $w_\infty$  的扰动速度谱;  $\varepsilon$  为自由来流湍流幅值;  $M$ ,  $J$  和  $N$  为选定的最大模数;  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  和  $\kappa_3$  分别为  $x$ ,  $y$  和  $z$  方向上的基本波数,  $\kappa_x = m\kappa_1$ ,  $\kappa_y = j\kappa_2$ ,  $\kappa_z = n\kappa_3$ ;  $\kappa_T = \sqrt{\kappa_y^2 + \kappa_z^2}$ ; 速度谱张量  $\Phi_1$ ,  $\Phi_P$  的公式为

$$\begin{cases} \Phi_1 = \frac{E(\kappa_0) \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3}{4\pi} \frac{\kappa_{y_0}^2 + \kappa_{z_0}^2}{C_d^2 (C_d^{-3} \kappa_{x_0}^2 + \kappa_{y_0}^2 + \kappa_{z_0}^2)^2}, \\ \Phi_P = \frac{E(\kappa_0) \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3}{4\pi} \frac{C_d}{(C_d^{-3} \kappa_{x_0}^2 + \kappa_{y_0}^2 + \kappa_{z_0}^2)^2} \\ \quad \times \left[ \begin{aligned} &2C_d^{-3} \kappa_{x_0}^2 + \kappa_{y_0}^2 + \kappa_{z_0}^2 \\ & - \frac{(1 - C_d^{-3})(\kappa_{y_0}^2 + \kappa_{z_0}^2) \kappa_{x_0}^2}{\kappa_0^2} \end{aligned} \right], \end{cases}$$

且

$$\begin{cases} k_x = k_{x0}/C_d, \\ k_y = C_d^{1/2}k_{y0}, \\ k_z = C_d^{1/2}k_{z0}, \end{cases}$$

其中,  $C_d$  为轴对称的自由来流湍流的压缩系数;  $k_{x0}$ ,  $k_{y0}$  和  $k_{z0}$  是各向同性湍流的波数,  $k_o = \sqrt{k_{x0}^2 + k_{y0}^2 + k_{z0}^2}$ . 当压缩系数  $C_d = 1$  时, 自由来流湍流模型为各向同性湍流; 而压缩系数  $C_d \neq 1$  时, 自由来流湍流模型为各向异性湍流.

### 2.3 计算区域和网格生成

图 1 为研究具有不同椭圆形前缘后掠翼平板边界层内被激发产生的非定常横流模态的感受性过程计算区域, 其中,  $a$  为椭圆形前缘长轴,  $b$  为椭圆形前缘短轴; 相对应的椭圆形前缘顶端曲率半径  $R^* = b^2/a$  以及采用特征长度  $b$  无量纲化后的前缘顶端曲率半径  $R = b/a$ , 则无量纲的前缘顶端曲率  $K = 1/R$ ; 流向区域  $x \in [-50, 600]$ , 且平板前缘的流向位置位于  $x = 0$ ; 法向区域  $y \in [-11, 11]$ , 展向区域  $z \in [-Z/2, Z/2]$ , 展向宽度  $Z = 2\pi/\kappa_3$ , 后掠角  $\Phi_{BS}$  为无穷远来流  $U_\infty$  方向与  $x$  轴之间的夹角, 本文选取后掠角  $\Phi_{BS} = 45^\circ$ ; 雷诺数选为  $Re = 2400$ ; 并采用泊松方程 (3) [18] 生成椭圆形前缘后掠翼平板在  $xoy$  平面上的贴体网格,  $z$  方向上则采用均匀网格.

$$\begin{cases} \phi_1 x_{\xi\xi} - 2\phi_2 x_{\xi\eta} + \phi_3 x_{\eta\eta} = -J^2(Px_\xi + Qx_\eta), \\ \phi_1 y_{\xi\xi} - 2\phi_2 y_{\xi\eta} + \phi_3 y_{\eta\eta} = -J^2(Py_\xi + Qy_\eta), \end{cases}$$

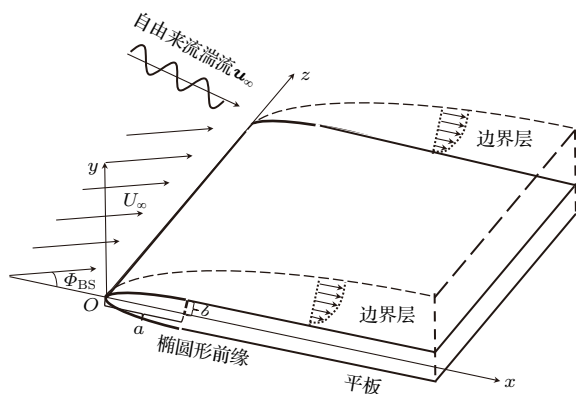


图 1 计算区域示意图

Fig. 1. Computational domain.

$$\begin{cases} \phi_1 = x_\eta^2 + y_\eta^2, \\ \phi_2 = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta, \\ \phi_3 = x_\xi^2 + y_\xi^2. \end{cases} \quad (3)$$

(3) 式是通过源项函数  $P$  和  $Q$  控制网格在壁面处保持正交, 并在平板前缘驻点以及壁面附近加密网格, 以确保数值计算的准确性, 计算网格数为  $800 \times 200 \times 16$ .

### 2.4 边界条件

壁面边界条件: 壁面上采用无滑移条件, 即扰动速度  $u = v = w = 0$ , 法向压力梯度  $\partial p / \partial n = 0$ .

无穷远边界条件: 扰动速度有自由来流湍流模型 (2) 式给出; 压力  $p = 0$ .

出流边界条件: 压力梯度  $\partial p / \partial x = 0$ ; 扰动速度采用无反射条件.

展向采用周期性边界条件.

## 3 数值结果与分析

本文研究在自由来流湍流作用下具有不同椭圆形前缘后掠翼平板边界层内被激发非定常横流模态的感受性过程, 并通过流动稳定性理论证明在自由来流湍流作用下激发具有不同椭圆形前缘后掠翼平板边界层内被诱导非定常横流模态的感受性机制是真实存在的, 具体过程与文献 [15] 相同, 不再赘述.

本文重点关注的是不同椭圆形前缘顶端曲率变化对三维(后掠翼平板)边界层内被激发出非定常横流模态的感受性过程的作用; 揭示具有不同椭圆形前缘顶端曲率情况下后掠翼平板(三维)边界层内被激发出非定常横流模态的感受性问题与自由来流湍流度、运动方向以及各向异性自由来流湍流等关键因素的影响. 为方便比较, 定义无量纲频率  $F = 2\pi f\nu/U_\infty^2 \times 10^6$ ; 数值计算发现, 当  $y > 6$  时边界层外缘的扰动速度均方根值, 经长时间 ( $t > 500$ ) 计算趋于稳定值; 定义边界层外缘的扰动速度均方根稳定值为自由来流湍流度  $A_{FST}$ , 其表达式为

$$A_{FST} = \sqrt{u_{FST}^2 + v_{FST}^2 + w_{FST}^2}, \quad (4)$$

这里,  $\overline{u_{FST}^2}$ ,  $\overline{v_{FST}^2}$  和  $\overline{w_{FST}^2}$  分别为  $x$ ,  $y$  和  $z$  方向上经无穷远来流速度  $U_\infty$  无量纲化后扰动速度平方的



时均值。当选用自由来流湍流模型中的初始幅值  $\varepsilon = 0.0004$  时, 经长时间数值计算获得自由来流湍流度  $A_{FST} = 0.1\%$ 。

首先, 研究各向同性自由来流湍流作用下具有不同椭圆形前缘三维(后掠翼平板)边界层感受性机制; 选取压缩系数  $C_d = 1$ , 流向基本波数  $\kappa_1 = 0.036$ , 最大模数  $M = 8$ , 法向波数  $\kappa_y = 0.01$ , 展向波数  $\kappa_z = 0.24$ 。

图2给出了自由来流湍流作用下激发具有不同前缘顶点曲率情况的三维(后掠翼平板)边界层内产生非定常横流模态的流向扰动速度波包结构沿传播方向  $S$  的演化规律, 波包传播方向与  $x$  轴之间的夹角为  $\theta_g$ 。由图2可知, 当椭圆形前缘顶端曲率较小时, 三维边界层内被激发出非定常横流模态的流向扰动速度波包的最大幅值沿传播方向  $S$  的演化趋势, 要明显大于椭圆形前缘顶端曲率较大时三维边界层内被激发出非定常横流模态的流向扰动速度波包的最大幅值沿传播方向  $S$  的演化;

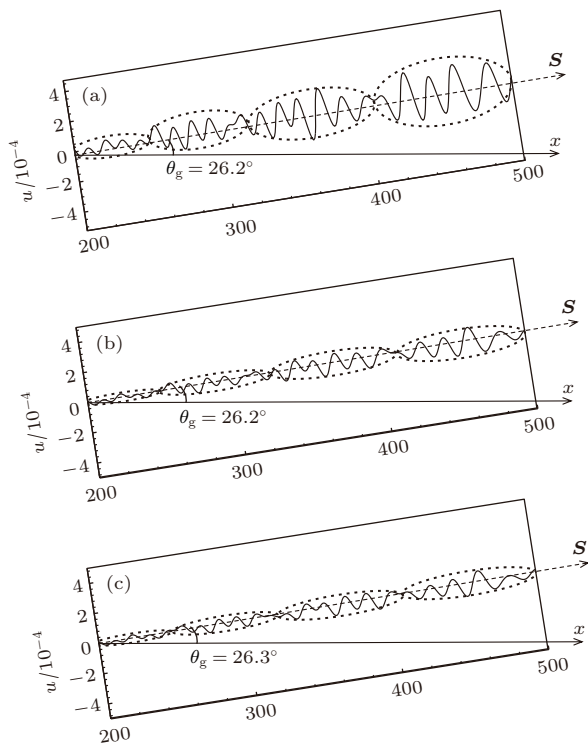


图2 在不同前缘曲率情况下三维(后掠翼平板)边界层内被激发出非定常横流模态的流向扰动速度波包沿传播方向  $S$  的演化 (a)  $K = 4$ ; (b)  $K = 20$ ; (c)  $K = 40$   
 Fig. 2.  $S$ -direction evolution of streamwise perturbation velocity wave packets of the excited unsteady cross-flow vortices in the three-dimensional (swept-plate) boundary layer with different leading-edge curvatures: (a)  $K = 4$ ; (b)  $K = 20$ ; (c)  $K = 40$ .

但是, 具有不同椭圆形前缘顶端曲率情况下, 三维(后掠翼平板)边界层内被激发出非定常横流模态的流向扰动速度波包沿传播方向  $S$  的空间演化规律具有完全的相似性和对称性, 且相位相同。

跟踪记录不同时刻具有不同椭圆形前缘顶端曲率情况下三维边界层内被激发出非定常横流模态的流向扰动速度波包结构所有的最大值、最小值以及零点的位置, 近似计算获得波包沿传播方向  $S$  的平均群速度以及波包传播方向  $S$  与流向  $x$  方向之间的夹角为  $\theta_g$ , 结果如表1所列。从表1可知, 在不同椭圆形前缘顶端曲率情况下, 三维边界层内被激发出非定常横流模态的扰动波波包传播方向以及传播的平均群速度几乎保持不变, 它们之间的最大相对误差均小于1%。

表1 三维边界层内被激发出的非定常横流扰动波波包传播方向和平均群速度  
 Table 1. Propagation direction and average group speed of the excited unsteady cross-flow vortices in the three-dimensional boundary layer.

	$K$						
	4	8	12	16	20	40	$\infty$ (无限薄平板)
$\theta_g$	26.2	26.2	26.2	26.3	26.2	26.3	26.4
$C_g$	0.3245	0.3242	0.3238	0.3234	0.3231	0.3228	0.3227

数值计算了在不同前缘顶端曲率情况下三维边界层内被激发出非定常横流模态的感受性系数  $\Lambda$ 。感受性系数  $\Lambda$  为三维边界层内被感受出非定常横流模态的扰动波波包的最大初始幅值  $A_{CF}$  与自由来流湍流度  $A_{FST}$  之比, 数学表达式为

$$\Lambda = A_{CF}/A_{FST}. \quad (5)$$

图3显示, 当前缘顶端曲率  $K \geq 2$  时, 随着椭圆形前缘顶点曲率的不断增大, 椭圆形前缘三维边界层内被激发出非定常横流模态的感受性系数  $\Lambda$  将快速衰减, 直至衰减到某一阈值 ( $K = 25$ ) 后无论前缘顶端曲率如何增大, 三维边界层内被激发出非定常横流模态的感受性系数  $\Lambda$  几乎趋于平缓状态。

其次, 采用时间傅里叶分析的方法, 从图2中分别提取获得一组不同频率的非定常横流模态的扰动波。图4给出了在前缘顶端曲率  $K$  分别为4, 20和40的情况下, 三维边界层内被激发出的具有典型性两种频率的非定常横流模态的扰动波流向扰动速度沿传播方向  $S$  的演化过程。图4显示, 无

论椭圆形前缘顶端曲率如何变化, 三维边界层内被激发出的具有典型性两种频率的非定常横流模态的扰动波流向扰动速度沿传播方向  $S$  的分布结构完全相似, 且相位相同; 惟一的区别是三维边界层内被激发出的非定常横流模态的扰动波流向扰动速度的幅值不同. 即椭圆形前缘顶端曲率较小时三维边界层内被激发出的非定常横流模态的流向扰动速度的幅值要明显大于椭圆形前缘顶端曲率较大时三维边界层内被激发出的非定常横流模态的流向扰动速度的幅值.

依据图 4 具有不同椭圆形前缘三维 (后掠翼平板) 边界层内被激发出非定常横流模态的流向扰动

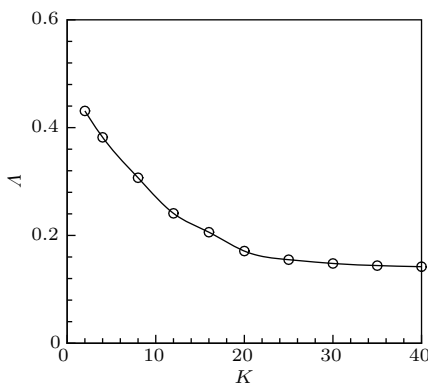


图 3 三维边界层内被激发出非定常横流模态的感受性系数  $\Lambda$  与前缘顶端曲率  $K$  之间的关系  
Fig. 3. Relation between leading-edge curvature  $K$  and receptivity coefficient  $\Lambda$  of the excited unsteady cross-flow vortices in the three-dimensional boundary layer.

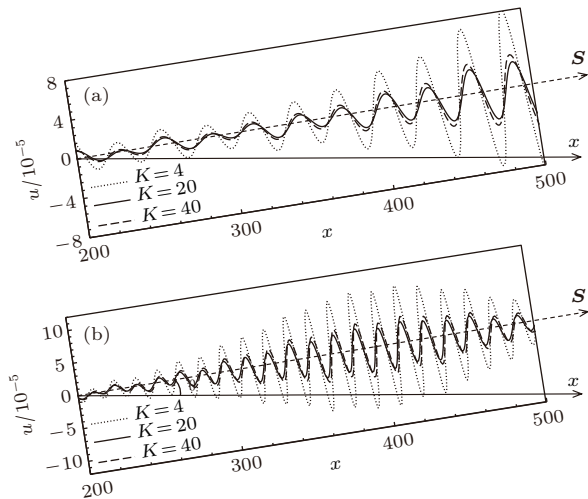


图 4 三维边界层内被激发出的非定常横流模态的流向扰动速度沿传播方向  $S$  的演化 (a)  $F = 30$ ; (b)  $F = 60$   
Fig. 4.  $S$ -direction evolutions of streamwise perturbation velocities of excited unsteady cross-flow vortices in the three-dimensional boundary layer: (a)  $F = 30$ ; (b)  $F = 60$ .

速度沿传播方向  $S$  的演化规律, 可以近似计算相邻波峰与波峰和波谷与波谷之间的幅值之比, 并分别取对数后被波峰与波峰和波谷与波谷之间的距离相除后再取平均获得增长率, 则近似求得具有不同椭圆形前缘三维边界层内被激发出非定常横流模态的扰动波的增长率沿传播方向  $S$  的演化, 如图 5 所示. 由图 5 可知, 无论是椭圆形前缘顶端曲率如何变化, 三维边界层内被激发出非定常横流模态的扰动波的增长率沿传播方向  $S$  的演化规律几乎保持不变, 它们之间产生的最大相对误差约为 1%.

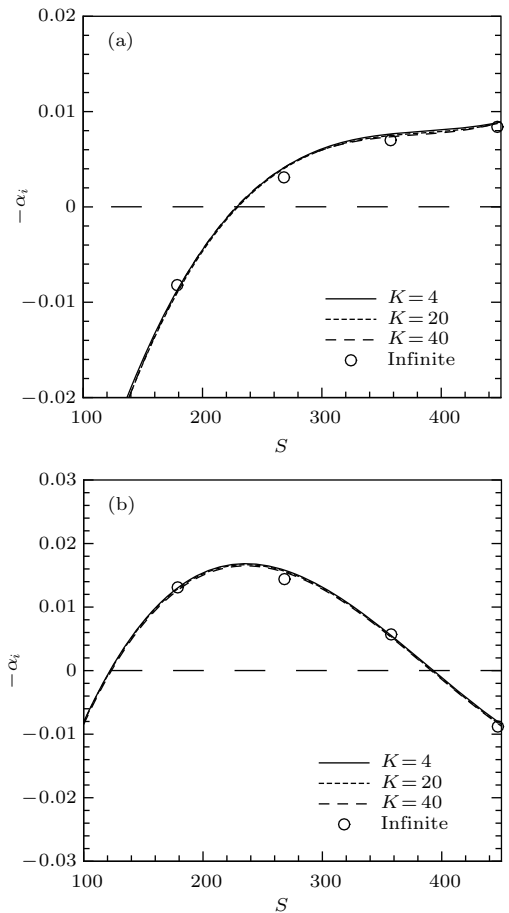


图 5 三维边界层内被激发出的非定常横流扰动模态的增长率  $(-\alpha_i)$  在传播方向  $S$  的演化 (a)  $F = 30$ ; (b)  $F = 60$   
Fig. 5.  $S$ -direction evolutions of growth rates  $(-\alpha_i)$  of the excited unsteady cross-flow vortices in the three-dimensional boundary layer: (a)  $F = 30$ ; (b)  $F = 60$ .

再依据图 4 还可以求得三维边界层内被激发产生的非定常横流模态的扰动波的平均流向波数 (或波长) 以及沿流向传播的平均相速度, 结果详见表 2 和表 3. 表 2 和表 3 分别列出了不同前缘顶端曲率情况下, 三维边界层内被激发产生的不同频率

非定常横流模态的扰动波的平均流向波数和平均相速度, 结果发现无论是椭圆形前缘顶端曲率如何变化, 三维边界层内被激发出非定常横流模态的所有扰动波的平均流向波数和平均相速度几乎保持不变, 它们之间产生的最大相对误差为 1%.

另外, 同样在自由来流湍流作用下和在流向基本波数  $\kappa_1 = 0.036$  以及最大模数  $M = 8$  不变的基础上, 数值研究除了法向波数  $\kappa_y = 0.01$  和展向波数  $\kappa_z = 0.24$  之外的其他不同的法向波数和展向波数情况下具有不同椭圆形前缘三维(后掠翼平板)边界层感受性机制, 获得的结论与上述结论完全相同.

表 2 具有不同椭圆形前缘顶端曲率情况下三维边界层内被激发出的非定常横流扰动波的平均流向波数

Table 2. Average streamwise wave numbers of excited unsteady cross-flow vortices in the three-dimensional boundary layer with different leading-edge curvatures.

	K						$\infty$ (无限薄平板)
	4	8	12	16	20	40	
$F = 30$	0.2038	0.2041	0.2044	0.2047	0.2050	0.2051	0.2051
$F = 45$	0.3009	0.3012	0.3016	0.3019	0.3023	0.3025	0.3026
$F = 60$	0.3932	0.3936	0.3940	0.3944	0.3949	0.3950	0.3951
$F = 75$	0.4812	0.4817	0.4822	0.4828	0.4833	0.4834	0.4836

表 3 具有不同椭圆形前缘顶端曲率情况下三维边界层内被激发出的非定常横流扰动波的平均相速度

Table 3. Average phase speeds of excited unsteady cross-flow vortices in the three-dimensional boundary layer with different leading-edge curvatures.

	K						$\infty$ (无限薄平板)
	4	8	12	16	20	40	
$F = 30$	0.2287	0.2285	0.2284	0.2283	0.2281	0.2281	0.2281
$F = 45$	0.2806	0.2804	0.2802	0.2800	0.2798	0.2797	0.2796
$F = 60$	0.3126	0.3124	0.3121	0.3119	0.3116	0.3116	0.3115
$F = 75$	0.3347	0.3345	0.3342	0.3339	0.3336	0.3335	0.3334

最后, 研究自由来流湍流的强度和运动方向对三维边界层感受性问题的作用, 并选取自由来流湍流基本波数  $\kappa_1 = 0.036$ 、法向波数  $\kappa_y = 0.01$ 、展向波数  $\kappa_z = 0.24$ .

图 6 给出了在不同前缘顶端曲率情况下, 三维边界层内被激发出的非定常横流模态的扰动波波

包的最大初始幅值  $A_{CF}$  与施加的自由来流湍流强度  $A_{FST}$  之间的关系(在图 6 中被感受出的非定常横流模态的扰动波波包的最大初始幅值  $A_{CF}$  已被自由来流湍流强度  $A_{FST} = 0.1\%$  时被激发的非定常横流模态的扰动波波包的最大初始幅值  $A_0$  归一化). 从图 6 可知, 无论是椭圆形前缘顶端曲率如何变化, 当自由来流湍流强度  $A_{FST} \leq 1.0\%$  时, 三维边界层内被激发产生的非定常横流模态的扰动波波包的最大初始幅值与自由来流湍流强度之间成线性增长规律.

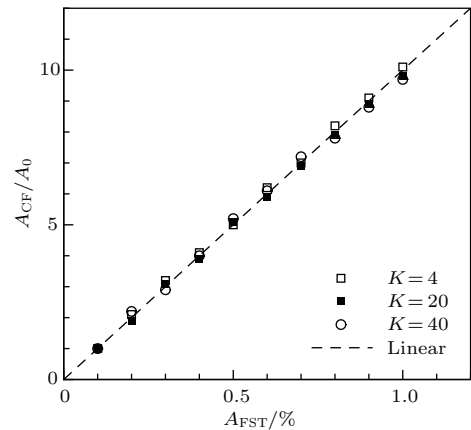


图 6 具有不同椭圆形前缘三维边界层内被激发出非定常横流模态的扰动波波包的最大初始幅值与自由来流湍流强度  $A_{FST}$  之间的关系

Fig. 6. Relation between free-stream turbulence intensity  $A_{FST}$  and initial amplitudes of excited unsteady cross-flow vortices in the three-dimensional boundary layer with different leading-edge curvatures.

由于真实的湍流运动一股都具有随机性和不确定性, 因此, 深入研究自由来流湍流运动方向对具有椭圆形前缘三维(后掠翼平板)边界层感受性问题的作用是很有意义的. 在这里, 仍选取自由来流湍流强度  $A_{FST} = 0.1\%$  保持不变, 然后, 通过分别改变自由来流湍流的流向波数、法向波数以及展向波数来改变自由来流湍流的运动方向, 探讨自由来流湍流的运动方向对三维边界层感受性问题的作用和影响. 为便于分析, 自由来流湍流的运动方向采用图 7 所示的纬度角  $\varphi$  和经度角  $\theta$  来表示.

在自由来流湍流的流向基本波数  $\kappa_1 = 0.036$  和展向波数  $\kappa_z = 0.24$  不变的情况下, 通过改变法向波数  $\kappa_y$  来研究自由来流湍流的纬度角  $\varphi$  变化对三维边界层感受性问题的作用. 图 8 给出了三维边界层内被激发出的非定常横流模态的感受性系数  $\Lambda$  与纬度角  $\varphi$  之间的关系. 由图 8 可知, 随着纬度角  $\varphi$  的不断增大, 三维边界层内被激发出的非定

常横流模态的感受性系数  $\Lambda$  将快速增长, 直至纬度角  $\varphi$  约为  $-20^\circ$  时, 感受性系数  $\Lambda$  达到最大值, 随后当纬度角  $\varphi$  继续增大时感受性系数  $\Lambda$  将趋于较快的衰减过程. 另外, 从图 8 还发现无论纬度角  $\varphi$  如何变化, 当椭圆形前缘顶端曲率越小时, 三维边界层内被激发出的非定常横流模态的感受性能力就越强.

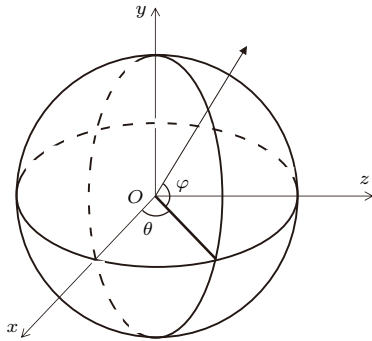


图 7 三维角度示意图  
Fig. 7. Three-dimensional angles.

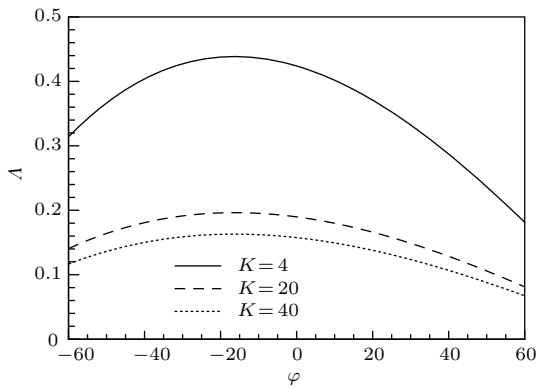


图 8 具有不同椭圆形前缘三维边界层内被激发出非定常横流模态的感受性系数  $\Lambda$  与纬度角  $\varphi$  之间的关系  
Fig. 8. Relation between angle  $\varphi$  and receptivity coefficient  $\Lambda$  of excited unsteady cross-flow vortices in the three-dimensional boundary layer with different leading-edge curvatures.

在自由来流湍流流向基本波数  $\kappa_1 = 0.025$  和法向波数  $\kappa_y = 0.01$  不变的情况下, 通过改变展向波数  $\kappa_z$  来研究自由来流湍流的经度角  $\theta$  改变对三维边界层内被激发出非定常横流模态的感受性影响. 由图 9 可知, 当经度角  $\theta \leq 30^\circ$  时, 三维边界层内被激发出的非定常横流模态的感受性系数  $\Lambda$  增长十分缓慢; 但是, 当经度角  $\theta > 30^\circ$  后, 三维边界层内被激发出的非定常横流模态的感受性系数  $\Lambda$  将快速增长. 从图 9 还可获知, 当椭圆形前缘顶端曲率越小时, 三维边界层内被激发出非定常横流模态的感受性系数随经度角  $\theta$  的增长将更加显著.

在工程实际中的自由来流湍流大多数都是各向异性的湍流, 目前对各向异性湍流作用激发三维边界层内产生非定常横流模态的感受性机制研究的相关报道十分少见. 因此, 开拓各向异性的自由来流湍流作用激发三维边界层感受性机制方面的理论研究是十分有意义的. 为便于研究, 仅考虑各向异性的轴对称湍流. 在这里通常改变轴对称自由来流湍流的压缩系数  $C_d$  来达到反映自由来流湍流的各向异性程度, 当轴对称自由来流湍流的压缩系数  $C_d$  越大时, 反映轴对称自由来流湍流的各向异性程度就越强; 反之, 当轴对称自由来流湍流的压缩系数  $C_d$  越小时, 反映轴对称自由来流湍流的各向异性程度就越弱, 也就越接近于压缩系数  $C_d = 1$  情况下的各向同性自由来流湍流.

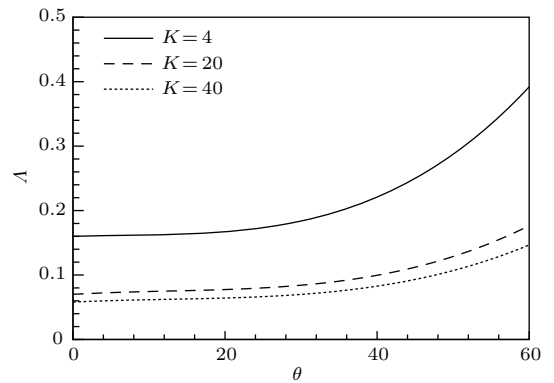


图 9 具有不同椭圆形前缘三维平板边界层内被激发出非定常横流模态的感受性系数  $\Lambda$  与经度角  $\theta$  之间的关系  
Fig. 9. Relation between angle  $\theta$  and receptivity coefficient  $\Lambda$  of excited unsteady cross-flow vortices in the three-dimensional boundary layer with different leading-edge curvatures.

本文选取自由来流湍流基本波数  $\kappa_{10} = 0.036$ 、法向波数  $\kappa_{y0} = 0.01$ 、展向波数  $\kappa_{z0} = 0.24$  以及施加在外缘的自由来流湍流度  $A_{FST} = 0.1\%$ . 图 10 给出了在具有不同椭圆形前缘顶端曲率情况下, 三维边界层内被激发出的非定常横流模态的感受性系数  $\Lambda$  与压缩系数  $C_d$  之间的联系. 由图 10 可知, 随着压缩系数  $C_d$  的不断增大, 具有不同椭圆形前缘三维 (后掠翼平板) 边界层内被激发产生的非定常横流模态的感受性系数  $\Lambda$  也将快速增大, 其原因可能是自由来流湍流的各向异性程度越剧烈, 三维边界层内就越容易被激发出更强的感受性机制. 另外, 当椭圆形前缘顶端曲率越小时, 三维边界层内被激发出非定常横流模态的感受性系数随压缩系数  $C_d$  的增长将更加显著.



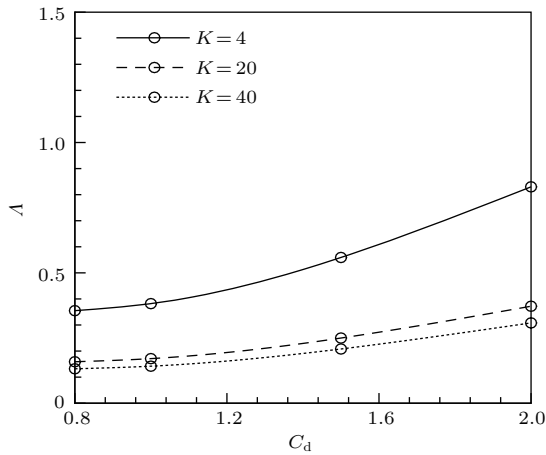


图 10 具有不同椭圆形前缘三维边界层内被激发出非定常横流模态的感受性系数  $\Lambda$  与压缩系数  $C_d$  之间的联系

Fig. 10. Relation between contraction ratio  $C_d$  and receptivity coefficient  $\Lambda$  of excited unsteady cross-flow vortices in the three-dimensional boundary layer with different leading-edge curvatures.

#### 4 结 论

研究了前缘曲率对三维边界层内被激发出的非定常横流模态的作用, 获得了如下结论.

1) 在自由来流湍流作用下, 无论是后掠翼平板前缘顶端曲率如何变化, 三维边界层内都能被激发出非定常横流模态的感受性过程. 当椭圆形前缘顶端曲率逐渐增大时, 三维边界层内被激发出的非定常横流模态的感受性系数将快速衰减, 直至前缘顶端曲率  $K$  约大于 25 后三维边界层内被激发出的非定常横流模态的感受性系数将趋于平稳状态; 其次, 无论后掠翼平板前缘顶端曲率大小是多少, 三维边界层内被激发出的非定常横流模态的扰动波波包向下游传播群速度和传播方向完全相同以及波包沿传播方向上的空间演化结构具有完全的对称性和相似性, 且相位相同; 惟一区别是波包在空间分布的幅值大小不同而已.

2) 通过时间傅里叶变换分析方法, 从具有不同椭圆形前缘三维(后掠翼平板)边界层内被激发出非定常横流模态的扰动波波包中提取获得了一组不同频率扰动波. 结果发现: 无论是椭圆形前缘顶端曲率如何变化, 三维(后掠翼平板)边界层内被激发出的一组不同频率扰动波的增长率、色散关系和相速度几乎保持不变; 当椭圆形前缘顶端曲率越小时, 三维边界层内被激发出的不同频率扰动波的幅值就越大; 反之, 当椭圆形前缘顶端曲率越大时, 三维边界层内被激发出的不同频率扰动波的幅值就

越小; 也就是说椭圆形前缘非平行性影响越强, 三维边界层内被激发出的非定常横流模态的感受性能力就越强; 反之, 椭圆形前缘非平行性影响越弱, 三维边界层内被激发出的非定常横流模态的感受性能力就越弱.

3) 自由来流湍流速度与三维边界层内被激发产生的非定常横流模态的扰动波波包的最大初始幅值之间成线性增长关系. 当自由来流湍流运动方向的纬度角不断增大时, 三维边界层内被激发出的非定常横流模态的感受性系数将逐渐增长; 直至当纬度角  $\varphi$  约为  $-20^\circ$  时, 感受性系数达到最大值; 当纬度角继续增大时, 感受性系数开始趋于衰减状态. 当自由来流湍流运动方向的经度角不断增大时, 三维边界层内被激发出的非定常横流模态的感受性系数一开始增长得十分缓慢, 直至经度角大于  $30^\circ$  后三维边界层内被激发出的非定常横流模态的感受性系数将快速增长.

4) 不同自由来流湍流的各向异性程度对三维边界层感受性问题的作用研究发现: 自由来流湍流的各向异性程度越剧烈, 三维边界层内被激发产生的感受性能力就越强; 反之, 自由来流湍流的各向异性程度越弱, 三维边界层内被激发产生的感受性能力就越弱.

5) 数值计算结果还揭示出同一结论: 在自由来流湍流作用下, 当椭圆形前缘顶端曲率越小时, 三维(后掠翼平板)边界层内就越容易被感受到非定常横流模态; 反之, 当椭圆形前缘顶端曲率越大时, 三维(后掠翼平板)边界层内就越难以被感受到非定常横流模态.

#### 参考文献

- [1] Saric W S, Reed H L, Edward W B 2003 *Annu. Rev. Fluid. Mech.* **35** 413
- [2] Bippes H 1999 *Prog. Aerosp. Sci.* **35** 363
- [3] Radeztsky R H, Reibert M S, Saric W S 1999 *AIAA J.* **37** 1370
- [4] Deyhle H, Bippes H 1996 *J. Fluid. Mech.* **316** 73
- [5] Reibert M S, Saric W S 1997 *28th Fluid Dynamics Conference Snowmass Village, CO, USA, June 29–July 2, 1997* p1816
- [6] Kurz H B E, Kloker M J 2014 *J. Fluid. Mech.* **755** 62
- [7] Bertolotti F P 2000 *Phys. Fluid.* **12** 1799
- [8] Collis S S, Lele S K 1999 *J. Fluid. Mech.* **380** 141
- [9] Schrader L U, Brandt L, Henningson D S 2009 *J. Fluid. Mech.* **618** 209
- [10] Schrader L U, Brandt L, Mavriplis C 2010 *J. Fluid. Mech.* **653** 245

- [11] Tempelmann D, Schrader L U, Hanifi A, et al. 2011 *6th AIAA Theoretical Fluid Mechanics Conference Honolulu, Hawaii, USA, June 27–30, 2011* p3294
- [12] Tempelmann D, Schrader L U, Hanifi A 2012 *J. Fluid. Mech.* **711** 516
- [13] Borodulin V I, Ivanov A V, Kachanov Y S 2013 *J. Fluid. Mech.* **716** 487
- [14] Shen L Y, Lu C G 2016 *Acta Phys. Sin.* **65** 014703 (in Chinese) [沈露予, 陆昌根 2016 物理学报 **65** 014703]
- [15] Lu C G, Shen L Y 2017 *Acta Phys. Sin.* **66** 204702 (in Chinese) [陆昌根, 沈露予 2017 物理学报 **66** 204702]
- [16] Lin R S, Malik M R 1997 *J. Fluid. Mech.* **333** 125
- [17] Shen L Y, Lu C G 2018 *Acta Phys. Sin.* **67** 184703 (in Chinese) [沈露予, 陆昌根 2018 物理学报 **67** 184703]
- [18] Hoffmann K A, Chiang S T 2000 *Computational Fluid Dynamics (Vol. I)* (Kansas: Engineering Education System) p358
- [19] Shen L Y, Lu C G 2016 *Appl. Math. Mech.* **37** 349
- [20] Zhang Y, Zaki T, Sherwin S, Wu X 2011 *6th AIAA Theoretical Fluid Mechanics Conference Hawaii, USA, June 27–30, 2011* p3292

# Influence of leading-edge curvature on excited unsteady cross-flow vortices in three-dimensional boundary-layer\*

Lu Chang-Gen<sup>†</sup> Shen Lu-Yu

(School of Marine Sciences, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044, China)

( Received 11 July 2018; revised manuscript received 29 July 2018 )

## Abstract

Three-dimensional boundary-layer receptivity is the first stage of the laminar-turbulent transition in a three-dimensional boundary layer, and also a key issue for predicting and controlling the laminar-turbulent transition in the three-dimensional boundary layer. At a high turbulence level, the three-dimensional boundary-layer instability in the transition is caused mainly by the unsteady cross-flow vortices. And the leading-edge curvature has a significant influence on three-dimensional boundary-layer receptivity. In view of this, the direct numerical simulation is utilized in this paper to study the mechanism of receptivity to exciting unsteady cross-flow vortices in the three-dimensional (swept-plate) boundary layer with various elliptic leading edges. In order to solve the Navier-Stokes equation numerically, a modified fourth-order Runge-Kutta scheme is introduced for discretization in time; high-order compact finite difference schemes are utilized for discretization in the  $x$ - and  $y$ -direction; and Fourier transform is used in the  $z$ -direction. The pressure Helmholtz equation is solved by a fourth-order iterative scheme. Additionally, the numerical calculation is performed in the curvilinear coordinate system via Jacobi transform. And the elliptic equation technique is used to generate the body-fitted mesh. The effect of leading-edge curvature on the propagation speed and direction, distribution and receptivity coefficient of the excited unsteady cross-flow vortex wave packet, and the amplitude, dispersion relation and growth rate of the extracted unsteady cross-flow vortex are revealed. In addition, the inner link among the receptivity to unsteady cross-flow vortex, intensity, and direction of free-stream turbulence is established. Furthermore, the receptivity to anisotropic free-stream turbulence is also analyzed in detail. The numerical results indicate that the more intense receptivity to the unsteady cross-flow vortex wave packets is triggered with a smaller leading-edge curvature; whereas, the less intense receptivity is triggered with a greater leading-edge curvature. The receptivity to the unsteady cross-flow vortex wave packets in different curvatures are also found to vary with the angle of free-stream turbulence. Moreover, the anisotropic degree of free-stream turbulence can affect the excitation of the unsteady cross-flow vortex obviously. Through the above study, a further step can be taken to understand the prediction and control of laminar-turbulent transition in the three-dimensional boundary layer and also improve the theory of the hydrodynamic stability.

**Keywords:** receptivity, leading-edge curvature, unsteady cross-flow vortex

**PACS:** 47.20.Pc, 47.20.-k, 47.27.ek

**DOI:** 10.7498/aps.67.20181343

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11472139), the Natural Science Foundation of the Higher Education Institutions of Jiangsu Province, China (Grant No. 17KJB130008), and the Priority Academic Program Development of Jiangsu Higher Education Institutions (PAPD).

† Corresponding author. E-mail: [cglu@nuist.edu.cn](mailto:cglu@nuist.edu.cn)