物理学报 Acta Physica Sinica

Chinese Physical Society

Institute of Physics, CAS

场方法的改进及其在积分Riemann-Cartan空间运动方程中的应用

王勇 梅凤翔 曹会英 郭永新

Improvement of field method and its application to integrating motion equation in Riemann-Cartan space

Wang Yong Mei Feng-Xiang Cao Hui-Ying Guo Yong-Xin

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 67, 034501 (2018) DOI: 10.7498/aps.20171583

在线阅读 View online: http://dx.doi.org/10.7498/aps.20171583

当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2018/V67/I3

场方法的改进及其在积分Riemann-Cartan空间运动方程中的应用*

王勇[1)2)] 梅凤翔[1)] 曹会英[2)] 郭永新[3)4)†]

1) (北京理工大学宇航学院, 北京 100081)

2) (广东医科大学信息工程学院, 东莞 523808)

3) (辽宁大学物理学院, 沈阳 110036)

4) (辽东学院影像物理教研室, 丹东 118001)

(2017 年 7 月 9 日收到; 2017 年 9 月 27 日收到修改稿)

和Hamilton-Jacobi方法类似, Vujanović场方法把求解常微分方程组特解的问题转化为寻找一个一阶拟线性偏微分方程(基本偏微分方程)完全解的问题, 但Vujanović场方法依赖于求出基本偏微分方程的完全解, 而这通常是困难的, 这就极大地限制了场方法的应用. 本文将求解常微分方程组特解的Vujanović场方法改进为寻找动力学系统运动方程第一积分的场方法, 并将这种方法应用于一阶线性非完整约束系统Riemann-Cartan位形空间运动方程的积分问题中. 改进后的场方法指出, 只要找到基本偏微分方程的包含m ($m \leqslant n$, n为基本偏微分方程中自变量的数目)个任意常数的解, 就可以由此找到系统m个第一积分. 特殊情况下, 如果能够求出基本偏微分方程的完全解(完全解是$m = n$时的特例), 那么就可以由此找到系统全部第一积分, 从而完全确定系统的运动. Vujanović场方法等价于这种特殊情况.

关键词: 场方法, 第一积分, Riemann-Cartan空间, 非完整约束系统

PACS: 45.20.Jj, 02.40.Yy **DOI:** 10.7498/aps.67.20171583

1 引 言

Hamilton-Jacobi方法是求解Hamilton正则方程的重要方法, 其特点之一是把求解常微分方程组通解的问题转化为寻找一个一阶非线性偏微分方程(Hamilton-Jacobi方程)完全解的问题. 经典Hamilton-Jacobi方法本质上体现了完整保守系统Hamilton正则方程与Hamilton-Jacobi方程特征曲线之间的关系, 因而被广泛应用于经典力学、几何光学、流体力学、粒子物理、广义相对论、量子力学、宇宙学、最优控制、化学等诸多研究领域. 但由于存在非常严苛的限制, 经典Hamilton-Jacobi方法很难直接推广至非完整或非保守系统中[1]. 20世纪80年代, 南斯拉夫学者Vujanović[2−4]提出了用于处理完整非保守问题的场方法, 和Hamilton-Jacobi方法类似, 这种方法把求解常微分方程组满足初始条件特解的问题转化为寻找一个一阶拟线性偏微分方程(基本偏微分方程)完全解的问题. 由于没有像Hamilton-Jacobi方法那样强的限制条件, Vujanović场方法很快被推广至非完整系统、Birkhoff系统和可控力学系统等诸多研究领域中, 取得了一系列重要研究成果[5−19]. 但Vujanović场方法在实际应用中仍然存在一个基本困难, 即Vujanović场方法依赖于求出基本偏微分方程的完全解, 而这通常是很困难的.

* 国家自然科学基金(批准号: 11772144, 11572145, 11272050, 11572034, 11202090, 11472124)和广东省自然科学基金(批准号: 2015AO30310178)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: yxguo@lnu.edu.cn

本文把Vujanović场方法改进为寻找动力学系统第一积分的场方法. 改进后的场方法只要能够找到基本偏微分方程的包含若干个任意常数的解(完全解是此类解中包含有最多数目任意常数的特例), 那么就可以由此找到系统若干个第一积分. 特殊地, 如果能够求出基本偏微分方程的完全解, 那么就可以由此找到系统全部第一积分, 从而完全确定系统的运动, Vujanović场方法等价于这种特殊情况.

然后本文使用改进后的场方法来积分Riemann-Cartan空间中的运动方程. 在我们已有的研究中已经指出[20−24], 对一些比较复杂的一阶线性定常齐次非完整约束系统, 可以先用一阶线性非完整映射把系统的位形空间约化为低维Riemann-Cartan空间, 从而使问题得以简化. 本文简要介绍了用一阶线性非完整映射构造非完整约束系统在Riemann-Cartan位形空间中运动方程的方法, 然后用改进后的场方法就有可能找到系统的若干个第一积分.

2 场方法及其改进

Vujanović场方法指出, 对于描述力学系统运动的形如

$$\dot{x}^i = u^i(x^j, t) \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n) \tag{1}$$

的常微分方程组, 如果把x^1看作是其他x^i和时间t的函数, 那么就可以构造出形如

$$\frac{\partial x^1}{\partial t} + \frac{\partial x^1}{\partial x^r}\dot{x}^r - u^1(x^j, t) = 0 \quad (r = 2, \cdots, n) \tag{2}$$

的基本偏微分方程. 如果能够找到基本偏微分方程(2)的一个完全解

$$x^1 = u(t, x^r, C_i) \quad (r = 2, \cdots, n; i = 1, 2, \cdots, n), \tag{3}$$

其中C_i为任意常数, 并将初始条件

$$x^i(0) = x_{i0} \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{4}$$

代入完全解(3)中求出其中任意一个常数, 例如C_1, 代回完全解(3), 得到

$$x^1 = x^1(t, x^r, C_A, x_{i0}) \quad (A, r = 2, \cdots, n; i = 1, 2, \cdots, n), \tag{5}$$

那么将(5)式和$(n-1)$个代数方程

$$\frac{x^1(t, x^r, C_A, x_{i0})}{\partial C_A} = 0 \quad (A, r = 2, \cdots, n;\ i = 1, 2, \cdots, n) \tag{6}$$

联立后解出全部x^i就可得到常微分方程组(1)的满足初始条件的特解.

可以将上述求常微分方程组特解的场方法改进为寻找力学系统第一积分的如下命题.

命题1 对描述力学系统运动的形如(1)式的常微分方程组, 如果把x^1看作是其他x^i和时间t的函数, 就可以构造出形如(2)式的基本偏微分方程. 如果能够找到基本偏微分方程的一个包含m $(m \leqslant n)$个独立的任意常数C_B的解

$$x^1 = u(t, x^r, C_B) \quad (r = 2, \cdots, n;\ B = 1, 2, \cdots, m), \tag{7}$$

则只需将该解中任意$(m-1)$个常数固定, 就可以得到系统的一个第一积分; 重复这一操作, 分别将该解中不同的$(m-1)$个常数固定, 即可得到系统如下m个独立的第一积分:

$$x^1 = u_\alpha(t, x^r, C_B) \quad (r = 2, \cdots, n;\ \alpha, B = 1, 2, \cdots, m), \tag{8}$$

其中, 每一个第一积分中除C_α外其他C_B都固定. 特别地, 如果解(7)是基本偏微分方程的一个完全解, 即$m = n$, 那么用上述方法就可以得到系统的全部n个独立的第一积分, 并可由此完全确定系统满足初始条件的特解.

要想证明命题1, 首先注意到把解(7)中任意$(m-1)$个常数固定, 所得结果(即(8)式中的任意一个)包含一个任意常数, 且仍然是基本偏微分方程的解, 因而一定满足描述系统运动的微分方程组(1), 因此(8)式中的任意一个等式都是系统的一个第一积分. 再考虑到解(7)中常数C_B的独立性, 即可知(8)式中的m个等式是相互独立的. 综上可知(8)式是系统m个独立的第一积分. 证毕.

命题1扩展了场方法的适用范围. 如果试图用Vujanović场方法直接求出系统满足初始条件的特解, 则必须要找到基本偏微分方程(2)的包含n个独立的任意常数的完全解, 对大多数问题而言这是一件非常困难的任务; 在很多情况下, 虽然不能找到完全解, 但却有可能找到基本偏微分方程(2)的

包含m $(m \leqslant n)$个独立的任意常数的解，此时根据命题1就可以得到系统m个独立的第一积分.

例1 Chaplygin雪橇的惯性运动[5].

系统的Lagrange函数和约束方程分别为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}k\dot{\varphi}^2, \quad \dot{y} = \dot{x}\tan\varphi, \tag{9}$$

令$q^1 = x$, $q^2 = \varphi$, $q^3 = y$，可得系统Chaplygin方程的显式表达为

$$\ddot{q}^1 + \tan(q^2)\cdot\dot{q}^1\dot{q}^2 = 0, \quad \ddot{q}^2 = 0. \tag{10}$$

令$x^1 = q^1$, $x^2 = q^2$, $x^3 = \dot{q}^1$, $x^4 = \dot{q}^2$，则由(10)式可得

$$\begin{aligned} &\dot{x}^1 = x^3, \quad \dot{x}^2 = x^4, \\ &\dot{x}^3 = -\tan(x^2)x^3x^4, \quad \dot{x}^4 = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

考虑到初始条件

$$x^\alpha(0) = x_{\alpha 0} \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4), \tag{12}$$

容易求出

$$x^4 = x_{40}, \quad x^2 = x_{20} + x_{40}t. \tag{13}$$

代入(11)式的第一和第三式可得

$$\dot{x}^1 = x^3, \quad \dot{x}^3 = -\tan(x_{20} + x_{40}t)x_{40}x^3. \tag{14}$$

令$x^1 = u(t, x^3)$，则与(14)式对应的基本偏微分方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x^3}[-\tan(x_{20} + x_{40}t)x_{40}x^3] - x^3 = 0. \tag{15}$$

该基本偏微分方程的一个通解为

$$x^1 = c_1 + \left(\frac{c_2}{\cos(x_{20}+x_{40}t)} + \frac{\tan(x_{20}+x_{40}t)}{x_{40}}\right)x^3, \tag{16}$$

其中c_1和c_2为任意常数. 依次固定c_1和c_2，例如分别取c_1和c_2为零，即可得到如下两个第一积分:

$$x^1 = \left(\frac{c_2}{\cos(x_{20} + x_{40}t)} + \frac{\tan(x_{20} + x_{40}t)}{x_{40}}\right)x^3, \tag{17}$$

$$x^1 = c_1 + \frac{\tan(x_{20} + x_{40}t)}{x_{40}}x^3. \tag{18}$$

由此即可直接解出

$$\begin{aligned} x^1 &= \frac{c_1\sin(x_{20} + x_{40}t)}{c_2x_{40}} + 1, \\ x^3 &= \frac{c_1\cos(x_{20} + x_{40}t)}{c_2}. \end{aligned} \tag{19}$$

可以验证(19)式确实是(14)式的通解，利用初始条件确定常数c_1和c_2后即得满足初始条件的特解，所得结果和文献[5]中的结果一致.

例2 沿x轴做一维运动的质点，所受非保守力为$-\frac{t}{x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{x}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + 1$，求质点的运动.

质点的运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{t}{x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{x}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 - 1 = 0, \tag{20}$$

这是一个非线性非齐次二阶常微分方程，按照通常的方法很难直接求出其通解.

用场方法求解，设$u = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u(x, t)$，代入(20)式可得基本偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{tu}{x} - \frac{u^2}{x} - 1 = 0. \tag{21}$$

我们无法求出该基本偏微分方程的完全解，但容易验证

$$u = c_1x + t \tag{22}$$

是(21)式的包含一个任意常数的解. 根据命题1，该解就是系统的一个第一积分，所以有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = c_1x + t. \tag{23}$$

由此可得

$$x = c_2\,\mathrm{e}^{c_1t} - \frac{t}{c_1} - \frac{1}{c_1^2}. \tag{24}$$

3 场方法在积分Riemann-Cartan空间中运动方程中的应用

本节中所有$i, j, k = 1, 2, \cdots, n$; $\mu, \nu, \sigma, \pi = 1, 2, \cdots, m$; $\alpha, \beta, \gamma = 2, \cdots, m$; $m < n$.

对于受到$(n-m)$个一阶线性定常齐次非完整约束的系统，从它的n维欧式位形空间$[X]$出发，利用一个隐含非完整约束的不可积一阶线性映射

$$\dot{x}^i = b^i_\mu\omega^\mu, \tag{25}$$

可以把位形空间$[X]$映射为一个有挠率的Riemann-Cartan空间$[\varPi]$，其中$\dot{x}^i$为系统在位形空间$[X]$中的速度，ω^μ为由映射(25)所定义的系统的一个准速度. 由映射(25)可以计算出Riemann-Cartan空间$[\varPi]$的度规和联络分别为

$$g_{\mu\nu} = \delta_{ij}b^i_\mu b^j_\nu, \tag{26}$$

$$\varGamma^\sigma_{\mu\nu} = g^{\sigma\pi}\delta_{ij}b^i_\pi b^j_{\mu,\nu}. \tag{27}$$

描述系统运动的运动方程为

$$\frac{D\omega^{\mu}}{\mathrm{d}t}=\dot{\omega}^{\mu}+\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}\omega^{\nu}\omega^{\sigma}=g^{\mu\nu}b^{i}_{\nu}F_{i},\tag{28}$$

其中 F_i 为系统所受外力. 将 (25) 和 (28) 式联立, 就得到了由 $(n+m)$ 个方程所构成的 Riemann-Cartan 空间 $[\Pi]$ 中描述系统运动的完备的一阶常微分方程组.

用场方法求解上述常微分方程组, 需要将 $(n+m)$ 个变量 $\dot{x}^i$ 和 ω^{μ} 中的一个, 例如 ω^1, 看作是依赖于其他变量和时间 t 的场函数, 即取

$$\omega^{1}=u(t,x^{i},\omega^{\alpha}),\tag{29}$$

则有

$$\dot{\omega}^{1}=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial\omega^{\alpha}}\dot{\omega}^{\alpha}+\frac{\partial u}{\partial x^{i}}\dot{x}^{i}.\tag{30}$$

由 (25) 和 (28) 式, 可得对应的基本偏微分方程为

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial\omega^{\alpha}}(g^{\alpha\nu}b^{i}_{\nu}F_{i}-\Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}\omega^{\nu}\omega^{\sigma})+\frac{\partial u}{\partial x^{i}}b^{i}_{\mu}\omega^{\mu}\\&-(g^{1\nu}b^{i}_{\nu}F_{i}-\Gamma^{1}_{\nu\sigma}\omega^{\nu}\omega^{\sigma})=0.\end{aligned}\tag{31}$$

根据命题1, 如果能够找到基本偏微分方程 (31) 的包含 $h(h\leqslant n+m)$ 个独立任意常数的解, 就能确定出系统的 h 个第一积分. 特殊情况下, 如果能够找到包含 $(n+m)$ 个独立任意常数的完全解, 就可以由 $(n+m)$ 个独立的第一积分和 $(n-m)$ 个约束完全确定系统的运动.

例3 受非完整约束 $(x^1+x^2+x^3)\dot{x}^1-\dot{x}^3=0$ 的质点, 所受非保守力为

$$\begin{aligned}F_{1}=&\frac{(x^{1}+x^{2}+x^{3})(x^{1}+x^{2}+x^{3}+1)}{(x^{1}+x^{2}+x^{3})^{2}+1}(\dot{x}^{1})^{2}\\&+\frac{(x^{1}+x^{2}+x^{3})}{(x^{1}+x^{2}+x^{3})^{2}+1}\dot{x}^{1}\dot{x}^{2},\\F_{2}=&0,\qquad F_{3}=(x^{1}+x^{2}+x^{3})F_{1},\end{aligned}$$

求质点的运动.

质点带乘子的 Lagrange 方程为

$$\begin{cases}\ddot{x}^{1}=F_{1}+\lambda(x^{1}+x^{2}+x^{3}),\\\ddot{x}^{2}=F_{2},\\\ddot{x}^{3}=F_{3}-\lambda,\end{cases}\tag{32}$$

和非完整约束联立后可以解得乘子为

$$\lambda=\frac{-\dot{x}^{1}(\dot{x}^{1}+\dot{x}^{2}+\dot{x}^{3})}{(x^{1}+x^{2}+x^{3})^{2}+1}.\tag{33}$$

代入 (32) 式即得消去乘子后的方程, 该方程很难直接求解.

取一阶线性非完整映射

$$\dot{x}^{i}=b^{i}_{\mu}\omega^{\mu},\tag{34}$$

式中, $b^1_1=1, b^2_2=1, b^3_1=x^1+x^2+x^3$, 其他 $b^i_{\mu}=0$. 由 (26) 和 (27) 式计算出系统对应的 Riemann-Cartan 位形空间 $[\Pi]$ 的度规和联络分别为

$$\begin{aligned}&g_{11}=(x^{1}+x^{2}+x^{3})^{2}+1,\quad g_{22}=1,\\&\text{其他 }g_{\mu\nu}=0,\end{aligned}\tag{35}$$

$$\begin{aligned}&\Gamma^{1}_{11}=\frac{(x^{1}+x^{2}+x^{3})(x^{1}+x^{2}+x^{3}+1)}{(x^{1}+x^{2}+x^{3})^{2}+1},\\&\Gamma^{1}_{12}=\frac{(x^{1}+x^{2}+x^{3})}{(x^{1}+x^{2}+x^{3})^{2}+1},\\&\text{其他 }\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}=0,\end{aligned}\tag{36}$$

代入 (28) 式并和 (34) 式联立后可得系统在 Riemann-Cartan 位形空间 $[\Pi]$ 中的运动方程为

$$\begin{aligned}&\dot{x}^{1}=\omega^{1},\quad\dot{x}^{2}=\omega^{2},\\&\dot{x}^{3}=(x^{1}+x^{2}+x^{3})\omega^{1},\\&\dot{\omega}^{1}=0,\quad\dot{\omega}^{2}=0.\end{aligned}\tag{37}$$

显然, (37) 式是一个可以直接求解的常微分方程组, 但为了验证命题1的结论, 下面仍然采用场方法来求解.

为了一次得到系统全部独立的第一积分, 对问题不加任何简化, 直接将 (37) 式代入 (30) 式中, 所得基本偏微分方程为

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\omega^{1}}{\partial t}+\frac{\partial\omega^{1}}{\partial x^{1}}\omega^{1}+\frac{\partial\omega^{1}}{\partial x^{2}}\omega^{2}\\&+\frac{\partial\omega^{1}}{\partial x^{3}}(x^{1}+x^{2}+x^{3})\omega^{1}=0.\end{aligned}\tag{38}$$

基本偏微分方程的一个完全解为

$$\omega^{1}=\frac{(c_{1}\omega^{2}-c_{2}t\omega^{2}+c_{2}x^{2}+c_{4}x^{1}+c_{5})\,\mathrm{e}^{x^{1}}-\omega^{2}}{(c_{4}t-c_{3})\,\mathrm{e}^{x^{1}}+(x^{1}+x^{2}+x^{3}+1)}.\tag{39}$$

将完全解中五个独立的任意常数中的任意四个固定, 例如都取为零, 即可得到系统的五个独立的第一积分:

$$\omega^{1}=\frac{c_{1}\omega^{2}\,\mathrm{e}^{x^{1}}-\omega^{2}}{x^{1}+x^{2}+x^{3}+1},\tag{40}$$

$$\omega^{1}=\frac{(-c_{2}t\omega^{2}+c_{2}x^{2})\,\mathrm{e}^{x^{1}}-\omega^{2}}{x^{1}+x^{2}+x^{3}+1},\tag{41}$$

$$\omega^{1}=\frac{\omega^{2}}{c_{3}\,\mathrm{e}^{x^{1}}-(x^{1}+x^{2}+x^{3}+1)},\tag{42}$$

$$\omega^{1}=\frac{c_{4}x^{1}\,\mathrm{e}^{x^{1}}-\omega^{2}}{c_{4}t\,\mathrm{e}^{x^{1}}+(x^{1}+x^{2}+x^{3}+1)},\tag{43}$$

$$\omega^1 = \frac{c_5\,\mathrm{e}^{x^1} - \omega^2}{x^1 + x^2 + x^3 + 1}. \tag{44}$$

将这五个第一积分和约束方程联立后即可完全确定粒子的运动, 所得结果与直接求解 (37) 式的结果相同. 从五个第一积分中消去两个准速度即得质点的运动方程, 代入 (32) 和 (33) 式即可验证结果的正确性.

例 4 受非完整约束 $(x^2+x^3)\dot{x}^1 - x^1\dot{x}^3 = 0$ 的质点, 所受非保守力为

$$F_1 = \frac{1}{x^1}(\dot{x}^1)^2(1-\dot{x}^2) + \frac{(x^2+x^3)}{(x^1)^2+(x^2+x^3)^2}\dot{x}^1\dot{x}^2 - \frac{1}{t+1}\dot{x}^1,$$

$$F_2 = \frac{1}{x^1}\dot{x}^1, \qquad F_3 = \frac{x^2+x^3}{x^1}F_1,$$

求质点的运动方程.

质点带乘子的 Lagrange 方程为

$$\begin{cases} \ddot{x}^1 = F_1 + \lambda(x^2+x^3), \\ \ddot{x}^2 = F_2, \\ \ddot{x}^3 = F_3 - \lambda x^1, \end{cases} \tag{45}$$

和非完整约束联立后可以解得乘子为

$$\lambda = \frac{-\dot{x}^1\dot{x}^2}{(x^1)^2+(x^2+x^3)^2}, \tag{46}$$

代入 (32) 式即得消去乘子后的方程. 可以看出该方程很难直接求解, 但利用一阶线性非完整映射的方法和改进后的场方法可以得到两个第一积分.

取一阶线性非完整映射

$$\dot{x}^i = b^i_\mu \omega^\mu, \tag{47}$$

式中, $b^1_1 = x^1, b^2_2 = 1, b^3_1 = x^2 + x^3$, 其他 $b^i_\mu = 0$.

由 (26) 和 (27) 式计算出系统对应的 Riemann-Cartan 位形空间 $[\varPi]$ 的度规和联络分别为

$$g_{11} = (x^1)^2 + (x^2+x^3)^2, \quad g_{22} = 1, \quad \text{其他 } g_{\mu\nu} = 0, \tag{48}$$

$$\varGamma^1_{11} = 1, \quad \varGamma^1_{12} = \frac{(x^2+x^3)}{(x^1)^2+(x^2+x^3)^2}, \quad \text{其他 } \varGamma^\sigma_{\mu\nu} = 0. \tag{49}$$

代入 (28) 式并和 (34) 式联立后可得系统在 Riemann-Cartan 位形空间 $[\varPi]$ 中的运动方程为

$$\dot{x}^1 = x^1\omega^1, \quad \dot{x}^2 = \omega^2, \quad \dot{x}^3 = (x^2+x^3)\omega^1,$$
$$\dot{\omega}^1 = -\frac{\omega^1}{t+1} - \omega^2(\omega^1)^2, \quad \dot{\omega}^2 = \omega^1. \tag{50}$$

我们无法求解 (50) 式, 但在此基础上用场方法可以得到两个第一积分.

应用场方法, 由 (50) 式后两式可得与之对应的基本偏微分方程为

$$\frac{\partial\omega^1}{\partial t} + \frac{\partial\omega^1}{\partial\omega^2}\omega^1 + \frac{\omega^1}{t+1} + \omega^2(\omega^1)^2 = 0. \tag{51}$$

设 $\omega^1 = f_1(\omega^2)\cdot f_2(t)$, 代入基本偏微分方程可得

$$\frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}\omega^2} + f_1\omega^2 = c,$$
$$\frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}t} + \frac{f_2}{t+1} = -c\cdot f_2^2. \tag{52}$$

如果能直接解出 (52) 式, 就能得到基本偏微分方程的一个完全解, 但这一步比较麻烦. 注意到如果令 (52) 式中的 $c = 0$, 则可以很容易求得基本偏微分方程的如下只包含一个任意常数的解:

$$\omega^1 = \frac{c_1}{t+1}\cdot\exp\Big(-\frac{1}{2}(\omega^2)^2\Big). \tag{53}$$

由命题 1 可知, 这是系统的一个第一积分. 将 (53) 式代入 (50) 式中的第五式, 可得

$$\int \exp\Big(\frac{1}{2}(\omega^2)^2\Big)\,\mathrm{d}\omega^2 = c_1\ln(t+1) + c_2, \tag{54}$$

和 (53) 式联立, 消去 c_1 后即得系统第二个第一积分:

$$\int \exp\Big(\frac{1}{2}(\omega^2)^2\Big)\,\mathrm{d}\omega^2 = \omega^1\exp\Big(\frac{1}{2}(\omega^2)^2\Big)(1+t)\ln(1+t) + c_2. \tag{55}$$

由 (50) 式中的后两式可直接验证两个第一积分的正确性.

4 结　论

Vujanovi 场方法依赖于求出基本偏微分方程的完全解, 而这通常是很难的, 这就极大地限制了场方法的应用. 本文把 Vujanovi 场方法改进为寻找动力学系统第一积分的场方法. 改进后的场方法不仅计算相对简单, 而且具有更大的灵活性. 如果可以求出基本偏微分方程的完全解, 则改进后的场方法等价于 Vujanovi 场方法. 但更一般地, 根据改进后的场方法, 只要能够找到基本偏微分方程的包含任意常数的解, 即使不是完全解, 也能由此直接得到动力学系统的若干个第一积分, 这必将拓宽场方法的适用范围. 此外, 本文介绍了用一阶线性非完整映射构造一阶线性非完整约束系统在

Riemann-Cartan位形空间中运动方程的方法, 并用改进后的场方法研究了Riemann-Cartan空间中运动方程的积分问题, 通过算例可以看出这是研究某些非完整非保守运动问题的一种有效方法. 最后需要指出的是, 尽管本文只是应用改进后的场方法求解了一些非完整系统和非保守系统的例子, 但可以看出, 只要采用和文献[5—19]完全相似的方法, 就可以把改进后的场方法应用于Vacco动力学系统、Birkhoff系统、变质量系统、相对运动的力学系统、可控力学系统、相对论系统、转动相对论系统等研究领域.

参考文献

[1] Rumyantsev V V, Sumbatov A S 1978 *ZAMM* **58** 477

[2] Vujanović B 1984 *Int. J. Non-Linear Mech.* **19** 383

[3] Vujanović B 1981 *Int. J. Engng. Sci.* **19** 1739

[4] Vujanović B 1987 *J. Sound Vib.* **114** 375

[5] Mei F X 1992 *Acta Armam.* **13** 47 (in Chinese) [梅凤翔 1992 兵工学报 **13** 47]

[6] Mei F X 1992 *Appl. Math. Mech.* **13** 165 (in Chinese) [梅凤翔 1992 应用数学和力学 **13** 165]

[7] Mei F X 1989 *Acta Mech. Sin.* **5** 260

[8] Mei F X 2000 *Int. J. Non-Linear Mech.* **35** 229

[9] Mei F X 1990 *Acta Mech. Sin.* **6** 160

[10] Luo S K 1995 *Appl. Math. Mech.* **16** 981 (in Chinese) [罗绍凯 1995 应用数学和力学 **16** 981]

[11] Zhang Y 1996 *J. B. Inst. Technol.* **16** 36 (in Chinese) [张毅 1996 北京理工大学学报 **16** 36]

[12] Chen X W, Luo S K 1998 *Appl. Math. Mech.* **19** 447 (in Chinese) [陈向炜, 罗绍凯 1998 应用数学和力学 **19** 447]

[13] Fu J L, Chen L Q, Luo S K, Chen X W, Wang X M 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2289 (in Chinese) [傅景礼, 陈立群, 罗绍凯, 陈向炜, 王新民 2001 物理学报 **50** 2289]

[14] Luo S K, Guo Y X, Chen X W, Fu J L 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2049 (in Chinese) [罗绍凯, 郭永新, 陈向炜, 傅景礼 2001 物理学报 **50** 2049]

[15] Abd-El-Latif G M 2004 *Appl. Math. Comput.* **147** 267

[16] Kovacic I 2005 *Acta Mech. Sin.* **21** 192

[17] Ge W K 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 10 (in Chinese) [葛伟宽 2006 物理学报 **55** 10]

[18] Zhang Y 2011 *J. Southeast Univ.* **27** 188

[19] Li Y M, Mei F X 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 5930 (in Chinese) [李彦敏, 梅凤翔 2010 物理学报 **59** 5930]

[20] Wang Y, Guo Y X 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5517 (in Chinese) [王勇, 郭永新 2005 物理学报 **54** 5517]

[21] Guo Y X, Wang Y, Chee G Y, Mei F X 2005 *J. Math. Phys.* **46** 062902

[22] Guo Y X, Liu S X, Liu C, Luo S K, Wang Y 2007 *J. Math. Phys.* **48** 082901

[23] Wang Y, Guo Y X, Lü Q S, Liu C 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 5142 (in Chinese) [王勇, 郭永新, 吕群松, 刘畅 2009 物理学报 **58** 5142]

[24] Guo Y X, Liu C, Wang Y, Chang P 2010 *Sci. China: Phys. Mech. Astron.* **53** 1707

Improvement of field method and its application to integrating motion equation in Riemann-Cartan space*

Wang Yong[1)2)] Mei Feng-Xiang[1)] Cao Hui-Ying[2)] Guo Yong-Xin[3)4)†]

1) (*School of Aerospace Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China*)

2) (*School of Information Engineering, Guangdong Medical University, Dongguan 523808, China*)

3) (*College of Physics, Liaoning University, Shenyang 110036, China*)

4) (*Physics of Medical Imaging Department, Eastern Liaoning University, Dandong 118001, China*)

(Received 9 July 2017; revised manuscript received 27 September 2017)

Abstract

Like the Hamilton-Jacobi method, the Vujanović field method transforms the problem of seeking the particular solution of an ordinary differential equations into the problem of finding the complete solution of a first order quasilinear partial differential equation, which is usually called the basic partial differential equation. Due to no need of the strong restrictive conditions required in the classic Hamilton-Jacobi method, the Vujanović field method may be used in many fields, such as non-conservative systems, nonholonomic systems, Birkhoff systems, controllable mechanical systems, etc. Even so, there is still a fundamental difficulty in the Vujanović field method. That is, for most of dynamical systems, it is hard to find the complete solution of the basic partial differential equation. In this paper, the Vujanović field method is improved into a new field method. The purpose of the improved field method is to find the first integrals of the motion equations, but not the particular solutions of the motion equations. The improved field method points out that for a basic partial differential equation with n independent variables, m ($m \leqslant n$) first integrals of a dynamical system can be found as long as a solution with m arbitrary constants of the basic partial differential equation is found. In particular, if the complete solution (the complete solution is a special case of $m = n$) of the basic partial differential equation is found, all first integrals of the dynamical system can be found. That means that the motion of the dynamical system is completely determined. The Vujanović field method is just equivalent to this particular case. The improved field method expands the applicability of the field method, and is simpler than the Vujanović field method. Two examples are given to illustrate the effectiveness of the method. In addition, the improved field method is used to integrate the motion equations in Riemann-Cartan space. For a first-order linear homogenous scleronomous nonholonomic system subjected to an active force, its motion equation in its Riemann-Cartan configuration space can be obtained by a first order nonlinear nonholonomic mapping. Since the motion equations in Riemann-Cartan configuration space contain quasi-speeds, they are often considered to be difficult to solve directly. In this paper we give a briefing of how to construct the motion equations of a first order linear nonholonomic constraint system in its Riemann-Cartan configuration space, and how to obtain the first integrals of the motion equations in the Riemann-Cartan configuration space by the improved field method. This is an effective method to study some nonholonomic nonconservative motions.

Keywords: field method, first integral, Riemann-Cartan space, nonholonomic constraint system

PACS: 45.20.Jj, 02.40.Yy **DOI:** 10.7498/aps.67.20171583

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11772144, 11572145, 11272050, 11572034, 11202090, 11472124) and the Natural Science Foundation of Guangdong Province, China (Grant No. 2015AO30310178).

† Corresponding author. E-mail: yxguo@lnu.edu.cn