

任意阶标度分形格分抗与非正则格型标度方程

余波 何秋燕 袁晓

Scaling fractal-lattice frantance approximation circuits of arbitrary order and irregular lattice type scaling equation

Yu Bo He Qiu-Yan Yuan Xiao

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 67, 070202 (2018) DOI: 10.7498/aps.67.20171671

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.67.20171671>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2018/V67/I7>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

[一类大气浅水波系统的广义变分迭代行波近似解](#)

The traveling wave approximate solution for a class of atmospheric wading wave system by generalized variational iteration

物理学报.2013, 62(23): 230202 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.230202>

[一类厄尔尼诺-南方涛动耦合振子动力学模型的震荡近似解](#)

Vibrating approximate solution for a class of El Nino-southern coupled oscillation dynamic model

物理学报.2013, 62(14): 140202 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.140202>

[飞秒脉冲激光对纳米金属薄膜传导模型的解](#)

Solution of the transfer models of femtosecond pulse laser for nano metal film

物理学报.2013, 62(11): 110202 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.110202>

[一类厄尔尼诺海-气时滞振子的渐近解](#)

A class of asymptotic solution of sea-air time delay oscillator for the El Niño-southern oscillation mechanism

物理学报.2013, 62(6): 060201 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.060201>

[一类厄尔尼诺/拉尼娜-南方涛动海-气振子的奇摄动解](#)

Singular perturbation solution of a class of sea-air oscillator for the El Niño/La Niña-southern oscillation

物理学报.2012, 61(20): 200208 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.200208>

任意阶标度分形格分抗与非正则格型标度方程

余波¹⁾ 何秋燕²⁾ 袁晓^{2)†}

1)(成都师范学院物理与工程技术学院, 成都 611130)

2)(四川大学电子信息学院, 成都 610064)

(2017年7月20日收到; 2018年2月5日收到修改稿)

Carlson分形格电路是分抗的理想逼近情形, 但仅具有负半阶运算性能, 逼近效益随着电路节次数的增加逐渐降低. 虽然可嵌套得到 $-1/2^n$ 阶(n 为大于或等于2的整数)分抗逼近电路, 但结构复杂, 无法实现任意分数阶运算. 通过类比拓展Carlson分形格电路, 获得具有高逼近效益的任意实数阶微积分算子的分抗逼近电路——标度分形格分抗, 并用非正则格型标度方程进行数学描述. 分别探讨非正则格型标度方程的近似求解和真实解. 通过调节电阻递进比 α 与电容递进比 β 的取值, 可构造出具有任意运算阶的标度分形格分抗逼近电路. 标度拓展极大地提高了标度分形格分抗电路的逼近效益. 随着标度因子的增加, 负半阶标度分形格分抗的逼近效益逐渐增大并明显高于Carlson分形格分抗. 设计了基于五节Carlson分形格分抗与负半阶标度分形格分抗的半阶微分运算电路, 并对周期三角波和周期方波信号进行半阶微分运算, 实验测试结果与理论分析一致.

关键词: 分数阶微积分, 标度拓展, 标度因子, 分形分抗

PACS: 02.30.Mv, 84.30.Bv, 05.45.Df

DOI: 10.7498/aps.67.20171671

1 引言

理想分抗(元)的阻抗函数

$$I^{(\mu)}(s) = F^{(\mu)} s^\mu, 0 < |\mu| < 1, \quad (1)$$

式中 μ 为运算阶数; s 是拉普拉斯变量, 亦称运算变量^[1,2]; $F^{(\mu)}$ 为分抗特征值, 是一个有量纲有单位的物理量^[3]. 分抗元是基本电路元件(电阻、电容、电感、电耦^[4,5])的一种很自然的推广, 再结合有源元件(比如运算放大器、OTA器件等), 便可以实现分数阶微积分运算.

理想的分抗元是不存在的, 相对应的近似实现称为分抗逼近电路. 构建分抗逼近电路的途径主要有: 自然现象与过程的电路建模、 μ 阶算子 s^μ 的直接有理逼近. 常见的经典分形分抗逼近电路, 如Oldham分形链类、Sierociuk分形链、Haba分形线分抗等仅具有半阶运算性能且是非理想逼

近^[1]. 1960年, Carlson在研究航空线性自适应伺服系统的补偿问题时, 提出理想逼近的负半阶对称格型RC网络^[6]——Carlson分形格分抗(逼近电路). Carlson分形格分抗通过嵌套能得到 $-1/2^n$ 阶(n 为大于或等于2的整数)分抗逼近电路^[1,7], 但结构复杂, 使用的元件数多, 无法实现任意分数阶运算(或无法逼近任意分数阶微积分算子).

在对比分析经典的负半阶Oldham分形链与Liu-Kaplan分形链分抗的基础上, 文献^[8]通过类比拓展构造出三种新型分形链分抗与对应的新型Liu-Kaplan标度方程. 标度拓展不仅可以实现任意分数阶分抗, 而且能够极大地提高逼近效益, 简化电路. 标度化的迭代方程——Liu-Kaplan标度方程十分精炼地描述了一大类自仿射自相似分形结构体系所具有的分数幂关系与现象, 不仅涉及到分形、电解金属电极界面、粗糙度、标度因子等物理概念, 而且具有广泛的物理、化学、生物等现实背景因素, 从而受到人们特别的关注^[1,8,9].

† 通信作者. E-mail: 653381180@qq.com

本文旨在类比拓展 Carlson 分形格分抗及其归一化迭代方程, 获得具有高逼近效益的任意阶标度分形格分抗和可物理实现的格型标度方程 (任意分数阶微积分算子有理逼近), 并从理论与实验等角度证明标度拓展的有效性.

任意阶标度分形格分抗逼近电路和格型标度方程可广泛的应用于分数阶混沌系统 [10,11]、分数阶线性系统 [12,13]、分数阶流变模型 [14]、分数阶蠕变模型 [15]、分数阶忆阻器 [7,16] 和水轮机调节系统 [17-19] 等的电路建模与仿真、理论计算或物理实现.

2 Carlson 分形格的数学描述与运算性能

2.1 数学描述——迭代电路与迭代方程

有限 k 节 Carlson 分形格分抗逼近电路 [1,6] 如图 1 (a) 所示, 当给定一个初始阻抗 $Z_0(s)$ 时, 输入阻抗函数 $Z_k(s)$ 由迭代公式

$$Z_k(s) = F(Z_{k-1}(s)) = \frac{2R + (RCs + 1)Z_{k-1}(s)}{RCs + 1 + 2CsZ_{k-1}(s)}, \quad k \in \mathbf{N}^+ \quad (2)$$

算出, 式中 k 表示电路的基本格型节的节数; R 和 C 分别是电路中电阻的电阻值和电容的电容值. 代数迭代式

$$F(x) = \frac{2R + (RCs + 1)x}{RCs + 1 + 2Csx}, \quad x = Z_{k-1}(s) \quad (3)$$

称为 Carlson 分形格分抗的迭代函数. 由 (2) 式可画出等价的 (代数) 迭代电路 (图 1 (b)).

迭代电路与迭代方程

$$x = F(x) \quad (4)$$

完全表征了 Carlson 分形格分抗的基本运算性能.

令

$$\tau = RC, \quad w = \tau s, \quad y_k(w) = \frac{Z_k(w/\tau)}{R} \quad (5)$$

(式中 τ 是时间常数, w 称为归一化运算变量, $y_k(w)$ 称为归一化阻抗函数). 则得到 (2) 式的归一化迭代形式

$$y_k(w) = \bar{F}(y_{k-1}(w)) = \frac{2 + (1 + w)y_{k-1}(w)}{1 + w + 2wy_{k-1}(w)}, \quad (6)$$

其中

$$\bar{F}(y) = \frac{2 + (1 + w)y}{1 + w + 2wy} \quad (7)$$

称为 Carlson 分形格分抗的归一化迭代函数. 由 (6) 式画出归一化迭代电路如图 1 (d) 所示.

归一化迭代方程

$$y(w) = \bar{F}(y(w)) \quad (8)$$

的算术根 $y_C(w) = w^{-1/2}$ 是 Carlson 分形格分抗的 (归一化) 极限阻抗, 即有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k(w) = y_C(w) = w^{-1/2}. \quad (9)$$

这表明 Carlson 分形格分抗是负半阶 (即 $\mu = -1/2$) 算子 $w^{-1/2}$ 的全频有效的理想逼近 [1].

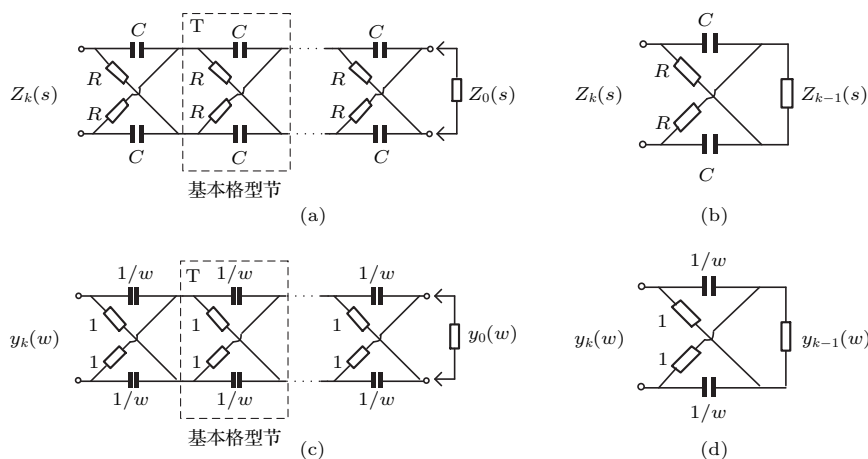


图 1 有限 k 节 Carlson 分形格分抗逼近电路 (a) 原型电路: $2k \times R, 2k \times C$; (b) (代数) 迭代电路; (c) 归一化原型电路; (d) 归一化迭代电路

Fig. 1. Finite k -stage Carlson fractal-lattice fractance approximation circuit: (a) Prototype circuit $2k \times R, 2k \times C$; (b) algebraic iterating circuit; (c) normalized prototype circuit; (d) normalized iterating circuit.

2.2 运算性能与逼近性能分析

当 $y_0(w) = \infty$ (即开路) 时, k 节 Carlson 分形格分抗的归一化阻抗^[1]

$$y_k(w) = \sqrt{\frac{1}{w}} \coth \left[k \cdot \operatorname{arch} \left(\frac{w+1}{w-1} \right) \right]. \quad (10)$$

取 $w = j \cdot 10^\varpi$ ($j = \sqrt{-1}$, ϖ 是频率指数变量), 得到阶频特征^[1]

$$\mu_k(\varpi) = \frac{d \lg |y_k(j \cdot 10^\varpi)|}{d\varpi}, \quad \varpi \in \mathbf{R}, \quad (11)$$

与相频特征

$$\theta_k(\varpi) = \arg\{y_k(j \cdot 10^\varpi)\}, \quad \varpi \in \mathbf{R}. \quad (12)$$

阶频特征 $\mu_k(\varpi)$ 与相频特征 $\theta_k(\varpi)$ 曲线(图 2(a) 与 (b)) 刻画分抗逼近电路的运算性能与逼近性能^[1-3,8,9,20-22]. 由运算特征曲线(图 2(a) 与 (b)) 可得 Carlson 分形格分抗电路的逼近带宽指数^[1]

$$\pi_C[k] \approx (\log_2 k - 1) \cdot 2 \lg 4, \quad (13)$$

逼近效益——逼近带宽指数与电路节数 $\zeta_C[k] = k$ 之比:

$$\eta_C[k] = \frac{\pi_C[k]}{\zeta_C[k]} \approx \frac{2 \lg 4 \cdot (\log_2 k - 1)}{k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \quad (14)$$

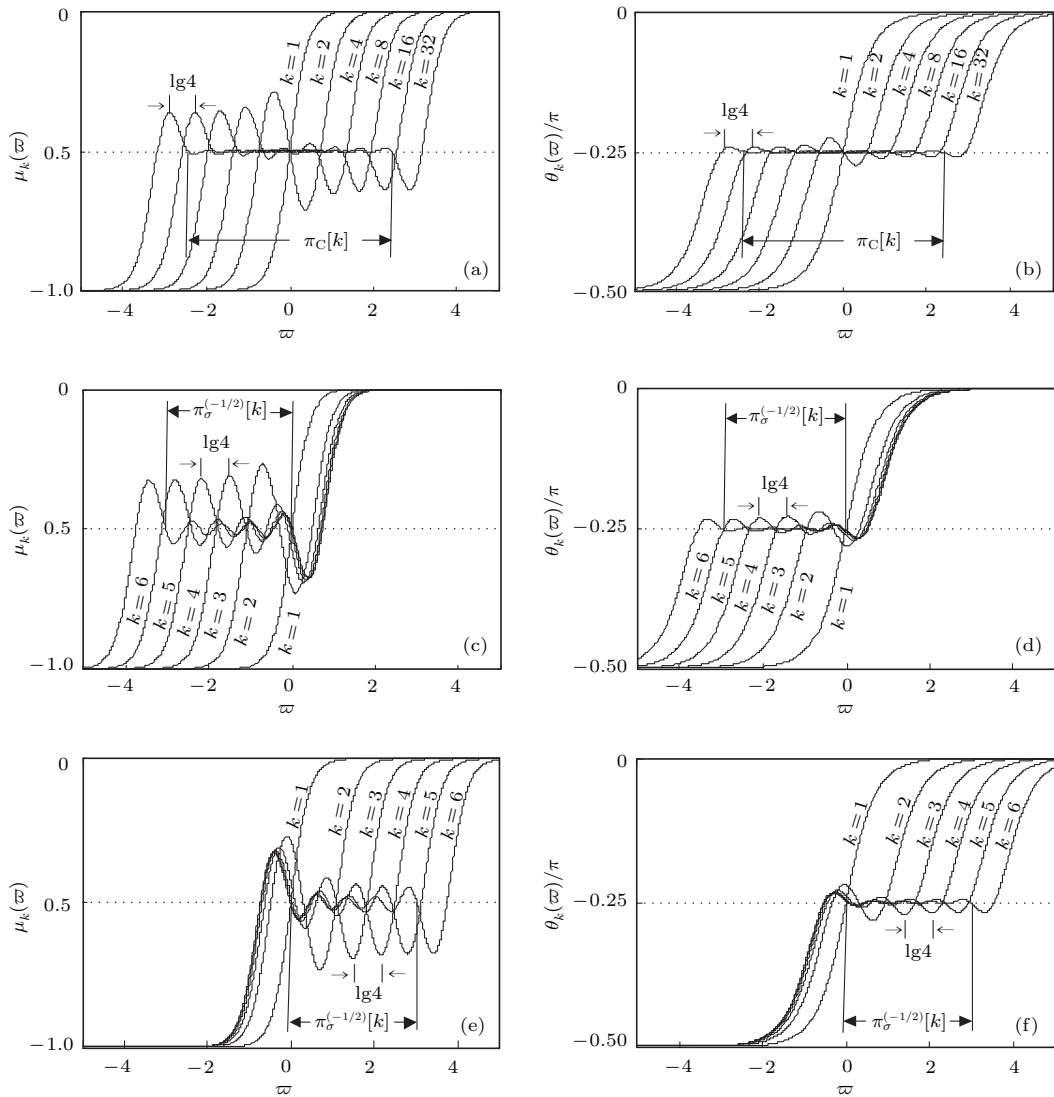


图 2 运算特征曲线 (a), (b) Carlson 分形格分抗电路——标度拓展前: $\alpha = \beta = 1, \sigma = \alpha\beta = 1$; (c), (d) 正比拓展标度分形格分抗电路: $\alpha = \beta = 2$; (e), (f) 反比拓展标度分形格分抗电路: $\alpha = \beta = 1/2$

Fig. 2. Operational characteristics plots: (a), (b) Carlson fractal-lattice fractance approximation circuit before scaling extension $\alpha = \beta = 1, \sigma = \alpha\beta = 1$; (c), (d) scaling fractal-lattice fractance approximation circuit by direct proportion extension $\alpha = \beta = 2$; (e), (f) scaling fractal-lattice fractance approximation circuit by inverse proportion extension $\alpha = \beta = 1/2$.

3 标度拓展与标度分形格分抗逼近电路

3.1 标度拓展与格型标度方程

对归一化 Carlson 分形格分抗(图 1(c))进行标度拓展^[8], 得到图 3(a)所示的标度分形格分抗. 图 3(a)中标示的参量 α 是电阻递进比、 β 是电容递进比. α, β 统称为分形格分抗电路的标度特征参量, $\sigma = \alpha\beta$ 称为该电路的标度因子 (scaling factor). 当 $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1$ 时, 称为反比拓展; 当 $1 < \alpha < \infty, 1 < \beta < \infty$ 时, 称为正比拓展.

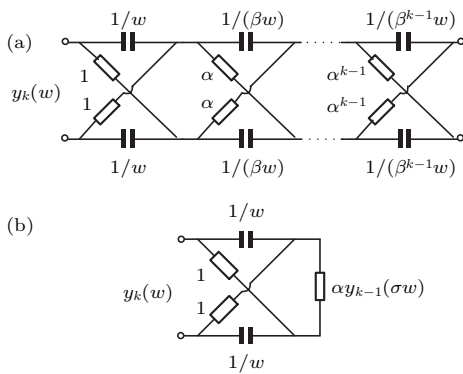


图 3 标度分形格分抗及其标度迭代电路 (a) 归一化电路: $0 < \alpha < \infty, 0 < \beta < \infty$; (b) 归一化迭代电路: $\sigma = \alpha\beta$
 Fig. 3. Scaling fractal-lattice fractance approximation circuit and corresponding scaling iterating circuit: (a) Normalized prototype circuit $0 < \alpha < \infty, 0 < \beta < \infty$; (b) normalized scaling iterating circuit: $\sigma = \alpha\beta$.

有限 k 节标度分形格分抗逼近电路的输入阻抗函数可由标度迭代公式

$$y_k(w) = \bar{F}(\alpha y_{k-1}(\sigma w)), k \in \mathbf{N}^+ \quad (15)$$

算出. 由此画出等价的标度迭代电路如图 3(b)所示.

在数学上, 标度拓展是将代数迭代方程(8)进行标度变换^[8]

$$y(w) = \bar{F}(y(w)) \xrightarrow{\text{标度拓展}} y(w) = \bar{F}(\alpha y(\sigma w)), \quad (16)$$

得到一个非正则标度方程——格型标度方程

$$y(w) = \frac{2 + (1+w)\alpha y(\sigma w)}{1+w+2w\alpha y(\sigma w)}, y \in \mathbf{R}^+. \quad (17)$$

3.2 格型标度方程的近似求解与运算有效性

对于有限 k 节标度分形格电路(图 3(a)), 由于每格形节的特征频率

$$w_i = \frac{1}{\alpha^i \beta^i} = \sigma^{-i}, i = 0 \sim (k-1), \quad (18)$$

因此正比拓展 ($1 < \sigma < \infty$) 时, w_i 向低频扩展. 反比拓展 ($0 < \sigma < 1$) 时, w_i 向高频扩展.

对于正比拓展获得的有限 k 节标度分形格电路, 考虑 $y_0(w) = \infty$ (即开路) 情形. 由于

$$1 < \sigma < +\infty, w_k \ll w_0 = 1, \quad (19)$$

在极高频条件下 (即 $1 < |w| \rightarrow \infty$ 时), 电路呈现电阻特性, 在极低频率条件下 (即 $1 > |w| \rightarrow 0$ 时), 电路表现出电容特性, 即有

$$\infty \leftarrow \frac{\beta-1}{\beta^k-1} \frac{1}{2w} \xrightarrow{0 < |w| < 1} y_k(w) \xrightarrow{1 < |w| \rightarrow \infty} \frac{1-\alpha^{-1}}{1-\alpha^{-k}}. \quad (20)$$

在频段满足

$$0 \leftarrow w_{k-1} < |w| \ll 1 \quad (21)$$

时, 电阻与电容共同作用, 整个电路呈现出分数阶运算性能. 此时, 非正则标度方程(17)将简化为正则标度方程

$$y(w) \approx \frac{2 + \alpha y(\sigma w)}{1 + 2w\alpha y(\sigma w)} \approx \alpha y(\sigma w), \quad (22)$$

并有近似解

$$y(w) \approx y_{\text{Liu}}(w) = \zeta w^{\mu_{\text{Liu}}}, \mu_{\text{Liu}} = -\frac{\lg \alpha}{\lg \sigma}, \quad (23)$$

式中, ζ 是一个常数, μ_{Liu} 称为 Liu 氏运算阶, 函数 $y_{\text{Liu}}(w)$ 称为 Liu 氏粗解.

近似解(23)式表明, 通过调节电阻递进比 α 与电容递进比 β 的取值, 可构造出具有任意 Liu 氏运算阶的分抗逼近电路. 当取 $\alpha = \beta = 2$ 时, 正比拓展得到 $\mu_{\text{Liu}} = -1/2$ 阶的低频有效分抗逼近电路, 其运算特征曲线如图 2(c), (d) 所示.

反比拓展 ($0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1, 0 < \sigma < 1$) 在高频段也可得到同样的 Liu 氏近似解. 当取 $\alpha = \beta = 1/2$ 时, 反比拓展得到 $\mu_{\text{Liu}} = -1/2$ 阶的高频有效分抗逼近电路, 其运算特征曲线如图 2(e), (f) 所示.

3.3 格型标度方程的真实解与分形格电路的运算振荡现象

近似解(23)式在理论上表明了格型标度方程(17)所描述的电路具有分数阶运算性能. 当前在数学上直接精确求解方程(17)是困难的. 但根据电路

的级联结构特点, 使用传输参量矩阵法^[1,8,9], 或使用标度迭代公式

$$y_k(w) = \frac{2 + (1+w)\alpha y_{k-1}(\sigma w)}{1 + w + 2w\alpha y_{k-1}(\sigma w)}, \quad k \in \mathbf{N}^+, \quad (24)$$

在给定一个初始的有理阻抗函数 $y_0(w)$ 时, 比如 $y_0(w) = \infty$ (即初始阻抗开路), 可以求出一个有理的输入阻抗函数序列 $\{y_k(w)\}_{k \in \mathbf{N}}$, 使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k(w) = y(w) \quad (25)$$

是非正则标度方程(17)的一个真实解——标度分形格电路的极限阻抗函数.

取定标度因子 $\sigma \neq 1$, 由 $\mu_{\text{Liu}} = -\lg \alpha / \lg \sigma$ 得电路的标度特征参量

$$\alpha = \sigma^{-\mu_{\text{Liu}}}, \quad \beta = \sigma / \alpha. \quad (26)$$

将这些参量代入(24)式, 给定 μ_{Liu} 与 σ 就能算出相对应的有理阻抗函数序列 $\{y_k(w)\}_{k \in \mathbf{N}}$, 并由此获得阶频特征 $\mu_k(\omega)$ 曲线(图4)与相频特征 $\theta_k(\omega)$ 曲线.

由图2与图4可知, 标度分形格分抗电路的运算特征产生了运算振荡现象, 存在固有的振荡周期

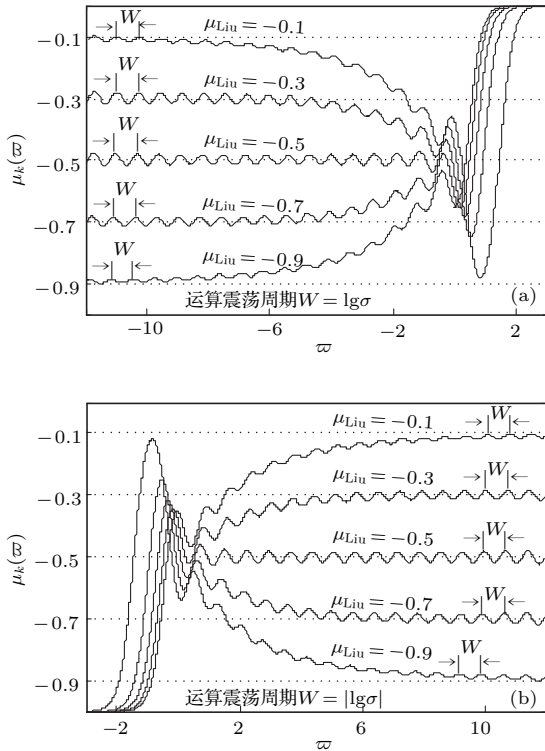


图4 标度分形格分抗逼近电路的阶频特征曲线 (a) 正比拓展 $\sigma = 5$; (b) 反比拓展 $\sigma = 1/5$

Fig. 4. Order-frequency characteristic plots of scaling fractal-lattice fractance approximation circuit: (a) Direct proportion extension $\sigma = 5$; (b) inverse proportion extension $\sigma = 1/5$.

$$W = |\lg \sigma|, \sigma \neq 1. \quad (27)$$

振荡幅度不但与标度因子 σ 有关, 还与运算阶 μ_{Liu} 密切相关.

显然, 当 $\sigma = 1$ 时有 $W = 0$, 意味着无运算振荡现象. 这正好表征了Carlson分形格分抗电路的运算特点(图2(a), (b)).

3.4 标度分形格分抗电路的逼近性能分析

首先考察负半阶分形格分抗电路. 此时 $\alpha = \beta$, $\sigma = \alpha\beta$, $\mu_{\text{Liu}} = -\lg \alpha / \lg \sigma$.

标度拓展前, $\alpha = \beta = 1$, 逼近带宽指数 $\pi_C[k]$ 由(13)式给出, 逼近效益 $\eta_C[k]$ ((14)式)随节数 k 的增加迅速减小并趋近于零. 标度拓展后, 由图2(c)—(f)与图4可求出逼近带宽指数

$$\pi_\sigma^{(-1/2)}[k] \approx (k-2) |\lg \sigma| = (k-2)W, \quad (28)$$

逼近效益

$$\begin{aligned} \eta_\sigma^{(-1/2)}[k] &= \frac{\pi_\sigma^{(-1/2)}[k]}{s_\sigma[k]} \\ &\approx \frac{(k-2) |\lg \sigma|}{k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} |\lg \sigma| = W. \end{aligned} \quad (29)$$

此时可见, 标度拓展极大地提高了逼近效益. 相对于标度拓展前的Carlson分形格电路, 获得的拓展增益

$$g_\sigma^{(-1/2)}[k] = \frac{\eta_\sigma^{(-1/2)}[k]}{\eta_C[k]} = \frac{k-2}{\log_2 k - 1} \cdot \frac{|\lg \sigma|}{2 \lg 4} \quad (30)$$

定量表征标度分形格分抗相对于Carlson分形格分抗获得了更高的逼近效益程度.

Carlson分形格分抗的逼近效益 $\eta_C[k]$ 与标度分形格分抗的逼近效益 $\eta_\sigma^{(-1/2)}[k]$ 曲线如图5所示. 由图5可知, 通过选择合适的标度因子 σ 和电路节数 k , 标度分形格分抗可获得比Carlson分形格分抗更高的逼近效益. 由拓展增益函数(30)式得到如图6所示的曲线, 当拓展增益 $g_\sigma[k] > 1$ 时, 标度分形格分抗的逼近效益高于Carlson分形格分抗.

对于 $\alpha \neq \beta \neq 1$ 的情形, $\mu_{\text{Liu}} \neq -1/2$, 由阶频特征曲线可求得逼近带宽指数

$$\pi_\sigma^{(\mu_{\text{Liu}})}[k] \approx [k - \kappa(\mu_{\text{Liu}})] |\lg \sigma|, \quad (31)$$

逼近效益

$$\begin{aligned} \eta_\sigma^{(\mu_{\text{Liu}})}[k] &= \frac{\pi_\sigma^{(\mu_{\text{Liu}})}[k]}{s_\sigma[k]} \\ &\approx \frac{k - \kappa(\mu_{\text{Liu}})}{k} |\lg \sigma| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} |\lg \sigma| \end{aligned} \quad (32)$$

式中 $\kappa(\mu_{\text{Liu}})$ 是由运算阶 μ_{Liu} 确定的正实数.

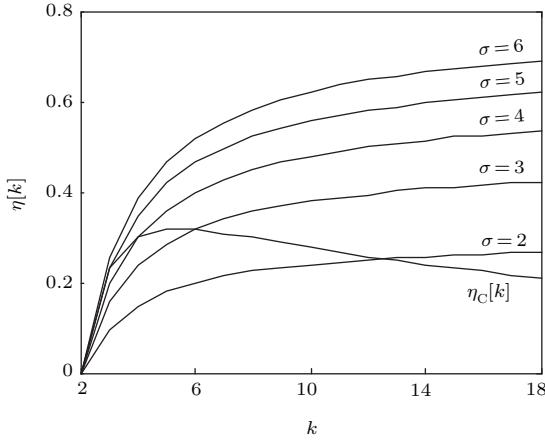


图5 逼近效益对比曲线

Fig. 5. Contrast curves of approximation efficiency.

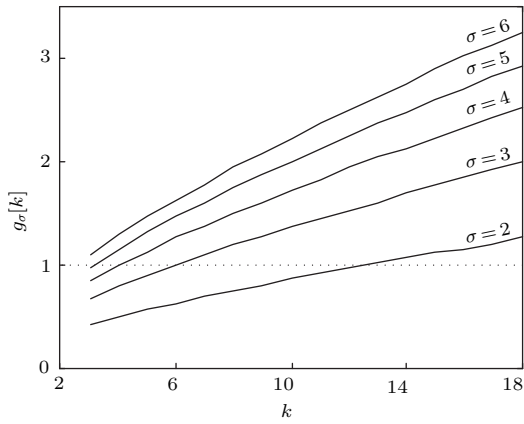


图6 拓展增益曲线

Fig. 6. Extension efficiency curve.

4 实验测试

4.1 测试系统与测试方法

构建有源半阶微分运算电路作为分抗测试电路(图7), 取 $R = 300 \Omega$, $C = 0.47 \mu\text{F}$, 分别使用五节 Carlson 分形格分抗(图1, 拓展前 $\alpha = \beta = 1$, $\sigma = 1$, $k = 5$)与标度分形格分抗(图3, 拓展后 $\alpha = \beta = 2$, $\sigma = 4$, $k = 5$)为分抗元 F .

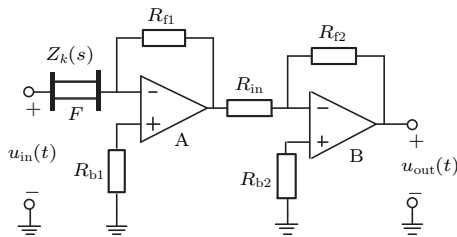


图7 有源半阶微分运算原理电路

Fig. 7. Active differential operational principle circuit of half order.

图7中运算放大器 A, B 采用高速电流反馈运算放大器 THS3001, $R_{b1} = R_{b2} = 820 \Omega$, $R_{in} = 1 \text{ k}\Omega$, $R_{f1} = 2.2 \text{ k}\Omega$, $R_{f2} = 5.6 \text{ k}\Omega$. 电阻阻值误差小于 5%, 电容容量误差小于 10%. 由电路的电压传输函数(理论上)

$$H(s) = \frac{U_{out}(s)}{U_{in}(s)} = \gamma \frac{1}{Z_k(s)},$$

$$\gamma = \frac{R_{f1}R_{f2}}{R_{in}}, \quad (33)$$

可得到被测分抗逼近电路阻抗函数 $Z_k(s)$ 的幅频特征 $A_k(\omega)$. 测量输入正弦电压信号 $u_{in}(t)$ 的峰-峰值 $V_{inpp}(\omega)$ 、输出正弦电压信号 $u_{out}(t)$ 的峰-峰值 $V_{outpp}(\omega)$, 则有

$$A_k(\omega) = \gamma \frac{V_{inpp}(\omega)}{V_{outpp}(\omega)}, \quad \omega \in \mathbf{R}, \quad (34)$$

进而数值求解分抗的阶频特征

$$\mu_k(\omega) = \frac{d \lg A_k(\omega)}{d \omega}, \quad \omega \in \mathbf{R}, \quad (35)$$

与 F 特征^[22]

$$\Gamma_k(\omega) = \lg A_k(\omega) - \mu_k(\omega)[\omega + \lg(2\pi)],$$

$$\omega \in \mathbf{R}. \quad (36)$$

正弦信号 $u_{in}(t)$ 由信号发生器(型号: EE16330)输出, 示波器(型号: TDS1012 C)测量信号 $u_{in}(t)$ 与信号 $u_{out}(t)$ 的峰-峰值 ($V_{inpp}(\omega)$ 与 $V_{outpp}(\omega)$). 信号 $u_{in}(t)$ 是频率在 0.1 Hz—1 MHz 范围内, ω 均匀离散变化的正弦信号. 实验测试时, 控制 $V_{inpp}(\omega)$ 与 $V_{outpp}(\omega)$ 在电路正常工作的电压范围内.

4.2 测试结果与分析

五节 Carlson 分形格分抗与标度分形格分抗的阶频特征与 F 特征实验测试结果与理论对比如图8所示. 由(35)和(36)式可知, 阶频特征和 F 特征的实验结果需要数值微分运算. 由于实验数据固有的误差、数值微分相对于理想微分的误差, 造成实验得到的阶频特征和 F 特征离散较大. 使用 MATLAB 中的 smooth 函数对数值微分后的数据进行平滑滤波处理, 结果如图8所示的星号曲线所示(平滑点为 20, lowess 平滑方法).

实验测试结果与理论分析相符合, 误差主要来源于电路元件参数误差、实验测试仪器误差和平滑滤波误差, 且图8(b)所示的阶频特征再次印证了格型标度方程 Liu 氏近似解的正确性. 五节 Carlson 分形格分抗(拓展前 $\alpha = \beta = 1$,

$\sigma = 1, k = 5$ 的逼近带宽指数 $\pi_C[5] \approx 1.5918$, 逼近效益 $\eta_C[5] \approx 0.3184$, 标度分形格分抗(拓展后 $\alpha = \beta = 2, \sigma = 4, k = 5$) 的逼近带宽指数 $\pi_\sigma^{(-1/2)}[5] \approx 1.8062$, 逼近效益 $\eta_\sigma^{(-1/2)}[5] \approx 0.3612$,

由此可知 $\pi_C[5] < \pi_\sigma^{(-1/2)}[5]$, $\eta_C[5] < \eta_\sigma^{(-1/2)}[5]$. 图 8 中的运算特征也证明标度分形格分抗相对于 Carlson 分形格分抗可获得更高的逼近带宽指数和逼近效益, 符合图 6 所示的拓展增益结果.

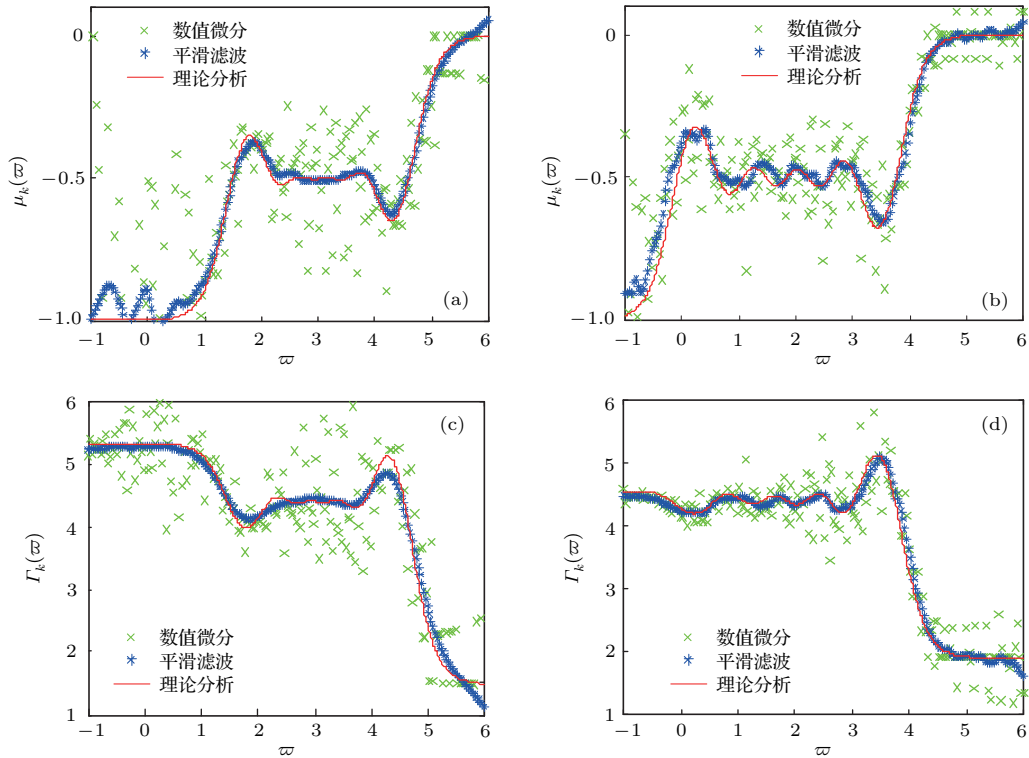


图 8 实验测试结果 (a) Carlson 分形格分抗的阶频特征, 拓展前 $\sigma = 1$; (b) 标度分形格分抗的阶频特征, 拓展后 $\sigma = 4$; (c) Carlson 分形格分抗的 F 特征, 拓展前 $\sigma = 1$; (d) 标度分形格分抗的 F 特征, 拓展后 $\sigma = 4$

Fig. 8. Experimental test results: (a) Order-frequency characteristic of Carlson fractal-lattice fractance approximation circuit before extension ($\sigma = 1$); (b) order-frequency characteristic of scaling fractal-lattice fractance approximation circuit after extension ($\sigma = 4$); (c) F -frequency characteristic of Carlson fractal-lattice fractance approximation circuit before extension ($\sigma = 1$); (d) F -frequency characteristic of scaling fractal-lattice fractance approximation circuit after extension ($\sigma = 4$).

5 应用案例——信号的分数阶微分运算

由 (35) 和 (36) 式及图 8 可知, 在有效运算频率范围内, 五节标度分形格分抗逼近理想分抗的阻抗值

$$\begin{aligned} Z_5(s) &\approx F^{(\mu)} s^\mu = \sqrt{\frac{R}{C}} s^{-1/2} \\ &= 2.527 \times 10^4 s^{-1/2}. \end{aligned} \quad (37)$$

若将五节标度分形格分抗看作理想分抗, 则由 (33) 和 (37) 式可得图 7 所示的半阶微分电路的运算关系

$$u_{\text{out}}(t) \approx \gamma \sqrt{\frac{R}{C}} \frac{d^{1/2} u_{\text{in}}(t)}{dt^{1/2}}, \quad \gamma = \frac{R_{f1} R_{f2}}{R_{\text{in}}}. \quad (38)$$

式中, t 为时间, $u_{\text{in}}(t)$ 为输入信号, $u_{\text{out}}(t)$ 为输出信号.

若输入信号 $u_{\text{in}}(t)$ 为周期三角波, Ω_0 为基波角频率, T 为周期, E 为峰峰值, 根据周期三角波信号的半阶微分表达式^[23-25]

$$\begin{aligned} &\frac{d^{1/2}}{dt^{1/2}} u_{\text{in}}(t) \\ &= \frac{4E}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) (n\Omega_0)^{0.5} \cos\left(n\Omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right) \\ &\left(\Omega_0 = \frac{2\pi}{T}, T = 0.01 \text{ s}, E = 0.5 \text{ V}\right), \end{aligned} \quad (39)$$

与 (38) 式, 计算半阶微分运算电路的理论输出信号 $u_{\text{out}}(t)$ (图 9 (a)), 与实验测试结果一致 (图 9 (b)).

若输入信号 $u_{\text{in}}(t)$ 为周期方波, 根据周期对称

方波信号的半阶微分表达式^[23-25]

$$\begin{aligned} & \frac{d^{1/2}}{dt^{1/2}} u_{in}(t) \\ &= \frac{2E}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) (n\Omega_0)^{0.5} \sin\left(n\Omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right) \\ & \left(\Omega_0 = \frac{2\pi}{T}, T = 0.01 \text{ s}, E = 0.5 \text{ V}\right), \quad (40) \end{aligned}$$

与(38)式, 算出半阶微分运算电路的理论输出信号 $u_{out}(t)$ (图10(a)), 与实验测试结果相符合(图10(b)).

通过输入周期三角波和周期方波, 实验测试结果证明图7所示的半阶微分电路能完成信号的分数阶微分运算.

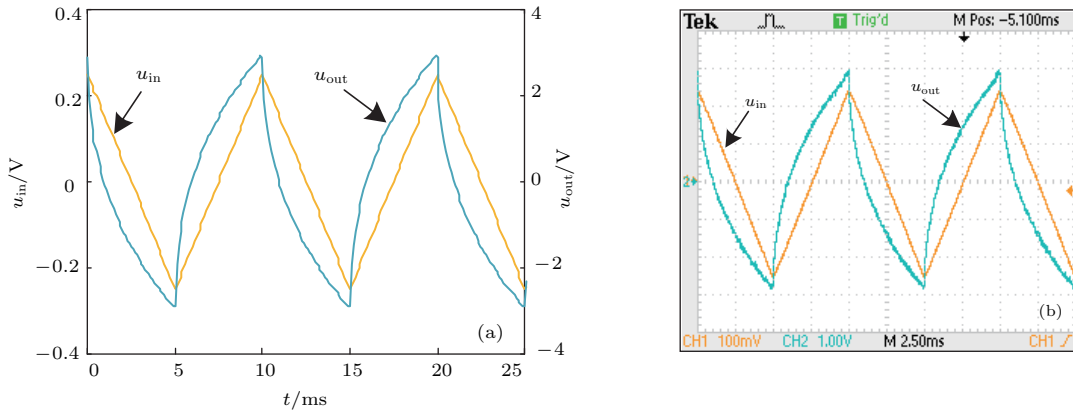


图9 半阶微分电路对周期三角波信号的运算结果 (a) 理论分析; (b) 实验测试

Fig. 9. Operational results of differential circuits of half-order for periodic triangular wave signals: (a) Theoretical analyses; (b) experimental measurements.

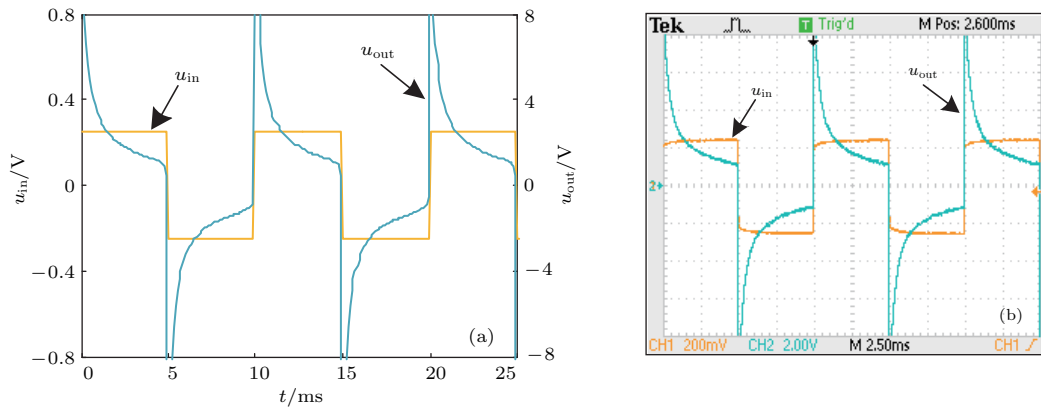


图10 半阶微分电路对周期对称方波信号的运算结果 (a) 理论分析; (b) 实验测试

Fig. 10. Operational results of differential circuits of half-order for periodic symmetric square wave signals: (a) Theoretical analyses; (b) experimental measurements.

6 结 论

标度拓展 Carlson 分形格分抗获得任意阶标度分形格分抗, 它完全由格型标度方程(17式)描述. 通过调节电阻递进比 α 、电容递进比 β 的取值, 能够设计任意阶分抗逼近电路. 虽然标度分形格分抗的运算特征产生了周期为 $|\lg \sigma|$ 的振荡现象, 但负半阶标度分形格分抗的逼近效益明显高于 Carlson 分形格分抗. 本文同时证明格型标度方程(17)式是一种可物理实现的任意分数阶微积分算子有理逼近.

关于标度分形格分抗与非正则格型标度方程, 本文研究仅仅是一个开端, 还存在以下亟待解决的问题:

1) 标度分形格分抗的运算振荡现象的定性与定量特征研究.

2) 获得格型标度方程的真实解的解析表达式是非常困难的. 本文初步探讨了怎样求解格型标度方程. 若能够得到格型标度方程的真实解的解析表达式, 便能描述标度分形格分抗的运算特征的振荡现象, 也为求解其他非正则标度方程提供一种

思路.

3) 运算阶 $\mu_{\text{Liu}} \neq -1/2$ 的标度分形格分抗, 对理想的分数阶微积分算子的逼近效果在归一化特征频率 w_0 附近不甚理想. 研究标度分形格分抗的优化也是一件有趣的事, 特别是对标度分形格分抗电路的微调整——添加补偿电阻或补偿电容, 能显著地提高逼近性能.

参考文献

- [1] Yuan X 2015 *Mathematical Principles of Fractance Approximation Circuits* (Beijing: Science Press) pp3–15 (in Chinese) [袁晓 2015 分抗逼近电路之数学原理 (北京: 科学出版社) 第3—15页]
- [2] He Q Y, Yuan X 2016 *Acta Phys. Sin.* **65** 160202 (in Chinese) [何秋燕, 袁晓 2016 物理学报 **65** 160202]
- [3] He Q Y, Yu B, Yuan X 2017 *Chin. Phys. B* **26** 040202
- [4] Shang D S, Chai Y S, Cao Z X, Lu J, Sun Y 2015 *Chin. Phys. B* **24** 109
- [5] Shen J X, Cong J Z, Chai Y S, Shang D S, Shen S P, Zhai K, Tian Y, Sun Y 2016 *Phys. Rev. Appl.* **6** 021001
- [6] Carlson G E 1960 *M. S. Dissertation* (Kansas State: Kansas State University)
- [7] Pu Y F, Yuan X 2016 *IEEE Access* **4** 1
- [8] Yuan X, Feng G Y 2015 *Proceedings of the 26th Academic Annual Conference of Circuits and Systems Branch, Chinese Institute of Electronics* Chang Sha, China, October 23–26, 2015 p295 [袁晓, 冯国英 2015 中国电子学会电路与系统分会第二十六届学术年会论文集 中国长沙, 2015年10月23日—26日第295页]
- [9] Yuan Z, Yuan X 2017 *Acta Electron. Sin.* **45** 2511 (in Chinese) [袁子, 袁晓 2017 电子学报 45 2511]
- [10] Han Q, Liu C X, Sun L, Zhu D R 2013 *Chin. Phys. B* **22** 020502
- [11] Wang F Q, Ma X K 2013 *Chin. Phys. B* **22** 030506
- [12] Shen Y J, Yang S P, Xing H J 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 110505 (in Chinese) [申永军, 杨绍普, 邢海军 2012 物理学报 **61** 110505]
- [13] Yang J H, Zhu H 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 024501 (in Chinese) [杨建华, 朱华 2013 物理学报 **62** 024501]
- [14] Zhou H W, Wang C P, Duan Z Q, Zhang M, Liu J F 2012 *Sci. Sin.: Phys. Mech. Astron.* **42** 310 (in Chinese) [周宏伟, 王春萍, 段志强, 张淼, 刘建锋 2012 中国科学: 物理学 力学 天文学 **42** 310]
- [15] Wu F, Liu J F, Bian Y, Zhou Z W 2014 *J. Sichuan Univ. (Engineering Science Edition)* **46** 22 (in Chinese) [吴斐, 刘建锋, 边宇, 周志威 2014 四川大学学报 (工程科学版) **46** 22]
- [16] Yu Y J, Wang Z H 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 238401 (in Chinese) [俞亚娟, 王在华 2015 物理学报 **64** 238401]
- [17] Li H H, Chen D Y, Zhang H, Wang F F, Ba D D 2016 *Mech. Syst. Signal Process.* **80** 414
- [18] Li H H, Chen D Y, Zhang H, Wu C Z, Wang X Y 2017 *Appl. Energ.* **185** 244
- [19] Xu B B, Wang F F, Chen D Y, Zhang H 2016 *Energ. Convers. Manag.* **108** 478
- [20] Tao L, Yuan X, Yi Z, Liu P P 2015 *Sci. Tech. Eng.* **15** 81 (in Chinese) [陶磊, 袁晓, 易舟, 刘盼盼 2015 科学技术与工程 **15** 81]
- [21] Liu P P, Yuan X, Tao L, Yi Z 2016 *J. Sichuan Univ. (Nat. Sci. Ed.)* **53** 353 (in Chinese) [刘盼盼, 袁晓, 陶磊, 易舟 2016 四川大学学报 (自然科学版) **53** 353]
- [22] Yu B, Yuan X, Tao L 2015 *J. Electr. Inf. Technol.* **37** 21 (in Chinese) [余波, 袁晓, 陶磊 2015 电子与信息学报 **37** 21]
- [23] Yuan X, Chen X D, Li Q L, Zhang S P, Jiang Y D, Yu J B 2002 *Acta Electron. Sin.* **30** 769 (in Chinese) [袁晓, 陈向东, 李齐良, 张蜀平, 蒋亚东, 虞厥邦 2002 电子学报 **30** 769]
- [24] Yuan X, Zhang H Y, Yu J B 2004 *Acta Electron. Sin.* **32** 1658 (in Chinese) [袁晓, 张红雨, 虞厥邦 2004 电子学报 **32** 1658]
- [25] Zhao Y Y, Yuan X, Teng X D, Wei Y H 2004 *J. Sichuan Univ. (Eng. Sci. Ed.)* **36** 94 (in Chinese) [赵元英, 袁晓, 滕旭东, 魏永豪 2004 四川大学学报 (工程科学版) **36** 94]

Scaling fractal-lattice fractance approximation circuits of arbitrary order and irregular lattice type scaling equation

Yu Bo¹⁾ He Qiu-Yan²⁾ Yuan Xiao^{2)†}

1) (College of Physics and Engineering, Chengdu Normal University, Chengdu 611130, China)

2) (College of Electronics and Information Engineering, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

(Received 20 July 2017; revised manuscript received 5 February 2018)

Abstract

Although Carlson fractal-lattice fractance approximation circuit belongs to the ideal approximation, it can only have operational performance of fractional operator of negative half-order. When series of this circuit increases, the approximation benefit decreases. Even though the fractance approximation circuit of $-1/2^n$ (n is an integer greater than or equal to 2) order can be obtained by using nested structures, the structure of this kind of circuit is complicated and fractional operation of arbitrary order cannot be achieved by this circuit. The Liu-Kaplan fractal-chain fractance class, which can be regarded as scaling extension circuits of the Oldham fractal-chain fractance class, has high approximation benefit and can realize operational performance of arbitrary fractional order. Based on analogy, arbitrary order scaling fractal-lattice fractance approximation circuits of high approximation benefit and corresponding lattice type scaling equation can be achieved through respectively making scaling extension to the Carlson fractal-lattice fractance approximation circuit and its normalized iterating equation. There exists the possibility to verify the validity of this scaling extension and scaling fractal-lattice fractance approximation circuits with operational performance of arbitrary order in different ways, including the transmission parameter matrix algorithm, the iterating matrix algorithm and the coefficient vector iterating algorithm. Arbitrary order scaling fractal-lattice fractance approximation circuits can be realized by adjusting both the resistance progressive-ratio and the capacitance progressive-ratio parameters. The approximation benefit of scaling fractal-lattice fractance approximation circuit of arbitrary order is determined by both the scaling factor and the circuit series. The introduced extension benefit function is to be used in performance analyses. Besides, performance comparisons have been made between the Carlson fractal-lattice fractance approximation circuit of five series and the scaling fractal-lattice fractance approximation circuit of negative half-order. With the increasing of the value of the scaling factor, approximation efficiency of the scaling fractal-lattice fractance approximation circuits gradually increases, which are higher than those of the Carlson fractal-lattice fractance approximation circuits. The Carlson fractal-lattice fractance approximation circuit and the scaling fractal-lattice fractance approximation circuit of five series are designed to be used in the active differential operational circuit of half-order to construct experimental testing systems. The approximation performances of both circuits are investigated from the aspects of order-frequency characteristic and F -frequency characteristic. The approximation performance of the scaling fractal-lattice fractance approximation circuit outperforms that of the Carlson fractal-lattice fractance approximation circuit. As the successful application case, the active differential operational circuit designed by the scaling fractal-lattice fractance approximation circuit is used to do the half-order calculus of triangular and square wave signals. This paper is merely an incipient work on scaling fractal-lattice fractance approximation circuits of arbitrary order and irregular lattice type scaling equations.

Keywords: fractional calculus, scaling extension, scale factor, fractal fractance approximation circuits

PACS: 02.30.Mv, 84.30.Bv, 05.45.Df

DOI: 10.7498/aps.67.20171671

† Corresponding author. E-mail: 653381180@qq.com