

基于矢量化差分相位的单分布源解耦二维波达方向估计

代正亮 崔维嘉 王大鸣 张彦奎

Decoupled two-dimensional direction of arrival estimation of single distributed source by vectoring differential phases

Dai Zheng-Liang Cui Wei-Jia Wang Da-Ming Zhang Yan-Kui

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 67, 070702 (2018) DOI: 10.7498/aps.67.20172154

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.67.20172154>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2018/V67/I7>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

[对称旋转不变相干分布式非圆信号二维波达方向估计](#)

Two-dimensional direction-of-arrival estimation of coherently distributed noncircular signals via symmetric shift invariance

物理学报.2017, 66(22): 220701 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.220701>

[基于渐进添边的准循环压缩感知时延估计算法](#)

A quasi-cyclic compressed sensing delay estimation algorithm based on progressive edge-growth

物理学报.2017, 66(9): 090703 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.090703>

[基于高速移动通信的虚拟天线阵列理论研究](#)

Virtual antenna array theory based on high speed mobile communications

物理学报.2016, 65(7): 070701 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.070701>

[交替寻优生成元素幅值结合混沌随机相位构造循环测量矩阵](#)

Constructing circulant measurement matrix through alternating optimizing amplitudes together with chaotic stochastic phases of the matrix generating elements

物理学报.2015, 64(13): 130702 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.130702>

[一种基于选择性测量的自适应压缩感知方法](#)

An adaptive compressed sensing method based on selective measure

物理学报.2014, 63(20): 200701 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.200701>

基于矢量化差分相位的单分布源 解耦二维波达方向估计*

代正亮[†] 崔维嘉 王大鸣 张彦奎

(解放军信息工程大学信息工程学院, 郑州 450001)

(2017年9月29日收到; 2018年2月6日收到修改稿)

在分布源(包括相干分布源和非相干分布源)的二维波达方向估计中, 均匀圆阵由于可实现全方位测角、具有较高的分辨率, 得到了广泛的应用, 然而现有的估计算法均需要谱峰搜索和特征值分解, 复杂度较高. 针对此问题, 考虑单个相干分布源或非相干分布源入射两种情况, 提出了一种基于矢量化差分相位的解耦二维波达方向快速估计算法. 该算法首先基于空间频率近似模型, 证明了任意单个分布源入射时, 均匀圆阵中不同阵元接收信号间的差分相位均不受角度扩展参数的影响; 基于此特性, 通过获取差分相位即可实现中心波达角的解耦; 接下来, 提取采样协方差矩阵的严格上三角元素相位, 即对应于各阵元间的差分相位, 并进行矢量化处理, 最终将波达方向估计问题转化为一个最小二乘问题, 从而直接得到闭式解, 避免了谱峰搜索和特征值分解运算, 大幅度降低了复杂度. 理论分析和仿真实验表明, 所提算法具有较高的估计精度, 并且无需角信号分布的先验信息, 同时具备较低的计算复杂度和硬件复杂度, 有利于复杂环境下阵列测向等工程实践.

关键词: 分布式信源, 二维波达方向估计, 均匀圆阵, 矢量化差分相位

PACS: 07.50.Qx, 07.05.Kf, 84.40.Ua

DOI: 10.7498/aps.67.20172154

1 引言

在雷达、声纳和移动通信等应用领域中, 发射的信号时常会受到复杂环境散射和反射等影响, 使得天线阵列接收到的信号能量在空间某一范围呈现一定分布^[1,2]. 此时, 基于点源模型假设的传统波达方向(direction of arrival, DOA)估计算法性能会严重恶化, 而需要采用参数化的分布式信源模型进行处理^[3-5]. 根据同一信源不同路径分量是否相关, 分布源主要包括两类: 相干分布源(coherently distributed source, CD)和非相干分布源(incoherently distributed source, ID)^[6]. 对于CD源, 同一信源不同路径分量仅相差一个固定的相位延迟和幅度加权; 与之相反, 同一ID源的不同路径分量则完全不相关.

近年来, 分布源的DOA估计研究得到了广泛

关注, 相关学者陆续提出了一系列有效的估计算法, 比如子空间类算法^[7-10]、波束形成类算法^[11]、最大似然类算法^[12,13]和稀疏重构类算法^[14,15]等. 然而这些算法均只适用于一维分布源, 在实际应用中, 信号源与接收阵列往往不在同一平面上, 这种情况下需要将其建立为一个二维分布源模型. 一个二维分布源主要包括四个未知角度参数: 中心方位角, 方位角扩展, 中心俯仰角和俯仰角扩展. 尽管上述的某些一维估计方法可以直接推广到二维, 如二维协方差匹配算法^[16]等, 这些算法由于需要多维参数搜索复杂度较高. 为解决此类问题, 相关学者基于一些特定的阵列结构研究了分布源的近似简化模型, 并提出了一些低复杂度的二维DOA估计算法, 如基于三平行线阵的二维传播算子算法^[17,18], 基于矩形阵的二维旋转不变子空间(rotation invariant subspace, ESPRIT)算法^[19]和基于对称十字阵的二维广义ESPRIT算法^[20]等.

* 国家自然科学基金(批准号: 61401513)资助的课题.

[†] 通信作者. E-mail: xinxidailiang@outlook.com

特别地, 均匀圆阵 (uniform circular array, UCA) 相比于其他阵列结构具有 360° 的全方位角覆盖、几乎不变的方向图以及额外的俯仰角信息等优点 [21], 基于UCA的分布源二维DOA估计成为了研究热点 [22–25]. 文献 [22] 首次基于空间距离相近的两个UCA, 提出了一种估计二维CD源DOA的一维交替搜索 (sequential one-dimensional searching, SOS) 算法, 该算法首先基于一阶泰勒 (Taylor) 级数展开得到两个子阵间的近似旋转不变关系, 接下来利用总体最小二乘旋转不变子空间 (total least squares rotation invariant subspace, TLS-ESPRIT) 算法得到中心俯仰角估计, 最后通过多次一维搜索得到中心方位角估计. 算法只需要一维搜索, 但俯仰角的初始估计精度对算法性能影响较大, 并且靠得很近的两个子阵容易产生互耦误差, 降低了估计精度. 在此基础上, 文献 [23] 仅利用单个对称UCA, 提出了一种基于广义ESPRIT的二维DOA估计算法, 该算法无须角信号分布函数先验已知, 但需要二维搜索, 复杂度较高. 文献 [22, 23] 中的算法都是针对CD源的研究, 而对于UCA中的ID源二维DOA估计问题, 相关学者也取得了一些研究成果. 文献 [24] 同样基于靠得很近的两个UCA, 首先根据子阵间的近似旋转不变关系得到中心俯仰角估计, 进而在单个UCA中, 通过广义多重信号分类 (generalized multiple signal classification, GMUSIC) 方法实现了中心方位角估计. 而在文献 [25] 中, 考虑由多个UCA组成的均匀圆柱阵列 (uniform cylindrical array, UCyA), 提出了一种低复杂度的波束空间二维DOA估计算法, 该算法估计中心俯仰角的方法与文献 [24] 类似, 但是在波束域进行计算, 并且通过波束域GMUSIC (beam-space GMUSIC, BS-GMUSIC) 方法得到了中心方位角估计, 具有较低的计算复杂度. 尽管如此, 在上述文献 [22–25] 的算法中, 复杂度较高的谱峰搜索和特征值分解运算依旧无法避免, 所以复杂度仍有待降低. 此外, 文献 [22, 24, 25] 中的算法均需要多个UCA, 阵列结构的硬件复杂度较高, 不利于工程实践.

本文针对单个分布源入射的情况, 提出了一种基于矢量化差分相位的解耦二维DOA快速估计算法. 所提算法首先基于UCA不同阵元间的差分相位不受角度扩展影响的特性, 实现了中心DOA

的解耦; 进而通过最小二乘方法直接得到二维DOA的闭式解. 该算法仅需要单个均匀圆阵, 无须任何的谱峰搜索和特征值分解运算, 具有较低的硬件复杂度和计算复杂度. 仿真实验表明, 相比于现有的低复杂度算法, 所提算法具有较好的估计性能; 同时, 该算法无须角信号分布的任何先验信息.

2 数学模型

考虑如图 1 所示的均匀圆阵, 该阵列由分布于 x - y 平面的 M 个阵元组成, 各阵元均匀分布在半径为 r 的圆周上, 第一个阵元位于 x 轴上且坐标原点位于圆阵的圆心. 假设有单个远场窄带分布源入射到该阵列, 则 t 时刻该阵列第 m 个阵元的输出信号可以表示为 [22–25]

$$x_m(t) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(2\pi r/\lambda) \cos(\theta-\gamma_m) \sin \varphi} \times s(\theta, \varphi, t; \boldsymbol{\mu}) d\theta d\varphi + n_m(t), \quad (1)$$

其中 $\gamma_m = 2\pi(m-1)/M$, λ 为入射信号波长; $t = 1, 2, \dots, T$ 为采样时刻, T 为快拍总数; $s(\theta, \varphi, t; \boldsymbol{\mu})$ 为分布源的角信号密度函数; $\boldsymbol{\mu} = (\theta_0, \sigma_{\theta_0}, \varphi_0, \sigma_{\varphi_0})$ 为分布源的角度参数矢量, 其中各分量分别表示中心方位角 θ_0 , 方位角扩展 σ_{θ_0} , 中心俯仰角 φ_0 和俯仰角扩展 σ_{φ_0} ; $n_m(t)$ 是均值为 0, 方差为 σ_n^2 的高斯白噪声. 需要注意的是, 为了表达式的简化, 在下面的相关积分中均省略了上下限的标识.

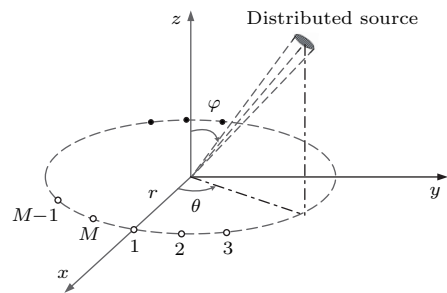


图 1 均匀圆阵
Fig. 1. Uniform circular array.

进一步可将 (1) 式写成向量形式为

$$\mathbf{x}(t) = \iint \mathbf{a}(\theta, \varphi) s(\theta, \varphi, t; \boldsymbol{\mu}) d\theta d\varphi + \mathbf{n}(t), \quad (2)$$

其中 $\mathbf{x}(t)$ 和 $\mathbf{n}(t)$ 分别为 $M \times 1$ 的输出信号矢量和噪声矢量; $\mathbf{a}(\theta, \varphi)$ 为均匀圆阵的阵列方向矢量,

$$\mathbf{a}(\theta, \varphi) = [e^{j(2\pi r/\lambda) \cos(\theta-\gamma_1) \sin \varphi}, e^{j(2\pi r/\lambda) \cos(\theta-\gamma_2) \sin \varphi}, \dots, e^{j(2\pi r/\lambda) \cos(\theta-\gamma_M) \sin \varphi}]^T. \quad (3)$$

根据单个分布源内部不同路径分量是否相关, 可以将分布源分成两类: CD源和ID源, 分别对应于多径时不变和多径时变两种信道状态. 当信道的相关时间大于观测周期时, 此时分布源为CD源; 而当信道的相关时间远小于观测周期时, 此时分布源为ID源. 本文讨论单个CD源和单个ID源入射两种情况, 因此接下来需要对上述分布源统一模型进行区别讨论.

首先, 对于一个二维CD源, 由于不同的入射分量仅相差一个固定的相位延迟和幅度加权, 因此角信号密度函数 $s(\theta, \varphi, t; \boldsymbol{\mu})$ 可进一步表示为

$$s(\theta, \varphi, t; \boldsymbol{\mu}) = s(t)\ell(\theta, \varphi; \boldsymbol{\mu}), \quad (4)$$

其中, $s(t)$ 是复随机信号源; $\ell(\theta, \varphi; \boldsymbol{\mu})$ 为相应的确定性角信号密度函数, 通常假设为以中心DOA为对称中心的单峰对称函数, 服从均匀分布、高斯分布和拉普拉斯分布^[22]等.

接下来将(4)式代入(2)式, 可以得到

$$\mathbf{x}(t) = s(t)\mathbf{b}(\boldsymbol{\mu}) + \mathbf{n}(t), \quad (5)$$

其中, $\mathbf{b}(\boldsymbol{\mu}) = \iint \mathbf{a}(\theta, \varphi)\ell(\theta, \varphi; \boldsymbol{\mu})d\theta d\varphi$ 为广义方向矢量.

然而, 对于二维ID源而言, 由于不同的路径分量是完全不相关的, 则有下式成立:

$$\begin{aligned} & E\{s(\theta, \varphi, t; \boldsymbol{\mu})s^*(\theta', \varphi', t; \boldsymbol{\mu})\} \\ &= \sigma_s^2 \rho(\theta, \varphi; \boldsymbol{\mu})\delta(\theta - \theta')\delta(\varphi - \varphi'), \end{aligned} \quad (6)$$

其中, σ_s^2 是信号功率; $\rho(\theta, \varphi; \boldsymbol{\mu})$ 表示归一化的角信号密度函数, 同样地, 通常假设为以中心DOA为对称中心的单峰对称函数, 服从均匀分布, 高斯分布和柯西分布^[24]等.

3 基于矢量化差分相位的二维DOA快速估计算法

在分布源二维DOA估计中, 现有基于均匀圆阵的估计算法均需要谱峰搜索和特征分解运算, 复杂度较高. 针对该问题, 本文分别考虑单个CD源和单个ID源入射到均匀圆阵这两种情形, 首先基于空间频率近似模型, 证明了各阵元接收信号间的差分相位可实现中心DOA的解耦合, 即差分相位

中只包含中心DOA信息, 而与角度扩展无关; 然后基于此特性, 通过对协方差矩阵的严格上三角元素相位进行矢量化处理, 使得二维DOA估计问题转化为一个最小二乘问题, 进而直接得到中心方位角和俯仰角的闭式解.

3.1 阵元间差分相位的解耦合特性证明

根据(2)式的阵列输出信号矢量 $\mathbf{x}(t)$, 可以得到相应的输出信号协方差矩阵为 $\mathbf{R} = E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t)]$, 则 \mathbf{R} 的第 (p, q) 个元素可表示为

$$[\mathbf{R}]_{p,q} = E[x_p(t)x_q^*(t)]. \quad (7)$$

由上式分析可知 $[\mathbf{R}]_{p,q}$ 的相位即为第 p 个阵元和第 q 个阵元输出信号的差分相位, 所以可以通过分析协方差矩阵中的元素相位来实现阵元间差分相位的解耦合特性证明. 由于CD源和ID源的阵列模型有所不同, 因此需要分别进行讨论.

首先对于CD源, 由于信号与噪声无关, 根据(5)式的广义阵列模型, 可以得到对应于CD源的阵列协方差矩阵 \mathbf{R}_{CD} 的解析表达式为

$$\mathbf{R}_{CD} = \sigma_s^2 \mathbf{b}(\boldsymbol{\mu})\mathbf{b}^H(\boldsymbol{\mu}) + \sigma_n^2 \mathbf{I}_M, \quad (8)$$

其中, \mathbf{I}_M 为 $M \times M$ 的单位矩阵. 由于协方差矩阵 \mathbf{R}_{CD} 的主对角线元素中不包含中心DOA信息, 因此只需要考虑非主对角线上的元素, 即当 $p \neq q$ 时, $[\mathbf{R}_{CD}]_{p,q}$ 可进一步表示为

$$[\mathbf{R}_{CD}]_{p,q} = \sigma_s^2 [\mathbf{b}(\boldsymbol{\mu})]_p [\mathbf{b}^*(\boldsymbol{\mu})]_q. \quad (9)$$

可以定义 $\theta = \theta_0 + \tilde{\theta}$ 和 $\varphi = \varphi_0 + \tilde{\varphi}$, 其中 $\tilde{\theta}$ 和 $\tilde{\varphi}$ 分别是 θ, φ 和中心方位角 θ_0 、中心俯仰角 φ_0 之间的角度偏差. 在小角度扩展假设下, 基于空间频率近似模型^[7-10], 有以下近似关系成立:

$$\begin{aligned} & \cos(\theta - \gamma_m) \\ & \approx \cos(\theta_0 - \gamma_m) - \tilde{\theta} \sin(\theta_0 - \gamma_m), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\sin \varphi \approx \sin \varphi_0 + \tilde{\varphi} \cos \varphi_0, \quad (11)$$

$$\tilde{\theta}\tilde{\varphi} \approx 0. \quad (12)$$

在广义方向矢量 $\mathbf{b}(\boldsymbol{\mu})$ 中, 中心DOA与角度扩展相互耦合. 根据(10), (11)和(12)式, 则可以得到广义方向矢量 $\mathbf{b}(\boldsymbol{\mu})$ 的参数解耦形式:

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{b}(\boldsymbol{\mu})]_m &\approx \iint \ell(\theta, \varphi; \boldsymbol{\mu}) e^{j(2\pi r/\lambda)(\sin \varphi_0 + \tilde{\varphi} \cos \varphi_0)(\cos(\theta_0 - \gamma_m) - \tilde{\theta} \sin(\theta_0 - \gamma_m))} d\theta d\varphi \\
 &\approx e^{j(2\pi r/\lambda) \sin \varphi_0 \cos(\theta_0 - \gamma_m)} \iint \ell(\theta, \varphi; \boldsymbol{\mu}) e^{j(2\pi r/\lambda)(\tilde{\varphi} \cos \varphi_0 \cos(\theta_0 - \gamma_m) - \tilde{\theta} \sin \varphi_0 \sin(\theta_0 - \gamma_m))} d\tilde{\theta} d\tilde{\varphi} \\
 &= [\mathbf{a}(\theta_0, \varphi_0)]_m [\mathbf{g}(\boldsymbol{\mu})]_m,
 \end{aligned} \tag{13}$$

其中 $\mathbf{g}(\boldsymbol{\mu})$ 为确定性角信号分布函数矢量, 且有

$$[\mathbf{g}(\boldsymbol{\mu})]_m = \iint \ell(\tilde{\theta}, \tilde{\varphi}; \boldsymbol{\mu}) e^{j(2\pi r/\lambda)(\tilde{\varphi} \cos \varphi_0 \cos(\theta_0 - \gamma_m) - \tilde{\theta} \sin \varphi_0 \sin(\theta_0 - \gamma_m))} d\tilde{\theta} d\tilde{\varphi}. \tag{14}$$

值得注意的是由于 $\ell(\tilde{\theta}, \tilde{\varphi}; \boldsymbol{\mu})$ 是单峰对称函数, 可以证明 $\mathbf{g}(\boldsymbol{\mu})$ 为实向量 (具体证明参考附录), 进而 $\mathbf{b}(\boldsymbol{\mu})$ 可以进一步改写为

$$\mathbf{b}(\boldsymbol{\mu}) = \mathbf{a}(\theta_0, \varphi_0) \otimes \mathbf{g}(\boldsymbol{\mu}), \tag{15}$$

其中, \otimes 表示 Schur-Hadamard 积.

将 (15) 式代入 (9) 式, 可得

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{R}_{\text{CD}}]_{p,q} &= \sigma_s^2 [\mathbf{a}(\theta_0, \varphi_0) \otimes \mathbf{g}(\boldsymbol{\mu})]_p [\mathbf{a}(\theta_0, \varphi_0) \otimes \mathbf{g}(\boldsymbol{\mu})]_q^* = \sigma_s^2 [\mathbf{a}(\theta_0, \varphi_0)]_p [\mathbf{a}(\theta_0, \varphi_0)]_q^* [\mathbf{g}(\boldsymbol{\mu})]_p [\mathbf{g}(\boldsymbol{\mu})]_q^* \\
 &= \sigma_s^2 [\mathbf{g}(\boldsymbol{\mu})]_p [\mathbf{g}(\boldsymbol{\mu})]_q^* e^{j(2\pi r/\lambda) \sin \varphi_0 (\cos(\theta_0 - \gamma_p) - \cos(\theta_0 - \gamma_q))}.
 \end{aligned} \tag{16}$$

分析上式, 虽然 $\mathbf{g}(\boldsymbol{\mu})$ 中同时包含中心 DOA 和角度扩展信息, 但由于其为实向量, 不会对 $[\mathbf{R}_{\text{CD}}]_{p,q}$ 的相位产生影响, 因此 $[\mathbf{R}_{\text{CD}}]_{p,q}$ 的相位 $\varpi_{p,q}^{\text{CD}}$ 可以表示为

$$\varpi_{p,q}^{\text{CD}} = \text{angle}([\mathbf{R}_{\text{CD}}]_{p,q}) = (2\pi r/\lambda) \sin \varphi_0 (\cos(\theta_0 - \gamma_p) - \cos(\theta_0 - \gamma_q)). \tag{17}$$

对于 ID 源, 根据 (2) 式和 (6) 式, 可以计算对应的协方差矩阵为

$$\mathbf{R}_{\text{ID}} = E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^{\text{H}}(t)] = \sigma_s^2 \iint \rho(\theta, \varphi; \boldsymbol{\mu}) \mathbf{a}(\theta, \varphi) \mathbf{a}^{\text{H}}(\theta, \varphi) d\theta d\varphi + \sigma_n^2 \mathbf{I}_M = \sigma_s^2 \mathbf{R}_s(\boldsymbol{\mu}) + \sigma_n^2 \mathbf{I}_M, \tag{18}$$

其中 $\mathbf{R}_s(\boldsymbol{\mu}) = \iint \rho(\theta, \varphi; \boldsymbol{\mu}) \mathbf{a}(\theta, \varphi) \mathbf{a}^{\text{H}}(\theta, \varphi) d\theta d\varphi$ 为无噪协方差矩阵.

在无噪协方差矩阵 $\mathbf{R}_s(\boldsymbol{\mu})$ 中, 中心 DOA 与角度扩展参数相互耦合. 在小角度扩展下, 基于 (10), (11) 和 (12) 式的近似关系, 同样可以得到 $\mathbf{R}_s(\boldsymbol{\mu})$ 的参数解耦形式:

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{R}_s(\boldsymbol{\mu})]_{p,q} &= \iint \rho(\theta, \varphi; \boldsymbol{\mu}) [\mathbf{a}(\theta, \varphi)]_p [\mathbf{a}(\theta, \varphi)]_q^* d\theta d\varphi \\
 &= \iint \rho(\theta, \varphi; \boldsymbol{\mu}) e^{j(2\pi r/\lambda) \sin \varphi (\cos(\theta - \gamma_p) - \cos(\theta - \gamma_q))} d\theta d\varphi \\
 &= \iint \rho(\theta, \varphi; \boldsymbol{\mu}) e^{j(2\pi r/\lambda)(\sin \varphi_0 + \tilde{\varphi} \cos \varphi_0)(\cos(\theta_0 - \gamma_p) - \tilde{\theta} \sin(\theta_0 - \gamma_q))} d\tilde{\theta} d\tilde{\varphi} \\
 &= e^{j(2\pi r/\lambda) \sin \varphi_0 (\cos(\theta_0 - \gamma_p) - \cos(\theta_0 - \gamma_q))} [\mathbf{B}(\boldsymbol{\mu})]_{p,q},
 \end{aligned} \tag{19}$$

其中

$$[\mathbf{B}(\boldsymbol{\mu})]_{p,q} = \iint \rho(\tilde{\theta}, \tilde{\varphi}; \boldsymbol{\mu}) e^{j(2\pi r/\lambda)(\tilde{\theta} \cos \varphi_0 (\sin(\theta_0 - \gamma_p) - \sin(\theta_0 - \gamma_q)) + \tilde{\varphi} \sin \varphi_0 (\cos(\theta_0 - \gamma_p) - \cos(\theta_0 - \gamma_q)))} d\tilde{\theta} d\tilde{\varphi}. \tag{20}$$

由于 $\rho(\tilde{\theta}, \tilde{\varphi}; \boldsymbol{\mu})$ 是单峰对称函数, 可以证明 $\mathbf{B}(\boldsymbol{\mu})$ 为实对称矩阵 (具体证明参考附录), 则当 $p \neq q$ 时, \mathbf{R}_{ID} 的第 (p, q) 个元素可以写成

$$[\mathbf{R}_{\text{ID}}]_{p,q} = \sigma_s^2 [\mathbf{R}_s(\boldsymbol{\mu})]_{p,q} = \sigma_s^2 [\mathbf{B}(\boldsymbol{\mu})]_{p,q} e^{j(2\pi r/\lambda) \sin \varphi_0 (\cos(\theta_0 - \gamma_p) - \cos(\theta_0 - \gamma_q))}. \tag{21}$$

由于 σ_s^2 和 $[\mathbf{B}(\boldsymbol{\mu})]_{p,q}$ 是实值, 同样也不影响相位, 因此可以得到 $[\mathbf{R}_{\text{ID}}]_{p,q}$ 的相位表达式为

$$\varpi_{p,q}^{\text{ID}} = \text{angle}([\mathbf{R}_{\text{ID}}]_{p,q}) = (2\pi r/\lambda) \sin \varphi_0 (\cos(\theta_0 - \gamma_p) - \cos(\theta_0 - \gamma_q)). \tag{22}$$

由(17)和(22)式可知,当 $p \neq q$ 时, $[\mathbf{R}_{CD}]_{p,q}$ 和 $[\mathbf{R}_{ID}]_{p,q}$ 的相位中均仅包含待定的分布源中心DOA,而不包含任何的角度扩展参数,因此通过提取协方差矩阵的非对角线元素相位可将中心DOA与角度扩展分离开,即证明了均匀圆阵中不同阵元接收信号的差分相位具有解耦合的特性.

3.2 中心方位角与俯仰角估计

通过上述的阵元间差分相位解耦合特性的证明,可知协方差矩阵非对角线上的元素相位仅包含待定的中心DOA信息,基于此,可进一步得到中心方位角与俯仰角估计.根据(17)和(22)式可知, $\varpi_{p,q}^{CD}$ 和 $\varpi_{p,q}^{ID}$ 具有相同的形式,因此接下来可以一起讨论,统一记为 $\varpi_{p,q}$,于是有:

$$\varpi_{p,q} = (2\pi r/\lambda) \sin \varphi_0 (\cos(\theta_0 - \gamma_p) - \cos(\theta_0 - \gamma_q)). \quad (23)$$

值得注意的是,为了避免产生相位模糊问题,本文假设 $r/\lambda \leq 1/4$,同时

$$|\sin(\varphi_0)(\cos(\theta_0 - \gamma_p) - \cos(\theta_0 - \gamma_q))| \leq 2,$$

进而有 $\varpi_{p,q} \in [-\pi, \pi)$,因此 $\varpi_{p,q}$ 不会产生相位模

糊.应该指出的是当 $r/\lambda > 1/4$ 时,相关学者也提出了多种方法来解决相位模糊问题[26-28].

为了得到中心方位角和俯仰角估计,可以将(23)式进一步展开,改写为以下形式:

$$\varpi_{p,q} = \frac{2\pi r}{\lambda} \begin{bmatrix} \cos(\gamma_p) - \cos(\gamma_q) \\ \sin(\gamma_p) - \sin(\gamma_q) \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} \cos(\theta_0) \sin(\varphi_0) \\ \sin(\theta_0) \sin(\varphi_0) \end{bmatrix}. \quad (24)$$

由于协方差矩阵是共轭对称的,并且主对角线的元素相位不含方位信息,因此只需要考虑协方差矩阵严格上三角部分的元素,将这部分元素相位按行提取,并进行矢量化处理,进而可以得到差分相位矢量 \mathbf{W} :

$$\mathbf{W} = [\varpi_{1,2}, \varpi_{1,3}, \dots, \varpi_{1,M}, \varpi_{2,3}, \dots, \varpi_{M-2,M-1}, \varpi_{M-1,M}]^T. \quad (25)$$

接下来可将(24)式改写为如下矩阵形式:

$$\mathbf{W} = \mathbf{A}\mathbf{v}, \quad (26)$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\gamma_1) - \cos(\gamma_2), & \sin(\gamma_1) - \sin(\gamma_2) \\ \cos(\gamma_1) - \cos(\gamma_3), & \sin(\gamma_1) - \sin(\gamma_3) \\ \vdots & \vdots \\ \cos(\gamma_1) - \cos(\gamma_M), & \sin(\gamma_1) - \sin(\gamma_M) \\ \vdots & \vdots \\ \cos(\gamma_{M-2}) - \cos(\gamma_{M-1}), & \sin(\gamma_{M-2}) - \sin(\gamma_{M-1}) \\ \cos(\gamma_{M-1}) - \cos(\gamma_M), & \sin(\gamma_{M-1}) - \sin(\gamma_M) \end{bmatrix}, \quad (27)$$

$$\mathbf{v} = \frac{2\pi r}{\lambda} \begin{bmatrix} \cos(\theta_0) \sin(\varphi_0) \\ \sin(\theta_0) \sin(\varphi_0) \end{bmatrix}. \quad (28)$$

因此 \mathbf{v} 的最小二乘估计由下式给出:

$$\hat{\mathbf{v}} = [\hat{v}_1, \hat{v}_2]^T = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{W}. \quad (29)$$

最后,分别得到单分布源的中心方位角和俯仰角估计:

$$\hat{\theta}_0 = \text{angle}(\hat{v}_1 + j\hat{v}_2), \quad (30)$$

$$\hat{\varphi}_0 = \arcsin\left(\frac{\lambda}{2\pi r} \sqrt{\hat{v}_1^2 + \hat{v}_2^2}\right). \quad (31)$$

3.3 算法步骤与复杂度分析

根据上述分析可以将本文估计单分布源二维DOA的方法归纳为以下步骤:

- 1) 根据(2)式的分布源阵列输出信号矢量,计算相应的协方差矩阵 $\mathbf{R} = E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t)]$;
- 2) 提取协方差矩阵 \mathbf{R} 的严格上三角元素相位,并进行矢量化处理,得到差分相位矢量 \mathbf{W} ;
- 3) 根据(27)和(28)式分别构造矩阵 \mathbf{A} 和 \mathbf{v} ,进而得到如(26)式所示的等式关系,接下来根据(29)式直接得到 \mathbf{v} 的最小二乘估计;

4) 由(30)和(31)式计算中心方位角和俯仰角估计值.

接下来将本文算法与文献[22]中的SOS算法、文献[23]中的NAM算法、文献[24]中的GMUSIC算法和文献[25]中的BS-GMUSIC算法进行复杂度对比分析. 假设阵列阵元数为 M , 快拍数为 T , 则本文算法的复杂度主要在于估计一个 M 阶的阵列协方差矩阵以及最小二乘计算过程, 相应的计算量可以表示为 $O(M^2T + (M^2 - M)/2)$; SOS算法的复杂度主要在于估计一个 M 阶的阵列协方差矩阵和特征分解运算以及一维谱峰搜索过程, 可以表示为 $O(M^3 + 9M^2T + L(1 + M))$; NAM算法的复杂度主要在于估计一个 M 阶的阵列协方差矩阵和特征分解运算以及二维谱峰搜索过程, 可以表示为 $O(M^2T + M^3 + L^2(M + 1))$; GMUSIC算法的主要复杂度同样在于估计一个 M 阶的阵列协方差矩阵和特征分解运算以及一维谱峰搜索过程, 可以表示为 $O(M^2T + M^3 + M^2L)$; BS-GMUSIC算法实现了波束域计算, 其复杂度主要包括波束空间转换过程、估计一个 M 阶协方差矩阵和特征分解运算以及一维波束域谱峰搜索过程, 可以表示为 $O(MPT + P^2T + P^3 + P^2L)$. 注意在上述复杂度分析中, L 表示搜索点数, P 为输出信号矩阵波束空间转换后的维数.

由上述的复杂度分析可知, 当搜索点数 L 较大时, 本文算法的复杂度明显低于其他算法, 这是因为本文算法无须任何的谱峰搜索和特征分解运算.

4 仿真实验

本文研究的是单个分布源DOA估计算法, 拟分别采用单个CD源与单个ID源作为发射信号. 仿真实验采用如图1所示的均匀圆阵, 圆阵中包含20个阵元, 半径为 $r = \lambda/4$. 实验中假设噪声为高斯白噪声. 为了验证本文算法的实用性与鲁棒性, 采用蒙特卡罗实验将本文算法与文献[22]中的SOS算法、文献[23]中的NAM算法、文献[24]中的GMUSIC算法、文献[25]中的BS-GMUSIC算法和相应的CRLB进行对比分析.

为衡量算法性能, 首先定义中心方位角和俯仰角估计的二维均方根误差2D-RMSE为

$$2D-RMSE = \sqrt{\frac{1}{2Q} \left(\sum_{q=1}^Q (\|\hat{\theta}_q - \theta_0\|^2 + \|\hat{\varphi}_q - \varphi_0\|^2) \right)}, \quad (32)$$

其中, Q 为蒙特卡罗仿真次数, $\hat{\theta}_q$ 和 $\hat{\varphi}_q$ 分别为第 q 次蒙特卡罗实验中分布源的中心方位角和俯仰角估计值.

仿真1 参数估计直方图分布

假设入射的单个分布源角度参数矢量为 $\mu = (30^\circ, 1^\circ, 50^\circ, 1^\circ)$, 固定信噪比(SNR)为10 dB, 快拍数为500, 分别在CD源和ID源两种情况下, 进行300次蒙特卡罗实验, 相应的二维DOA估计值的分布直方图如图2所示. 从图中可以看出, 中心

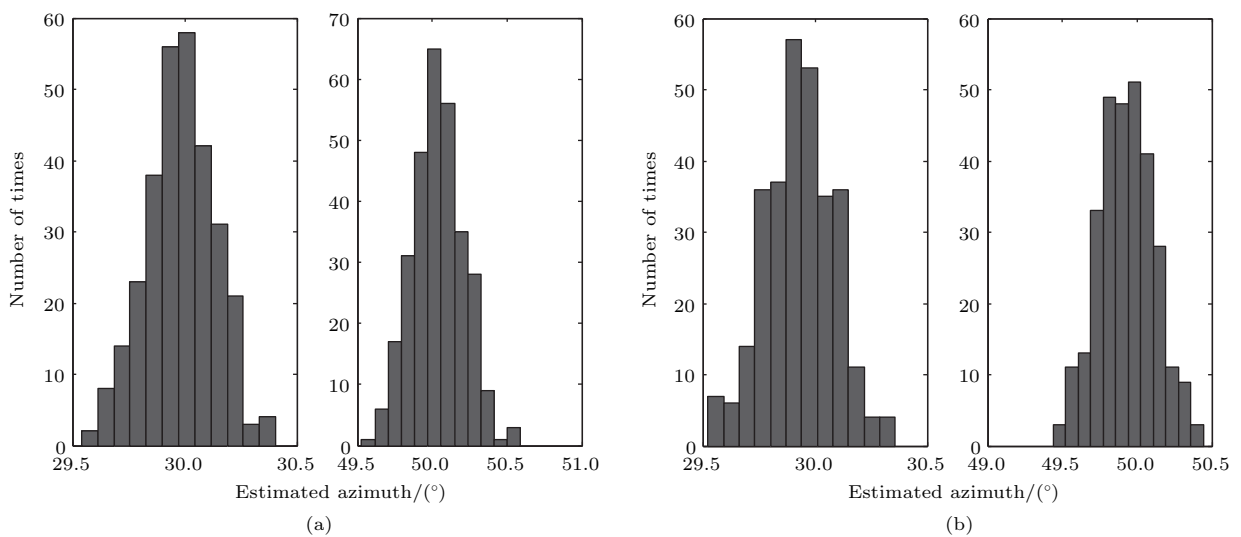


图2 分布源二维DOA估计直方图 (a)CD源; (b)ID源

Fig. 2. Histogram of two dimensional DOA estimation for distributed source: (a) CD source; (b) ID source.

方位角和中心俯仰角估计的误差范围均在 1° 以内,并且越接近真值,估计次数越多,因此本文算法能够实现对单个分布源二维DOA的有效估计.

仿真2 不同算法性能对比

在CD源条件下,将本文算法与SOS算法和NAM算法性能进行对比,而对于ID源,则将本文算法与GMUSIC算法和BS-GMUSIC算法性能进行对比.入射的CD源或ID源的角度参数矢量均为 $\mu = (30^\circ, 2^\circ, 60^\circ, 3^\circ)$,SNR从0 dB变化到30 dB,快拍数为500,分别绘制这些算法的2D-RMSE曲线与信噪比SNR的关系曲线如图3所示.从图中可以看出,在CD源角度估计中,本文算法

的估计性能明显优于SOS算法,而与NAM算法近乎相同;在ID源角度估计,本文算法的性能在低信噪比时明显优于GMUSIC算法和BS-GMUSIC算法.因此结合上述的复杂度分析可得出结论:所提算法在具有较低复杂度的同时也具有一个较好的估计性能.

仿真3 验证快拍数对算法性能的影响

假设快拍数由100到1500之间变化,SNR固定为10 dB,其他参数与仿真二相同,分别绘制不同算法的2D-RMSE曲线与快拍数的关系,如图4所示.从图中可以得出与仿真二类似的结论,并且随着快拍数的增多,算法的估计性能也越来越好.

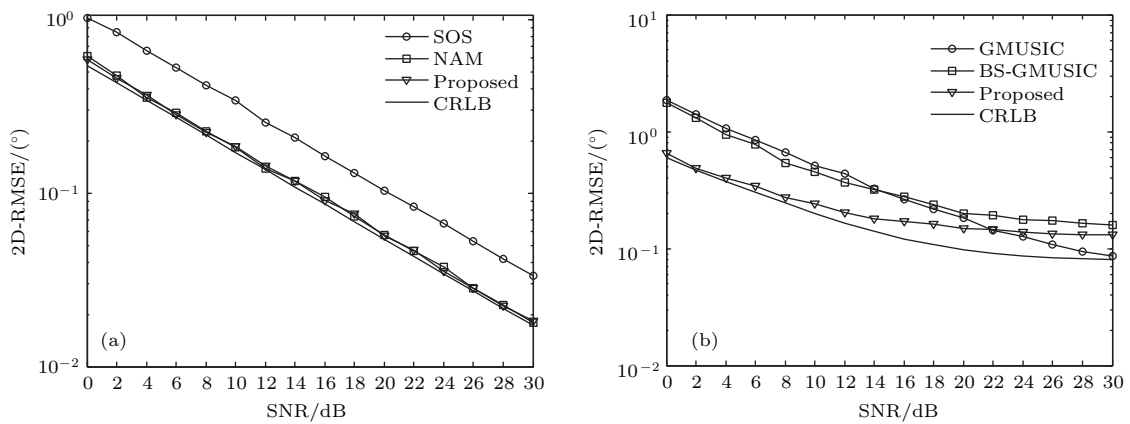


图3 不同算法二维DOA均方根误差对比 (a)CD源; (b)ID源

Fig. 3. 2D-RMSE contrast of two-dimensional DOA of different algorithms: (a) CD source; (b) ID source.

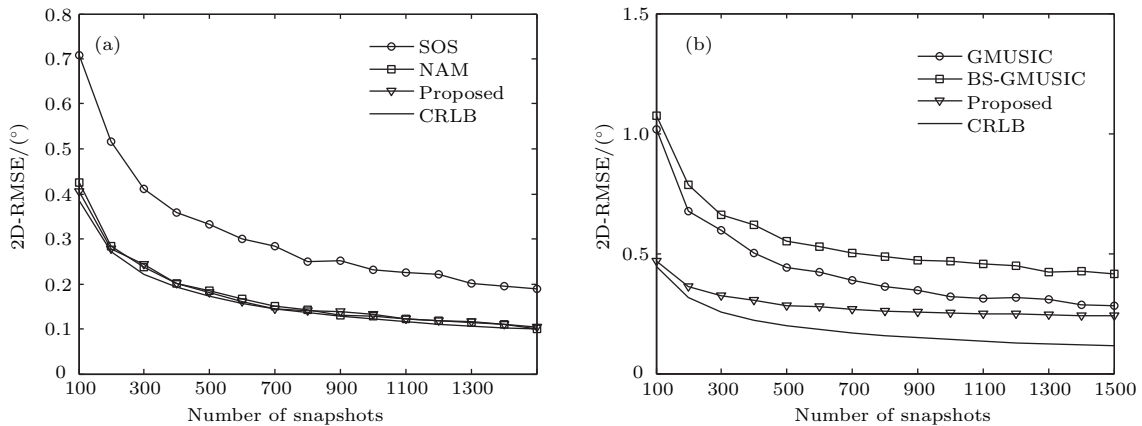


图4 不同算法二维DOA估计均方根误差与快拍数的关系 (a) CD源; (b) ID源

Fig. 4. The relationship between 2D-RMSE of two-dimensional DOA and the number of snapshots of different algorithms: (a) CD source; (b) ID source.

仿真4 验证算法对不同中心DOA的估计能力

选取分布源的角度扩展参数为 $\sigma_{\theta_0} = \sigma_{\varphi_0} = 1.5^\circ$,首先固定中心俯仰角 $\varphi_0 = 60^\circ$,SNR = 10 dB,快拍数,研究中心方位角的变化对算法

估计性能的影响,如图5(a)所示.从图中可以看出,在全方位角范围内 $[-180^\circ, 180^\circ)$,所提算法均具有近乎相同的估计性能与分辨力,因此本文算法可以实现全方位测角;类似地,固定中心方位角 $\theta_0 = 30^\circ$,则中心俯仰角的变化对算法估计性能的

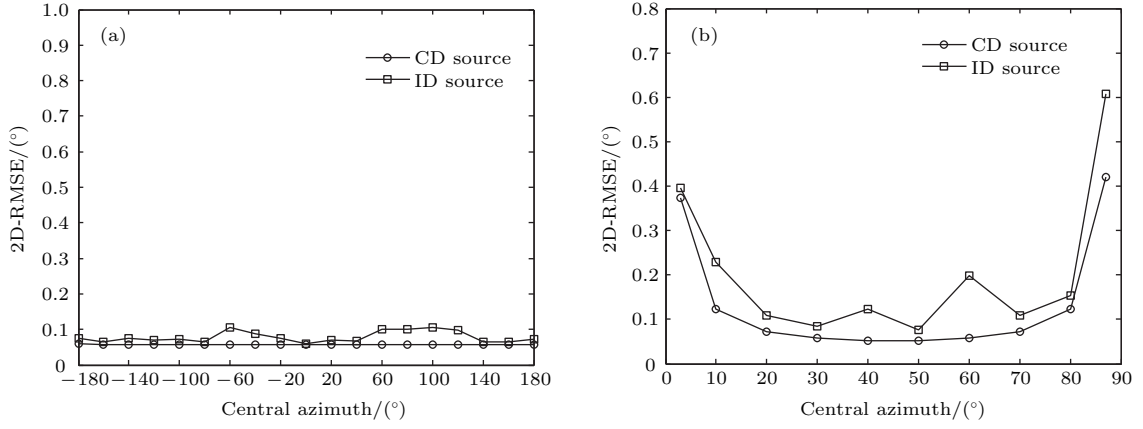


图5 算法对不同中心 DOA 的估计能力 (a) 中心方位角; (b) 中心俯仰角

Fig. 5. Estimation performance of the algorithm for different center DOAs: (a) Center azimuth; (b) center elevation.

影响如图 5(b) 所示, 分析可知当中心俯仰角接近角度域下界 $\varphi_0 = 0^\circ$ 或者上界 $\varphi_0 = 90^\circ$ 时, 估计的均方根误差显著增大但仍然小于 1° , 这说明算法在整个角度区域 ($\theta_0 \in [-180^\circ, 180^\circ], \varphi_0 \in (0^\circ, 90^\circ)$) 内都可进行有效估计.

5 结 论

基于均匀圆阵的分布源二维 DOA 估计可以实现全方位测角, 并且具有较高的分辨率, 然而现有的估计算法均需要谱峰搜索和特征值分解, 复杂度

较高. 针对该问题, 本文算法在证明任意单分布源入射时, 均匀圆阵不同阵元接收信号间的差分相位具有解耦合特性的基础上, 通过提取协方差矩阵的严格上三角元素相位, 并进行矢量化处理, 最终将波达方向估计问题转化为一个最小二乘问题, 从而可以直接得到闭式解. 通过仿真实验和复杂度分析可以看出, 所提算法与现有的算法相比, 在大幅度降低复杂度的同时, 依旧能够获得较好的估计性能; 并且仅需要单个圆阵, 具有较低的硬件复杂度, 同时也无须角度分布的任何先验信息.

附录 A

对于 CD 源, $\ell(\tilde{\theta}, \tilde{\varphi}; \boldsymbol{\mu})$ 是单峰对称函数, 可以得到

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{g}^*(\boldsymbol{\mu})]_m &= \iint \ell(\tilde{\theta}, \tilde{\varphi}; \boldsymbol{\mu}) e^{-j(2\pi r/\lambda)(\tilde{\varphi} \cos \varphi_0 \cos(\theta_0 - \gamma_m) - \tilde{\theta} \sin \varphi_0 \sin(\theta_0 - \gamma_m))} d\tilde{\theta} d\tilde{\varphi} \\
 &= \iint \ell(\tilde{\theta}, \tilde{\varphi}; \boldsymbol{\mu}) e^{j(2\pi r/\lambda)(\tilde{\theta} \sin \varphi_0 \sin(\theta_0 - \gamma_m) - \tilde{\varphi} \cos \varphi_0 \cos(\theta_0 - \gamma_m))} d\tilde{\theta} d\tilde{\varphi} \\
 &= \iint \ell(-\tilde{\theta}, -\tilde{\varphi}; \boldsymbol{\mu}) e^{j(2\pi r/\lambda)(-\tilde{\theta} \sin \varphi_0 \sin(\theta_0 - \gamma_m) + \tilde{\varphi} \cos \varphi_0 \cos(\theta_0 - \gamma_m))} d\tilde{\theta} d\tilde{\varphi} \\
 &= \iint \ell(\tilde{\theta}, \tilde{\varphi}; \boldsymbol{\mu}) e^{j(2\pi r/\lambda)(\tilde{\varphi} \cos \varphi_0 \cos(\theta_0 - \gamma_m) - \tilde{\theta} \sin \varphi_0 \sin(\theta_0 - \gamma_m))} d\tilde{\theta} d\tilde{\varphi} = [\mathbf{g}(\boldsymbol{\mu})]_m, \quad (\text{A1})
 \end{aligned}$$

因此 $\mathbf{g}(\boldsymbol{\mu})$ 为实值矢量.

类似地, 对于 ID 源, $\rho(\tilde{\theta}, \tilde{\varphi}; \boldsymbol{\mu})$ 也是单峰对称函数, 同样可得

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{B}^*(\boldsymbol{\mu})]_{p,q} &= \iint \rho(\tilde{\theta}, \tilde{\varphi}; \boldsymbol{\mu}) e^{-j(2\pi r/\lambda)(\tilde{\theta} \cos(\varphi)(\sin(\theta - \gamma_p) - \sin(\theta - \gamma_q)) + \tilde{\varphi} \sin(\varphi)(\cos(\theta - \gamma_p) - \cos(\theta - \gamma_q)))} d\tilde{\theta} d\tilde{\varphi} \\
 &= \iint \rho(\tilde{\theta}, \tilde{\varphi}; \boldsymbol{\mu}) e^{j(2\pi r/\lambda)(\tilde{\theta} \cos(\varphi)(\sin(\theta - \gamma_q) - \sin(\theta - \gamma_p)) + \tilde{\varphi} \sin(\varphi)(\cos(\theta - \gamma_q) - \cos(\theta - \gamma_p)))} d\tilde{\theta} d\tilde{\varphi} \\
 &= [\mathbf{B}(\boldsymbol{\mu})]_{q,p} \\
 &= \iint \rho(-\tilde{\theta}, -\tilde{\varphi}; \boldsymbol{\mu}) e^{j(2\pi r/\lambda)(-\tilde{\theta} \cos(\varphi)(\sin(\theta - \gamma_q) - \sin(\theta - \gamma_p)) - \tilde{\varphi} \sin(\varphi)(\cos(\theta - \gamma_q) - \cos(\theta - \gamma_p)))} d\tilde{\theta} d\tilde{\varphi} \\
 &= \iint \rho(\tilde{\theta}, \tilde{\varphi}; \boldsymbol{\mu}) e^{j(2\pi r/\lambda)(\tilde{\theta} \cos(\varphi)(\sin(\theta - \gamma_p) - \sin(\theta - \gamma_q)) - \tilde{\varphi} \sin(\varphi)(\cos(\theta - \gamma_p) - \cos(\theta - \gamma_q)))} d\tilde{\theta} d\tilde{\varphi} = [\mathbf{B}(\boldsymbol{\mu})]_{p,q}, \quad (\text{A2})
 \end{aligned}$$

因此 $\mathbf{B}(\boldsymbol{\mu})$ 为实对称矩阵.

参考文献

- [1] Liang G L, Ma W, Fan Z, Wang Y L 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 144302 (in Chinese) [梁国龙, 马巍, 范展, 王逸林 2013 物理学报 **62** 144302]
- [2] Xiong W, Picheral J, Marcuss S 2017 *Digital Signal Process.* **63** 155
- [3] Ba B, Liu G C, Fan Z, Li T, Fan Z, Lin Y C, Wang Y 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 078403 (in Chinese) [巴斌, 刘国春, 李韬, 范展, 林禹丞, 王瑜 2015 物理学报 **64** 078403]
- [4] Jiang H, Zhou J, Hisakazu K, Shao G F 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 048702 (in Chinese) [江浩, 周杰, 菊池久和, 邵根富 2014 物理学报 **63** 048702]
- [5] Zheng Z 2011 *Ph. D. Dissertation*(Chengdu: University of Electronic Science and Technology) (in Chinese) [郑植 2011 博士学位论文 (成都: 电子科技大学)]
- [6] Valaee S, Champagne B, Kabal P 1995 *IEEE Trans. Signal Process.* **43** 2144
- [7] Shahbazpanahi S, Valaee S, Bastani M H 2001 *IEEE Trans. Signal Process.* **49** 2169
- [8] Zheng Z, Li G 2013 *Multi. Sys. Signal Process.* **24** 573
- [9] Yang X M, Li G J, Chi C K, Zheng Z, Yeo T S 2015 *Circ. Sys. Signal Process.* **34** 3697
- [10] Cao R Z, Gao F, Zhang X 2016 *IEEE Trans. Signal Process.* **64** 1
- [11] Hassanien A, Shahbazpanahi S, Gershman A B 2004 *IEEE Trans. Signal Process.* **52** 280
- [12] Shahbazpanahi S, Valaee S, Gershman A B 2004 *IEEE Trans. Signal Process.* **52** 592
- [13] Sieskul B T 2010 *IEEE Trans. Vehicul. Technol.* **59** 1534
- [14] Yang X, Li G J, Zheng Z 2014 *J. Electron. Informat. Technol.* **36** 164 (in Chinese) [杨学敏, 李广军, 郑植 2014 电子与信息学报 **36** 164]
- [15] Yang X M, Zheng Z, Hu B 2016 *Electro. Lett.* **52** 262
- [16] Boujemaa H 2005 *European Trans. Telecommun.* **16** 557
- [17] Zheng Z, Li G, Teng Y 2012 *Circ. Sys. Signal Process.* **31** 255
- [18] Dai Z L, Ba B, Cui W J, Sun Y M 2017 *IEEE Acce.* **99** 1
- [19] Hu A, Lü T, Gao H, Zhang Z, Yang S 2014 *IEEE J. Sel. Topics in Signal Process.* **8** 996
- [20] Dai Z L, Cui W J, Ba B, Wang D M, Sun Y M 2017 *Sens.* **17** 1300
- [21] Cao M Y, Huang L, Qian C, Xue J Y, So H C 2015 *Signal Process.* **106** 41
- [22] Lee J, Song I, Kwon H, Lee S R 2003 *Signal Process.* **83** 1789
- [23] Nam J G, Lee S H, Lee K K 2014 *IEEE Anten. Wire. Propag. Lett.* **13** 415
- [24] Guo X, Wan Q, Shen X, Dou H 2011 *Tur. J. Elec. Enging. Com. Sci.* **19** 445
- [25] Lü T, Tan F, Gao H, Yang G 2016 *Signal Process.* **121** 30
- [26] Sundaram K R, Mallik R K, Murthy U M S 2000 *IEEE Trans. on Aero. Electro. Sys.* **36** 1391
- [27] Ballal T, Blealley C J 2008 *IEEE Signal Process. Lett.* **15** 853
- [28] Chen X, Liu Z, Wei X 2016 *IEEE Anten. Wire. Propag. Lett.* **99** 1

Decoupled two-dimensional direction of arrival estimation of single distributed source by vectoring differential phases*

Dai Zheng-Liang[†] Cui Wei-Jia Wang Da-Ming Zhang Yan-Kui

(The PLA Information Engineering University, Zhengzhou 450001, China)

(Received 29 September 2017; revised manuscript received 6 February 2018)

Abstract

In practical applications such as radar, sonar, and mobile communications, transmitted signals are often affected by the scattering and reflection phenomena, which causes the signal energy received by the antenna array to be distributed into a certain space. In this case, a distributed source model will be more applicable. In general, the distributed sources have been classified as coherently distributed (CD) source and incoherently distributed (ID) source, which prove to be suitable for the cases of slowly time-varying and rapidly time-varying channels, respectively.

In this paper, we consider the two-dimensional direction of arrival (DOA) estimation of distributed sources (including CD source or ID source). Specifically, uniform circular array (UCA) is widely used because of its ability to measure full azimuth angle and high resolution. However, the existing estimation algorithms all require spectral peak searching and the eigenvalue decomposition, which can bring a large computational complexity. To solve this problem, a decoupled rapid two-dimensional DOA estimation algorithm is proposed based on vectoring differential phases considering the two cases of single CD source and ID source. Firstly, based on spatial frequency approximation model, it is proved that none of differential phases between the received signals of different sensors in the UCA is affected by angle spread parameters when there is only a single distributed source. Under the premise of such a property, the central DOAs can be decoupled through obtaining the differential phases. Next, we can obtain the phase angles of strictly upper triangular elements in the sample covariance matrix, which correspond to differential phases between different sensors. Finally, by vectoring these differential phases, the central azimuth and elevation DOAs are estimated in the closed form from a least-squared problem, where the spectral peak searching and eigenvalue decomposition can be avoided, hence the computational complexity is reduced greatly. Theoretical analysis and simulation results show that the proposed algorithm has higher estimation accuracy and does not require prior information about the distribution of angular signals. With both low computational complexity and low hardware complexity, the proposed algorithm is beneficial to the engineering practice of array direction finding in complex environment.

Keywords: distributed source, two-dimensional direction of arrival estimation, uniform circular array, vectoring differential phases

PACS: 07.50.Qx, 07.05.Kf, 84.40.Ua

DOI: [10.7498/aps.67.20172154](https://doi.org/10.7498/aps.67.20172154)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No.61401513).

[†] Corresponding author. E-mail: xinxidailiang@outlook.com