

内插扩张室声子晶极管路带隙特性研究

张振方 郁殿龙 刘江伟 温激鸿

Properties of band gaps in phononic crystal pipe consisting of expansion chambers with extended inlet/outlet

Zhang Zhen-Fang Yu Dian-Long Liu Jiang-Wei Wen Ji-Hong

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 67, 074301 (2018) DOI: 10.7498/aps.67.20172383

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.67.20172383>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2018/V67/I7>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

[运动目标辐射声场干涉结构映射域特征研究](#)

Characteristics of mapping domain of the acoustic field interference structures radiated by a moving target

物理学报.2014, 63(3): 034306 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.034306>

[基于局域共振单元实现声子晶体低频多通道滤波](#)

Phononic crystal multi-channel low-frequency filter based on locally resonant unit

物理学报.2014, 63(2): 024301 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.024301>

## 内插扩张室声子晶体管路带隙特性研究\*

张振方 郁殿龙† 刘江伟 温激鸿

(国防科技大学, 装备综合保障技术重点实验室, 长沙 410073)

(2017年11月5日收到; 2018年1月16日收到修改稿)

声子晶体管路的带隙特性, 可以实现管路系统在特定频率下的噪声控制. 利用二维模态匹配法推导出单个内插扩张室元胞的传递矩阵, 结合 Bloch 定理, 得到声子晶体管路的能带结构计算方法; 验证了二维方法在计算能带结构时的准确性. 研究发现, 内插扩张室声子晶体管路存在布拉格带隙和局域共振带隙. 进一步研究了晶格常数以及内插管长度对能带结构的影响, 结果表明, 晶格常数主要控制布拉格带隙, 而内插管长度对局域共振带隙有较大的影响, 并研究了两种参数变化下的带隙耦合. 研究结果可以为管路降噪设计提供新的思路.

**关键词:** 内插扩张室, 二维模态匹配法, 能带结构, 带隙耦合

**PACS:** 43.20.Mv, 43.50.Gf, 43.55.Rg

**DOI:** 10.7498/aps.67.20172383

## 1 引言

管路系统广泛应用于工业、船舶、军事、航空航天等领域之中. 管路振动噪声是指管路自身的机械振动或管路内的流体运动诱发的振动噪声现象, 主要包括机械振动诱发的结构噪声和流体诱发的水动力噪声<sup>[1]</sup>. 管路振动噪声会减少管路的使用寿命, 而且辐射到外界的噪声也会对人们的健康造成一定的影响.

管路的振动与噪声控制, 可以在管路中布置挠性接管、橡胶减震器、黏弹性高阻尼材料、弹性接头、消声接头<sup>[2]</sup>等. 对于空气声传播而言, 比较有效的抑制管路中气体噪声的一种方法就是在管路中安装消声器, 消声器是一种能够允许流体介质通过, 并且能够抑制声传播的装置. 在管路的截止频率以下, 可以假定在管路中传播的只有平面波, 高阶模态为耗散波, 这种假设下的消声器消声性能的计算理论称为一维平面波理论. 一维平面波理论在频率较低时能够比较准确地预测消声器的声学性能, 但对于研究频率较高或者是尺寸较大的消声器, 其内

部声波高阶模态的影响不可忽略. 在这种情况下, 一维平面波理论不再适用, 此时就要考虑用二维或者三维解析方法计算消声器的声学性能<sup>[3]</sup>.

相龙洋等<sup>[4]</sup>提出用二维解析方法研究车用两腔抗性消声器的传递损失特性, 并与实验结果进行对比, 验证了该解析方法的正确性; 在此基础上, 分析了结构参数对两腔抗性消声器的影响. 方智等<sup>[5]</sup>针对双腔结构的消声器, 提出了基于子域划分的耦合方法, 将消声器分为不同的子域, 用数值模态匹配法求解单个子域的传递矩阵, 利用连续条件获得消声器的整体传递矩阵, 进而获得传递损失, 通过与有限元方法对比, 验证了该方法的正确性. Guo 等<sup>[6]</sup>利用二维方法对穿孔管消声器的消声性能进行了研究, 通过二维方法推导出传递矩阵, 利用传递矩阵求解多腔室消声器的传递损失, 计算结果与实验结果在研究范围内符合较好, 并利用二维方法对多腔室进行了结构优化.

声子晶体是由两种或两种以上的介质或结构组成的具有弹性波带隙特性的周期复合材料或结构<sup>[7]</sup>. 声波在声子晶体中传播时, 受到其内部结构以及周期布置的作用, 会在特定的频率产生带隙,

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11372346) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: dianlongyu@vip.sina.com

从而抑制声波的传播<sup>[8-11]</sup>, 利用这一特点, 通过设计周期附加结构, 可以实现特定频率范围内的噪声控制. 声子晶体的理论计算方法较多, 常用的有传递矩阵法、平面波展开法、集中质量法等<sup>[12-14]</sup>. 刘江伟等<sup>[15]</sup>利用传递矩阵建立了周期附加质量充液管路带隙理论模型, 深入分析了影响带隙的因素, 为充液管路减振提供了新思路. 温激鸿等<sup>[16]</sup>将一维声子晶体元胞简化为弹簧振子结构, 在此基础上提出了一种计算弹性波带隙的集中质量法, 计算结果与传统的平面波展开法符合, 且收敛性好. Hou等<sup>[17]</sup>基于模态匹配理论对嵌入环氧树脂的铅条组成的二维声子晶体的传输特性进行了理论计算, 计算结果和能带结构对应较好. 近年来, 利用声子晶体带隙特性开展结构减振降噪已经得到深入研究, 并取得了重要进展<sup>[18-20]</sup>.

在低频率、较宽频段内实现噪声控制是目前管路噪声控制的难题<sup>[21]</sup>, 单个消声器往往很难满足控制要求, 将声子晶体理论引入到管路降噪设计中, 可以在较低频率、较宽范围内实现管路噪声控制<sup>[22-24]</sup>. Yu等<sup>[25]</sup>研究了周期管路系统的声振耦合特性, 发现带隙特性可以实现振动和噪声的综合控制; 沈惠杰<sup>[26]</sup>通过在海水管路中周期排布简单扩张腔、内插式扩张腔、亥姆霍兹共振腔, 结合平面波理论揭示了消声器周期管路带隙的形成机理, 并通过设计周期排布混合室消声器得到较宽的声波带隙. Shi和Mak<sup>[27]</sup>利用一维传递矩阵法研究了周期排布的微穿孔管消声器消声性能, 分析了其带隙产生的机理, 证明了其在周期排布之后, 能够在较低频段产生较好的消声效果. 带隙耦合方面, 曹晓丰等<sup>[28]</sup>采用理论与数值方法研究了周期性附加单腔赫姆霍兹共鸣器一维管路的声传播特性, 发现可以通过调节结构参数实现带隙耦合. Li等<sup>[29]</sup>利用传递矩阵法对充液周期排布赫姆霍兹共鸣器管路系统进行研究, 分析了布拉格和局域共振带隙产生的机理, 并详细讨论了结构参数对两种带隙耦合的影响.

对于消声器声子晶体管路, 目前的研究大都基于一维平面波理论, 当消声器内部的高阶模态声波不能忽略时, 这种方法是不准确的. 在带隙耦合研究方面, 主要研究布拉格和局域共振之间的耦合机理, 但管路系统可能存在多个局域共振带隙, 在一定条件下也可以实现它们之间的耦合. 本文基于管路中声传播的控制方程, 采用二维模态匹配法研究

了内插管扩张室消声器声子晶体管路的能带结构特点以及带隙耦合机制.

## 2 二维模态匹配法

### 2.1 模态幅值系数求解

对于如图1所示的轴对称圆形同轴内插管扩张室消声器, 可以采用二维轴对称模态匹配法进行计算. 将消声器分为A, B, C, D, E 5个区域,  $a_1$ 为进出口管道半径,  $a_2$ 为扩张室半径,  $L$ 为扩张室总长度,  $S_n^+$ 和 $S_n^-$ 分别代表各个区域沿 $Z$ 正方向和负方向传播的第 $n$ 阶模态幅值系数,  $l_1$ 和 $l_2$ 分别表示进口和出口处的内插管长度,  $l_c$ 为除去插管长度后的扩张室长度.

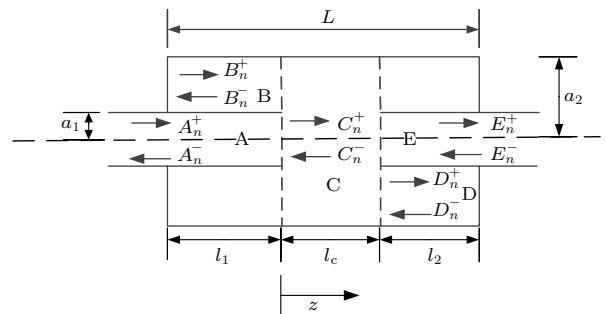


图1 具有外插进出口的圆形同轴扩张室消声器  
Fig. 1. Concentric circular expansion chamber with extended inlet/outlet.

空间简谐声波的Helmholtz方程<sup>[3]</sup>:

$$\nabla^2 P + k^2 P = 0, \quad (1)$$

其中 $k$ 为波数, 满足:  $k = \omega/c = 2\pi f/c$ ,  $\omega$ 为角频率,  $c$ 为声速.

对于半径为 $r$ 圆形管道, 使用柱坐标系下的Helmholtz方程, 并利用分离变量的方法可以得到管道内声波传播的解析表达式为

$$P_s(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} (S_n^+ e^{-jk_{s,n}z} + S_n^- e^{jk_{s,n}z}) \Phi_{s,n}(r), \quad (2)$$

其中 $P_s$ 为 $S$ 区域的声压,  $\Phi_{s,n}(r)$ 表示声波传播的本征函数,  $k_{s,n}$ 表示轴向波数.

进一步, 由声压表达式可以得到质点振动速度表达式为

$$U_s(r, z) = \frac{1}{\rho_0 \omega} \sum_{n=0}^{\infty} k_{s,n} (S_n^+ e^{-jk_{s,n}z} - S_n^- e^{jk_{s,n}z})$$

$$\times \Phi_{s,n}(r), \quad (3)$$

式中,  $\rho_0$  为空气密度.

对于内插扩张室消声器, 取进口端部作为轴向坐标系原点, 分别得到各个区域的声波本征函数表达式.

区域 A, C, E 为等截面圆形直管, 其本征函数可以表示为:

$$\Phi_{A,n}(r) = \Phi_{E,n}(r) = J_0(\alpha_n r/a_1), \quad (4)$$

$$\Phi_{C,n}(r) = J_0(\alpha_n r/a_2); \quad (5)$$

区域 B, D 为环形管道, 其本征函数可以表示为

$$\begin{aligned} \Phi_{B,n}(r) &= \Phi_{D,n}(r) \\ &= J_0(\beta_n r/a_2) - [J_1(\beta_n)/Y_1(\beta_n)]Y_0(\beta_n r/a_2); \end{aligned} \quad (6)$$

式中,  $J_0$  表示第一类 0 阶贝塞尔函数,  $J_1$  表示第一类 1 阶贝塞尔函数,  $Y_0$  表示第二类 0 阶贝塞尔函数,  $Y_1$  表示第二类 1 阶贝塞尔函数.

$\alpha_n, \beta_n$  由质点振速在径向的边界条件决定:

$$J'_0(\alpha_n) = J_1(\alpha_n) = 0, \quad (7)$$

$$J_1(\beta_n a_1/a_2) - [J_1(\beta_n)/Y_1(\beta_n)]Y_0(\beta_n a_1/a_2) = 0. \quad (8)$$

各个区域第  $n$  阶模态的轴向波数为:

$$k_{A,n} = k_{E,n} = \begin{cases} \sqrt{k^2 - (\alpha_n/a_1)^2}, & k \geq \alpha_n/a_1 \\ -\sqrt{k^2 - (\alpha_n/a_1)^2}, & k < \alpha_n/a_1 \end{cases}, \quad (9)$$

$$k_{B,n} = k_{D,n} = \begin{cases} \sqrt{k^2 - (\beta_n/a_2)^2}, & k \geq \beta_n/a_2 \\ -\sqrt{k^2 - (\beta_n/a_2)^2}, & k < \beta_n/a_2 \end{cases}, \quad (10)$$

$$k_{C,n} = \begin{cases} \sqrt{k^2 - (\alpha_n/a_2)^2}, & k \geq \alpha_n/a_2 \\ -\sqrt{k^2 - (\alpha_n/a_2)^2}, & k < \alpha_n/a_2 \end{cases}. \quad (11)$$

由消声器左右两端刚性壁面质点振动速度为零, 可以得到

$$U_B = 0|_{z=-l_1} \quad a_1 \leq r \leq a_2, \quad (12)$$

$$U_D = 0|_{z=l_2+l_c} \quad a_1 \leq r \leq a_2; \quad (13)$$

根据消声器进出口截面声压和质点速度连续, 可以得到

$$P_A = P_C|_{z=0} \quad 0 \leq r \leq a_1, \quad (14)$$

$$P_B = P_C|_{z=0} \quad a_1 \leq r \leq a_2, \quad (15)$$

$$\begin{cases} U_A = U_C|_{z=0} & 0 \leq r \leq a_1 \\ U_B = U_C|_{z=0} & a_1 \leq r \leq a_2 \end{cases}, \quad (16)$$

$$P_E = P_C|_{z=l_c} \quad 0 \leq r \leq a_1, \quad (17)$$

$$P_D = P_C|_{z=l_c} \quad 0 \leq r \leq a_1, \quad (18)$$

$$\begin{cases} U_E = U_C|_{z=l_c} & 0 \leq r \leq a_1 \\ U_D = U_C|_{z=l_c} & a_1 \leq r \leq a_2 \end{cases}. \quad (19)$$

由刚性壁面边界条件可得:

$$B_n^+ = B_n^- e^{-2jk_{B,n}l_1}, \quad (20)$$

$$D_n^- = D_n^+ e^{-2jk_{D,n}l_2}. \quad (21)$$

在方程的两边同时乘以相应的本征函数并在给定区域求解积分, 通过求解积分值, 可以得到含有模态幅值系数的方程组<sup>[30-32]</sup>:

$$\begin{aligned} &(A_s^+ + A_s^-)\langle \Phi_{A_s} \Phi_{A_s} \rangle_{S_A} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (C_n^+ + C_n^-)\langle \Phi_{C_n} \Phi_{A_s} \rangle_{S_A}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} &(B_s^+ + B_s^-)\langle \Phi_{B_s} \Phi_{B_s} \rangle_{S_B} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (C_n^+ + C_n^-)\langle \Phi_{C_n} \Phi_{B_s} \rangle_{S_B}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} k_{A_n} (A_n^+ - A_n^-)\langle \Phi_{A_n} \Phi_{C_s} \rangle_{S_A} \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} k_{B_n} (B_n^+ - B_n^-)\langle \Phi_{B_n} \Phi_{C_s} \rangle_{S_B} \\ &= k_{C_s} (C_s^+ - C_s^-)\langle \Phi_{C_s} \Phi_{C_s} \rangle_{S_C}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} (C_n^+ e^{-jk_{C_n}l_c} + C_n^- e^{jk_{C_n}l_c})\langle \Phi_{C_n} \Phi_{E_s} \rangle_{S_E} \\ &= (E_s^+ + E_s^-)\langle \Phi_{E_s} \Phi_{E_s} \rangle_{S_E}, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} (C_n^+ e^{-jk_{C_n}l_c} + C_n^- e^{jk_{C_n}l_c})\langle \Phi_{C_n} \Phi_{D_s} \rangle_{S_D} \\ &= (D_s^+ + D_s^-)\langle \Phi_{D_s} \Phi_{D_s} \rangle_{S_D}, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} k_{E_n} (E_n^+ - E_n^-)\langle \Phi_{E_n} \Phi_{C_s} \rangle_{S_E} \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} k_{D_n} (D_n^+ - D_n^-)\langle \Phi_{D_n} \Phi_{C_s} \rangle_{S_D} \\ &= k_{C_s} (C_s^+ e^{-jk_{C_s}l_c} - C_s^- e^{-jk_{C_s}l_c})\langle \Phi_{C_s} \Phi_{C_s} \rangle_{S_C}. \end{aligned} \quad (27)$$

以上方程组含有  $8(n+1)$  个模态幅值系数 ( $A_n^+, A_n^-, B_n^+, B_n^-, C_n^+, C_n^-, D_n^+, D_n^-, E_n^+, E_n^-$ ), 现做出如下假设<sup>[6]</sup>: 1) 进口管的入射波为平面波, 为了方便求

解, 取其幅值为1, 即有,  $A_0^+ = 1A_n^+ = 0(n \geq 1)$ ; 2) 出口管处为消声末端, 不存在反射波, 即有,  $(E_n^- = 0n \geq 0)$ ; 于是模态幅值系数个数变为  $6(n + 1)$ , 为了求解方程组, 可以将无限个模态截断成有限个模态, 这里取  $s = n = N$ , 可以得到  $6(N + 1)$  个未知量和  $6(N + 1)$  个方程, 求解这些方程组, 可以得到相应的模态幅值系数.

### 2.2 传递矩阵和传递损失的确定

假设入口和出口处管道内传播的是平面波(高阶模态为耗散波), 那么入口和出口处的声压和质点振速可以用传递矩阵  $T$  来表达:

$$\begin{bmatrix} P_A \\ \rho_0 c U_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_E \\ \rho_0 c U_E \end{bmatrix}. \quad (28)$$

四极参数可以通过使用两种不同的出口边界条件来分别求出: 1) 假设出口处的质点振速为0, 即有  $(E_n^+ = E_n^- n \geq 0)$ , 可以求解出  $T_{11}$  和  $T_{21}$ ; 2) 假设出口处的声压为0, 即有  $(E_n^+ = -E_n^- n \geq 0)$ , 可以求解出  $T_{12}$  和  $T_{22}$ ; 即有

$$T_{11} = \frac{P_A}{P_E} = \frac{1 + A_0^-}{2E_0^+} \quad (E_n^+ = E_n^- n \geq 0), \quad (29)$$

$$T_{21} = \frac{\rho_0 c U_A}{P_E} = \frac{1 - A_0^-}{2E_0^+} \quad (E_n^+ = E_n^- n \geq 0), \quad (30)$$

$$T_{12} = \frac{P_A}{\rho_0 c U_E} = \frac{1 + A_0^-}{2E_0^+} \quad (E_n^+ = -E_n^- n \geq 0), \quad (31)$$

$$T_{22} = \frac{U_A}{U_E} = \frac{1 - A_0^-}{2E_0^+} \quad (E_n^+ = -E_n^- n \geq 0). \quad (32)$$

将两种出口边界条件分别代入到模态幅值系数方程组中, 求解两次, 即可求得其传递矩阵对应的四极参数.

根据传递损失的定义, 由求解的模态幅值系数可以得到单个消声器的传递损失:

$$TL = 20 \log_{10} \left| \frac{P_A^+}{P_E^+} \right| = -20 \log_{10} |E_0^+|. \quad (33)$$

对于  $m$  周期排布的有限周期管路, 整体的传递矩阵可以表示为

$$T_T = T^m; \quad (34)$$

进而整体的传递损失为

$$TL = 20 \lg \left( \frac{1}{2} |T_T(1, 1) + T_T(1, 2) + T_T(2, 1) + T_T(2, 2)| \right). \quad (35)$$

### 2.3 声子晶体管路带隙计算方法

通过二维模态匹配法可以求出消声器单个元胞的传递矩阵, 结合 Bloch 定理, 可以对消声器一维声子晶体能带结构进行计算. 图 2 所示为周期排布的管路系统.

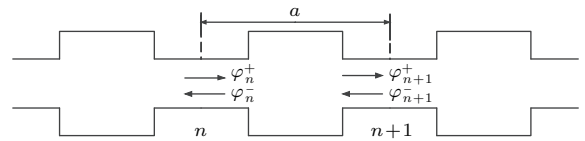


图 2 扩张室消声器声子晶体管路

Fig. 2. The phononic crystal pipe consisting of expansion chambers.

用  $\varphi_n^+$  和  $\varphi_n^-$  分别表示第  $n$  个单元中向前和向后传递声波的振幅, 由传递矩阵的定义可得<sup>[33]</sup>

$$\begin{bmatrix} \varphi_{n+1}^+ \\ \varphi_{n+1}^- \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \varphi_n^+ \\ \varphi_n^- \end{bmatrix}. \quad (36)$$

对于无限周期管路, 由 Bloch 定理得<sup>[7]</sup>

$$\begin{bmatrix} \varphi_{n+1}^+ \\ \varphi_{n+1}^- \end{bmatrix} = e^{iqa} \begin{bmatrix} \varphi_n^+ \\ \varphi_n^- \end{bmatrix}, \quad (37)$$

$q$  为 Bloch 波矢,  $a$  为晶格常数; 于是, 由上述两式可得

$$|T - e^{iqa} I| = 0. \quad (38)$$

通过求解矩阵  $T$  的特征值, 即可得到波矢与频率之间的色散关系.

## 3 算例及分析

### 3.1 无限周期的能带结构

以图 3 所示的周期排布的单边内插的扩张室消声器为例, 首先计算无限周期的能带结构. 消声器的具体结构参数为: 进出口管径及扩张室直径为  $d_1 = 0.0486$  m,  $d_2 = 0.1532$  m; 扩张室长度为  $L = 0.2823$  m, 内插管的长度分别为  $l_1 = 0.08$  m,  $l_2 = 0$  m; 晶格常数  $a = 0.6823$  m.



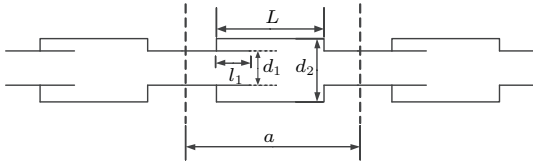


图3 单边内插扩张室消声器声子晶体管路

Fig. 3. The phonic crystal pipe consisting of expansion chambers with single extended inlet.

采用二维方法计算,可以得到如图4所示的能带结构图.其中波矢实部表示对应频率的声波能够在管路中传播,而波矢虚部则表示对应频率声波的衰减,其值大小表示声波衰减的强弱.从图中可以看出,在2000 Hz范围内存在多个带隙,可以有效地改变管路在这些频率下的消声性能,其在低频段产生的声波带隙可以用于管路低频噪声的控制中.进一步的研究可以发现,由于结构的周期排布而引起的布拉格反射形成了图中众多的布拉格带隙(图中阴影部分为一阶布拉格带隙),其中心频率满足:

$$f = \frac{\beta c}{2a} \quad \beta = 0, 1, 2, \dots \quad (39)$$

计算可得布拉格带隙的前两阶中心频率分别为249 Hz, 498 Hz,与能带结构图中前两个拱形区域对应的中心频率231 Hz与481 Hz基本符合.

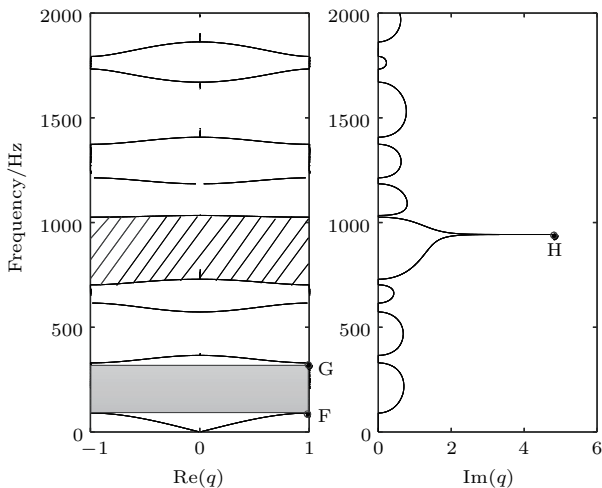


图4 二维模态匹配法计算的消声器声子晶体管路能带结构图

Fig. 4. The band structure of phonic crystal pipe consisting of expansion chambers calculated by two-dimensional method.

从波矢虚部图中还可以看出,在940 Hz附近出现了一个尖峰,对应的衰减达到最大,此时的带隙为局域共振带隙(图中剖面线部分)局域共振带隙的出现与内插管引起的扩张室内部共振有关.

图5和图6分别为940 Hz时的消声器内部的声压以及质点振速分布图,可以看出,在940 Hz下,消声器内部的声压和质点运动主要集中在内插管与扩张室之间的区域,而出口处的声压和振速较低.

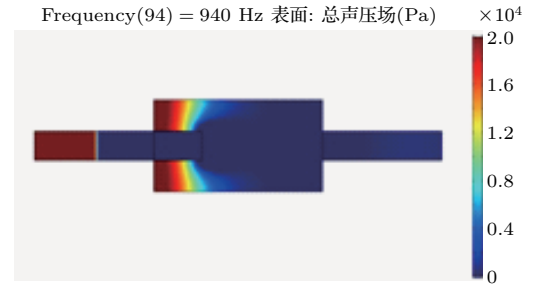


图5 消声器内部在940 Hz下的声压分布

Fig. 5. The sound pressure distribution in the muffler at 940 Hz.

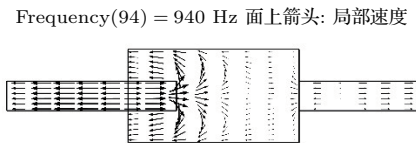


图6 消声器内部在940 Hz下的质点速度分布

Fig. 6. The particle velocity distribution in the muffler at 940 Hz.

### 3.2 有限周期的传输特性

理想的消声器声子晶体有无穷多个周期,其能带结构是基于无限周期计算而来的,但实际工程中的管路结构只能是有限周期.



图7 有限周期管路

Fig. 7. Pipe of finite periodic structure.

图7为有限周期排布的内插管扩张室声子晶体管路示意图,利用二维方法,分别做出周期数  $m = 1, 3, 5$  时的传递损失,如图8所示.可以看出,在周期排布之后,传递损失的较大的传输衰减区域与能带结构图中的带隙范围基本符合.而且,通过与单个消声器的消声性能对比可以发现,随着周期排布的消声器的数量增加,布拉格反射和共振的作用增强,周期排布之后的消声性能与单个消声器有很大的差别.例如,在0—600 Hz,单个消声器只有一个拱形峰,而在周期排布之后,由于布拉格散射作用会出现两个拱形峰,而且峰值较单个消声器有很大的提升.在800—1000 Hz,随着周期数的增加,

由共振引起的消声尖峰的峰值和消声带宽都有所增加。

进一步分析带隙频率范围内的衰减情况,由消声量 (transmission loss) 和透射系数 (transmission coefficient) 的关系:

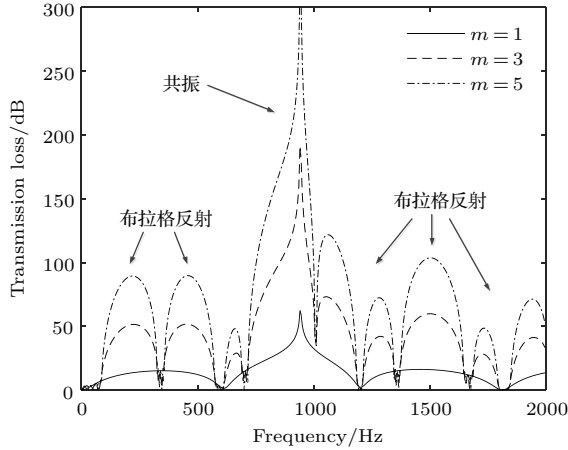


图8 二维模态匹配法计算的有限周期消声器声子晶极管路传输特性

Fig. 8. The transmission loss of phononic crystal pipe consisting of mufflers calculated by two-dimensional method.

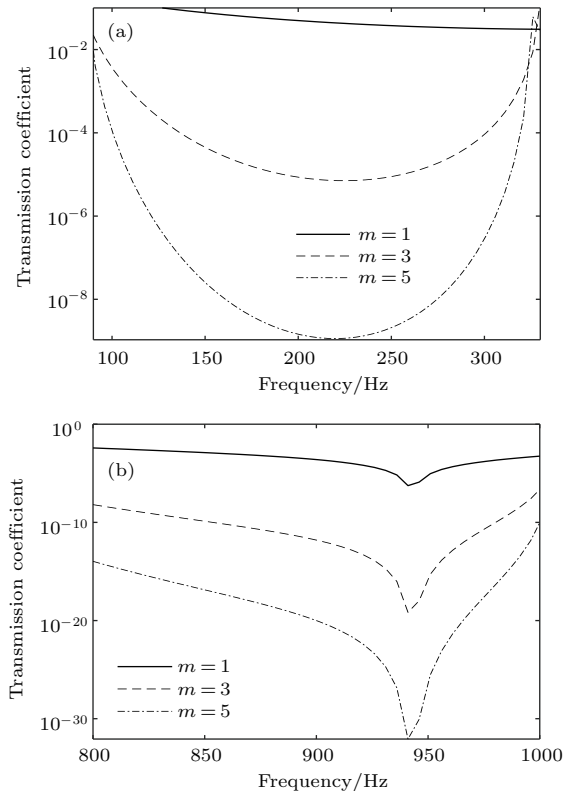


图9 带隙频率范围内的透射系数 (a)一阶布拉格带隙; (b)局域共振带隙

Fig. 9. The transmission coefficient in band gaps: (a) First Bragg band gaps; (b) locally-resonant band gaps.

$$TL = 10 * \lg(1/t_1), \quad (40)$$

$t_1$  表示透射系数, 可得

$$t_1 = 10^{(-TL/10)}. \quad (41)$$

以一阶布拉格带隙和局域共振带隙为例, 分别做出两种频率范围内的透射系数曲线, 为了表示透射系数随周期数的变化情况, 纵坐标取对数, 如图9所示。

从图中可以看出, 无论是在布拉格带隙频率范围还是在局域共振带隙频率范围内, 声波的透射系数都很小, 并且随着周期数的增加, 透射系数呈指数衰减。其中, 布拉格带隙的最大衰减位于中心频率附近, 而局域共振带隙的最大衰减位于共振频率处, 对比还可以看到局域共振带隙频率范围内的衰减远远大于布拉格带隙频率范围内的衰减。这表明所设计的声子晶极管路对声波的抑制是由带隙特性引起的, 而不是由于消声器内部的阻抗失配引起的。

## 4 算法验证与收敛性分析

### 4.1 算法验证

为了进一步验证二维模态匹配法在计算消声器声子晶极管路带隙的准确性, 针对前述声子晶极管路, 分别采用一维平面波理论以及COMSOL有限元法计算其能带结构, 并与二维方法进行对比研究。

从图10(a)可以看出, 基于平面波理论的一维方法计算结果仅仅在低频处与二维方法计算结果一致, 随着频率的增加, 两者的差别增大, 且在局域共振带隙频率范围处, 二维方法相比于一维方法计算得到的带隙更加明显。通过二维方法与COMSOL有限元法结果对比可以看出, 二维方法和有限元法计算结果在整个频段内符合较好。从COMSOL计算结果来看, 在1234 Hz和1406 Hz处, 波矢实部会出现两条平直带。进一步分析, 分别计算消声器在不同特征频率下的内部声压分布, 可以看出, 在两条平直带对应的频率下, 消声器内部声场只在扩张室内出现了两种特殊模式的对称声压模态, 连接管处并无声压分布, 其能带主要是由于周期条件下扩张室内部特殊的模态分布形成的。

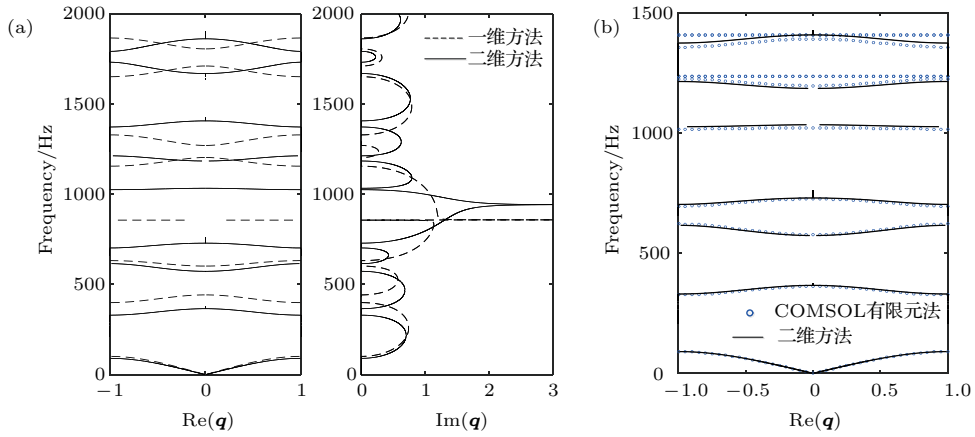


图 10 能带结构对比图 (a) 一维方法和二维方法能带结构对比; (b) COMSOL 有限元法和二维方法能带结构对比  
Fig. 10. The comparisons of band structure: (a) Comparisons between one-dimensional method and two-dimensional method; (b) comparisons between FEM and two-dimensional method.

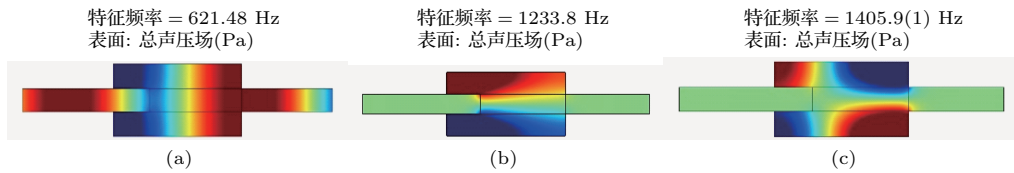


图 11 不同特征频率下的声压分布 (a) 621 Hz; (b) 1234 Hz; (c) 1406 Hz

Fig. 11. The pressure distribution at the muffler in different characteristic frequencies: (a) 621 Hz; (b) 1234 Hz; (c) 1406 Hz.

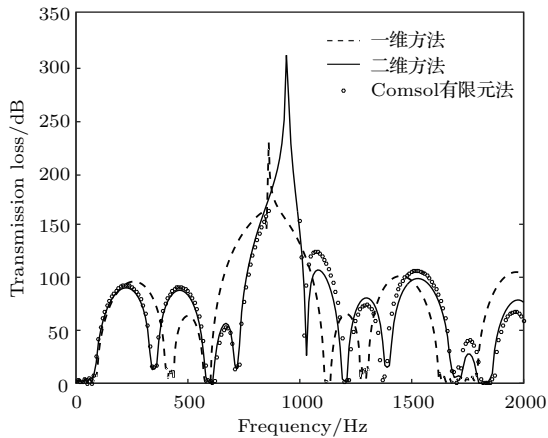


图 12 一维方法、二维方法、有限元法的传输特性对比

Fig. 12. The comparisons of TL among one-dimensional method, two-dimensional method and the finite element method.

分别用一维、二维以及有限元法计算 5 个周期的传递损失, 如图 12. 可以看出, 在传输特性计算方面, 二维方法与有限元法计算结果在整个频段都符合较好, 而一维方法偏差较大. 其主要原因是, 由于截面突变以及内插管的引入, 消声器内部截面不连续处的高阶模态波的影响不可忽略. 图 13 为消声器内部在 500 Hz 和 2000 Hz 下的声压等值线分布图, 可以看出, 无论是在低频 500 Hz 还是高频

2000 Hz 处, 消声器内部都有着较多的非平面波传播模式. 而二维模态匹配法能够充分地考虑到管中高阶模态波的影响, 所以在研究频率范围内都能有较好的预测效果.

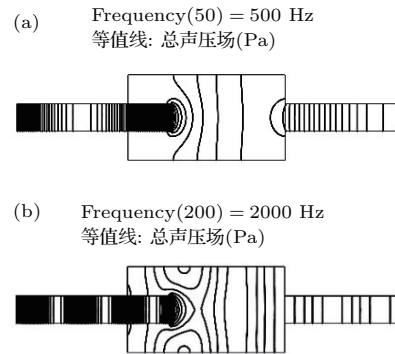


图 13 消声器内部声压等值线分布 (a) 500 Hz; (b) 2000 Hz

Fig. 13. The sound pressure contour distribution in the muffler at (a) 500 Hz and (b) 2000 Hz.

## 4.2 收敛性分析

在利用模态匹配法计算各区域的模态幅值系数时, 需要取有限的模态阶数进行计算, 阶数  $N$  的取值主要取决于所研究的消声器的尺寸以及频率范围 [34]. 取  $N$  从 0—5, 在不同的截断模态数下计



算其能带结构, 分别研究图 4 中 F 点(一阶布拉格带隙起始频率点), G 点(一阶布拉格带隙截止频率点), H 点(局域共振频率点)处的频率变化.

从图中可以看出, 无论是布拉格还是局域共振带隙频率, 都随着  $N$  的增加, 逐渐逼近准确值, 在  $N \geq 3$  时, 频率的变化已经很小. 这表明, 二维方法在计算消声器声子晶体的能带结构时, 有较好的收敛性和更高的计算精度.

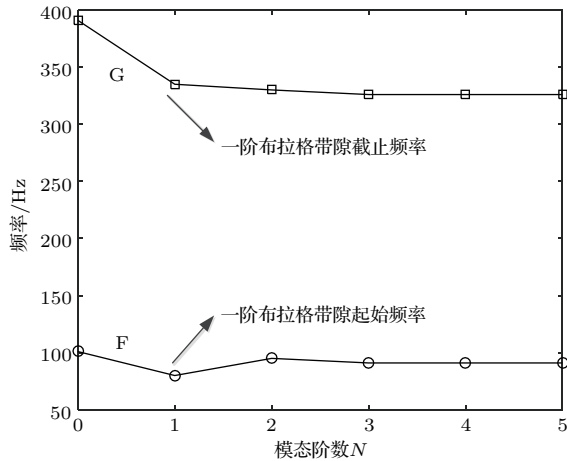


图 14 一阶布拉格带隙频率随模态阶数变化

Fig. 14. The change of first Bragg band gaps with the modal order.

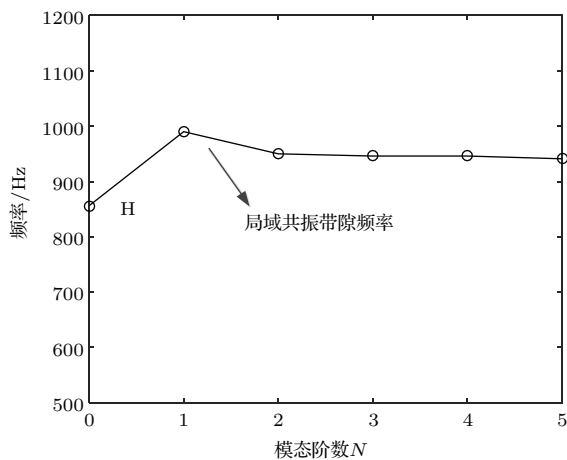


图 15 局域共振带隙频率随模态阶数变化

Fig. 15. The change of locally-resonant band gaps with the modal order.

## 5 影响因素及带隙耦合分析

### 5.1 晶格常数对带隙的影响

基于带隙计算的二维方法, 首先研究晶格常数对带隙的影响.

内插管扩张室的具体参数保持不变, 只改变晶格常数, 分别另  $a = 0.4823$  m,  $a = 0.6823$  m, 得到

如图 16 的能带结构. 从图中可以看出, 当晶格常数增加时, 布拉格带隙对应频率向低频移动, 但由于消声器内部共振引起的局域共振带隙中心频率却并不改变, 这说明仅改变管路周期设计并不能改变局域共振带隙的位置, 其带隙中心频率只与消声器本身的结构参数有关.

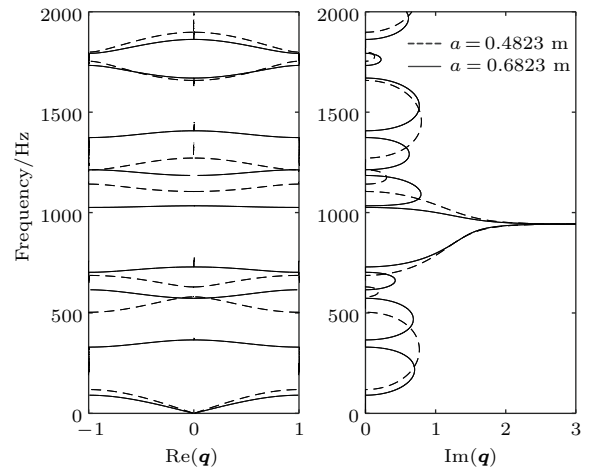


图 16 不同晶格常数下的能带结构对比

Fig. 16. The band structure with different lattice constants.

在管路设计中, 我们可以通过改变周期管路的晶格常数, 来有效地改变在某些特定频段的消声性能, 同时通过改变布拉格带隙的中心频率, 可以使得布拉格带隙与局域共振带隙相互耦合, 进而在共振频率处得到更宽的带隙.

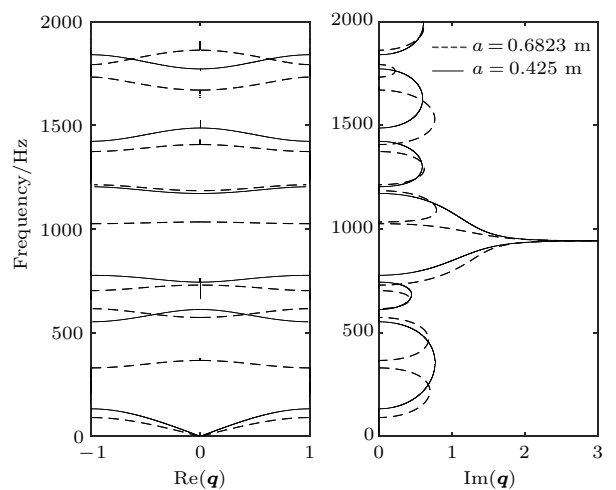


图 17 改变晶格常数下的带隙耦合

Fig. 17. The characteristics of coupled band gaps with changed lattice constants.

如图 17 所示, 改变晶格常数  $a = 0.425$  m, 得到其能带结构, 对比可以发现,  $a = 0.6823$  m 时, 局域共振带隙范围为 726—1026 Hz, 而当  $a = 0.425$  m

时, 局域共振带隙范围为 776—1176 Hz, 带隙扩宽了 100 Hz 左右, 这是由于当  $a = 0.425$  m, 其三阶布拉格带隙和局域共振带隙相互耦合, 导致了带隙范围向高频扩展.

### 5.2 单边内插管长度对带隙的影响

保持周期结构的晶格常数不变, 只改变进口处内插管的长度, 来探究单边内插管长度对带隙的影响. 分别另  $l_1 = 0.04$  m,  $l_2 = 0.08$  m, 得到如图 18 的能带结构. 从图中可以看出, 在不改变出口端内插管长度的情况下, 当进口端内插管的长度增加时, 局域共振带隙向着低频移动, 且在研究频率范围内有着较大的变化, 相比于改变晶格常数布拉格带隙的移动, 局域共振带隙的移动范围更大. 还可以看出, 在改变内插管长度时, 其一阶布拉格带隙基本上没有什么变化, 但随着频率的增加, 带隙之间的差别逐渐增大, 这是由于内插管长度的变化改变了基体管路的结构参数引起的.

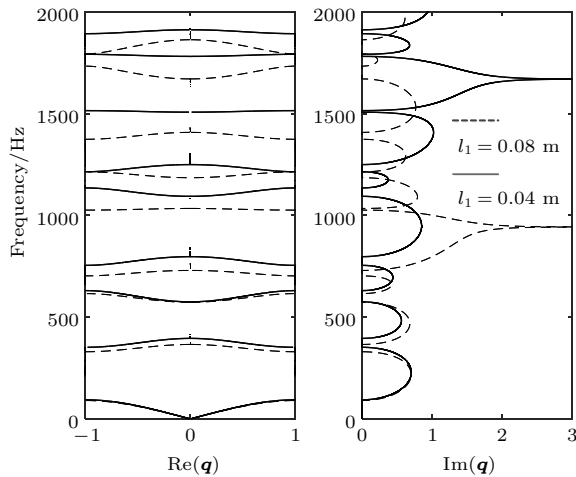


图 18 不同内插管长度的带隙对比

Fig. 18. The band structure with different length of extended inlet.

在管路设计中, 可以针对单个周期单元改变其内部结构参数, 进而可以在不改变管路整体布置的情况下改善其在特定频段的消声性能, 同样, 也可以通过带隙耦合得到更宽的带隙.

从图 19 中可以看出, 当内插管长度为  $l_1 = 0.135$  m 时, 局域共振带隙范围为 571—651 Hz, 而当  $l_1 = 0.14$  m 时, 局域共振带隙向低频移动, 和布拉格带隙耦合, 带隙范围为 321—641 Hz, 带宽增加了 240 Hz 左右.

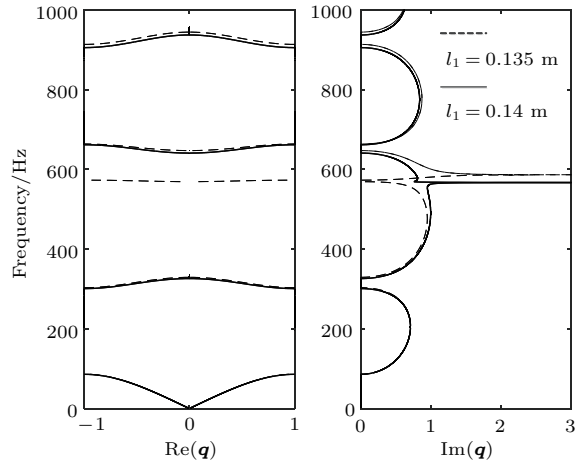


图 19 改变进口内插管长度下的带隙耦合特性

Fig. 19. The characteristics of coupled band gaps with changed length of extended inlet.

### 5.3 双边内插管长度对带隙的影响

在前述基础上, 保持晶格常数以及进口端内插管长度不变的情况下, 改变出口端的内插管长度, 探究双边内插情况下, 消声器周期管路的能带结构特性. 令  $l_1 = 0.08$  m,  $l_2 = 0.04$  m, 得到如图 20 的能带结构.

从图中可以看出, 当消声器进出口端都有内插管时, 在研究频率范围内会出现两个局域共振带隙, 图中的 J, K 为对应的局域共振频率, 分别为 940 Hz 和 1630 Hz, 这是由进口与出口处的内插管分别引起的共振形成的.

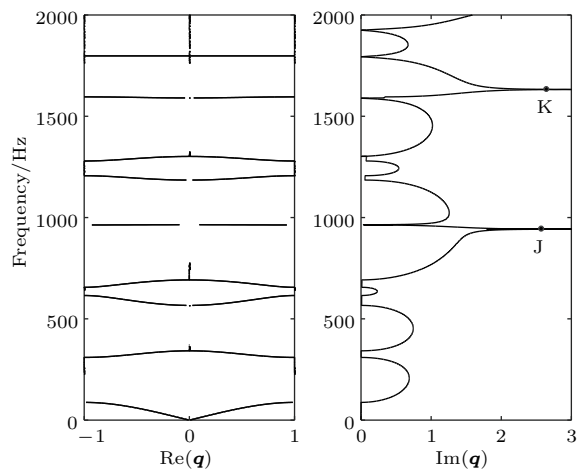


图 20 双边内插情况下的能带结构图

Fig. 20. The band structure with double insertions. (a) 940 Hz (b) 1630 Hz.

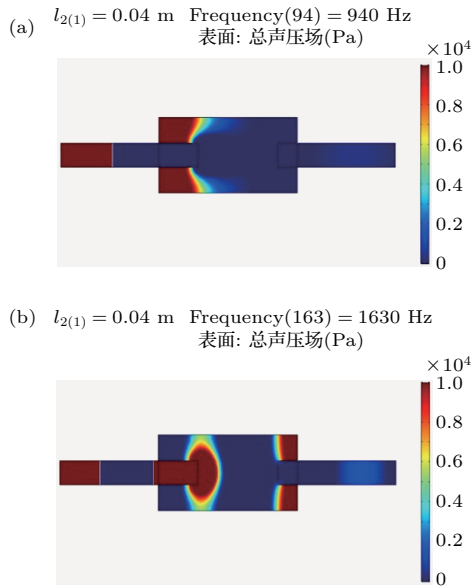


图 21 双边内插管消声器在 (a) 940 Hz 和 (b) 1630 Hz 下的声压分布

Fig. 21. The sound pressure distribution in the muffler with double insertions at 940 Hz and 1630 Hz.

图 21 分别为 J 点 (940 Hz) 和 K 点 (1630 Hz) 下消声器内部的声压分布图, 可以看出, J 点频率下的声压分布和单边内插情况下的分布基本一致, 主要由进口端内插管控制, 而 K 点频率下的声压主要是由出口端的内插管决定。

通过改变进出口端的内插管长度, 可以实现两种共振频率下的带隙耦合. 改变出口端的长度  $l_2 = 0.07$  m, 可以得到如图 22 的能带结构图. 可以看出, 在增加  $l_2$  长度之后, K 点对应的局域共振频率向低频移动到 P, 并与 J 点对应的频带耦合, 从而实现了带隙的拓宽。

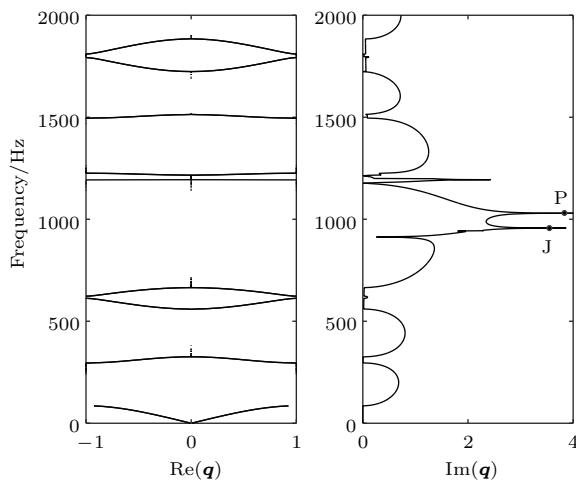


图 22 改变双边内插管下的带隙耦合

Fig. 22. The characteristics of coupled band gaps with changed length of double insertions.

## 6 结 论

本文基于二维模态匹配法研究了内插扩张室消声器声子晶管路带隙特性, 主要结论如下。

1) 建立了基于二维模态匹配法的带隙计算方法, 通过与一维方法和 COMSOL 有限元计算结果对比验证, 验证了二维方法在带隙计算中具有准确性好、收敛性好的特点. 可以看出, 二维方法在共振频率及高频处, 都比一维方法有较好的预测效果。

2) 内插扩张室声子晶管路中存在布拉格和局域共振带隙, 布拉格带隙是由于结构的周期排布引起的, 而局域共振带隙是由于消声器内部的共振引起的。

3) 基于二维方法, 分别研究了晶格常数以及内插管长度对带隙的影响, 分析可知, 晶格常数主要对布拉格带隙有较大的影响, 而改变内插管长度, 会对局域共振带隙有显著影响. 通过改变晶格常数以及内插管长度可以实现布拉格带隙与局域共振带隙的耦合, 或者局域共振带隙之间的相互耦合, 都可以在一定频率范围内拓宽带隙。

## 参考文献

- [1] Liang X D 2010 *NVC* **30** 127 (in Chinese) [梁向东 2010 噪声与振动控制 **30** 127]
- [2] Shen H J, Li Y F, Su Y S, Zhang L K, Song Y B 2017 *J. Vib. Shock* **36** 163 (in Chinese) [沈惠杰, 李雁飞, 苏永生, 章林柯, 宋玉宝 2017 振动与冲击 **36** 163]
- [3] Coulon J M, Atalla N, Desrocher A 2016 *Appl. Acoust* **113** 109
- [4] Xiang L Y, Zuo S G, Wu X D, Zhang J, Liu J F 2015 *Trans. Chin. Soc. Agric. Eng.* **31** 65 (in Chinese) [相龙洋, 左曙光, 吴旭东, 张珺, 刘敬芳 2015 农业工程学报 **31** 65]
- [5] Fang Z, Ji Z L, Liu C Y 2016 *J. Vib. Shock* **35** 29 (in Chinese) [方智, 季振林, 刘成洋 2016 振动与冲击 **35** 29]
- [6] Guo R, Wang L T, Tang W B, Han S 2017 *Appl. Acoust* **127** 105
- [7] Wen X S, Wen J H, Yu D L, Wang G, Liu Y Z, Han X Y 2009 *Phononic Crystals* (Beijing: National Defence Industry Press) pp1-6 (in Chinese) [温熙森, 温激鸿, 郁殿龙, 王刚, 刘耀宗, 韩小云 2009 声子晶体 (北京: 国防工业出版社) 第 1—6 页]
- [8] Wang G, Yu D L, Wen J H, Liu Y Z, Wen X S 2004 *Phys. Lett. A* **327** 512
- [9] Zhang Y F 2014 *M. S. Dissertation* (Changsha: National University of Defense Technology) (in Chinese) [张亚峰 2014 硕士学位论文 (长沙: 国防科学技术大学)]
- [10] Xiao Y, Wen J H, Wen X S 2012 *J. Sound Vib.* **331** 5408
- [11] Yu D L, Wen J H, Zhao H G 2011 *J. Sound Vib.* **133** 014502

- [12] Liu Y Z, Meng H, Li L, Wen J H 2008 *J. Vib. Shock* **27** 47 (in Chinese) [刘耀宗, 孟浩, 李黎, 温激鸿 2008 振动与冲击 **27** 47]
- [13] Cao Y J, Hou Z L, Liu Y Y 2004 *Phys. Lett. A* **327** 247
- [14] Wang G, Wen J H, Han X Y, Zhao H G 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1943 (in Chinese) [王刚, 温激鸿, 韩小云, 赵宏刚 2003 物理学报 **52** 1943]
- [15] Liu J W, Yu D L, Wen J H, Shen H J, Zhang Y F 2016 *J. Vib. Shock* **35** 141 (in Chinese) [刘江伟, 郁殿龙, 温激鸿, 沈惠杰, 张亚峰 2016 振动与冲击 **35** 141]
- [16] Wen J H, Wang G, Liu Y Z, Yu D L 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3384 (in Chinese) [温激鸿, 王刚, 刘耀宗, 郁殿龙 2004 物理学报 **53** 3384]
- [17] Hou Z L, Fu X J, Liu Y Y 2004 *Phys. Rev. B* **70** 2199
- [18] Xiao Y 2012 *Ph. D. Dissertation* (Changsha: National University of Defense Technology) (in Chinese) [肖勇 2012 博士学位论文 (长沙: 国防科学技术大学)]
- [19] Wu J, Bai X C, Xiao Y, Geng M X, Yu D L, Wen J H 2016 *Acta Phys. Sin.* **65** 064602 (in Chinese) [吴健, 白晓春, 肖勇, 耿明昕, 郁殿龙, 温激鸿 2016 物理学报 **65** 064602]
- [20] Fang X, Wen J H, Bonello B, Yin J F, Yu D L 2017 *Nat. Commun.* **8** 1288
- [21] Wang X N, Choy Y S, Cheng L, N X 2012 *J. Acoust. Soc. Am.* **132** 3778
- [22] Wang X N, Zhu W Y, Zhou Y D 2016 *J. Acoust. Soc. Am.* **139** 202
- [23] Wu D Z, Zhang N, Mak C M, Cai C Z 2017 *Sensors* **17** 1029
- [24] Cai C Z, Mak C M 2016 *J. Acoust. Soc. Am.* **140** 471
- [25] Yu D L, Du C Y, Shen H J, Liu J W, Wen J H 2017 *Chin. Phys. Lett.* **34** 190
- [26] Shen H J 2015 *Ph. D. Dissertation* (Changsha: National University of Defense Technology) (in Chinese) [沈惠杰 2015 博士学位论文 (长沙: 国防科学技术大学)]
- [27] Shi X F, Mak C M 2017 *Appl. Acoust.* **1** 15
- [28] Cao X F, Yu D L, Liu J W, Wen J H 2016 *J. Vib. Shock* **35** 20 (in Chinese) [曹晓丰, 郁殿龙, 刘江伟, 温激鸿 2016 振动与冲击 **35** 20]
- [29] Li Y F, Shen H J, Zhang L K, Su Y S, Yu D L 2016 *Phys. Lett. A* **380** 2322
- [30] Selamet A, Ji Z L 1999 *J. Sound Vib.* **223** 197
- [31] Selamet A, Xu M, Lee I, Huff N 2005 *J. Acoust. Soc. Am.* **117** 2078
- [32] Selamet A, Lee I J 2003 *J. Acoust. Soc. Am.* **113** 1975
- [33] Cao X F 2016 *M. S. Dissertation* (Changsha: National University of Defense Technology) (in Chinese) [曹晓丰 2016 硕士学位论文 (长沙: 国防科学技术大学)]
- [34] Fang Z 2014 *Ph. D. Dissertation* (Harbin: Harbin Engineering University) (in Chinese) [方智 2014 博士学位论文 (哈尔滨: 哈尔滨工程大学)]

# Properties of band gaps in phononic crystal pipe consisting of expansion chambers with extended inlet/outlet\*

Zhang Zhen-Fang Yu Dian-Long<sup>†</sup> Liu Jiang-Wei Wen Ji-Hong

(Laboratory of Science and Technology on Integrated Logistics Support, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

( Received 5 November 2017; revised manuscript received 16 January 2018 )

## Abstract

Noise reduction is an interesting and important subject in the piping systems of many applications, in order to suppress noise in the pipe, many significant researches have been done. In recent years, the acoustic wave propagation in the phononic crystal pipe has received increasing attention. The characteristic band gaps in phononic crystal pipe can forbid wave to propagate within the band-gap frequency range, which provides a new way to control the noise in piping system. In this paper, the acoustic properties of phononic crystal pipe consisting of expansion chambers with the extended inlet/outlet are investigated theoretically and numerically. By combining the two-dimensional mode matching method and the transfer matrix method, the band structure and transmission loss, especially the band-gap properties of the phononic crystal structure are presented. The obtained results exhibit excellent agreement with the results from the finite element method. Then, this theoretical method is compared with the one-dimensional plane wave method, and it is found that the results from the proposed method are more accurate within the studied frequency range. Further, the effect of modal order in the band-gap frequency range is analyzed, which shows that the mode matching method has a good convergence.

The wave scattering and resonance of the chamber will induce the Bragg and locally-resonant band gaps in the periodic pipe, respectively. Further analysis on the transmission coefficient in a band gap is conducted. It shows that the transmission coefficient decays exponentially with the periodic number increasing, which demonstrates that the suppression of the wave propagation in phononic crystal pipe is caused by the band-gap rather than the impedance mismatch. Then the effects of variable parameters including the lattice constant and the length of the insertion on the location and width of the band gaps are investigated. The results show that the lattice constant mainly controls the Bragg band gaps and the length of the insertion exerts a significant influence on the locally-resonant band gaps. Finally, the coupling behaviors of band gaps are studied to expand their widths. It is found that the Bragg band gaps can be coupled with the locally-resonant band gaps via changing the lattice constant and the length of the insertion, which can give rise to wider band gaps. Furthermore, the coupling between two locally-resonant band gaps is proposed by changing the length of the insertion, which also produces wider band gaps.

This study can provide new ideas for designing the phononic crystal pipe to suppress the noise in piping system.

**Keywords:** expansion chambers with extended inlet and outlet, two-dimensional mode matching method, band structure, coupled band gaps

**PACS:** 43.20.Mv, 43.50.Gf, 43.55.Rg

**DOI:** 10.7498/aps.67.20172383

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11372346).

† Corresponding author. E-mail: dianlongyu@vip.sina.com