物理学报 Acta Physica Sinica
Chinese Physical Society
Institute of Physics, CAS

坐标空间中构造的Breit夸克势与介子和夸克偶素的质量劈裂

吉日木图　敖登　薛康

Construction of Breit quark potential in coordinate space and mass splits of meson and quarkonium

Jirimutu　Aodeng　Xue Kang

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 67, 091201 (2018)　DOI: 10.7498/aps.67.20172155
在线阅读 View online: http://dx.doi.org/10.7498/aps.67.20172155
当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2018/V67/I9

坐标空间中构造的Breit夸克势与介子和夸克偶素的质量劈裂*

吉日木图 敖登† 薛康‡

(内蒙古医科大学计算机信息学院, 呼和浩特 010110)

(2017 年 9 月 29 日收到; 2018 年 3 月 11 日收到修改稿)

构造夸克间的有效的相互作用势函数是强子物理中的重要研究课题, 也是学科前沿问题之一. 本文对坐标空间中的Breit 夸克势函数的完整形式实施消除奇异因子的替代方法, 构造出一个有效的夸克势. 除了第一项库仑势和第七项常数项势, 对其他的项都需进行重新构造, 即对第二项和第四项做 $\delta(\boldsymbol{r}) \to \mu^3\,\mathrm{e}^{-\mu r}/8\pi$ 替代, 对第三项做 $1/r \to (1-\mathrm{e}^{-\mu r})/r$ 替代, 对第五项和第六项做 $1/r^3 \to \left[1-(1+\mu r)\,\mathrm{e}^{-\mu r}\right]/r^3$ 替代, 由此重新构造出新的势函数, 然后用来计算质量劈裂, 检验构造势的有效性. 为此计算了一组含重介子和夸克偶素的质量劈裂. 计算中屏蔽质量 μ 不是简单的常数, 而是取与夸克质量 m_i, m_j 有关的变量. 研究计算发现, 只有当屏蔽质量 μ 取为关于夸克平均质量 $\mu_{\mathrm{a}} = (m_i + m_j)/2$ 的洛朗级数形式 $\mu = c_{-3}(\mu_{\mathrm{a}}+0.512)^{-3} + c_{-2}(\mu_{\mathrm{a}}+0.512)^{-2} + c_{-1}(\mu_{\mathrm{a}}+0.512)^{-1} + c_0 + c_1(\mu_{\mathrm{a}}+0.512)$ 时重介子 η_c-J/ψ, η_b-Υ(1s), 还有 χ_{c0}-χ_{c1}-χ_{c2} 等的夸克偶素之间质量劈裂精确达到实验值, 同时其他介子尤其是 6 个 D 介子质量精度都比以往得到较大幅度的改善. 因此, 本文构造出一个有效的夸克势模型.

关键词: 非相对论夸克势模型, 构造势函数, 构造屏蔽质量, 质量劈裂

PACS: 12.39.Jh, 12.39.–x, 14.40.–n, 02.90.+p **DOI:** 10.7498/aps.67.20172155

1 引 言

夸克间的相互作用是复杂的, 表示这种相互作用的理论模型也比较多见 [1−5], 到底何种模型能够准确无误地表达这种相互作用, 至今尚未定论. 这其中比较流行且常用的是非相对论夸克势模型, 如常见的Breit 势函数 [1,2,6−8]. 这种夸克势模型认为强子内夸克的运动是非相对论的, 因此它 (夸克的运动) 可以用薛定谔方程很好地描述. 虽然这种模型对轻夸克的描述不尽合理, 但它对强子束缚态和散射方面的计算都取得了较大的成功 [1,6−17], 因此人们一直用非相对论性夸克势模型来描述包括轻夸克在内的夸克之间的相互作用 [5,10,16−21], 并且与其他方法相比, 这种模型在束缚态的计算方面显现得更加优越 [22]. 这些实事和成功促使人们对它进行更为广泛和深入的研究, 使之变得更加完善精确, 从而构造出新的势函数 [10,16−21].

由于在微观的强相互作用中, 势函数的厄米性和非定域性 (含两变量坐标和动量) 是一个不可忽视的重要特征. 因此构造新势函数不能简单随意删改现有势函数中的某几项 [10−15,18] 来实现, 不恰当的删改就会破坏势函数应有的完整性、厄米性和非定域性.

众所周知Breit 势中包含 r^{-3} 的奇异项 [2,20], 要构造一个有效稳定的势函数, 其出发点应该是要消除Breit 势的奇异性. 文献 [10, 15, 17—19] 直接在坐标空间中通过简单的删改或替代方法不同程度地消除Breit 势中的奇异因子来实现构造势函数.

在微观领域中原子尺寸范围内极小程度地提高精度都很艰难. 文献 [19] 中, η_c 的实验质量和理

* 内蒙古自然科学基金 (批准号: 2011MS0116) 和内蒙古医科大学博士启动基金 (批准号: NY2010BQ004) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: aodeng661@163.com

‡ 通信作者. E-mail: 469654001@qq.com

 http://wulixb.iphy.ac.cn

论质量分别是2.979和3.025 GeV, J/ψ的实验质量和理论质量分别是3.097和3.052 GeV, 相应的屏蔽质量μ值为0.894 GeV, 这也是π-ρ劈裂时的μ值. 在宏观领域, 此种情况可认为理论和实验值严格相等, 但在微观领域, 想缩小这微小的差距并非易事. 首先保证构造势有效, 然后是合理有效地构造屏蔽质量μ的解析式. 若构造势有效, 但数值计算技能不恰当的情况下, 也就无法证明构造势有效. 因此每一环节都非常重要且艰难, 且缺一不可. 对于文献[19], 经过一系列的计算发现, 几个重要夸克偶素η_c, J/ψ, χ_{c0}, χ_{c1}, χ_{c2}之间无法质量劈裂. 由此断定文献[19]构造的势函数(16)式的有效度并不高.

在先前研究基础上如何重新组合、怎样有效合理搭配各项, 是构造有效势函数的关键, 也是难点, 还需保证势函数的整体形式从前没有出现过. 文献[19]中(16)式不能计算劈裂除了(16)式的各项选取和搭配并非合理外, 还有一个原因是文献[19]中(3)式的自旋-自旋耦合项$(\boldsymbol{\sigma}_i\cdot\boldsymbol{\sigma}_j)$的系数是2/3 (势函数直接取自文献[2]), 而在本文中这个系数是3/3 (势函数是从动量空间得到), 这个系数的不同对计算劈裂影响较大.

鉴于上述, 本文是在文献[19]的基础上重新合理选取并有效搭配各项而构造形成势函数. 通过一系列的分析讨论可知, 并非每一种构造方法都可以得到有效势函数.

本文对完整的坐标空间中的Breit势的各项进行逐项替代处理, 这样重新得到的势函数在坐标空间中不再含r^{-3}的奇异项. 计算结果表明, 用本文的替代方案可以消除Breit势的奇异性, 得到比以往更加稳定和高精度的介子质量谱, 从而构造出一个有效的夸克势模型(函数).

2 坐标空间中的Breit势

用傅里叶变换把动量空间中的Breit势函数[1,6–8,20,21]变换到坐标空间中, 得到的势函数与直接在坐标空间中给出的Breit势函数[2]有所出入, 所以我们对Breit势的改进还是从动量空间开始. 把动量空间中的Breit势函数稍加整理(合并同类项)得到

$$\begin{aligned}V(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})={}&V_1(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})+V_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})+V_3(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})\\&+V_4(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})+V_5(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})\\&+V_6(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})+V_7(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}).\end{aligned}\tag{1}$$

(1)式中各项的具体表达式如下:

$$\begin{aligned}
V_1(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})&=C_{ij}^{\mathrm{s}}\frac{4\pi\alpha_{\mathrm{s}}}{\boldsymbol{q}^2},\\
V_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})&=-C_{ij}^{\mathrm{s}}(4\pi\alpha_{\mathrm{s}})\frac{(m_i^2+m_j^2)}{8m_i^2m_j^2},\\
V_3(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})&=C_{ij}^{\mathrm{s}}\frac{4\pi\alpha_{\mathrm{s}}}{m_im_j}\left[\frac{\boldsymbol{p}^2}{\boldsymbol{q}^2}-\frac{(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q})^2}{\boldsymbol{q}^4}\right],\\
V_4(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})&=-C_{ij}^{\mathrm{s}}\frac{4\pi\alpha_{\mathrm{s}}}{4m_im_j}\left(\frac{3}{3}\boldsymbol{\sigma}_i\cdot\boldsymbol{\sigma}_j\right),\\
V_5(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})&=C_{ij}^{\mathrm{s}}\frac{4\pi\alpha_{\mathrm{s}}}{4m_im_j}\left[\frac{\mathrm{i}(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{q}^2}\right],\\
V_6(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})&=C_{ij}^{\mathrm{s}}\frac{4\pi\alpha_{\mathrm{s}}}{4m_im_j}\left[\frac{(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\sigma}_i)(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\sigma}_j)}{\boldsymbol{q}^2}\right],\\
V_7(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})&=C_{ij}^{\mathrm{s}}(2\pi)^3(-V_0)\delta(\boldsymbol{q}),
\end{aligned}$$

其中, $\boldsymbol{\sigma}=(2+m_j/m_i)\boldsymbol{\sigma}_i+(2+m_i/m_j)\boldsymbol{\sigma}_j$; C_{ij}^{s}是散射道色矩阵[10]; α_{s}是量子色动力学耦合常数; m_i和m_j是夸克i和夸克j的组分质量; $\boldsymbol{\sigma}_i$是夸克i的Pauli矩阵; 最后一项$V_7(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$是常数项势, 用以求解薛定谔方程时调整介子质量而增加的项[10,20]; $\boldsymbol{p}$和$\boldsymbol{q}$的意义与文献[20]相同.

然后用傅里叶变换公式

$$V(\boldsymbol{r})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\mathrm{d}^3q\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}V(\boldsymbol{q})\tag{2}$$

把势函数(1)的每一项变换到坐标空间中, 再加到一起, 就得到坐标空间中的Breit势函数:

$$\begin{aligned}V(\boldsymbol{r})={}&V_1(\boldsymbol{r})+V_2(\boldsymbol{r})+V_3(\boldsymbol{r})+V_4(\boldsymbol{r})\\&+V_5(\boldsymbol{r})+V_6(\boldsymbol{r})+V_7(\boldsymbol{r}).\end{aligned}\tag{3}$$

(3)式中各项的具体表达式如下:

$$\begin{aligned}
V_1(\boldsymbol{r})&=C_{ij}^{\mathrm{s}}\alpha_{\mathrm{s}}\frac{1}{r},\\
V_2(\boldsymbol{r})&=-C_{ij}^{\mathrm{s}}(4\pi\alpha_{\mathrm{s}})\frac{(m_i^2+m_j^2)}{8m_i^2m_j^2}\delta(\boldsymbol{r}),\\
V_3(\boldsymbol{r})&=\frac{C_{ij}^{\mathrm{s}}\alpha_{\mathrm{s}}}{2m_im_j}\left[\frac{\boldsymbol{p}^2}{r}+\frac{\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p})\boldsymbol{p}}{r^3}\right],\\
V_4(\boldsymbol{r})&=-C_{ij}^{\mathrm{s}}\frac{4\pi\alpha_{\mathrm{s}}}{4m_im_j}\left(\frac{3}{3}\boldsymbol{\sigma}_i\cdot\boldsymbol{\sigma}_j\right)\delta(\boldsymbol{r}),\\
V_5(\boldsymbol{r})&=-\frac{C_{ij}^{\mathrm{s}}\alpha_{\mathrm{s}}}{4m_im_jr^3}(\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{\sigma}),\\
V_6(\boldsymbol{r})&=-C_{ij}^{\mathrm{s}}\frac{3\alpha_{\mathrm{s}}}{4m_im_jr^3}S_{ij}^{r},\\
V_7(\boldsymbol{r})&=C_{ij}^{\mathrm{s}}(-V_0),
\end{aligned}$$

其中, $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$是介子轨道角动量算符, $S_{ij}^{r}=(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\sigma}_i)(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\sigma}_j)/r^2-(\boldsymbol{\sigma}_i\cdot\boldsymbol{\sigma}_j)/3$是张量力算符.

3 在坐标空间中构造新的Breit势

根据文献[23], 在坐标空间中势函数的某一项关于r的渐近行为如果是r^{-3}, 那么该项就是奇异项. 由文献[20]可知, $\delta(\boldsymbol{r})$函数及动量$\boldsymbol{p}$的渐近行为是$\delta(\boldsymbol{r}) \sim r^{-3}$和$\boldsymbol{p} \sim r^{-1}$. 由此势函数(3)式各项的渐近行为如下: $V_1(\boldsymbol{r}) \sim r^{-1}$, $V_2(\boldsymbol{r}) \sim r^{-3}$, $V_3(\boldsymbol{r}) \sim r^{-3}$, $V_4(\boldsymbol{r}) \sim r^{-3}$, $V_5(\boldsymbol{r}) \sim r^{-3}$, $V_6(\boldsymbol{r}) \sim r^{-3}$, 所以$V_2(\boldsymbol{r})$至$V_6(\boldsymbol{r})$项都是奇异项, 需要修改重新构造.

为了兼顾计算精度和稳定度, 并结合文献[19]的方法, 除了势函数(3)式的第一项库仑势$V_1(\boldsymbol{r})$和第七项常数项势$V_7(\boldsymbol{r})$外, 对其他的各项都得进行如下的不同的逐项替代. 把$V_i(\boldsymbol{r})$ $(i = 2, 3, 4, 5, 6)$进行替代后得到的项记作$V_i'(\boldsymbol{r})$, 则新构造的势函数各项的具体表达式如下:

$$\begin{aligned} V_1'(\boldsymbol{r}) &= V_1(\boldsymbol{r}) = C_{ij}^{\mathrm{s}} \alpha_{\mathrm{s}} \frac{1}{r}, \\ V_7'(\boldsymbol{r}) &= V_7(\boldsymbol{r}) = C_{ij}^{\mathrm{s}}(-V_0). \end{aligned} \tag{4}$$

由于$V_2(\boldsymbol{r}) \sim \delta(\boldsymbol{r})$, 该式表示介子内两夸克只有当距离很近$(r \to 0)$时才有作用, 并且无限大(绝对值), 否则就无作用. 这显然不符合物理量随距离的增大而逐渐衰减的普遍原理, 需要修改. 已知

$$\begin{aligned} \int \mathrm{d}^3 x \delta(\boldsymbol{r}) &= \int \mathrm{d}^3 x \frac{\mu^2}{4\pi r} \mathrm{e}^{-\mu r} \\ &= \int \mathrm{d}^3 x \frac{\sigma^3}{\pi^{3/2}} \mathrm{e}^{-\sigma^2 r^2} \\ &= \int \mathrm{d}^3 x \frac{\mu^3}{8\pi} \mathrm{e}^{-\mu r} = 1, \end{aligned} \tag{5}$$

并结合文献[5, 10, 17, 19]的方法及数值计算精度, 把势函数(3)式中的$\delta(\boldsymbol{r})$函数用如下的变换来替代:

$$\delta(\boldsymbol{r}) \to \frac{\mu^3}{8\pi} \mathrm{e}^{-\mu r}, \tag{6}$$

得到坐标空间中新的$V_2(\boldsymbol{r})$,

$$V_2'(\boldsymbol{r}) = -C_{ij}^s (4\pi\alpha_s) \frac{(m_i^2 + m_j^2)}{8 m_i^2 m_j^2} \left(\frac{\mu^3}{8\pi} \mathrm{e}^{-\mu r} \right). \tag{7}$$

由(7)式可直接看出$r = 0$已不再是奇异点, 从而消除了奇异. 第(7)式中出现的参量μ是可调参量, 也称屏蔽质量. 根据文献[20, 21, 24], μ并非一个简单的常数, 而应该是与夸克质量m_i, m_j有关, 这将在后面详细讨论.

由(7)式$V_2'(\boldsymbol{r}) \sim \mu^3 \mathrm{e}^{-\mu r}/(8\pi)$可知, 当屏蔽质量$\mu > 0$时$V_2'(\boldsymbol{r})$随距离的增大而逐渐衰减, 最后变成零. $r = 0$时作用最大$\mu^3/(8\pi)$(绝对值), 并且屏蔽质量μ越大此作用越大. 同理, 在后面讨论的$V_4(\boldsymbol{r})$的替代与$V_2(\boldsymbol{r})$相同, 相关的讨论结果也相同.

把势函数(3)式中的第三项稍加改写为

$$\begin{aligned} V_3(\boldsymbol{r}) &= \frac{C_{ij}^{\mathrm{s}} \alpha_{\mathrm{s}}}{2 m_i m_j} \frac{1}{r} \left[\boldsymbol{p}^2 + \frac{\boldsymbol{r} \cdot (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{p}) \boldsymbol{p}}{r^2} \right] \\ &= -\frac{C_{ij}^{\mathrm{s}} \alpha_{\mathrm{s}}}{2 m_i m_j} \frac{1}{r} (\partial_k^2 + \partial_r^2) \end{aligned}$$

(对重复脚标k求和), 很容易看到, 如果能消除因子$1/r$的奇异性, 那么第三项$V_3(\boldsymbol{r})$为非奇异项.

势函数(3)的第三项$V_3(\boldsymbol{r})$有奇异点, 当$r = 0$时发散. 所以修改的出发点应该是当$r = 0$时使之收敛. 有如下的渐近行为:

$$r \to 0: \quad \frac{1}{r} - \frac{\mathrm{e}^{-\mu r}}{r} \to \mu, \tag{8}$$

$$r \to \infty: \quad \frac{1}{r} - \frac{\mathrm{e}^{-\mu r}}{r} \to \frac{1}{r}, \tag{9}$$

因此做如下替代:

$$\frac{1}{r} \to \frac{1}{r} - \frac{\mathrm{e}^{-\mu r}}{r}, \tag{10}$$

这样无论$r \to 0$还是$r \to \infty$, 变换(10)式能消除奇异点. 考虑到势函数的厄米性, 把势函数(3)式的第三项$V_3(\boldsymbol{r})$重新构造如下:

$$\begin{aligned} V_3'(\boldsymbol{r}) = \frac{C_{ij}^{\mathrm{s}} \alpha_{\mathrm{s}}}{2 m_i m_j} \frac{1}{2} \bigg\{ & (1 - \mathrm{e}^{-\mu r}) \left[\frac{\boldsymbol{p}^2}{r} + \frac{\boldsymbol{r} \cdot (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{p}) \boldsymbol{p}}{r^3} \right] \\ & + \left[\frac{\boldsymbol{p}^2}{r} + \frac{\boldsymbol{r} \cdot (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{p}) \boldsymbol{p}}{r^3} \right] (1 - \mathrm{e}^{-\mu r}) \bigg\}. \end{aligned} \tag{11}$$

重新构造出的$V_3'(\boldsymbol{r}) \sim r^{-2}$, 由此$V_3'(\boldsymbol{r})$是非奇异项.

综上可知, 当屏蔽质量$\mu = 0$时对任意的r直接有$1/r \to 0$, 当屏蔽质量$\mu < 0$时$1/r - \mathrm{e}^{-\mu r}/r$直接发散, 因此必须有$\mu > 0$, 这已表明构造$V_2'(\boldsymbol{r})$, $V_3'(\boldsymbol{r})$两种不同方法之下所引进的屏蔽质量μ (认为在各个环节中μ是同一的)的性质很自然地统一到一起, 也在一定程度上证实了所构造的$V_2'(\boldsymbol{r})$, $V_3'(\boldsymbol{r})$的正确性.

第四项$V_4(\boldsymbol{r})$的改进方法同第二项$V_2(\boldsymbol{r})$的改进方法, 用到变换(6)式, 得到

$$V_4'(\boldsymbol{r}) = -C_{ij}^{\mathrm{s}} \frac{4\pi\alpha_{\mathrm{s}}}{4 m_i m_j} \left(\frac{3}{3} \boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_j \right) \left(\frac{\mu^3}{8\pi} \mathrm{e}^{-\mu r} \right), \tag{12}$$

势函数(3)式的第五、六项$V_5(\boldsymbol{r})$, $V_6(\boldsymbol{r})$也是奇异项. 第五项$V_5(\boldsymbol{r})$的改进方法要结合第三项$V_3(\boldsymbol{r})$的改进方法. 由(10)式得到如下替代公式:

$$\frac{1}{r^3} \to \frac{1}{r^3} (1 - \mathrm{e}^{-\mu r})^3, \tag{13}$$

而有

$$(1-\mathrm{e}^{-\mu r})^3=1-\mathrm{e}^{-\mu r}\big[3(1-\mathrm{e}^{-\mu r})+\mathrm{e}^{-2\mu r}\big]. \tag{14}$$

因为要求势函数只含 $\mathrm{e}^{-\mu r}$ 的一次幂, 所以把(14)式中的因子 $3(1-\mathrm{e}^{-\mu r})+\mathrm{e}^{-2\mu r}$ 进行级数展开, 并忽略 μr 的二次幂及以上的高阶项, 得到近似公式:

$$(1-\mathrm{e}^{-\mu r})^3=1-(1+\mu r)\,\mathrm{e}^{-\mu r}. \tag{15}$$

把(15)式代入(13)式, 得到替代公式:

$$\frac{1}{r^3}\to\frac{1}{r^3}\Big[1-(1+\mu r)\,\mathrm{e}^{-\mu r}\Big]. \tag{16}$$

将 $V_5(\boldsymbol{r})$ 和 $V_6(\boldsymbol{r})$ 中的 $1/r^3$ 用(16)式替代, 得到新的第五项和第六项,

$$V_5'(\boldsymbol{r})=-\frac{C_{ij}^{\mathrm{s}}\alpha_{\mathrm{s}}}{4m_im_jr^3}\Big[1-(1+\mu r)\,\mathrm{e}^{-\mu r}\Big](\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{\sigma}), \tag{17}$$

$$V_6'(\boldsymbol{r})=-\frac{3C_{ij}^{\mathrm{s}}\alpha_{\mathrm{s}}}{4m_im_jr^3}\Big[1-(1+\mu r)\,\mathrm{e}^{-\mu r}\Big]S_{ij}^r. \tag{18}$$

由(17)和(18)式可知, $V_5(\boldsymbol{r})$ 与 $V_6(\boldsymbol{r})$ 变换前后关于 r 的空间部分相同的性质不变, 因此(17), (18)式是合理的.

下面分析(17)或(18)式是否消除了奇异. 因为

$$\frac{1}{r^3}\big[1-(1+\mu r)\,\mathrm{e}^{-\mu r}\big]=\frac{1}{r}\Big(\frac{1}{2}\mu^2-\frac{1}{2}\mu^3r+\cdots\Big),$$

其中已代入 $\mathrm{e}^{-\mu r}$ 的级数展开式, 由此可知 $V_5'(\boldsymbol{r})\sim r^{-1}$ 或 $V_6'(\boldsymbol{r})\sim r^{-1}$, 表明 $V_5'(\boldsymbol{r})$ 或 $V_6'(\boldsymbol{r})$ 是非奇异项.

把(4), (7), (11), (12), (17), (18)式进行相加, 得到一个重新组合的非奇异的、有效的夸克势模型在坐标空间中的形式:

$$\begin{aligned}V'(\boldsymbol{r})=&V_1'(\boldsymbol{r})+V_2'(\boldsymbol{r})+V_3'(\boldsymbol{r})+V_4'(\boldsymbol{r})+\\&V_5'(\boldsymbol{r})+V_6'(\boldsymbol{r})+V_7'(\boldsymbol{r}).\end{aligned} \tag{19}$$

禁闭势采用文献[10,20]线性禁闭势,

$$V_{\mathrm{c}}'(\boldsymbol{r})=V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{r})=-C_{ij}^{\mathrm{s}}\Big(\frac{3}{4}b\Big)r, \tag{20}$$

将(19)和(20)式相加得到总势函数

$$U(\boldsymbol{r})=V'(\boldsymbol{r})+V_{\mathrm{c}}'(\boldsymbol{r}). \tag{21}$$

4 新构造势的矩阵元

计算矩阵元时直接采用文献[21]给出的一般公式第(26)和(27)式, 并只给出 $l=0$, 1和 $l'=l$ 时的矩阵元, 其中出现的参量 w_n, A_l 的定义与文献[21]中的第(31)和(33)式相同, 可通过计算得到势函数(19)式的各项矩阵元, 其中第一项库仑势矩阵元 $(V_1')_{mn}$、第七项常数项势矩阵元 $(V_7')_{mn}$ 和禁闭势矩阵元 $(V_{\mathrm{c}}')_{mn}$ 分别由文献[21]中的第(34), (40)和(41)式给出, 在这里不一一列出.

$$\begin{aligned}(V_2')_{mn}=&-C_{\mathrm{f}}\alpha_{\mathrm{s}}\frac{1}{2}\frac{m_i^2+m_j^2}{8m_i^2m_j^2}\\&\times\mu^3A_l\big[(1-l)w_2+lw_4\big].\end{aligned} \tag{22}$$

第三项 V_3' 是轨道-轨道耦合项:

$$\begin{aligned}(V_3')_{mn}=&(V_3)_{mn}+C_{\mathrm{f}}\frac{\alpha_{\mathrm{s}}}{2m_im_j}\\&\times A_l\Big\{2n^2\beta^4\big[(1-l)w_3+lw_5\big]\\&-4n\beta^2\big[(1-l)w_1+2lw_3\big]\Big\}\\&-C_{\mathrm{f}}\frac{\alpha_{\mathrm{s}}}{2m_im_j}A_l\Big\{-\mu^2\big[(1-l)w_1+lw_3\big]\\&+\mu\big[(1-l)w_0+3lw_2\big]\\&-2n\beta^2\mu\big[(1-l)w_2+lw_4\big]\Big\}.\end{aligned} \tag{23}$$

第四项 V_4' 是自旋-自旋耦合项:

$$\begin{aligned}(V_4')_{mn}=&-C_{\mathrm{f}}\frac{\alpha_{\mathrm{s}}}{4m_im_j}\big[S(S+1)-\frac{3}{2}\big]\\&\times\mu^3A_l\big[(1-l)w_2+lw_4\big],\end{aligned} \tag{24}$$

第五项 V_5' 是自旋-轨道耦合项:

$$\begin{aligned}&(V_5')_{mn}\\&=C_f\frac{\sqrt{6}\alpha_{\mathrm{s}}}{4m_im_j}\Big(4+\frac{m_i}{m_j}+\frac{m_j}{m_i}\Big)(\hat{S})^2\hat{l}\sqrt{l(l+1)}(-1)^l\\&\times\Big[(2\pi)^3\int\mathrm{d}^3x\,\phi_{ml}^*(\boldsymbol{r})r^{-3}\phi_{nl}(\boldsymbol{r})\\&-A_l\big(w_1+\mu w_2\big)\Big](-1)^{1+J}\\&\times\begin{Bmatrix}S&S&1\\l&l&J\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}S&S&1\\1/2&1/2&1/2\end{Bmatrix}.\end{aligned} \tag{25}$$

第六项 V_6' 是张量力项:

$$\begin{aligned}(V_6')_{mn}=&C_{\mathrm{f}}\frac{3\alpha_{\mathrm{s}}}{m_im_j}\sqrt{\frac{5}{6}}\delta_{S,1}(\hat{l})^2\\&\times\Big[(2\pi)^3\int\mathrm{d}^3x\,\phi_{ml}^*(\boldsymbol{r})r^{-3}\phi_{nl}(\boldsymbol{r})\\&-A_l\big(w_1+\mu w_2\big)\Big]\\&\times(-1)^J\begin{pmatrix}l&l&2\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}S&l&J\\l&S&2\end{Bmatrix}.\end{aligned} \tag{26}$$

(23)式中出现的矩阵元 $(V_3)_{mn}$, (25)和(26)式中出现的空间积分分别由文献[21]中的第(42)和(44)

式给出, 在这里不一一列出. 至此把势函数(19)的每一项矩阵元一一计算完毕.

5 屏蔽质量μ与夸克质量m_i, m_j有关

屏蔽质量μ到底与哪些量有关, 可从势函数(19)或(21)式所含的可调参量出发研究, 包括弦张力系数b, 常数项势V_0, 五种夸克质量$m_{\mathrm{u}}(m_{\mathrm{u}}=m_{\mathrm{d}})$, m_{s}, m_{c}, m_{b}以及屏蔽质量μ. 如果问题中μ并非常数(也可以是各个介子μ值相同的常数), 是变量(各个介子μ值不同)的话, 它不可能与b, V_0有关, 因为b, V_0并非势函数常含量, 所以只能说μ应该与夸克质量m_i, m_j有关, 这是最早的思路[20,24].

夸克质量有两个m_i, m_j, 即两个变量, 此时μ是关于m_i, m_j的二元函数, 此时使用极不方便. 因此可将m_i, m_j先进行简单组合构造一个新自变量, 然后用这个新自变量再表达μ, 可实现μ是一元函数的构想, 这些都是当时的思路.

组合这个新自变量时需满足如下要求: 新变量对m_i, m_j的交换是对称的. 常用的新自变量有折合质量$\mu_{\mathrm{r}}=m_i m_j/(m_i+m_j)$, 平均质量$\mu_{\mathrm{a}}=(m_i+m_j)/2$, 应该还有其他形式的新自变量, 这里不予以给出.

文献[5, 24]中取μ与折合质量μ_{r}成正比的特简单的形式, 即$\mu=c\mu_{\mathrm{r}}$. 如果计算数目庞大的一组介子质量, 那么此关系式应该远不是这么简单的形式, 并且自变量不一定是μ_{r}. 所以文献[5, 24]中提到的势函数所附带的屏蔽质量μ的正确形式是另外一种, 只有计算数目庞大的一组介子质量时才能找到, 仅凭物理意义很难找到关系式.

本课题组相关工作[20,21]中都取μ是折合质量μ_{r}的函数, 并且形式远不是成正比这么简单, 是通过计算来确定的. 不同的势函数所需要的μ不同, 不但函数形式不同, 而且有可能自变量也不同. 对于本文计算, 首选自变量为折合质量μ_{r}, 但无论怎么计算, 数值计算精度都很差, 因此改用平均质量μ_{a}作为自变量构造屏蔽质量μ, 计算精度比以往更高, 相关数据列于表1.

构造屏蔽质量μ的有效表达式是比构造势函数还要艰难且难度极大的问题, 根据以往的推导和数值计算, 对于一般的势函数, 不可能简单地成正比关系. 除了势函数有效和特定的μ值外, 还需要较高的数学技能和数值计算能力, 这也是个新问题.

需要说明的是, 构造屏蔽质量μ的有效表达式时注重数学技能和数值计算, 兼顾物理意义. 如果单凭物理意义只会找到成正比这样简单的关系, 无法找到复杂的关系式.

6 构造屏蔽质量μ的解析式

求解文献[21]给出的薛定谔方程(29)式之前还需构造(19)式中的屏蔽质量μ的表达式. 根据以往的分析计算[20,21], 当μ值小时, η_{c}-J/ψ等重介子不劈裂, 而当μ值大时π-ρ (与重介子一起计算, 计算结果未列入表1中, 下同)等一系列轻介子都发散. 因此要想使π-ρ, η_{c}-J/ψ和η_{b}-$\Upsilon(1\mathrm{s})$等重要介子之间质量劈裂, 屏蔽质量μ并非一个简单的常数, 而应该是与夸克质量m_i, m_j有关的变量, 势函数(19)式也不例外.

由上面的分析讨论, 不同的势函数所需要的μ不同[20,21,24], 对于(19)式构造μ是比构造势函数还要艰难且难度极大的问题. 再好的势函数如果未能找到一个合适的μ与之相互匹配, 从而就不能算出更高精度的质量谱, 那么也就无法证实该势函数的有效性. 因此能否找到一个合理、有效的μ的解析式为关键所在, 它直接关系到一个势函数的有效性.

对于Breit势函数, 介子之间要质量劈裂或要达到更高精度的质量时, 各个介子所需的μ值不同, 结构相同的介子μ值相同. 其中π-ρ和η_{c}-J/ψ劈裂时其μ值为确定值, 其他介子的μ值在一定范围内变化.

在μ为常数的情况下计算得到, π-ρ和η_{c}-J/ψ等精确劈裂时所需的μ值分别为0.932和3.677 GeV. 除此之外, 对于(19)式, 几个D介子的μ值有一定的限制, 在5.050 GeV左右波动. 根据这几个特定值构造μ的表达式, 并经过一系列大量的前期化简给出以夸克平均质量$\mu_{\mathrm{a}}=(m_i+m_j)/2$ (m_i, m_j为同一个介子中的两个夸克质量)作为变量的μ的形式为

$$\mu=c_{-1}(\mu_{\mathrm{a}}-0.948)^{-1}+c_0+c_1(\mu_{\mathrm{a}}-0.948). \quad (27)$$

表 1 本文计算结果与实验值的比较

Table 1. Results of meson masses.

Meson	$M^{\rm exp}$/GeV	$M^{[20]}$/GeV	$M^{[21]}$/GeV	$M^{\rm th1}$/GeV	$M^{\rm th2}$/GeV	$\mu^{\rm th2}$/GeV
$\rm D(1^1S_0)$	1.869	2.017	1.998	1.925	1.925	5.019
$\rm D^*(1^3S_1)$	2.010	2.088	2.071	2.141	2.141	5.019
$\rm D_s(1^1S_0)$	1.969	2.046	2.028	1.944	1.902	5.079
$\rm D_s^*(1^3S_1)$	2.112	2.140	2.121	2.169	2.130	5.079
$\rm D_1(1^1P_1)$	2.422	2.628	2.600	2.429	2.451	5.019
$\rm D_2(1^3P_2)$	2.460	2.604	2.571	2.590	2.590	5.019
$\eta_{\rm c}(1^1\rm S_0)$	2.983	2.978	2.977	2.979	2.979	3.677
$\rm J/\psi(1^3S_1)$	3.097	3.096	3.095	3.096	3.096	3.677
$\rm h_c(1^1P_1)$	3.526	3.550	3.540	3.536	3.536	3.677
$\chi_{\rm c0}(1^3\rm P_0)$	3.415	3.413	3.418	3.432	3.432	3.677
$\chi_{\rm c1}(1^3\rm P_1)$	3.511	3.517	3.518	3.523	3.523	3.677
$\chi_{\rm c2}(1^3\rm P_2)$	3.556	3.548	3.569	3.570	3.570	3.677
$\eta_{\rm c}'(2^1\rm S_0)$	3.639	—	—	—	3.645	3.677
$\psi'(2^3\rm S_1)$	3.686	3.771	3.777	3.776	3.776	3.677
$\rm B(1^1S_0)$	5.279	5.409	5.377	5.431	5.412	0.643
$\rm B^*(1^3S_1)$	5.324	5.426	5.394	5.464	5.419	0.643
$\rm B_s(1^1S_0)$	5.367	5.442	5.409	5.443	5.441	0.475
$\rm B_s^*(1^3S_1)$	5.416	5.465	5.433	5.482	5.445	0.475
$\eta_{\rm b}(1^1\rm S_0)$	9.399	9.398	9.409	9.382	9.417	1.036
$\Upsilon(1^3\rm S_1)$	9.460	9.426	9.418	9.425	9.421	1.036
$\chi_{\rm b0}(1^3\rm P_0)$	9.859	—	—	—	9.806	1.036
$\chi_{\rm b1}(1^3\rm P_1)$	9.893	9.811	9.810	9.803	9.811	1.036
$\chi_{\rm b2}(1^3\rm P_2)$	9.913	—	—	—	9.855	1.036
$\Upsilon(2^3\rm S_1)$	10.023	9.959	9.956	9.952	9.954	1.036
$\chi_{\rm b0}'(2^3\rm P_0)$	10.232	—	—	—	10.204	1.036
$\chi_{\rm b1}'(2^3\rm P_1)$	10.255	10.207	10.209	10.209	10.207	1.036
$\chi_{\rm b2}'(2^3\rm P_2)$	10.269	—	—	—	10.241	1.036
$\Upsilon(3^3\rm S_1)$	10.355	10.372	10.372	10.368	10.369	1.036

注: $b = 0.252$ GeV^2; $V_0 = -0.658$ GeV; $m_{\rm u} = 0.395$ GeV; $m_{\rm s} = 0.553$ GeV; $m_{\rm c} = 1.754$ GeV; $m_{\rm b} = 5.051$ GeV; $M^{\rm th1}$: $\mu = c_{-1}(\mu_{\rm a} - 0.948)^{-1} + c_0 + c_1(\mu_{\rm a} - 0.948)$, $c_{-1} = 0.33324$ GeV^2, $c_0 = 2.23910$ GeV, $c_1 = 1.27400$; $M^{\rm th2}$: $\mu = c_{-3}(\mu_{\rm a} + 0.512)^{-3} + c_{-2}(\mu_{\rm a} + 0.512)^{-2} + c_{-1}(\mu_{\rm a} + 0.512)^{-1} + c_0 + c_1(\mu_{\rm a} + 0.512)$, $c_{-3} = 102.73048$ GeV^4, $c_{-2} = -268.99630$ GeV^3, $c_{-1} = 230.01832$ GeV^2, $c_0 = -69.43322$ GeV, $c_1 = 6.69000$.

虽然由(27)式能够精确算出上述重要介子之间质量劈裂时所需的μ值, 并且形式相对较简单, 但不足的是用它无法控制几个B介子的μ值上涨到4.700 GeV左右, 从而其质量精度不高, 如表1所列. 为了控制几个B介子的μ值, 对(27)式推导步骤进行大量修正, 其主要依据是几个B介子的μ值必须降低, 同时保证维持其他介子现有的μ值. 这样经过一系列的调整再仿照(27)式前期化简步骤进行化简之后得到

$$\mu = c_{-3}(\mu_{\rm a} + 0.512)^{-3} + c_{-2}(\mu_{\rm a} + 0.512)^{-2} + c_{-1}(\mu_{\rm a} + 0.512)^{-1} + c_0 + c_1(\mu_{\rm a} + 0.512). \tag{28}$$

用(28)式计算得到几个B介子的μ值已经直接降到0.550 GeV左右, 相应的质量精度也都有所提高, 如表1所列. (27)式中的展开系数c_{-1}, c_0, c_1和(28)式中的展开系数c_{-3}, c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1是不同的, 它们并非单一的可调参量, 仅凭运算程序无法确定, 一定要结合(27)和(28)式的前期化简过程和数值计算程序才能确定下来, 并必须精确到小数点后五位, 具体数值已列在表1的表注.

7 结 语

最后解文献[21]中给出的介子束缚态薛定谔方程(29)式$\boldsymbol{Ha} = E\boldsymbol{Ba}$, 通过运算程序先调节确定其中的可调参量弦张力系数b, 常数项势V_0, 五种夸克质量$m_{\rm u}(m_{\rm u} = m_{\rm d})$, $m_{\rm s}$, $m_{\rm c}$, $m_{\rm b}$的最佳值, 然后分别用屏蔽质量μ的表达式(27), (28)式使π-ρ, $\eta_{\rm c}$-J/ψ和$\eta_{\rm b}$-Υ(1s)等重要介子之间进行质量劈裂, 得到尽可能逼近实验值的介子质量数值解, 从而检验势函数(19)式的有效性, 同时调节出夸克质量等可调参量的更精确值.

直接计算验证, 对于势函数(19)式, 耦合常数$\alpha_{\rm s}$和波函数中的宽度系数β仍采用文献[21]中使用的$\alpha_{\rm s}$和β.

只计算少数介子或重介子或结构相同的夸克偶素[3,4]质量, 远不足以证明势函数的有效性, 因为此时各个参量的任意调节自由度很大, 当然较容易实现劈裂或提高计算精度. 因此要计算的一组数目较多的介子结构必须涉及五种夸克u, d, s, c, b, 并含夸克偶素, 此时的计算才真正考验新构造势(函数)的有效性.

为便于对比, 表1列出了一些计算结果, 其中, 第1列数据$M^{\rm exp}$是取自文献[10]的实验质量, 第2列$M^{[20]}$和第3列$M^{[21]}$分别是文献[20, 21]计算结果. 第4列$M^{\rm th1}$和第5列$M^{\rm th2}$是本文在同一势函数(19)式情况下分别用(27)和(28)式计算的结果, 第6列$\mu^{\rm th2}$是质量$M^{\rm th2}$相应的μ值. 从表1可容易看到, 只有第5列$M^{\rm th2}$的计算结果是更精确的, 重要介子之间实现了精确劈裂, 这恰是本文之精髓.

感谢内蒙古民族大学物理与电子信息学院特木尔巴根教授的有益探讨.

参考文献

[1] Barnes T, Black N 1999 *Phys. Rev. C* **60** 045202
[2] Rújla A D, Georgi H, Glashow S L 1975 *Phys. Rev. D* **12** 147
[3] Ebert D, Faustov R N 2000 *Phys. Rev. D* **62** 034014
[4] Chen Y Q, Kuang Y P 1992 *Phys. Rev. D* **46** 1165
[5] Zhou P, Deng C R, Ping J L 2015 *Chin. Phys. Lett.* **32** 101201
[6] Chen J X, Su J C 2001 *Phys. Rev. C* **64** 065201
[7] Wang H J, Yang H, Su J C 2003 *Phys. Rev. C* **68** 055204
[8] Zhao G Q, Jing X G, Su J C 1998 *Phys. Rev. D* **58** 117503
[9] Lucha W, Schoberl F F, Gromes D 1991 *Phys. Rep.* **200** 127
[10] Wong C Y, Swanson E S, Barnes T 2001 *Phys. Rev. C* **65** 014903
[11] Godfrey S, Kokoski R 1991 *Phys. Rev. D* **43** 1679
[12] Godfrey S, Isgur N 1985 *Phys. Rev. D* **32** 189
[13] Godfrey S 1985 *Phys. Rev. D* **31** 2375
[14] Capstick S, Isgur N 1986 *Phys. Rev. D* **34** 2809
[15] Wong C Y, Swanson E S, Barnes T 2000 *Phys. Rev. C* **62** 045201
[16] Wang L, Ping J L 2007 *Chin. Phys. Lett.* **24** 1195
[17] Zhang W N, Wong C Y 2003 *Phys. Rev. C* **68** 035211
[18] Wong C Y 2004 *Phys. Rev. C* **69** 055202
[19] Jirimutu, Wang H J, Zhang W N, Wong C Y 2009 *Int. J. Mod. Phys. E* **18** 729
[20] Jirimutu, Zhang W N 2009 *Eur. Phys. J. A* **42** 63
[21] Jirimutu, Aodeng, Bao tmurbagan 2016 *Acta Phys. Sin.* **65** 041201 (in Chinese) [吉日木图, 敖登, 包特木尔巴根 2016 物理学报 **65** 041201]
[22] Crater H, Vanalstine P 2004 *Phys. Rev. D* **70** 034026
[23] Landau L D, Lifshitz E M 1958 *Quantum Mechanics* (London: Pergamon Press)
[24] Vijande J, Fernandez F, Valcarce A 2005 *J. Phys. G* **31** 481

Construction of Breit quark potential in coordinate space and mass splits of meson and quarkonium*

Jirimutu Aodeng† Xue Kang‡

(*College of Computer and Information, Inner Mongolia Medical University, Hohehot 010110, China*)

(Received 29 September 2017; revised manuscript received 11 March 2018)

Abstract

Construction of a valid interaction potential function between quarks is a crucial issue in hadronic physics and also one of the frontier issues. Non-relativistic Breit potential is a common model to describe the interaction between quarks. It is used to successfully calculate the bound states of quarks and quark scatterings. These spur people to improve it. As is well known, the full Breit potential function, which includes the color-Coulomb term, the mass term, the orbit-orbit interaction term, the spin-spin interaction term, the spin-orbit interaction term, the tensor force term, and the constant term, contains singularity factors. How to eliminate the singularity factors is the most urgent task for developing Breit potential model. In this paper, we carry out a replacement method to eliminate the singularity factors in the full Breit quark potential function in coordinate space. Except for the color-Coulomb term and the constant term, remaining terms in the Breit quark potential function are all reconstructed. The replacement of $\delta(\boldsymbol{r}) \to \mu^3\,\mathrm{e}^{-\mu r}/8\pi$ is applied to the mass term and the spin-spin interaction term. The replacement of $1/r \to (1-\mathrm{e}^{-\mu r})/r$ is applied to the obit-obit interaction term. The replacement of $1/r^3 \to \left[1-(1+\mu r)\,\mathrm{e}^{-\mu r}\right]/r^3$ is applied to the spin-obit interaction term and the tensor force term. We calculate mass splits of heavy mesons and quarkonium species by using the reconstructed potential function and test the validity of the reconstructed potential function. The screening mass used in the calculations is not a simple constant but a variable relating to the quark mass m_i and m_j. It is found that the simple screening-mass expression cannot give the accurate value of B-meson mass, although it may give the mass splits of light mesons. However, the calculated results of the mass splits of the light mesons π-ρ, the heavy mesons, η_c-J/ψ, η_b-ϒ(1s), χ_{c0}-χ_{c1}–χ_{c2}, etc., are highly consistent with the experimental data only when the screening mass is taken to be the Laurent series, $\mu = c_{-3}(\mu_a+0.512)^{-3}+c_{-2}(\mu_a+0.512)^{-2}+c_{-1}(\mu_a+0.512)^{-1}+c_0+c_1(\mu_a+0.512)$ with respect to the average quark mass $\mu_a = (m_i+m_j)/2$. In this case, the mass accuracy of other mesons, especially the six D mesons, is improved significantly. Our calculated results indicate that a valid quark potential model, which gives not only the mass values of light mesons accurately but also the mass splits of heavy quarkonium species, is thus constructed in this paper.

Keywords: nonrelativistic quark potential model, construction of potential function, construction of screening mass, mass splitting

PACS: 12.39.Jh, 12.39.–x, 14.40.–n, 02.90.+p **DOI:** 10.7498/aps.67.20172155

* Project supported by the Natural Science Foundation of Inner Mongolia Autonomous Region, China (Grant No. 2011MS0116) and the Doctoral Initial Funding of Inner Mongolia Medical University, China (Grant No. NY2010BQ004).

† Corresponding author. E-mail: aodeng661@163.com

‡ Corresponding author. E-mail: 469654001@qq.com