物理学报 Acta Physica Sinica
Chinese Physical Society
Institute of Physics, CAS

弯曲时空中转动对自旋流的影响

吕腾博 张沛 武瑞涛 王小力

Rotation effect on spin current in curved space-time

Lü Teng-Bo Zhang Pei Wu Rui-Tao Wang Xiao-Li

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 68, 120401 (2019) DOI: 10.7498/aps.68.20182260
在线阅读 View online: https://doi.org/10.7498/aps.68.20182260
当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn

物理学报 Acta Phys. Sin. Vol. 68, No. 12 (2019) 120401

弯曲时空中转动对自旋流的影响*

吕腾博[1)] 张沛[1)] 武瑞涛[2)] 王小力[1)†]

1) (西安交通大学理学院, 陕西省量子信息与光电量子器件重点实验室, 西安 710049)

2) (陕西理工大学物理与电信工程学院物理系, 汉中 723001)

(2018 年 12 月 24 日收到; 2019 年 4 月 14 日收到修改稿)

自旋轨道相互作用和自旋霍尔效应一直受到广泛关注, 不仅在理论上进行了预测, 而且也在实验中实现了自旋电流的产生. 本文研究弯曲时空中转动对自旋流和自旋霍尔电导率的影响. 非平庸几何可以改变自旋和轨道之间的相互作用, 利用推广的 Drude 模型, 计算了自旋依赖的作用力, 并得到了非平庸几何对该力的修正. 当计入转动效应时, 给出了一般性的 Dirac 方程, 并利用 Foldy-Wouthuysen 变换得到了非相对论近似下的哈密顿量. 在此基础上, 计算了自旋流和自旋霍尔电导率. 在弯曲时空中由于转动的效应而导致偏振矢量的变形, 自旋流的大小和方向都会因为转动而发生改变, 因而自旋霍尔电导率也会随之得到修正. 时空几何的非平庸性导致了自旋流有各向异性的特点. 研究结论可以用于分析量子霍尔系统中带电旋量粒子的电磁动力学问题, 也可以对晶体中的缺陷问题提供重要的理论帮助. 对于光子系统来说, 研究结果对于研究光子自旋霍尔效应在静态引力场中的行为具有一定的参考价值, 对于实验上利用光子自旋霍尔效应来实现弯曲时空提供一定的理论支持.

关键词: 自旋霍尔效应, 弯曲时空, 宇宙弦

PACS: 04.62.+v, 72.15.Gd, 72.10.Bg, 03.50.De **DOI:** 10.7498/aps.68.20182260

1 引 言

近几年来, 自旋电子学和自旋轨道相互作用的研究受到广泛关注, 因为它是电子自旋流、自旋霍尔效应或自旋电子器件的理论基础[1−35]. 自旋电子学已经发展成为一个跨基础科学、材料科学与工业生产的重要领域. 自旋霍尔效应是由 Dyakonov 和 Perel[9,10] 在 1971 年预言的. 根据他们的研究理论预测, 自旋电子学的应用已取得了相当大的进步, 已经在半导体和金属中实验观察到了这种效应[30−32]. 在该研究领域, 人们研究了自旋霍尔效应以及它在新型二维材料和光场中的行为[11,25]. 人们还研究了电子自旋的量子传输特性及其在技术中的应用[33−35]. 一般来说, 自旋流是不守恒的, 由于它是非保守量, 因此产生和控制自旋电流是一项具有挑战性的任务. 自旋霍尔效应是由于电子自旋而引起的异常霍尔效应的一种形式, 当存在外加电场时, 自旋方向不同的电子由于各自形成的磁场方向相反, 会各自向相反的两边堆积. 也就是说, 没有外磁场时也能产生一个与外加电场垂直的自旋向上的电子流和自旋向下的电子流, 二者构成一个自旋磁矩的流动, 但是并没有净的电荷流动, 称之为自旋流. 与经典霍尔效应相似, 在自旋霍尔效应中样品两侧也会出现自旋的累积, 相关的实验已经给出了理论预测的现象[1,12−14]. 不仅如此, 自旋轨道相互作用使人们开辟了操纵非磁性材料中的电子自旋的可能性[3], 由此引起了理论和实验研究者的

* 国家自然科学基金 (批准号: 91736104, 11374008, 11534008, 61172040) 和陕西省自然科学基金 (批准号: 2017JM6011) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: xlwang@mail.xjtu.edu.cn

广泛兴趣. Matsuo 等讨论了晶体中电子的角动量和机械角动量之间的角动量转换[15,20], 并讨论了在加速系统中和有杂质散射存在时的机械操作对自旋电流的影响[22−24]. Kobayashi 等[25] 讨论了利用表面声波注入产生自旋电流. 文献 [28] 首次通过推广的 Drude 模型研究了非对易空间上的自旋霍尔效应, 并且发现在非对易空间中, 样品边缘会发生自旋态的变形累积, 自旋霍尔电导率在不同的方向上会取不同的值, 主要取决于非对易参数. 文献 [29] 讨论了宇宙弦时空中旋转框架的非惯性效应对狄拉克振子的影响, 并证明了非惯性效应和宇宙弦时空中的拓扑结构限制了粒子运动的区域. 文献 [8] 讨论了加速系下惯性效应对狄拉克电子、自旋霍尔效应和动量空间 Berry 曲率的影响. 这些工作都为带电旋量粒子的电磁动力学理论做出了贡献. 不仅如此, 光子的自旋轨道相互作用和霍尔效应也成为了近期研究的热点问题. 文献 [36] 详细介绍了光的自旋霍尔效应的研究进展, 光的自旋霍尔效应为我们展现了探索纳米结构物理性质的独特魅力, 为控制光子自旋态和开发新型光子霍尔元件提供了捷径, 而且实验上已经实现了光子自旋霍尔效应用于量子测量等[37−43].

本文的重点在于给出了非平庸几何可以改变自旋和轨道之间相互作用的结论, 能够对弯曲时空旋量粒子电磁动力学问题的研究提供一定的理论支持, 同时也可以对晶体中缺陷问题的研究提供重要的理论帮助. 本文利用推广的 Drude 模型, 研究了宇宙弦时空中在转动坐标系下非惯性效应对自旋流的影响. 本文的内容安排如下: 第 2 节回顾了弯曲时空中的自旋动力学; 第 3 节讨论了弯曲时空中转动对自旋电流和自旋霍尔电导率的影响, 通过计算表明, 在弯曲时空中由于转动的效应而导致偏振矢量的变形, 自旋流的大小和方向都会因为转动而发生改变, 因而自旋霍尔电导率也会随之得到修正; 第 4 节给出结论.

2 弯曲时空的自旋动力学

本文回顾了弯曲时空中自旋为 1/2 的粒子在电磁场中的电磁动力学. 在这种情况下, 狄拉克方程扩展为如下一般的协变形式:

$$[\tilde{\gamma}^{\mu}(x)(p_{\mu}-qA_{\mu}(x)-\varGamma_{\mu}(x))+mc^2]\psi(x)=0, \quad (1)$$

其中 q 为电荷; m 为质量; c 为光速; p_{μ} 为四维形式的动量; A_{μ} 为电磁场的标准电势; $\varGamma_{\mu}(x)$ 为旋量联络; $\tilde{\gamma}^{\mu}(x)$ 为弯曲时空中坐标依赖克利福德代数的元素, 并且满足 $\{\tilde{\gamma}^{\mu}(x),\tilde{\gamma}^{\nu}(x)\}=2g^{\mu\nu}(x)$, 这里 $g^{\mu\nu}(x)$ 是存在拓扑缺陷时的时空度规, 指标 μ,ν 表示时空指数. 一般时空的线元由下式给出:

$$\mathrm{d}s^2=g^{\mu\nu}(x)\mathrm{d}x_{\mu}\mathrm{d}x_{\nu}. \quad (2)$$

度规也可以写成如下形式:

$$g^{\mu\nu}(x)=e^a_{\mu}(x)e^b_{\nu}(x)\boldsymbol{\eta}_{ab}, \quad (3)$$

其中 e^a_{μ} 叫作四元组, 且满足关系 $e^a_{\mu}e^{\mu}_b=\delta^a_b$ 和 $e^{\mu}_a e^a_{\nu}=\delta^{\mu}_{\nu}$; $\boldsymbol{\eta}_{ab}$ 是闵科夫斯基张量; 指数 $a,\ b,\ c\ =0,1,2,3$ 表示本地坐标系. 旋量 $\varGamma_{\mu}$ 的定义为

$$\varGamma_{\mu}=\frac{1}{8}\omega_{\mu ab}(x)[\gamma^a,\gamma^b]=\frac{1}{8}e_{a\nu}\nabla_{\mu}e^{\nu}_b[\gamma^a,\gamma^b], \quad (4)$$

这里 $\nabla_{\mu}=\partial_{\mu}+\varGamma_{\mu}$ 是由时空背景几何决定的协变导数; $\omega_{\mu ab}(x)$ 有如下关系: $\omega_{ab}(x)=\omega_{\mu ab}(x)\,\mathrm{d}x^{\mu}$. 根据 (1) 式, 可以得到狄拉克哈密顿函数,

$$H_{\mathrm{D}}=c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi}+qA_0+\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\varGamma}+c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\varOmega}\cdot\boldsymbol{\pi}+\beta mc^2+\boldsymbol{\varGamma}_0, \quad (5)$$

其中 $\beta=\gamma_0$, $\alpha_i=\gamma_0\gamma_i$, $\boldsymbol{\pi}=\boldsymbol{p}-q\boldsymbol{A}/c$ 是物质粒子的机械动量. 为了方便计算, 本文引入旋转矩阵 $\boldsymbol{\varOmega}$,

$$\boldsymbol{\varOmega}^a_{\mu}(x)=e^a_{\mu}(x)-\delta^a_{\mu},\ \boldsymbol{\varOmega}^{\mu}_a(x)=e^{\mu}_a(x)-\delta^{\mu}_a. \quad (6)$$

此外, (5) 式中的二阶项 $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\varOmega}\cdot\boldsymbol{\pi}$ 已被忽略. 与普通狄拉克哈密顿算子相比, 还有三个附加项. $\varGamma_0$ 可看作电势, 但在本文中 $\varGamma_0=0$, 对本文研究不产生影响. $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\varGamma}$ 直接来自类似最小相互作用的自旋联络, 并且表现得像一个隐藏动量, 它可以产生一个几何相位. $c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\varOmega}\cdot\boldsymbol{\pi}$ 是由时空几何结构引起, 由 $g^{\mu\nu}(x)$ 决定. 从这个意义上说, 它代表了对 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\pi}$ 之间普通内积的修正.

根据文献 [26, 27], 通过使用 Foldy-Wouthuysen (FW) 变换, 研究了在存在拓扑缺陷的情况下对旋量动力学的非相对论方法,

$$H_{\mathrm{ps}}=H_{\mathrm{k}}+H_{\mathrm{Z}}+H_{\mathrm{so}}+H_{\mathrm{d}}. \quad (7)$$

第一个项和最后一项分别是具有最小耦合类型和变形 Darwin 项修正的运动学部分. 第二、三项分别描述了塞曼和自旋轨道相互作用, 表达式分别为

$$H_{\mathrm{Z}}=-\frac{q\hbar}{2mc}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}_{\mathrm{s}}+\boldsymbol{B}_{\mathrm{m}}), \quad (8)$$

$$H_{\mathrm{so}}=\frac{q\hbar}{4m^2c^2}\boldsymbol{\sigma}\cdot[(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_{\mathrm{s}}-\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}})\times\boldsymbol{p}], \quad (9)$$

其中$\boldsymbol{\sigma}$为泡利算符; $\boldsymbol{B}_{\rm s}=(\nabla\times\boldsymbol{\Gamma})/q$和$\boldsymbol{B}_{\rm m}=c[\nabla\times(\Omega\cdot\boldsymbol{\pi})]/q$是直接由旋量$\boldsymbol{\Gamma}$产生的有效磁场, 而$\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{\pi}$是一个间接表示时空几何的项; 有效电场分别定义为$\boldsymbol{E}_{\rm s}=-\nabla\boldsymbol{\Gamma}_0/q$和$\boldsymbol{E}_{\rm m}=-\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla V$. $H_{\rm so}$中的第一项描述了普通的自旋轨道相互作用, 并且在参考文献 [16—18] 中讨论了可以产生非平庸的自旋电流. 接下来的两项与塞曼耦合$H_{\rm Z}$中的附加项有关, 它们描述了有效的自旋轨道相互作用, 预计会产生额外的自旋电流, 这些将在以后再进行深入讨论. 本文只讨论与自旋轨道相互作用相关的哈密顿量

$$H=\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}+qV(\boldsymbol{r})+\frac{q\hbar}{4m^2c^2}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{E}'\times\boldsymbol{p}),\tag{10}$$

其中$\boldsymbol{E}'=-(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Omega})\cdot\nabla V(\boldsymbol{r})$表示由于时空的非平凡几何形状而引起的总电势$V(\boldsymbol{r})$的变形. (10) 式是弯曲时空中自旋轨道相互作用的一般形式.

为了讨论这种相互作用的动力学结果, 本文假定以一般的海森伯方程为序是正确的. 然后, 利用海森伯代数的正则共轭变量$\boldsymbol{r}$和$\boldsymbol{p}$, 有

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\frac{\boldsymbol{p}}{m}+\frac{q\hbar}{4m^2c^2}\boldsymbol{\sigma}\times\nabla V-\frac{q\hbar}{4m^2c^2}\boldsymbol{\sigma}\times[\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla V],\tag{11}$$

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{p}}=&-q\nabla V(\boldsymbol{r})-\frac{q\hbar}{4m^2c^2}\nabla[(\boldsymbol{\sigma}\times\nabla V)\cdot\boldsymbol{p}]\\&+\frac{q\hbar}{4m^2c^2}\nabla[(\boldsymbol{\sigma}\times(\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla V)\cdot\boldsymbol{p}],\end{aligned}\tag{12}$$

(11) 式中的第三项是弯曲时空中电子磁矩与有效电场的叉积. 于是有

$$\boldsymbol{p}=m\dot{\boldsymbol{r}}-\frac{q\hbar}{4mc^2}\boldsymbol{\sigma}\times\nabla V+\frac{q\hbar}{4mc^2}\boldsymbol{\sigma}\times(\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla V),\tag{13}$$

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{p}}=&m\ddot{\boldsymbol{r}}-\frac{q\hbar}{4mc^2}(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\nabla)(\boldsymbol{\sigma}\times\nabla)\\&+\frac{q\hbar}{4mc^2}(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\nabla)[\boldsymbol{\sigma}\times(\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla V)].\end{aligned}\tag{14}$$

将 (13) 和 (14) 式代入 (12) 式中, 可以得到具有牛顿第二定律形式的变量$\boldsymbol{r}$的电荷载体动力学方程:

$$\begin{aligned}m\ddot{\boldsymbol{r}}&=\boldsymbol{F}'(q,\boldsymbol{\sigma})=\boldsymbol{F}(q)+\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{\sigma})\\&=\boldsymbol{F}(q)+\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\sigma})+\boldsymbol{F}_{\rm cs}(\boldsymbol{\sigma}),\end{aligned}\tag{15}$$

这里一般的洛伦兹力$\boldsymbol{F}(q)$有一个修正, 它取决于自由度$\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{\sigma})$. 它由两部分组成: 由一般的自旋轨道相互作用产生的$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\sigma})$,

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\sigma})=-\frac{q\hbar}{4mc^2}\dot{\boldsymbol{r}}\times[\nabla\times(\boldsymbol{\sigma}\times\nabla V)]-e\nabla V;\tag{16}$$

由于存在拓扑缺陷而导致的$\boldsymbol{F}_{\rm cs}(\boldsymbol{\sigma})$,

$$\boldsymbol{F}_{\rm cs}(\boldsymbol{\sigma})=\frac{q\hbar}{4mc^2}\dot{\boldsymbol{r}}\times[\nabla\times(\boldsymbol{\sigma}\times(\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla V))].\tag{17}$$

这里忽略了与$1/c^4$成比例的项. 更有趣的是, (15) 式中总的力相当于洛伦兹力

$$\boldsymbol{F}'(q,\boldsymbol{\sigma})=\frac{q}{c}[\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\sigma})]-q\nabla V(\boldsymbol{r}).\tag{18}$$

电荷为q粒子受电场$\boldsymbol{E}=-\nabla V(\boldsymbol{r})$和磁场的作用, 磁场为

$$\boldsymbol{B}'(\boldsymbol{\sigma})=\nabla\times\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{\sigma})=\nabla\times[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\sigma})+\boldsymbol{A}_{\rm cs}(\boldsymbol{\sigma})],\tag{19}$$

其中

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\sigma})=-\frac{\hbar}{4mc}\boldsymbol{\sigma}\times\nabla V(\boldsymbol{r}),\tag{20}$$

$$\boldsymbol{A}_{\rm cs}(\boldsymbol{\sigma})=\frac{\hbar}{4mc}\boldsymbol{\sigma}\times[\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla V].\tag{21}$$

由上述分析, 哈密顿量可以写成如下形式:

$$H=\frac{1}{2m}\Big[\boldsymbol{p}-\frac{q}{c}\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{\sigma})\Big]^2.\tag{22}$$

通过求解 (15) 式, 可以得到自旋电流的普遍表达式. 此方案是利用推广的 Drude 模型 [16,29], 将自旋轨道相互作用纳入电荷载体的动力学中. 该模型能够得到独立于散射机制的自旋霍尔电导的通用表达式, 可以清楚地看到拓扑缺陷对自旋电流和自旋霍尔电导的影响.

3 转动效应影响的自旋流和自旋霍尔电导率

先介绍与宇宙弦时空相对应的广义相对论背景. 宇宙弦时空中的线元由下式给出:

$${\rm d}s^2=-{\rm d}T^2+{\rm d}R^2+\eta^2R^2{\rm d}\varPhi^2+{\rm d}Z^2,\tag{23}$$

参数η可定义为$\eta=1-4\lambda G/c^2$, 其中λ是宇宙弦的线性质量密度. 现在做一个坐标变换, $T=t$, $R=\rho$, $\varPhi=\varphi+\omega t$和$Z=z$, 其中ω是转动框架的恒定角速度. 由此, (23) 式变为

$$\begin{aligned}{\rm d}s^2=&-(1-\omega^2\eta^2\rho^2){\rm d}t^2+2\omega\eta^2\rho^2{\rm d}\varphi{\rm d}t\\&+{\rm d}\rho^2+\eta^2\rho^2{\rm d}\varphi^2+{\rm d}z^2.\end{aligned}\tag{24}$$

注意到 (24) 式是在范围为ρ的径向坐标值内定义的, 其中

$$0<\rho<\frac{1}{\omega\eta}.\tag{25}$$

(3) 式中定义的四元组在这里应该为

$$e^a_\mu(x)=\begin{pmatrix}\sqrt{1-\beta^2} & 0 & -\dfrac{\omega\eta^2\rho^2}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{\eta\rho}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ e^\mu_a(x)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & \dfrac{\omega\eta\rho}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{\sqrt{1-\beta^2}}{\eta\rho} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\tag{26}$$

其中, 定义 $\beta=\omega\eta\rho$, $a=(t,x,y,z)$, $\mu=(t,\rho,\varphi,z)$. 当取极限 $\eta\to1$ 中恢复平滑时空. 由 (6) 式能够得到相应的旋转矩阵 $\boldsymbol{\Omega}^a_b$ 是

$$\boldsymbol{\Omega}^a_b=\begin{pmatrix}\sqrt{1-\beta^2}-1 & 0 & -\dfrac{\beta\eta\cos\varphi}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{\eta}{\sqrt{1-\beta^2}}-1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.\tag{27}$$

第 2 节中回顾了一般弯曲时空中的自旋动力学问题. 通过 (15) 式, 可以看到方程的通解是一个与自旋有关的力. 在本节中求解该方程, 并讨论它的含义. 本文采用与散射机制无关的推广的 Drude 模型来求解这个方程. 值得注意的是总电势 $V(\boldsymbol{r})$ 是外部电势 $V_{\rm e}(\boldsymbol{r})$ 和晶格电势 $V_{\rm l}(\boldsymbol{r})$ 的总和. 而且, 速度的弛豫时间 τ 由实验可以给出. 本文假设直到一级近似, 电荷载流子的速度弛豫时间 τ 与自旋极化无关. 然后, 利用微扰的方法求解方程. (15) 式可以写成下面的形式:

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\dot{\boldsymbol{r}}_0+\dot{\boldsymbol{r}}_1,\tag{28}$$

其中 $\boldsymbol{r}_0$ 是自旋无关部分的解,

$$\langle\boldsymbol{r}_0\rangle=\frac{q\tau}{m}\boldsymbol{E},\tag{29}$$

$\boldsymbol{r}_1$ 是自旋和转动有关的解. 对于一个恒定的外电场 $\boldsymbol{E}=-\nabla V_{\rm e}(\boldsymbol{r})$, 可以得到 $\boldsymbol{r}_1$ 的微扰解,

$$\begin{aligned}\langle\boldsymbol{r}_1\rangle=&-\frac{\hbar q^2\tau^2}{4m^3c^2}\boldsymbol{E}\\&\times\langle\nabla\times\{\boldsymbol{\sigma}\times[(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Omega})\cdot\nabla V]\}\rangle.\end{aligned}\tag{30}$$

对于立方晶格, 所允许的唯一对称不变量为

$$\left\langle\frac{\partial^2V_l(\boldsymbol{r})}{\partial r_i\partial r_j}\right\rangle=\chi\delta_{ij},\tag{31}$$

在文献 [16] 中, 已经确定了常数 χ. 本文计算中, (30) 式包含了静电晶体电势的体积平均值 $\partial_i\partial_jV_l(\boldsymbol{r})$ 和矩阵的导数 $\boldsymbol{\Omega}_{ik}$. 由于观察到真实时空没有偏离平滑时空, 忽略了包含 $\boldsymbol{\Omega}_{ik}$ 导数部分的贡献, 得到

$$\langle\boldsymbol{r}_1\rangle=\frac{\hbar q^2\tau^2\chi}{2m^3c^2}\left[\left(1-\frac{1}{2}{\rm Tr}\{\boldsymbol{\Omega}\}\right)\boldsymbol{\sigma}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{\sigma})\right]\times\boldsymbol{E}.\tag{32}$$

由于 (27) 式中矩阵 $\boldsymbol{\Omega}^a_b$ 的迹不为零, 它能够使得自旋流发生变化. 把 (27) 式代入 (32) 式, 得到速度的修正为

$$\langle\dot{\boldsymbol{r}}_1\rangle=\frac{\hbar q^2\tau^2\chi}{2m^3c^2}\left\{\left[\left(2-\frac{1-\beta^2+\eta}{2\sqrt{1-\beta^2}}\right)\boldsymbol{I}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}\right]\cdot\boldsymbol{\sigma}\right\}\times\boldsymbol{E}.\tag{33}$$

下面仅讨论坐标架转速很小的情况, 即 $\omega\to0$ 时, $\beta\to0$, 忽略 β 的高阶项, (33) 式可近似为

$$\begin{aligned}\langle\dot{\boldsymbol{r}}_1\rangle=&\frac{\hbar q^2\tau^2\chi\left[4\sqrt{1-\beta^2}-(1+\eta)\right]}{4m^3c^2\sqrt{1-\beta^2}}\\&\times\left\{\left[\boldsymbol{I}+\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{4\sqrt{1-\beta^2}-(1+\eta)}\boldsymbol{\Omega}\right]\cdot\boldsymbol{\sigma}\right\}\times\boldsymbol{E}.\end{aligned}\tag{34}$$

对于密度矩阵描述的极化电荷载体

$$\rho^{\rm s}=\frac{1}{2}\rho(1+\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\sigma}),\tag{35}$$

其中 ρ 是电流的电荷总浓度, 而 $\boldsymbol{\lambda}$ 是电子流体的自旋极化矢量. 自旋流可以通过将速度与密度矩阵进行卷积得到, 因此有

$$\boldsymbol{j}^{\rm s}(\boldsymbol{\sigma},\eta)=\sigma^{\rm s}_{\rm H}[\boldsymbol{\lambda}(\eta)\times\boldsymbol{E}].\tag{36}$$

自旋霍尔电导率由下式给出:

$$\begin{aligned}\sigma^{\rm s}_{\rm H}(\eta)=&\frac{\hbar q^2\tau^2\chi\left[4\sqrt{1-\beta^2}-(1+\eta)\right]}{4m^3c^2\sqrt{1-\beta^2}}\\\approx&\left(2+\frac{2\lambda G}{c^2\sqrt{1-\omega^2\rho^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-\omega^2\rho^2}}\right)\frac{\hbar q^2\tau^2\chi}{4m^3c^2},\end{aligned}\tag{37}$$

并且变形的偏振矢量为

$$\boldsymbol{\lambda}(\eta)=\left[\boldsymbol{I}+\frac{\sqrt{1-(\omega\eta\rho)^2}}{4\sqrt{1-(\omega\eta\rho)^2}-(1+\eta)}\boldsymbol{\Omega}\right]\cdot\boldsymbol{\lambda}.\tag{38}$$

对于偏振矢量的参数,

$$\boldsymbol{\lambda}=(\sin\bar\theta\cos\bar\phi,\sin\bar\theta\sin\bar\phi,\cos\bar\theta),\tag{39}$$

其中 $\bar\theta$ 和 $\bar\phi$ 是方向夹角. 得到

$$\lambda_x(\eta) = \sin\bar{\theta}\cos\bar{\phi}, \tag{40}$$

$$\lambda_y(\eta) = \frac{3\sqrt{1-(\omega\eta\rho)^2}-1}{4\sqrt{1-(\omega\eta\rho)^2}-(1+\eta)}\sin\bar{\theta}\sin\bar{\phi}, \tag{41}$$

$$\lambda_z(\eta) = \cos\bar{\theta}. \tag{42}$$

从以上分析可以看到, 由于存在转动惯性效应, 不仅使得自旋电流的大小和方向发生了变化, 而且自旋霍尔电导率也得到了修正, 同时偏振矢量也发生了变形, 对于实验灵敏度 $\delta\theta\sim10^{-3}$来说, 可以在纳米尺度系统中研究 10^{-12} 量级上的物理效应. 文献 [23, 29] 中给出了宇宙弦的存在对自旋霍尔电导率有重要贡献, 其数量级为 $\lambda G/c^2$. 与文献 [16] 中的普通结果相比较, 由于惯性效应使得自旋霍尔电导率有一个附加项, 见 (37) 式, 使得自旋霍尔电导率得到了有效修正.

4 结 论

量子自旋霍尔效应的本质是自旋轨道相互作用. 自旋动力学由 Pauli-Schrödinger 哈密顿量给出, 从中可得到带电粒子的运动方程. Pauli-Schrödinger 哈密顿量利用 Foldy-Wouthuysen 变换可以得到, 该变换给出了自旋为 1/2 的非相对论粒子在电磁场中运动的信息. 在存在拓扑缺陷情况下, 可以通过 (7) 式看到哈密顿量会出现一些一般结论没有的附加项, 包括塞曼耦合与自旋轨道耦合的修正等, 这些附加项描述了在平滑时空中自旋和电磁场的有效相互作用. 这些相互作用的结果是通过位置算符在量子力学中的牛顿方程的比喻得到. 此外, 除了普通的洛伦兹力以外, 还存在类似洛伦兹力的力, 这个力就是自旋电流和自旋霍尔电导率存在修正的原因. 基于推广的 Drude 模型, 本文将运动方程通过微扰方法求解, 与普通结果相比, 弯曲时空中转动对自旋电流和自旋霍尔电导率都产生了影响. 由于存在惯性效应, 宇宙弦产生的力会使得自旋电流的大小和方向都会发生改变, 见 (37) 和 (41) 式, 相比参考文献 [16] 中的普通结果, 自旋霍尔电导率由于转动产生了一个附加项, 对于实验灵敏度 $\delta\theta\sim10^{-3}$来说, 本文可在纳米尺度系统中研究 10^{-12} 量级上的物理效应. 本文采用的是不依赖于模型的一般方法, 所以该结果能够被用于量子霍尔系统中带电旋量粒子的电磁动力学问题. 由于弯曲时空理论还可以分析晶体中的缺陷问题, 所以本文结论也可以提供帮助. 本文结论还可以推广到光子系统中, 考虑到光子的自旋, 由于光子的自旋轨道耦合, 会在非均匀介质中产生分光现象, 就造成了光子的自旋霍尔效应. 本文讨论对于研究光子自旋霍尔效应在静态引力场中的行为有一定的参考价值, 同时对于光子自旋霍尔效应的应用和利用光学芯片模拟弯曲时空、光子操控和精密测量方面, 文献 [37—45] 已经在实验上成功实现, 希望本文讨论能够给予一定的理论支持.

参考文献

[1] Hirsch J E 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 1834
[2] Sinova J, Valenzuela S O, Wunderlich J, Back C H, Jungwirth T 2015 *Rev. Mod. Phys.* **87** 1213
[3] Culcer D, Sinova J, Sinitsyn N A, Jungwirth T, MacDonald A H, Niu Q 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 046602
[4] Qi X L, Zhang S C 2010 *Phys. Today* **63** 33
[5] Nir S, Sergey N, Vladimir K, Erez H 2012 *Nano Lett.* **12** 1620
[6] Zhang S C, Bernevig B A, Hughes T 2006 *Science* **314** 1757
[7] Chowdhury D, Basu B 2014 *Physical B* **448** 155
[8] Chowdhury D, Basu B 2013 *Ann. Phys.* **329** 166
[9] Dyakonov M I, Perel V I 1971 *JETP Lett.* **13** 467
[10] Dyakonov M I, Perel V I 1971 *Phys. Lett. A* **35** 459
[11] Martin G, Dmitry V F, Peter Z, Ingrid M 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 186403
[12] Chazalviel J N 1975 *Phys. Rev. B* **11** 3918
[13] Kato Y K, Myers R C, Gossard A C, Awschalom D D 2004 *Science* **306** 1910
[14] Kato Y K, Myers R C, Gossard A C, Awschalom D D 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 176601
[15] Matsuo M, Ieda J, Saitoh E, Maekawa S 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 076601
[16] Eugene M C 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 206601
[17] Vilenkin A 1985 *Phys. Rep.* **121** 263
[18] Dayi O F, Elbistan M 2009 *Phys. Lett. A* **373** 1314
[19] Knut B, Claudio F, Nascimento J R 2009 *Eur. Phys. J. C* **60** 501
[20] Matsuo M, Ieda J, Harii K, Saitoh E, Maekawa S 2013 *Phys. Rev. B* **87** 180402(R)
[21] Matsuo M, Ieda J, Maekawa S, Saitoh E 2013 *J. Korean Phys. Soc.* **62** 1404
[22] Matsuo M, Ieda J, Saitoh E, Maekawa S 2011 *Appl. Phys. Lett.* **98** 242501
[23] Matsuo M, Ieda J, Saitoh E, Maekawa S 2011 *Phys. Rev. B* **84** 104410
[24] Matsuo M, Ohnuma Y, Kato T, Maekawa S 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 037201
[25] Kobayashi D, Yoshikawa T, Matsuo M, Iguchi R, Maekawa S, Saitoh E, Nozaki Y 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 077202
[26] Foldy L L, Wouthuysen S A 1950 *Phys. Rev.* **78** 29
[27] Tani S 1951 *Prog. Theor. Phys.* **6** 267
[28] Ma K, Dulat S 2011 *Phys. Rev. A* **84** 012104
[29] Bakke K 2013 *Gen. Relat. Gravit.* **45** 1847
[30] Kountouriotis K, Barreda J L, Keiper T D, Zhang M, Xiong P 2018 *Nano Lett.* **18** 4386

[31] Albrecht J D, Smith D L 2003 *Phys. Rev. B* **68** 035340
[32] Vutukuri S, Chshiev M, Butler W H 2006 *J. Appl. Phys.* **99** 08K302
[33] Schliemann J, Loss D 2004 *Phys. Rev. B* **69** 165315
[34] Slachter A, Bakker F L, van Wees B J 2011 *Phys. Rev. B* **84** 174408
[35] Ralph D C, Stiles M D 2008 *J. Magn. Magn. Mater.* **320** 1190
[36] Ling X, Zhou X, Huang K, Liu Y, Qiu C, Luo H, Wen S 2017 *Rep. Prog. Phys.* **80** 066401
[37] Onoda M, Murakami S, Nagaosa N 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 083901
[38] Hosten O, Kwiat P 2008 *Science* **319** 787
[39] Resch K J 2008 *Science* **319** 733
[40] Zhou X, Luo H, Wen S 2014 *Appl. Phys. Lett.* **104** 051130
[41] Luo H, Wen S, Shu W, Tang Z, Zou Y, Fan D 2009 *Phys. Rev. A* **80** 043810
[42] Luo H, Ling X, Zhou X, Shu W, Wen S, Fan D 2011 *Phys. Rev. A* **84** 033801
[43] Bliokh K Y, Bliokh K P 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 073903
[44] Xiao S, Zhong F, Liu H, Zhu S, Li J 2015 *Nature Commun.* **6** 8360
[45] Zhong F, Li J, Liu H, Zhu S 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 243901

Rotation effect on spin current in curved space-time*

Lü Teng-Bo 1) Zhang Pei 1) Wu Rui-Tao 2) Wang Xiao-Li 1)†

1) (*Shaanxi Key Laboratory for Quantum Information and Quantum Optoelectronic Devices, School of Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an* 710049, *China*)

2) (*Department of Physics Science, School of Physics and Telecommunication Engineering, Shaanxi University of Technology, Hanzhong* 723001, *China*)

(Received 24 December 2018; revised manuscript received 14 April 2019)

Abstract

The spin-orbit interaction and spin Hall effect have drawn special attention. Not only theoretical predictions have been made, but also the generation of spin currents has been achieved in experiment. In this paper, we study the spin current and the spin Hall conductivity under the influence of rotation in the curved space-time. Our work shows that the nontrivial geometries could modify the spin-orbital interaction. By using the extended Drude model, we calculate the spin-dependent force and obtain a correction to this force by non-mediocre geometry. When considering the rotation effect, the general Dirac equation is given. The Hamiltonian under the non-relativistic approximation is obtained by the Foldy-Wouthuysen transform. According to this, we calculate the spin current and spin Hall conductance. The polarization vector is deformed due to the effect of the rotation in the curved space-time. The magnitude and direction of the spin current are changed because of the correction to rotation, and the spin Hall conductivity. The nontrivial space-time geometry leads to the anisotropic nature of the spin current. Our work uses a general method that does not depend on the model, so the result can be used to analyze the electromagnetic dynamics of charged spin particles in quantum Hall systems, and it also helps to theoretically study the defects in crystals. Our results can also be extended to the optical subsystem. Considering the spin effect of photons, based on the spin-orbit coupling of photon, a light splitting phenomenon emerges in an inhomogeneous medium, which is the spin hall effect of photon. Our discussion has a certain reference value for studying the behavior of the photonic spin Hall effect in the static gravitational field. At the same time, using the optical chips to simulate curved space-time, photon manipulation and precision measurement can give some theoretical support.

Keywords: spin Hall effect, curved space-time, cosmic string

PACS: 04.62.+v, 72.15.Gd, 72.10.Bg, 03.50.De **DOI:** 10.7498/aps.68.20182260

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 91736104, 11374008, 11534008, 61172040) and the Natural Science Foundation of Shaanxi Province, China (Grant No. 2017JM6011).

† Corresponding author. E-mail: xlwang@mail.xjtu.edu.cn