

新Chua多涡卷混沌吸引子的产生及应用

贾美美 蒋浩刚 李文静

Generation and application of novel Chua multi-scroll chaotic attractors

Jia Mei-Mei Jiang Hao-Gang Li Wen-Jing

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 68, 130503 (2019) DOI: 10.7498/aps.68.20182183

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.68.20182183>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于Julia分形的多涡卷忆阻混沌系统

Julia fractal based multi-scroll memristive chaotic system

物理学报. 2018, 67(9): 090502 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20172761>

基于忆阻器的多涡卷混沌系统及其脉冲同步控制

Memristor-based multi-scroll chaotic system and its pulse synchronization control

物理学报. 2018, 67(11): 110502 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180025>

基于原对偶状态转移算法的分数阶多涡卷混沌系统辨识

Parameter identification for fractional-order multi-scroll chaotic systems based on original dual-state transition algorithm

物理学报. 2016, 65(6): 060503 <https://doi.org/10.7498/aps.65.060503>

多平衡态下簇发振荡产生机理及吸引子结构分析

Mechanism of bursting oscillations with multiple equilibrium states and the analysis of the structures of the attractors

物理学报. 2016, 65(9): 090501 <https://doi.org/10.7498/aps.65.090501>

一种具有隐藏吸引子的分数阶混沌系统的动力学分析及有限时间同步

Dynamic analysis and finite time synchronization of a fractional-order chaotic system with hidden attractors

物理学报. 2018, 67(5): 050502 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20172354>

基于参数切换算法的混沌系统吸引子近似及其电路设计

Approximations of chaotic attractors and its circuit design based on the parameter switching algorithm

物理学报. 2015, 64(20): 200508 <https://doi.org/10.7498/aps.64.200508>

新 Chua 多涡卷混沌吸引子的产生及应用*

贾美美[†] 蒋浩刚 李文静

(内蒙古工业大学电力学院自动化系, 呼和浩特 010080)

(2018 年 12 月 12 日收到; 2019 年 4 月 24 日收到修改稿)

本文采用对数函数序列构造了一个新 Chua 多涡卷混沌系统, 分析了该系统的非线性动力学行为, 主要包括对称性、不变性、平衡点、最大李雅普诺夫指数等. 然后, 设计递归反步控制器控制 Chua 多涡卷混沌系统中的混沌行为. 最后, 利用 Chua 多涡卷混沌系统检测了多频微弱周期信号. 结果表明, 对数函数序列与新 Chua 双涡卷混沌系统相结合能够产生丰富的 Chua 多涡卷混沌吸引子. 产生机制为指标 2 的鞍焦平衡点用于产生涡卷, 指标 1 的鞍焦平衡点用于连接涡卷. 递归反步控制器能够将 Chua 多涡卷混沌系统控制到不动点或给定的正弦函数. Chua 多涡卷混沌系统与递归反步控制器相结合的新微弱信号检测方法能够检测出淹没在高斯噪声背景下多频微弱周期信号的各频率.

关键词: Chua 多涡卷混沌系统, 对数函数序列, 递归反步控制器, 微弱信号检测

PACS: 05.45.-a, 05.45.Gg, 05.45.Pq

DOI: 10.7498/aps.68.20182183

1 引言

1986 年, Chua 等^[1]提出了著名的 Chua 系统, 首次在混沌与非线性电路之间架起了一座桥梁, 成为了研究混沌系统的一个范例. 1993 年, Suykens 和 Vandewalle^[2]采用拟线性方法构造了 n 个双涡卷混沌系统. 为了更好地应用于语音保密通信等实际工程中, 研究人员开始致力于构造拓扑结构更为复杂和非线性动力学行为更加丰富的多涡卷混沌系统. 与传统的双涡卷混沌系统相比, 多涡卷混沌系统具有更多的涡卷密钥参数, 即数量众多的涡卷能在相空间中呈现出某个方向分布的平面或立体网格状图案, 涡卷之间具有相互嵌套的拓扑结构, 具有更为复杂的非线性动力学行为. 这种复杂性体现在混沌吸引子的相轨迹或状态变量的取值能够在多个不同的涡卷之间随机跳变. 2004 年, Lü 等^[3,4]分别采用饱和函数序列和时滞函数序列构造了多涡卷混沌吸引子. 2011 年, 陈仕必等^[5]采用多项式

和阶跃函数构造了多涡卷混沌吸引子. 2014 年, 艾星星等^[6]通过设计切换控制器实现了不同多涡卷混沌吸引子之间的复合. 2017 年, Hong 等^[7]利用多脉冲控制技术产生了一系列多涡卷混沌吸引子. 2018 年, Zhang 和 Wang^[8]采用饱和函数序列和符号函数产生了多涡卷混沌吸引子. 除此之外, 能够产生多涡卷混沌吸引子的方法还有双曲正切函数序列^[9,10]、非线性调制函数序列^[11]、阈值函数序列^[12]、忆阻器^[13-18]等. 忆阻器作为一种非线性电子元件, 可被看作混沌系统中的非线性项, 通过采用忆阻器能够产生多涡卷混沌吸引子. 在不改变电路结构的前提下, 通过改变忆阻器的强度 (即可调参数) 能够得到不同数量的涡卷^[16]. 本文采用分段非线性对数函数序列构造了一个新 Chua 多涡卷混沌系统, 通过分析其非线性动力学行为, 得到了新 Chua 多涡卷混沌吸引子的产生机制.

许多实际应用中都需要消除或抑制混沌行为, 即混沌控制. 1990 年, Ott 等^[19]提出了 OGY (Ott-Grebogi-Yorke) 混沌控制方法, 此后, 各种混沌控

* 内蒙古工业大学校基金 (批准号: ZD201520) 和内蒙古自治区自然科学基金 (批准号: 2017BS0603) 资助的课题.

[†] 通信作者. E-mail: meimeijia14@163.com

制方法不断涌现. 常见的混沌控制方法有脉冲控制法 [20,21]、外加周期微扰法 [22]、延迟反馈法 [23–25]、递归反步控制法 [26–29] 等. 脉冲控制法的控制信号是脉冲式的, 难以避免控制间隙外部噪声产生的严重干扰. 外加周期微扰法属于非反馈控制, 当系统的混沌行为消失后, 控制信号仍不为零, 通常适合在非自治系统的混沌控制中应用. 延迟反馈法在实现混沌控制时不需要确定目标轨道, 但其延迟周期难以确定. 带有递归反步控制器的非线性系统具有良好的全局稳定性、跟踪性和暂态性能. 本文基于李雅普诺夫稳定性理论和反步思想设计三个递归反步控制器, 将 Chua 多涡卷混沌系统中的混沌状态控制到不动点及期望值, 从而抑制其中的混沌行为.

由于混沌系统对初始条件的高度敏感性及对噪声的免疫性, 使得混沌理论在微弱信号检测领域具有广阔的应用前景. 1992 年, Bix 和 Pipenberg [30] 将混沌振子与复映射前馈神经网络结合检测淹没在高斯噪声中的微弱信号, 为微弱信号检测开辟了新思路. 之后, 大量学者提出了各种基于 Duffing 混沌系统或改进型 Duffing 混沌系统的微弱信号检测方法. 但基于这类混沌系统的微弱信号检测方法有一定的局限性, 主要为系统由临界混沌状态转变为大尺度周期状态的现象不明显. 当待测信号的频率远大于系统本身的频率时, 系统就会回到混沌状态, 不能保持在临界混沌状态, 以至于达不到良好的检测效果. 因此, 研究基于非 Duffing 混沌系统的微弱信号检测方法是重要的. 2010 年, 徐艳春和杨春玲 [31]、Xu 等 [32] 提出了基于 Rossler 混沌控制的强噪声背景下单频正弦信号检测方法. 2017 年, Li 和 Zhang [33] 采用两个混沌同步 Chua 系统来检测单频微弱正弦信号, 不需要跟踪相空间轨迹的改变, 只需要得到同步误差. 本文提出一种新多频微弱周期信号频率检测方法, 即利用 Chua 多涡卷混沌系统和递归反步控制器对信号的各频率进行检测. 首先, 判断 Chua 多涡卷混沌系统是否处于混沌域中的任一混沌状态 (不需要处于临界混沌状态); 其次, 采用递归反步控制器将处于混沌状态的 Chua 多涡卷混沌系统控制到不动点; 最后, 通过频谱分析检测出信号的各频率.

2 Chua 多涡卷混沌系统的产生

2.1 新 Chua 双涡卷混沌系统

在经典 Chua 系统的基础上 [1,34], 提出分段非

线性对数函数 $g(x)$, 用其产生新 Chua 双涡卷混沌系统, 见 (1) 式.

$$\begin{cases} \dot{x} = a \cdot [y - f(x)], \\ \dot{y} = x - y + z, \\ \dot{z} = -b \cdot y, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $a = 10$, $b = 16$, $f(x) = 0.5 \cdot x - 2.5 \cdot g(x)$.

对数函数 $g(x)$ 的表达式如下

$$g(x) = \begin{cases} \log \frac{e^{4x+n-1}}{n^{n-1}}, & (x < 0), \\ -\log \frac{e^{-4x+n-1}}{n^{n-1}}, & (x \geq 0), \end{cases} \quad (2)$$

其中 $n < 0$ 或 $n > 1$. 当 n 取不同值时, 对数函数 $g(x)$ 的曲线如图 1 所示. 由图 1 可知, 对数函数 $g(x)$ 关于原点奇对称, 值域为 $[-1, 1]$.

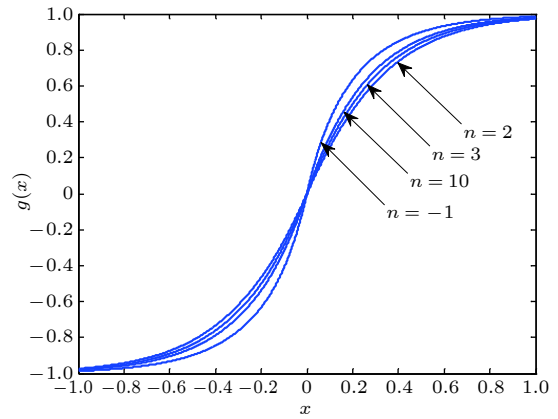


图 1 对数函数

Fig. 1. Logarithmic function.

以 $n = 2$ 为例来研究新 Chua 双涡卷混沌系统的电路图及物理意义. 新 Chua 双涡卷混沌系统的电路图如图 2 所示 (N_R 为非线性电阻), 其对应的有量纲状态方程由 (3) 式表示.

$$\begin{cases} \frac{dv_{C_1}}{dt} = \frac{1}{R \cdot C_1} \cdot (v_{C_2} - v_{C_1}) - \frac{1}{C_1} \cdot f'(v_{C_1}), \\ \frac{dv_{C_2}}{dt} = \frac{1}{R \cdot C_2} \cdot (v_{C_1} - v_{C_2}) + \frac{1}{C_2} \cdot i_L, \\ \frac{di_L}{dt} = -\frac{1}{L} \cdot v_{C_2}. \end{cases} \quad (3)$$

有量纲状态方程 [(3) 式] 与无量纲状态方程 [(1) 式] 的对应关系如下: 状态变量的对应关系为 $v_{C_1} = x$, $v_{C_2} = y$, $i_L = z$; 系统参数的对应关系为 $\frac{1}{R \cdot C_1} = \frac{1}{C_1} = a = 10$, $\frac{1}{R \cdot C_2} = \frac{1}{C_2} = 1$, $\frac{1}{L} = b = 16$; 非线性函数的对应关系为 $f'(v_{C_1}) = f(v_{C_1}) - v_{C_1} = -0.5 \cdot v_{C_1} - 2.5 \cdot g(v_{C_1})$. $f'(v_{C_1})$ 是非线性电

阻 N_R 的伏安特性. 当 $n = 2$ 时, 对数函数 $g(v_{C_1})$ 的表达式为 (4) 式.

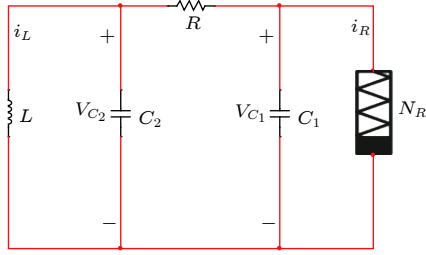


图 2 新 Chua 双涡卷混沌系统的电路图

Fig. 2. Circuit diagram of the novel Chua double-scroll chaotic system.

$$g(v_{C_1}) = \begin{cases} \log_2 \frac{e^{4 \cdot v_{C_1} + 1}}{2}, & (v_{C_1} < 0), \\ -\log_2 \frac{e^{-4 \cdot v_{C_1} + 1}}{2}, & (v_{C_1} \geq 0). \end{cases} \quad (4)$$

(4) 式可改写为

$$g(v_{C_1}) = \begin{cases} \log_2 \frac{e^{4 \cdot v_{C_1} + 1}}{2}, & (v_{C_1} < 0) \\ -\log_2 \frac{e^{-4 \cdot v_{C_1} + 1}}{2}, & (v_{C_1} \geq 0) \end{cases} \\ = \log_2 \frac{e^{-4|v_{C_1}| + 1}}{2} \cdot \text{sgn}(-v_{C_1}), \quad (5)$$

其中 $\text{sgn}(\cdot)$ 表示符号函数.

以下给出 $g(v_{C_1})$ 的电路图. 图 3—图 8 分别表示 $|v_{C_1}|$ [35], $e^{4|v_{C_1}|}$, $e^{-4|v_{C_1}|}$, $\log_2 \frac{e^{-4|v_{C_1}| + 1}}{2}$, $\text{sgn}(-v_{C_1})$, $g(v_{C_1}) = \log_2 \frac{e^{-4|v_{C_1}| + 1}}{2} \cdot \text{sgn}(-v_{C_1})$ 的电路图. 图中运算放大器的型号为 741, T_1 和 T_2 表示 NPN 型晶体管, D1 和 D2 表示二极管, 电阻 $R_0 = R_1 = R_2 = R_4 = R_5 = R_7 = R_8 = R_{11} = R_{12} = R_{13} = R_{14} = R_{15} = R_{16} = R_{17} = R_{20} = R_{21} = R_{22} = 10 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 5 \text{ k}\Omega$, $R_6 = 1040 \Omega$, $R_9 = R_{10} = R_{23} = R_{24} = 1 \text{ M}\Omega$, $R_{18} = R_{19} = 20 \text{ k}\Omega$, $R_{25} = 18.02 \Omega$, $R_{26} = R_{28} = 1 \text{ k}\Omega$, $R_{27} = 13.5 \text{ k}\Omega$, 直流电压 $V_1 = V_2 = 1 \text{ V}$.

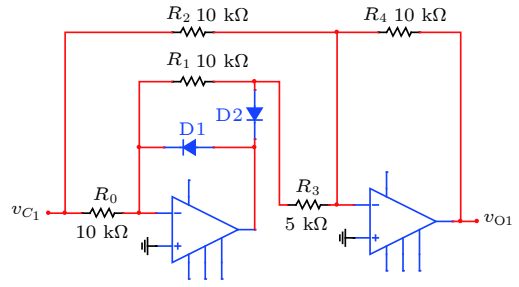


图 3 $|v_{C_1}|$ 的电路图

Fig. 3. Circuit diagram of $|v_{C_1}|$.

由图 3 可得到 (6) 式.

$$v_{O1} = |v_{C_1}|. \quad (6)$$

由图 4 可得到 (7) 式—(10) 式.

$$v_{O2} = -\frac{R_6}{R_5} v_{O1} = -4V_T |v_{C_1}|, \quad (7)$$

其中 V_T 表示晶体管 T_1 的温度电压当量, 在室温下约为 26 mV .

$$v_{O3} = -\frac{R_8}{R_7} v_{O2} = -v_{O2} = 4V_T |v_{C_1}|, \quad (8)$$

$$v_{O4} = -I_s \cdot R_{10} \cdot e^{\frac{v_{O3}}{V_T}} = -e^{4|v_{C_1}|}, \quad (9)$$

其中晶体管 T_1 的反向饱和电流 $I_s = 1 \mu\text{A}$.

$$v_{O5} = -\frac{R_{12}}{R_{11}} v_{O4} = e^{4|v_{C_1}|}. \quad (10)$$

由图 5 可得到 (11) 式、(12) 式.

$$v_{O6} = -\frac{R_{15}}{R_{13} \cdot k} \cdot \frac{V_1}{v_{O5}} = -e^{-4|v_{C_1}|}, \quad (11)$$

其中乘法器增益 $k = 1$.

$$v_{O7} = -\frac{R_{17}}{R_{16}} v_{O6} = e^{-4|v_{C_1}|}. \quad (12)$$

由图 6 可得到 (13) 式—(16) 式.

$$v_{O8} = -\frac{R_{20}}{R_{18}} v_{O7} - \frac{R_{20}}{R_{19}} \cdot V_2 = -\frac{1}{2} (e^{-4|v_{C_1}|} + 1), \quad (13)$$

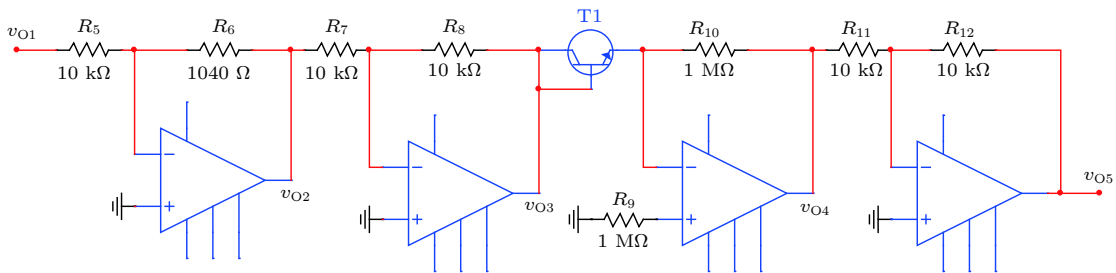


图 4 $e^{4|v_{C_1}|}$ 的电路图

Fig. 4. Circuit diagram of $e^{4|v_{C_1}|}$.

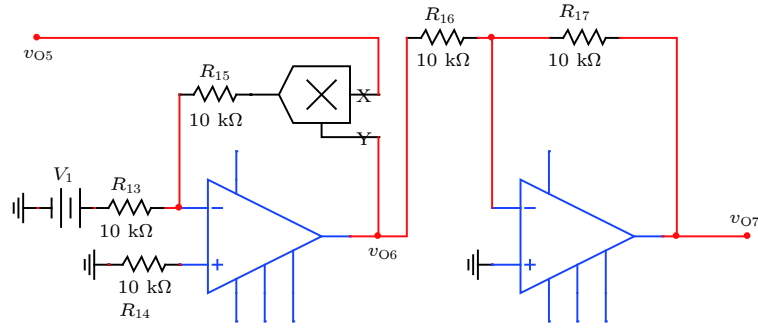


图 5 $e^{-4|v_{C1}|}$ 的电路图

Fig. 5. Circuit diagram of $e^{-4|v_{C1}|}$.

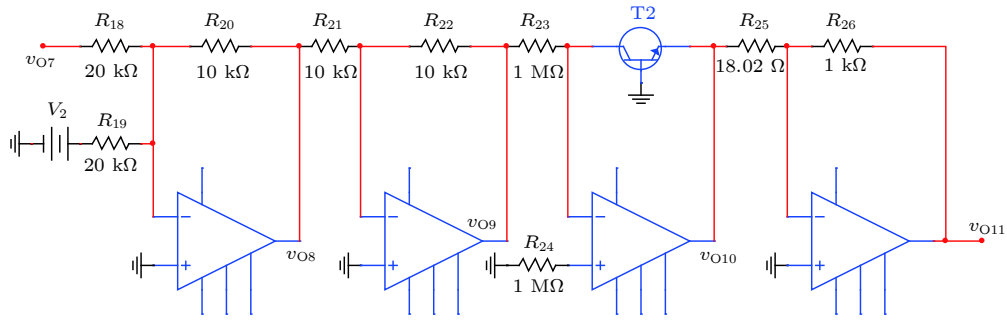


图 6 $\log_2 \frac{e^{-4|v_{C1}|} + 1}{2}$ 的电路图

Fig. 6. Circuit diagram of $\log_2 \frac{e^{-4|v_{C1}|} + 1}{2}$.

$$v_{O9} = -\frac{R_{22}}{R_{21}} v_{O8} = \frac{1}{2} (e^{-4|v_{C1}|} + 1), \quad (14)$$

$$v_{O10} = -V_T \cdot \ln \frac{v_{O9}}{I_s \cdot R_{23}} = -V_T \cdot \ln \frac{e^{-4|v_{C1}|} + 1}{2}, \quad (15)$$

其中 V_T 表示晶体管 T_2 的温度电压当量, 在室温下约为 26 mV, 晶体管 T_2 的反向饱和电流 $I_s = 1 \mu\text{A}$.

$$v_{O11} = -\frac{R_{26}}{R_{25}} v_{O10} = \log_2 \frac{e^{-4|v_{C1}|} + 1}{2}. \quad (16)$$

由图 7 可得到 (17) 式、(18) 式.

$$v_{O12} = -E_{\text{sat}} \cdot \text{sgn}(-v_{C1}) = -13.5 \cdot \text{sgn}(-v_{C1}), \quad (17)$$

其中运算放大器的输出饱和电压 $E_{\text{sat}} = 13.5 \text{ V}$.

$$v_{O13} = -\frac{R_{28}}{R_{27}} v_{O12} = \text{sgn}(-v_{C1}). \quad (18)$$

由图 8 可得到 (19) 式.

$$\begin{aligned} v_O &= k \cdot v_{O11} \cdot v_{O13} \\ &= k \cdot \log_2 \frac{e^{-4|v_{C1}|} + 1}{2} \cdot \text{sgn}(-v_{C1}) = g(v_{C1}), \end{aligned} \quad (19)$$

其中乘法器增益 $k = 1$.

综上所述, 图 3—图 8 组成了一个对数函数 $g(v_{C1})$ 的电路图.

以 $n = 2$ 为例来分析新 Chua 双涡卷混沌系统

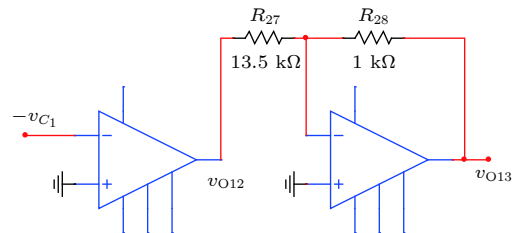


图 7 $\text{sgn}(-v_{C1})$ 的电路图

Fig. 7. Circuit diagram of $\text{sgn}(-v_{C1})$.

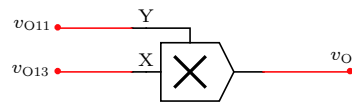


图 8 $g(v_{C1}) = \log_2 \frac{e^{-4|v_{C1}|} + 1}{2} \cdot \text{sgn}(-v_{C1})$ 的电路图

Fig. 8. Circuit diagram of $g(v_{C1}) = \log_2 \frac{e^{-4|v_{C1}|} + 1}{2} \times \text{sgn}(-v_{C1})$.

的非线性动力学行为. 由 (1) 式可知, 当 $n = 2$ 时新 Chua 双涡卷混沌系统的无量纲状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = a \cdot [y - h(x)], \\ \dot{y} = x - y + z, \\ \dot{z} = -b \cdot y, \end{cases} \quad (20)$$

其中 $a = 10$, $b = 16$, $h(x) = 0.5 \cdot x - 2.5 \cdot g(x)$. 对数函数 $g(x)$ 的表达式为

$$g(x) = \begin{cases} \log_2 \frac{e^{4x} + 1}{2}, & (x < 0), \\ -\log_2 \frac{e^{-4x} + 1}{2}, & (x \geq 0). \end{cases} \quad (21)$$

此时新 Chua 双涡卷混沌系统 [(20) 式] 有 3 个平衡点: $Q_0 = (0, 0, 0)$ 和 $Q_{\pm} = (\pm 5, 0, \mp 5)$. 平衡点 Q_{\pm} 有相同的特征值 $\lambda_1 = -6.2777$ 和 $\lambda_{2,3} = 0.1389 \pm i3.5671$, 表明平衡点 Q_{\pm} 是指标 2 的鞍焦平衡点 [1,36,37], 用于产生新 Chua 双涡卷混沌系统 [(20) 式] 中的 2 个涡卷. 平衡点 Q_0 对应的特征值为 $\lambda_1 = 67.2809$ 和 $\lambda_{2,3} = -0.5730 \pm i3.9544$, 表明平衡点 Q_0 是指标 1 的鞍焦平衡点 [1,36,37], 用于连接 2 个涡卷.

系统 (20) 式的三个李雅普诺夫指数 (Lyapunov exponents, LE) $LE_1 = 0.447946$, $LE_2 = 0.000359$ 和 $LE_3 = -5.534524$, 如图 9 所示. LE_1 表明在相空间某一方向上相邻轨道呈指数率分离, 系统对初始条件极为敏感, 这是混沌突出的特性. LE_2 是混沌吸引子周期性的表现, 其周期为无穷大. LE_3 表明系统的相体积是收缩的, 从而确保系统在整体上的稳定性. 由上述三个李雅普诺夫指数可知系统 (20) 式是混沌的.

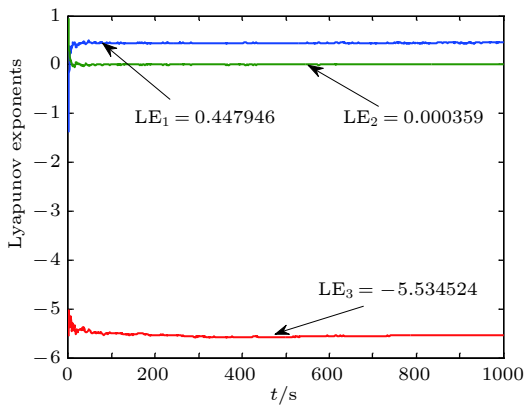


图 9 系统 [(20) 式] 的李雅普诺夫指数
Fig. 9. Lyapunov exponents of system (Equation(20)).

根据三个李雅普诺夫指数可得系统 (20) 式的分维数 D_L 为

$$D_L = j + \frac{1}{|LE_{j+1}|} \sum_{\theta=1}^j LE_{\theta} = 2 + \frac{LE_1 + LE_2}{|LE_3|} = 2.081, \quad (22)$$

式中 $2 < D_L < 3$. 根据吸引子的分维数性质, 说明该系统具有非周期轨道, 并且说明了不同条件下的

轨迹处于分离状态.

新 Chua 双涡卷混沌系统 [(20) 式] 的相图和时域图如图 10 所示. 图 10(a) 表示了新 Chua 双涡卷混沌系统 $x-y$ 平面的相图, 图 10(b) 表示了新 Chua 双涡卷混沌系统 x 方向的时域图.

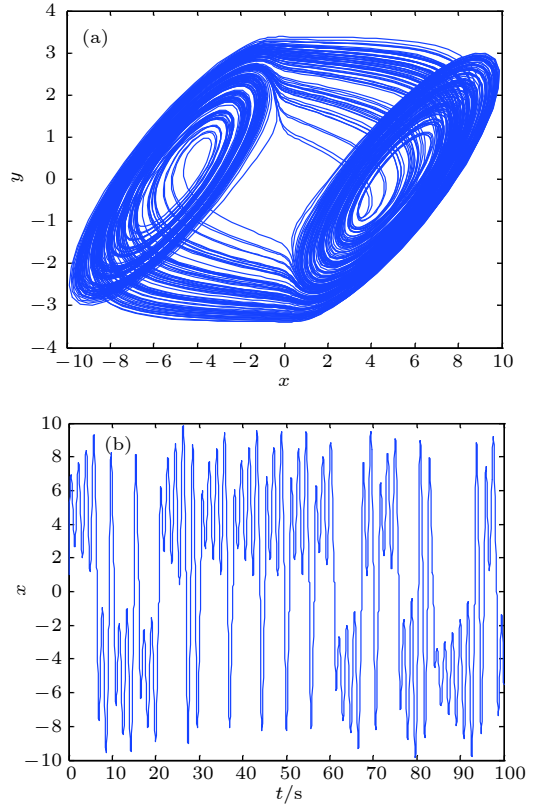


图 10 新 Chua 双涡卷混沌系统 (a) $x-y$ 平面的相图; (b) x 方向的时域图
Fig. 10. Novel Chua double-scroll chaotic system: (a) Phase diagram on the $x-y$ plane; (b) time domain diagram in the x direction.

2.2 Chua 多涡卷混沌系统

对数函数序列的电路图与对数函数的电路图类似, 在对数函数电路图的基础上, 经过拓展平衡点即可得到对数函数序列的电路图, 这里不再详述.

在新 Chua 双涡卷混沌系统的基础上, 引入对数函数序列 $G(x)$, 可得 Chua 多涡卷混沌系统, 见 (23) 式.

$$\begin{cases} \dot{x} = a \cdot [y - H(x)], \\ \dot{y} = x - y + z, \\ \dot{z} = -b \cdot y, \end{cases} \quad (23)$$

其中 $a = 10$, $b = 16$, $H(x) = 0.5 \cdot x - 2.5 \cdot G(x)$. $G(x)$ 可表示为

$$G(x) = -g(x) + \sum_{p=0}^M g(x \pm 2p \times 5),$$

$$(p = 0, 1, 2, \dots, M), \quad (24)$$

可产生 $(2M + 2)$ 偶数个涡卷,
或

$$G(x) = \sum_{p=1}^N g[x \pm (2p - 1) \times 5], (p = 1, 2, \dots, N),$$

$$(25)$$

可产生 $(2N + 1)$ 奇数个涡卷.

(24) 式、(25) 式中, M 是非负整数, N 是正整数, $g(\cdot)$ 为 (21) 式.

当 $M = N = 1$, 对数函数序列 (24) 式和 (25) 式分别如图 11 和图 12 所示. 涡卷的数量由对数函数序列 $G(x)$ 的片段个数决定. 例如, 图 11 中, 沿着 x 方向有 4 个片段, 4 个片段对应 4 个涡卷. 图 12 中, 沿着 x 方向有 3 个片段, 3 个片段对应

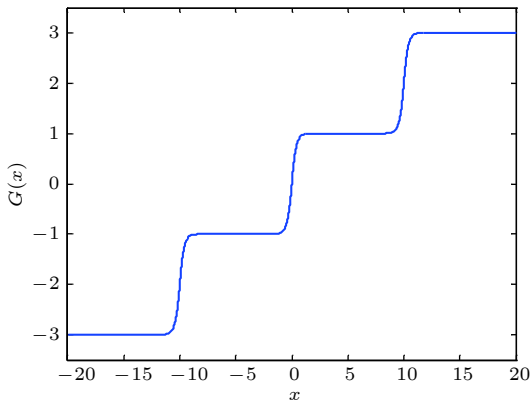


图 11 多分段对数函数序列 [(24) 式], 取 $M = 1$

Fig. 11. Multi-segment logarithmic function series (Equation (24)) with $M = 1$.

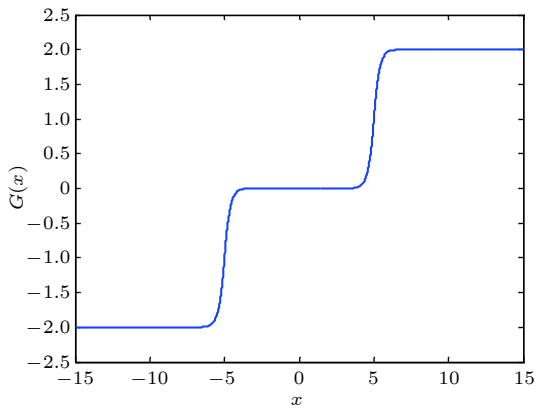


图 12 多分段对数函数序列 [(25) 式], 取 $N = 1$

Fig. 12. Multi-segment logarithmic function series (Equation (25)) with $N = 1$.

3 个涡卷. $x-y$ 平面 4-涡卷混沌吸引子 ($M = 1$) 的相图如图 13 所示. $x-z$ 平面 12-涡卷混沌吸引子 ($M = 5$) 的相图如图 14 所示.

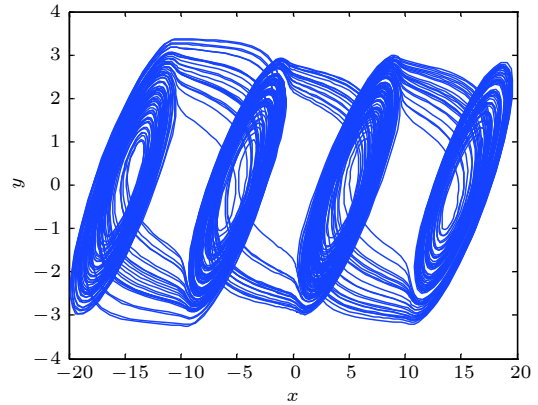


图 13 $x-y$ 平面 4-涡卷混沌吸引子的相图

Fig. 13. Phase diagram of the 4-scroll chaotic attractor on the $x-y$ plane.

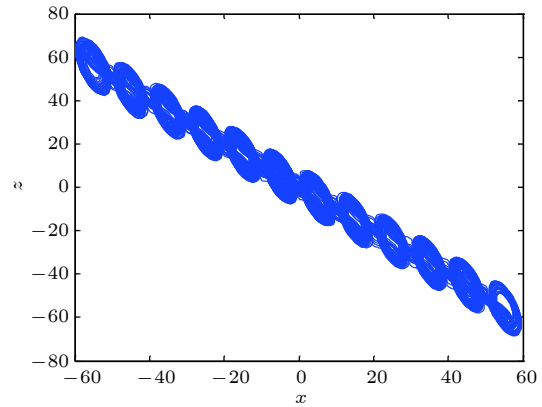


图 14 $x-z$ 平面 12-涡卷混沌吸引子的相图

Fig. 14. Phase diagram of the 12-scroll chaotic attractor on the $x-z$ plane.

2.3 Chua 多涡卷混沌系统的非线性动力学行为

2.3.1 对称性和不变性

在坐标变换 $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$ 下, 系统 (23) 式的微分方程保持不变, 即系统 (23) 式关于原点奇对称.

2.3.2 平衡点

令系统 (23) 式中的 $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$, 可得

$$\begin{cases} a \cdot [y - H(x)] = 0, \\ x - y + z = 0, \\ -b \cdot y = 0. \end{cases} \quad (26)$$

由 (26) 式可得系统 (23) 式的平衡点为

$Q_1(x_1^*, 0, -x_1^*)$ 和 $Q_2(x_2^*, 0, -x_2^*)$.

对于 $(2M + 2)$ 偶数个涡卷混沌吸引子, 根据(24)式可得

$$x_1^* = \pm(2p \times 5), x_2^* = \pm(2p+1) \times 5, (p=0, 1, 2, \dots, M) \quad (27)$$

对于 $(2N + 1)$ 奇数个涡卷混沌吸引子, 根据(25)式可得

$$x_1^* = \pm(2p-1) \times 5, x_2^* = 0, \pm(2p \times 5), (p=1, 2, \dots, N) \quad (28)$$

由(27)式和(28)式可知, 系统(23)式的所有平衡点都是沿着 x 轴和 z 轴方向分布.

系统(23)式线性化的雅可比矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} -a \cdot \dot{H}(x) & a & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -b & 0 \end{bmatrix}. \quad (29)$$

根据雅可比矩阵(29)式可得系统(23)式在平衡点 $Q_1(x_1^*, 0, -x_1^*)$ 的特征方程为

$$\lambda^3 - 66.135\lambda^2 - 61.135\lambda - 1074.16 = 0. \quad (30)$$

(30)式的特征值为

$$\lambda_1 = 67.2809 \\ \lambda_{2,3} = -0.5730 \pm i3.9544. \quad (31)$$

由(31)式可知(30)式有一个正实根和一对有

负实部的共轭复根, 表明平衡点 $Q_1(x_1^*, 0, -x_1^*)$ 是指标1的鞍焦平衡点^[1,36,37]. 平衡点 $Q_1(x_1^*, 0, -x_1^*)$ 也被称为类型I的平衡点.

同理可得, 平衡点 $Q_2(x_2^*, 0, -x_2^*)$ 对应的特征方程为

$$\lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 80 = 0. \quad (32)$$

(32)式的特征值为

$$\lambda_1 = -6.2777 \\ \lambda_{2,3} = 0.1389 \pm i3.5671. \quad (33)$$

由(33)式可知(32)式有一个负实根和一对有正实部的共轭复根, 表明平衡点 $Q_2(x_2^*, 0, -x_2^*)$ 是指标2的鞍焦平衡点^[1,36,37]. 平衡点 $Q_2(x_2^*, 0, -x_2^*)$ 也被称为类型II的平衡点.

综上所述, 系统(23)式可产生 $(2M + 2)$ 偶数个多涡卷混沌吸引子或 $(2N + 1)$ 奇数个多涡卷混沌吸引子.

以12-涡卷混沌吸引子为例, 分析其产生机制. 表1表示12-涡卷混沌吸引子的平衡点、特征值和平衡点的类型. 根据表1的特征值, 可知类型II的平衡点 $Q_{11,12}$ 、 $Q_{13,14}$ 、 $Q_{15,16}$ 、 $Q_{17,18}$ 、 $Q_{19,20}$ 、 $Q_{21,22}$ 用于产生12个涡卷, 类型I的平衡点 Q_0 、 $Q_{1,2}$ 、 $Q_{3,4}$ 、 $Q_{5,6}$ 、 $Q_{7,8}$ 、 $Q_{9,10}$ 用于连接12个涡卷.

表1 12-涡卷混沌吸引子的平衡点、特征值和平衡点的类型

Table 1. Equilibrium points, eigenvalues and types of equilibrium points for the 12-scroll chaotic attractor.

平衡点	特征值	平衡点的类型
$Q_0(0, 0, 0)$	$67.2809, -0.5730 \pm i3.9544$	I
$Q_{1,2}(\pm 10, 0, 0)$	$67.2809, -0.5730 \pm i3.9544$	I
$Q_{3,4}(\pm 20, 0, 0)$	$67.2809, -0.5730 \pm i3.9544$	I
$Q_{5,6}(\pm 30, 0, 0)$	$67.2809, -0.5730 \pm i3.9544$	I
$Q_{7,8}(\pm 40, 0, 0)$	$67.2809, -0.5730 \pm i3.9544$	I
$Q_{9,10}(\pm 50, 0, 0)$	$67.2809, -0.5730 \pm i3.9544$	I
$Q_{11,12}(\pm 5, 0, 0)$	$-6.2777, 0.1389 \pm i3.5671$	II
$Q_{13,14}(\pm 15, 0, 0)$	$-6.2777, 0.1389 \pm i3.5671$	II
$Q_{15,16}(\pm 25, 0, 0)$	$-6.2777, 0.1389 \pm i3.5671$	II
$Q_{17,18}(\pm 35, 0, 0)$	$-6.2777, 0.1389 \pm i3.5671$	II
$Q_{19,20}(\pm 45, 0, 0)$	$-6.2777, 0.1389 \pm i3.5671$	II
$Q_{21,22}(\pm 55, 0, 0)$	$-6.2777, 0.1389 \pm i3.5671$	II

2.3.3 最大李雅普诺夫指数和庞加莱映射

当 $b = 16$, a 变化时, 4-涡卷混沌系统的最大李雅普诺夫指数如图15所示. 当 $a = [8, 12]$ 时, 最大李雅普诺夫指数为正, 表明4-涡卷混沌系统在该

范围内处于混沌状态. 对于一个系统是否处于混沌运动状态, 也可从庞加莱截面上点的分布情况来判定. 若运动状态是混沌的, 庞加莱截面上则是一段连续的曲线或是一些成片的密集点, 反之, 则不是混沌的. 4-涡卷混沌系统在 $x-y$ 平面上的庞加莱映

射如图 16 所示, 截面上是连续的曲线和一些成片的密集点, 说明当 $a = 10$, $b = 16$ 时系统处于混沌状态.

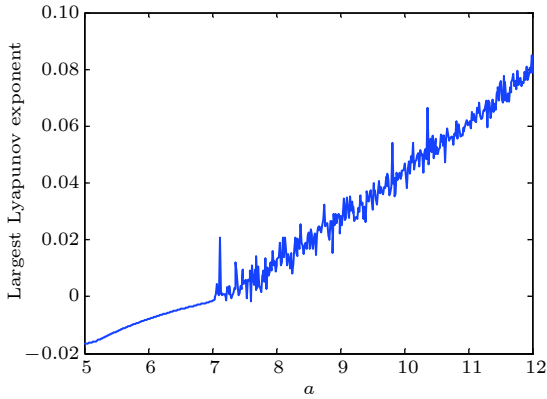


图 15 最大李雅普诺夫指数
Fig. 15. Largest Lyapunov exponent.

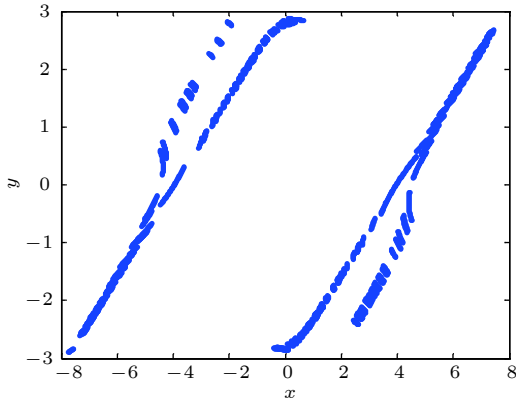


图 16 $x-y$ 平面的庞加莱映射
Fig. 16. Poincaré mapping on the $x-y$ plane.

3 Chua 多涡卷混沌系统的控制

3.1 递归反步控制器的设计

在 Chua 多涡卷混沌系统 (23) 式的基础上加入递归反步控制器, 可得受控 Chua 多涡卷混沌系统为

$$\begin{cases} \dot{x} = a \cdot [y - H(x)] + U_1(t), \\ \dot{y} = x - y + z + U_2(t), \\ \dot{z} = -b \cdot y + U_3(t), \end{cases} \quad (34)$$

其中 $U_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ 是控制信号, 可使系统状态变量 x, y, z 分别跟踪期望值 x_d, y_d, z_d . 定义状态变量和期望值之间的误差状态为

$$\begin{cases} e_x = x - x_d, \\ e_y = y - y_d, \\ e_z = z - z_d. \end{cases} \quad (35)$$

令

$$\begin{cases} x_d = \rho(t), \\ y_d = c_1 \cdot e_x, \\ z_d = c_2 \cdot e_x + c_3 \cdot e_y, \end{cases} \quad (36)$$

其中 c_i , $i = 1, 2, 3$ 是控制参数, $\rho(t)$ 是时间 t 的光滑函数. 将 (36) 式代入 (35) 式可得

$$\begin{cases} e_x = x - \rho(t), \\ e_y = y - c_1 \cdot e_x, \\ e_z = z - c_2 \cdot e_x - c_3 \cdot e_y. \end{cases} \quad (37)$$

对 (37) 式求导, 然后将 (34) 式代入 (37) 式的导数中, 可得误差系统, 见 (38) 式.

$$\begin{cases} \dot{e}_x = a \cdot [y - H(x)] - \dot{\rho}(t) + U_1(t), \\ \dot{e}_y = x - y + z - c_1 \cdot \dot{e}_x + U_2(t), \\ \dot{e}_z = -b \cdot y - c_2 \cdot \dot{e}_x - c_3 \cdot \dot{e}_y + U_3(t). \end{cases} \quad (38)$$

为了稳定误差系统 (38) 式, 考虑李雅普诺夫函数为

$$V = \frac{1}{2} (k_x \cdot e_x^2 + k_y \cdot e_y^2 + k_z \cdot e_z^2), \quad (39)$$

其中 k_x, k_y, k_z 是大于零的常数. 可得 (39) 式对时间 t 的导数为

$$\dot{V} = k_x \cdot e_x \cdot \dot{e}_x + k_y \cdot e_y \cdot \dot{e}_y + k_z \cdot e_z \cdot \dot{e}_z. \quad (40)$$

为了使误差系统 (38) 式稳定, 需要满足 $\dot{V} < 0$, 将 (38) 式代入 (40) 式可得

$$\begin{cases} U_1(t) = \dot{\rho}(t) - a \cdot [y - H(x)] - e_x, \\ U_2(t) = -x + y - z + c_1 \cdot \dot{e}_x - e_y, \\ U_3(t) = b \cdot y + c_2 \cdot \dot{e}_x + c_3 \cdot \dot{e}_y - e_z. \end{cases} \quad (41)$$

当 $c_1 = c_3 = 1$, $c_2 = 0$ 时, 递归反步控制器 $U_1(t), U_2(t), U_3(t)$ 能够将系统 (34) 式控制到期望值. 将 (37) 式和 (38) 式代入 (41) 式可得递归反步控制器为

$$\begin{cases} U_1(t) = \dot{\rho}(t) + \rho(t) - a \cdot [y - H(x)] - x, \\ U_2(t) = -x - z, \\ U_3(t) = b \cdot y - z. \end{cases} \quad (42)$$

3.2 仿真结果

以 4 涡卷混沌系统为例验证递归反步控制器对混沌行为的控制效果. 假设初始条件为 $(x, y, z) = (6, 2, 2)$, 系统参数为 $a = 10$, $b = 16$, 控制器 $U_i(t)$ 为 (42) 式.

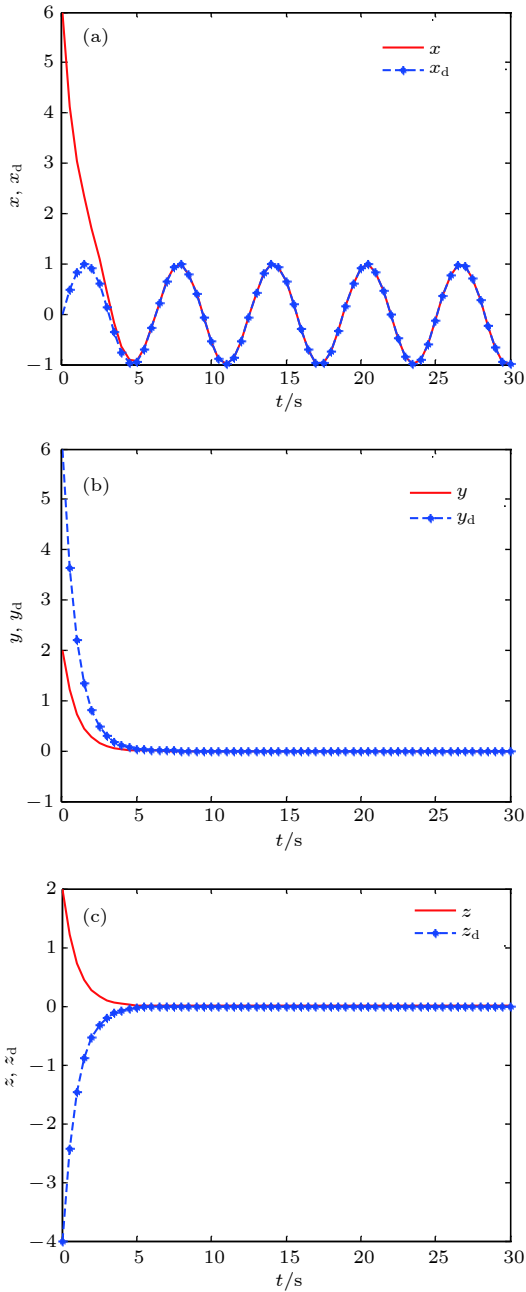


图 17 状态变量和期望值 $[\sin(t), 0, 0]$ 的时域图 (a) x, x_d ; (b) y, y_d ; (c) z, z_d
 Fig. 17. Time domain diagram of state variables and desired values $[\sin(t), 0, 0]$: (a) x, x_d ; (b) y, y_d ; (c) z, z_d .

递归反步控制器能够将 4-涡卷混沌系统控制到正弦函数 $\rho(t) = \sin(t)$ 如图 17 所示. 图 17(a)—(c) 分别表示状态变量和期望值 $[\sin(t), 0, 0]$ 的时域图. 同理, 递归反步控制器可将 4-涡卷混沌系统控制到坐标原点如图 18 所示. 图 18(a)—(c) 分别表示状态变量和期望值 $(0, 0, 0)$ 的时域图. 由图 17、图 18 可知, 施加递归反步控制器后的受控系统能够跟踪正弦函数和原点.

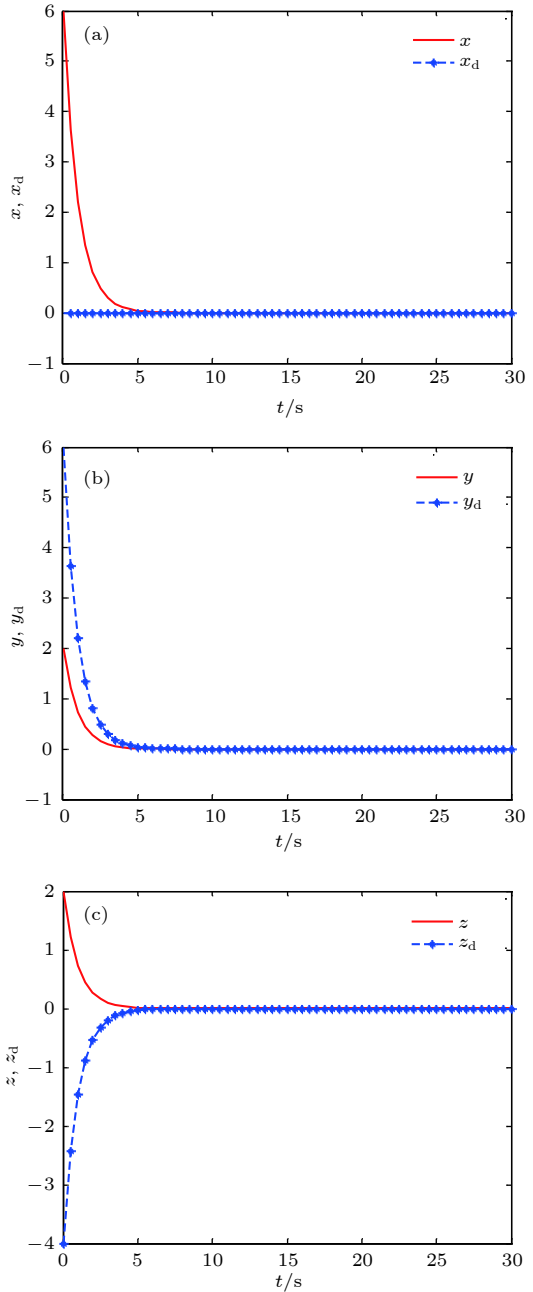


图 18 状态变量和期望值 $(0, 0, 0)$ 的时域图 (a) x, x_d ; (b) y, y_d ; (c) z, z_d
 Fig. 18. Time domain diagram of state variables and desired values $(0, 0, 0)$: (a) x, x_d ; (b) y, y_d ; (c) z, z_d .

4 基于 Chua 多涡卷混沌系统的微弱信号检测

4.1 检测原理和方法

本节采用 Chua 多涡卷混沌系统与递归反步控制器相结合的方法来进行微弱信号检测. 检测原理: 基于混沌控制理论与 Chua 多涡卷混沌系统对高斯噪声的免疫性, 利用递归反步控制器将含有高

斯噪声和待测多频微弱周期信号的 Chua 多涡卷混沌系统控制到不动点, 然后进行频谱分析检测出信号的各频率, 检测原理图如图 19 所示.

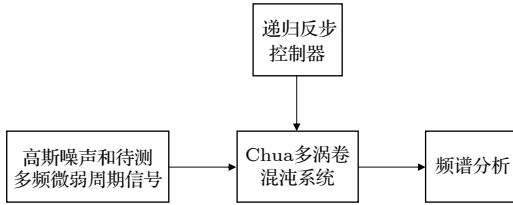


图 19 检测原理图

Fig. 19. Detection schematic diagram.

具体检测过程如下:

- 1) 确定系统 (23) 式的参数, 使系统 (23) 式处于混沌状态.
- 2) 将高斯噪声加入到系统状态方程 (23) 式的第二项, 如果系统 (23) 式仍处于混沌状态, 说明系统 (23) 式对高斯噪声免疫.
- 3) 采用递归反步控制器 (42) 式, 将系统 (23) 式控制到不动点.
- 4) 对检测系统 (由系统 (23) 式、三个递归反步控制器 (42) 式、高斯噪声和待测多频微弱周期信号组成) 的输出信号进行频谱分析, 检测出高斯噪声背景下待测多频微弱周期信号各频率.

首先应用随机微分方程理论^[38]分析 Chua 多涡卷混沌系统 (23) 式对高斯噪声的免疫性. 用 $\Delta x(t)$ 、 $\Delta y(t)$ 、 $\Delta z(t)$ 分别表示高斯噪声对 $x(t)$ 、 $y(t)$ 、 $z(t)$ 的小扰动, 高斯噪声存在的情况下, 系统的状态方程 (23) 式可写为

$$\begin{cases} \dot{x} + \Delta \dot{x} = a \cdot [y + \Delta y - H(x) - H(\Delta x)], \\ \dot{y} + \Delta \dot{y} = (x + \Delta x) - (y + \Delta y) + (z + \Delta z) + n(t), \\ \dot{z} + \Delta \dot{z} = -b \cdot (y + \Delta y), \end{cases} \quad (43)$$

其中 $n(t)$ 是高斯噪声, 其期望 $E[n(t)] = 0$. (43) 式减去 (23) 式, 可得

$$\begin{cases} \Delta \dot{x} = a \cdot \Delta y \\ \Delta \dot{y} = \Delta x - \Delta y + \Delta z + n(t), \\ \Delta \dot{z} = -b \cdot \Delta y \end{cases} \quad (44)$$

由于 Δx 很小, 可略去 (44) 式中 Δx 的非线性项 (当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $-a \cdot H(\Delta x) \rightarrow 0$).

将 (44) 式表示为矢量微分方程的形式

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{X}(t) + \mathbf{N}(t), \quad (45)$$

其中

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} \Delta x(t) \\ \Delta y(t) \\ \Delta z(t) \end{bmatrix}, \quad (46)$$

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -b & 0 \end{bmatrix}, \quad (47)$$

$$\mathbf{N}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ n(t) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (48)$$

它的解为

$$\mathbf{X}(t) = \Phi(t, t_0) \cdot \mathbf{X}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, u) \cdot \mathbf{N}(u) \cdot du, \quad (49)$$

其中 $\Phi(\cdot)$ 为系统的状态转移矩阵. 由于第一项为暂态解, 很快衰减为零, 因此只考虑第二项, 可得

$$\mathbf{X}(t) = \int_{t_0}^t \Phi(t, u) \cdot \mathbf{N}(u) \cdot du, \quad (50)$$

$$E[\mathbf{X}(t)] = \int_{t_0}^t \Phi(t, u) \cdot E[\mathbf{N}(u)] \cdot du = 0. \quad (51)$$

可见, 在统计意义下, 任何零均值高斯噪声都不会改变原系统的运行轨迹.

将均值为 0, 方差为 0.001 的高斯噪声 $n(t)$ 加入到系统状态方程 (23) 式的第二项可得

$$\begin{cases} \dot{x} = a \cdot [y - H(x)], \\ \dot{y} = x - y + z + n(t), \\ \dot{z} = -b \cdot y. \end{cases} \quad (52)$$

(52) 式的相图如图 20 所示, 由该图可知系统的相轨迹几乎没有变化 (与图 13 相比), 说明系统对高斯噪声具有免疫性. 图 20 所得结果与上述理论推导一致.

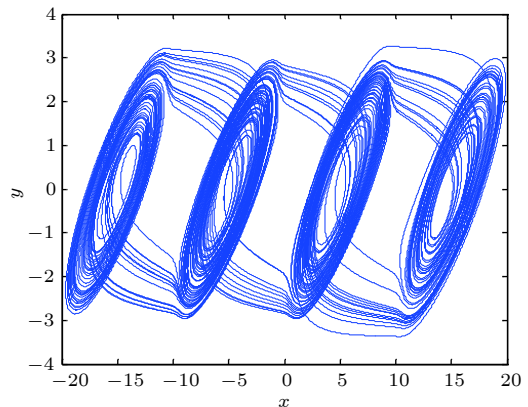


图 20 系统 [(52) 式] 的相图

Fig. 20. Phase diagram of system [Equation(52)].

4.2 检测结果

将输入信号 $input = s(t) + n(t)$ 加入到受控系统状态方程 (34) 式的第二项, 可得检测系统为

$$\begin{cases} \dot{x} = a \cdot [y - H(x)] + U_1(t), \\ \dot{y} = x - y + z + U_2(t) + input, \\ \dot{z} = -b \cdot y + U_3(t), \end{cases} \quad (53)$$

其中 $n(t)$ 是均值为 0, 方差为 0.001 的高斯噪声. $s(t) = A_1 \cdot \sin(2\pi f_1 t) + A_2 \cdot \sin(2\pi f_2 t) + A_3 \cdot \sin(2\pi f_3 t)$ 是待测多频微弱周期信号. 幅值 $A_1 = A_2 = A_3 = 0.005$, 频率 $f_1 = 0.2$ Hz, $f_2 = 0.5$ Hz, $f_3 = 0.7$ Hz.

以 4-涡卷混沌系统为例, 其中 $a = 10$, $b = 16$, 初始条件为 (6, 2, 2), 此时系统处于混沌状态 (见 2.3.3 节), 验证检测方法的有效性. 总仿真时间为 300 s, 当仿真时间为 100 s 时, 将 $input$ 加入到系统 (34) 式中. 检测系统 (53) 式的相图如图 21 所示. 由图 21 可知, 三个递归反步控制器可将状态变量从初始条件 (6, 2, 2) 控制到原点 (0, 0, 0). 控制信号 $U_1(t)$ 、 $U_2(t)$ 、 $U_3(t)$ 的时域图如图 22 所示, 图 22(a) 是原始图, 图 22(b) 是放大图. 由图 22 可知控制信号 $U_1(t)$ 、 $U_2(t)$ 、 $U_3(t)$ 迅速收敛于 0. 待测信号的频谱图如图 23 所示. 由图 23 可知 3 个频率分别是 $f_1 = 0.2$ Hz, $f_2 = 0.5$ Hz, $f_3 = 0.7$ Hz.

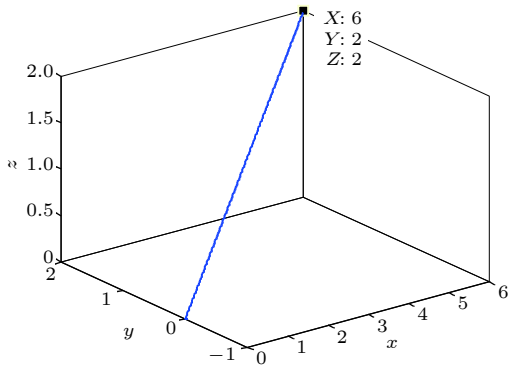


图 21 检测系统 [(53) 式] 的相图
Fig. 21. Phase diagram of the detection system [Equation(53)].

经过计算可得信噪比 (signal-to-noise ratio, SNR) 为

$$SNR = 10 \lg \frac{P_1}{P_2} = 10 \lg \frac{\frac{1}{2} \times 0.005^2}{0.001} = -19 \text{ dB}, \quad (54)$$

其中 P_1 为周期信号功率, P_2 为噪声功率.

在微弱信号检测领域, 采用时域方法处理信号的最低 SNR 只有 -10 dB 左右 [39], 而本文采用 Chua 多涡卷混沌系统和递归反步控制器相结合进行多

频微弱周期信号检测得到的最低 SNR 为 -19 dB, 提高了检测精度, 为基于非 Duffing 混沌系统的微弱信号检测提供了新思路.

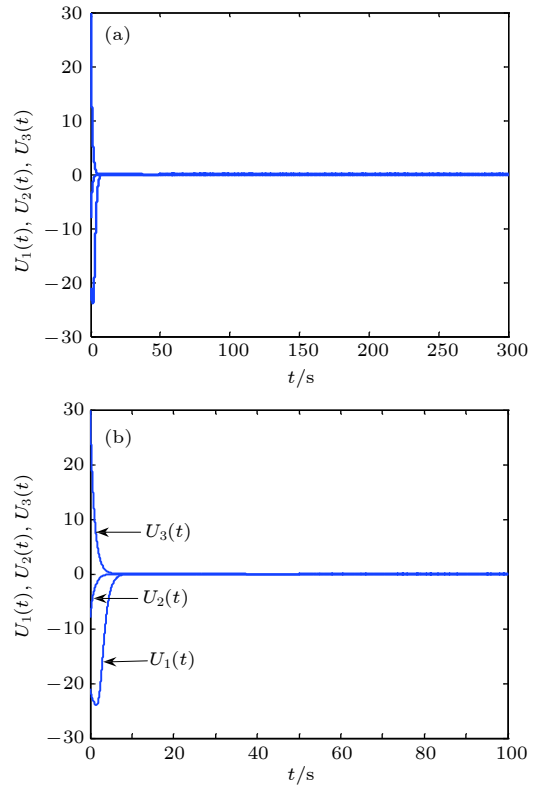


图 22 控制信号 $U_1(t)$ 、 $U_2(t)$ 、 $U_3(t)$ 的时域图 (a) 原始图; (b) 放大图, $t = [0, 100]$ s

Fig. 22. Time domain diagram of control signals $U_1(t)$ 、 $U_2(t)$ 、 $U_3(t)$: (a) Original diagram (b) enlarging diagram, $t = [0, 100]$ s.

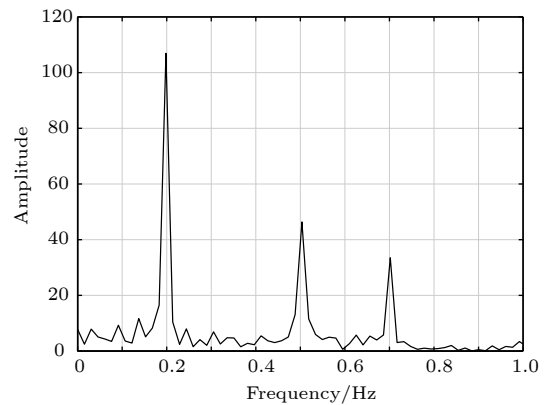


图 23 待测信号的频谱图

Fig. 23. Frequency spectrum of the signal to be detected.

5 结论

本文提出了一种构造多涡卷混沌系统的新非线性函数方法, 即对数函数序列法. 首先研究了

Chua 多涡卷混沌系统的非线性动力学行为及其混沌吸引子的产生机制. Chua 多涡卷混沌吸引子的产生机制为指标 2 的鞍焦平衡点用于产生涡卷, 指标 1 的鞍焦平衡点用于连接涡卷. 所产生的 Chua 多涡卷混沌吸引子形状清晰、大小一致, 且处于同一水平位置. 然后采用三个递归反步控制器抑制了 Chua 多涡卷混沌系统的混沌行为. 最后基于混沌控制理论与 Chua 多涡卷混沌系统对高斯噪声的免疫性, 提出了一种新微弱信号检测方法, 即在检测系统中通过采用三个递归反步控制器将处于混沌状态的 Chua 多涡卷混沌系统控制到不动点来检测信号的各频率. 与基于 Duffing 系统微弱信号检测方法相比, 本文提出的检测方法不需要判断系统是否处于临界混沌状态, 只需要判断系统是否进入混沌域 (在某些系统参数范围内, 系统处于混沌状态) 即可. 以后的工作可采用合适的对数函数序列构造二维及三维多涡卷混沌系统, 并将这些多涡卷混沌系统应用到实际的微弱信号检测中. 需要注意的是为了提高 SNR, 可采用一些消噪方法对待测信号进行预处理.

参考文献

- [1] Chua L O, Komuro M, Matsumoto T 1986 *IEEE T. Circuits* **33** 1072
- [2] Suykens J A K, Van de walle J 1993 *IEEE T. Circuits-I* **40** 861
- [3] Lü J H, Chen G R, Yu X H, Leung H 2004 *IEEE T. Circuits-I* **51** 2476
- [4] Lü J H, Han F L, Yu X H, Chen G R 2004 *Automatica* **40** 1677
- [5] Chen S B, Zeng Y C, Xu M L, Chen J S 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 020507 (in Chinese) [陈仕必, 曾以成, 徐茂林, 陈家胜 2011 物理学报 **60** 020507]
- [6] Ai X X, Sun K H, He S B 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 040503 (in Chinese) [艾星星, 孙克辉, 贺少波 2014 物理学报 **63** 040503]
- [7] Hong Q H, Xie Q G, Xiao P 2017 *Nonlinear Dyn.* **87** 1015
- [8] Zhang G T, Wang F Q 2018 *Chin. Phys. B* **27** 018201
- [9] Xu F, Yu P 2010 *J. Math. Anal. Appl.* **362** 252
- [10] Chen Z, Wen G L, Zhou H A, Chen J Y 2017 *Optik* **130** 594
- [11] Wang C H, Luo X W, Wan Z 2014 *Optik* **125** 6716
- [12] Lü J H, Murali K, Sinha S, Leung H, Aziz-Alaoui M A 2008 *Phys. Lett. A* **372** 3234
- [13] Yuan F, Wang G Y, Wang X W 2016 *Chaos* **26** 073107
- [14] Wang C H, Liu X M, Xia H 2017 *Chaos* **27** 033114
- [15] Hu X Y, Liu C X, Liu L, Yao Y P, Zheng G C 2017 *Chin. Phys. B* **26** 110502
- [16] Wang C H, Xia H, Zhou L 2017 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **27** 1750091
- [17] Xiao L Q, Duan S K, Wang L D 2018 *Acta Phys. Sin.* **67** 090502 (in Chinese) [肖利全, 段书凯, 王丽丹 2018 物理学报 **67** 090502]
- [18] Wang G Y, Yuan F, Chen G R, Zhang Y 2018 *Chaos* **28** 013125
- [19] Ott E, Grebogi C, Yorke J A 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 1196
- [20] Yang C H, Ge Z M, Chang C M, Li S Y 2010 *Nonlinear Anal-real.* **11** 1977
- [21] Danaca M F, Fečkan M 2019 *Commun. Nonlinear Sci.* **74** 1
- [22] Litak G, Syta A, Borowice M 2007 *Chaos Soliton. Fract.* **32** 694
- [23] Gamal Mahmoud M, Ayman A A, Tarek M A, Emad E M 2017 *Chaos Soliton. Fract.* **104** 680
- [24] Shen Y J, Wen S F, Yang S P, Guo S Q, Li L R 2018 *Int. J. Nonlin. Mech.* **98** 173
- [25] Mfoumou G S, Kenmoé G D, Kofané T C 2019 *Mech. Syst. Signal Pr.* **119** 399
- [26] Harb A, Zaher A, Zohdy M 2002 *Proceedings of the American Control Conference Anchorage, Ak, USA, May 8-10, 2002* p2251
- [27] Laoye J A, Vincent U E, Kareem S O 2009 *Chaos Soliton. Fract.* **39** 356
- [28] Njah A N, Sunday O D 2009 *Chaos Soliton. Fract.* **41** 2371
- [29] Njah A N 2010 *Nonlinear Dyn.* **61** 1
- [30] Bix D L, Pipenberg S J 1992 *International Joint Conference on Neural Networks* Baltimore, MD, USA, June 7-11, 1992 p881
- [31] Xu Y C, Yang C L 2010 *Journal of Harbin Institute of Technology* **42** 446 (in Chinese) [徐艳春, 杨春玲 2010 哈尔滨工业大学学报 **42** 446]
- [32] Xu Y C, Yang C L, Qu X D 2010 *Chin. Phys. B* **19** 030516
- [33] Li G Z, Zhang B 2017 *IEEE T. Ind. Electron.* **64** 2255
- [34] Zhong G Q, Man K F, Chen G R 2002 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **12** 2907
- [35] Yu S M, Lü J H, Chen G R 2007 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **17** 1785
- [36] Christopher P S 1993 *IEEE T. Circuits-I* **40** 675
- [37] Cafagna D, Grassi G 2003 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **13** 2889
- [38] Li Y, Yang B J, Shi Y W 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 526 (in Chinese) [李月, 杨宝俊, 石要武 2003 物理学报 **52** 526]
- [39] Qian Y, Huang C J, Chen C, Jiang X C 2007 *Proceedings of the CSEE* **27** 89 (in Chinese) [钱勇, 黄成军, 陈陈, 江秀臣 2007 中国电机工程学报 **27** 89]

Generation and application of novel Chua multi-scroll chaotic attractors*

Jia Mei-Mei[†] Jiang Hao-Gang Li Wen-Jing*(Department of Automation, College of Electric Power, Inner Mongolia University of Technology, Hohhot 010080, China)*

(Received 12 December 2018; revised manuscript received 24 April 2019)

Abstract

Chaos has great potential applications in engineering fields, such as secure communication and digital encryption. Since the double-scroll Chua's circuit was developed first by Chua, it has quickly become a paradigm to study the double-scroll chaotic attractors. Compared with the conventional double-scroll chaotic attractors, the multi-scroll chaotic attractors have complex structures and rich nonlinear dynamical behaviors. The multi-scroll chaotic attractors have been applied to various chaos-based information technologies, such as secure communication and chaotic cryptanalysis. Hence, the generation of the multi-scroll chaotic attractors has become a hot topic in research field of chaos at present. In this paper, a novel Chua multi-scroll chaotic system is constructed by using a logarithmic function series. The nonlinear dynamical behaviors of the novel Chua multi-scroll chaotic system are analyzed, including symmetry, invariance, equilibrium points, the largest Lyapunov exponent, etc. The existence of chaos is confirmed by theoretical analyses and numerical simulations. The results show that the rich Chua multi-scroll chaotic attractors can be generated by combining the logarithmic function series with the novel Chua double-scroll chaotic system. The generation mechanism of the Chua multi-scroll chaotic attractors is that the saddle-focus equilibrium points of index 2 are used to generate the scrolls, and the saddle-focus equilibrium points of index 1 are used to connect these scrolls. Then, three recursive back-stepping controllers are designed to control the chaotic behavior in the novel Chua multi-scroll chaotic system. The recursive back-stepping controllers can control the novel Chua multi-scroll chaotic system to a fixed point or a given sinusoidal function. Finally, a new method of detecting a weak signal embedded in the Gaussian noise is proposed on the basis of the novel Chua multi-scroll chaotic system and the recursive back-stepping controllers. The immunity of the novel Chua multi-scroll chaotic system to the Gaussian noise with the zero mean is analyzed by using the stochastic differential equation theory. The results show that the proposed new method of detecting the weak signal can detect the frequencies of the multi-frequency weak periodic signal embedded in the Gaussian noise. In addition, the novel Chua multi-scroll chaotic system has strong immunity to any Gaussian noise with the zero mean. The proposed method provides a new thought for detecting the weak signal.

Keywords: Chua multi-scroll chaotic system, logarithmic function series, recursive back-stepping controllers, weak signal detection

PACS: 05.45.-a, 05.45.Gg, 05.45.Pq

DOI: 10.7498/aps.68.20182183

* Project supported by the Inner Mongolia University of Technology Foundation, China (Grant No. ZD201520) and the Natural Science Foundation of Inner Mongolia Autonomous Region of China (Grant No. 2017BS0603).

[†] Corresponding author. E-mail: meimeijia14@163.com