

一类多能级Rosen-Zener模型的精确解

姚绍武 曹洪 岑理相

Exact solution to a kind of multi-level Rosen-Zener models

Yao Shao-Wu Cao Hong Cen Li-Xiang

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 68, 133201 (2019) DOI: 10.7498/aps.68.20190353

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190353>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

El-Nabulsi动力学模型下非Chetaev型非完整系统的精确不变量与绝热不变量

Exact invariants and adiabatic invariants for nonholonomic systems in non-Chetaev's type based on El-Nabulsi dynamical models

物理学报. 2015, 64(3): 034502 <https://doi.org/10.7498/aps.64.034502>

一类高阶非线性波方程的李群分析、最优系统、精确解和守恒律

Lie symmetry analysis, optimal system, exact solutions and conservation laws of a class of high-order nonlinear wave equations

物理学报. 2016, 65(14): 140201 <https://doi.org/10.7498/aps.65.140201>

非绝热分子动力学的量子路径模拟

Quantum trajectory simulation for nonadiabatic molecular dynamics

物理学报. 2017, 66(15): 153101 <https://doi.org/10.7498/aps.66.153101>

一类新的Stckelberg全息超导模型

A new Stckelberg holographic superconductor model

物理学报. 2015, 64(15): 157401 <https://doi.org/10.7498/aps.64.157401>

一类可用Hamilton-Jacobi方法求解的非保守Hamilton系统

A kind of non-conservative Hamilton system solved by the Hamilton-Jacobi method

物理学报. 2017, 66(5): 054501 <https://doi.org/10.7498/aps.66.054501>

一类多能级 Rosen-Zener 模型的精确解

姚绍武¹⁾ 曹洪¹⁾²⁾ 岑理相^{1)†}

1) (四川大学物理科学与技术学院, 理论物理中心, 成都 610065)

2) (重庆交通大学材料科学与工程学院, 重庆 400074)

(2019年3月13日收到; 2019年4月29日收到修改稿)

本文利用代数动力学方法研究了一类 Rosen-Zener 模型及其多能级推广系统的精确解. 不同于以往将二能级系统薛定谔方程转化为超几何方程的方法, 本文证明这类特殊的 Rosen-Zener 模型可以通过引入正则变换或规范变换予以解析求解, 并进一步揭示该方法可以推广求解其多能级系统. 在此基础上详细刻画了随时间演化系统各能级间的跃迁几率, 讨论了这类体系所具备的动力学不变量, 以及这类模型存在的对偶系统及其可解性.

关键词: Rosen-Zener 模型, 正则变换, 非绝热跃迁, 动力学不变量

PACS: 32.80.Qk, 03.65.Fd

DOI: 10.7498/aps.68.20190353

1 引言

含时外场驱动量子体系是一类非自治量子系统, 其研究近年来受到较多关注. 研究兴趣主要源于两方面的原因, 一是非自治系统的可解性或可积性本身是一个值得探讨的课题. 例如, 若一个系统的哈密顿量显含时间, 其薛定谔方程一般不具有定态解. 但如果该系统具有动力学不变量 (也称 Lewis 不变量^[1,2]), 则系统仍将有解析解, 且解与定态解可作类比. 另一方面的原因, 是近年来量子调控与量子信息科学领域的发展, 促进了人们对含时驱动体系精确解以及以此为基础的非绝热调控技术的研究. 这方面研究近期取得不少有意义的进展, 例如, 借用辅助外场实现的无跃迁算法^[3]、超绝热协议^[4-6]来完成量子态的非绝热调控. 相似的研究思路早前曾在不同场合被提出^[7], 近年来这一调控方法更是在多个实验系统中得以实现和检验^[6,8-10]. 此外, 相关研究还包括一些新颖的原子布居数转移非绝热方案^[11-13]、基于逆向求解微分方程

实现解析调控等^[14,15].

二能级系统的含时驱动体系常被称为最简单的非平庸量子体系, 长期以来都是人们研究的对象. 早期提出的一些二能级驱动模型, 例如 Landau-Zener 模型^[16,17]、Rosen-Zener 模型^[18]、Rabi 模型^[19,20]等, 至今仍受到持续关注. Landau-Zener 模型表征典型的能级交叉动力学, 由于其线性驱动场的简单特性, 成为目前量子调控特别是量子态转移的热门方案, 其可行性在众多实验系统中得以研究和检验^[21-24], 可谓历久弥新. 与 Landau-Zener 模型不同, Rosen-Zener 模型中系统裸能级差固定而能级间的耦合随外场可调, 其最初被提出用以研究旋转磁场中两能级原子双斯特恩-盖拉赫实验现象^[18]. 多年来对这类驱动模型及其变形方案的研究也从未中断, 除了最初提出的双曲正割型, 涉及的两能级耦合形式还包括高斯型^[25]、指数型^[26]及双曲正切型^[27]等. 此外 Rosen-Zener 驱动在非线性体系中的研究也得到一定关注^[28,29].

本文研究一类特殊的 Rosen-Zener 模型及其多能级模型的精确解. 以往文献求解这类体系主要

† 通信作者. E-mail: lixiangcen@scu.edu.cn

限于二能级模型, 常用方法是将系统薛定谔方程升阶为二阶常微分方程进而转化为超几何方程, 然后根据超几何函数研究其演化性质. 本文发现在特殊的频率参数条件下这类模型可以利用代数转动变换 (也称代数动力学方法^[30-32]) 予以解析求解, 其解可以用初等函数表示. 后文将详细阐明这一模型的动力学演化, 包括系统的布居数转移、非绝热效应以及其多能级推广系统的解析解与非绝热动力学行为. 另外, 本文也会讨论系统的 Lewis 动力学不变量、系统的对偶模型及其可解性.

2 二能级 Rosen-Zener 模型的精确求解

2.1 原有方法回顾

考虑如下的二能级系统哈密顿量:

$$H(t) = \begin{pmatrix} \varepsilon & V(t) \\ V(t) & -\varepsilon \end{pmatrix}, \quad (1)$$

其中 $V(t)$ 描述横向磁场, ε 为正常数, 描述裸原子能级. 原则上, 形为 (1) 式的哈密顿量其薛定谔方程可以通过如下过程化为二阶常微分方程. 设系统波函数为 $|\psi(t)\rangle = c_1(t) e^{-i\varepsilon t} |\uparrow\rangle + c_2(t) e^{i\varepsilon t} |\downarrow\rangle$, 其中 $c_1(t)$ 与 $c_2(t)$ 为待定系数. 将其代入薛定谔方程 (令 $\hbar = 1$):

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle, \quad (2)$$

容易得系数 $c_{1,2}(t)$ 满足如下方程:

$$i \dot{c}_1(t) = V(t) e^{i2\varepsilon t} c_2(t), \quad (3)$$

$$i \dot{c}_2(t) = V(t) e^{-i2\varepsilon t} c_1(t). \quad (4)$$

对方程 (3) 式再做微分并将 (4) 式代入, 可得:

$$\ddot{c}_1(t) - \left[i2\varepsilon + \frac{\dot{V}(t)}{V(t)} \right] \dot{c}_1(t) + V^2(t) c_1(t) = 0. \quad (5)$$

上述方程容易转化为超几何方程从而可以得到超几何函数解. 值得指出, 利用上述方法求解二能级驱动系统有过大量研究, 包括熟知的 Landau-Zener 模型、Allen-Eberly 模型^[33] 以及近来的研究工作如 Rosen-Zener-Demkov 模型^[26]、双曲正切模型^[27] 及 Sech-Tanh 模型^[34,35] 等. 当 $V(t)$ 取双曲正割形式即 $V(t) = \nu \operatorname{sech}(t/\tau)$ 时, 系统的解最早由 Rosen 和 Zener^[18] 给出. 虽然这种情况利用超几何函数不能给出任意时刻 $c_1(t)$ 的初等函数解, 但是

对于全时段演化, 设若 $t \rightarrow -\infty$ 系统处在 $|\uparrow\rangle$ 状态, 即 $|c_1(-\infty)| = 1$ 与 $c_2(-\infty) = 0$, 则可求得 $t \rightarrow +\infty$ 时系统的跃迁几率为

$$P = |c_2(+\infty)|^2 = \sin^2(\pi\nu\tau) \operatorname{sech}^2(\pi\varepsilon\tau). \quad (6)$$

2.2 正则变换方法求解二能级 Rosen-Zener 模型

一般而言, 上述将薛定谔方程升阶为高阶常微分方程的方法不便向多能级系统推广. 以下考虑一类特殊 Rosen-Zener 模型, 研究发现其可以利用正则变换方法严格解析求解. 后文会将这类模型推广到多能级系统并证明其亦可解析求解. 这类模型的哈密顿量为

$$H(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \nu & 2\nu \operatorname{sech}(\nu t) \\ 2\nu \operatorname{sech}(\nu t) & -\nu \end{pmatrix}. \quad (7)$$

与原 Rosen-Zener 模型一样, 这里的驱动场取双曲正割型, 但要求场强与频率满足 $\nu = 2\varepsilon$ 及 $\nu\tau = 1$ (实为 $\nu\tau = \hbar$), 模型由单一频率参数 ν 描述. 现对该模型进行求解. 同样设该两能级系统波函数的一般形式为 $|\psi(t)\rangle = c_1(t) |\uparrow\rangle + c_2(t) |\downarrow\rangle$, 其中待定系数 $c_1(t)$ 与 $c_2(t)$ 须满足归一化条件 $|c_1(t)|^2 + |c_2(t)|^2 = 1$. 依据薛定谔方程 (2) 式, 有

$$i \dot{c}_1(t) = \frac{\nu}{2} c_1(t) + \nu \operatorname{sech}(\nu t) c_2(t), \quad (8)$$

$$i \dot{c}_2(t) = \nu \operatorname{sech}(\nu t) c_1(t) - \frac{\nu}{2} c_2(t). \quad (9)$$

通过如下变换

$$c_1(t) = \left[\frac{i-1}{2} \tanh(\nu t) - \frac{i+1}{2} \right] d_1(t) - \frac{i-1}{2} \operatorname{sech}(\nu t) d_2(t), \quad (10)$$

$$c_2(t) = -\frac{i+1}{2} \operatorname{sech}(\nu t) d_1(t) - \left[\frac{i+1}{2} \tanh(\nu t) - \frac{i-1}{2} \right] d_2(t), \quad (11)$$

可以得到

$$i \dot{d}_1(t) = \frac{\nu}{2} d_1(t), \quad (12)$$

$$i \dot{d}_2(t) = -\frac{\nu}{2} d_2(t). \quad (13)$$

也就是说, 在变换后的新表象中, $d_1(t)$ 和 $d_2(t)$ 所满足的方程组已经退耦合. 可以称方程 (10) 式和

(11) 式所描述的变换为正则变换或规范变换. 该变换是么正的, 变换后 $d_1(t)$ 和 $d_2(t)$ 亦满足 $|d_1(t)|^2 + |d_2(t)|^2 = 1$. 上述方程组的解从而可以表示为 $d_1(t) = \mu_1 e^{-i\nu t/2}$, $d_2(t) = \mu_2 e^{i\nu t/2}$, 其中 $\mu_{1,2}$ 由系统初始条件决定. 分别取 $\mu_1 = 1, \mu_2 = 0$ 或 $\mu_1 = 0, \mu_2 = 1$, 并将得到的 $d_1(t)$ 和 $d_2(t)$ 代入方程 (10) 式和 (11) 式中, 即可得到满足系统薛定谔方程的两个特解, 亦即系统的动力学基矢:

$$\left| \psi_{\frac{1}{2}}(t) \right\rangle = e^{-i\nu t/2} \left\{ \left[\frac{i-1}{2} \tanh(\nu t) - \frac{i+1}{2} \right] |\uparrow\rangle - \frac{i+1}{2} \operatorname{sech}(\nu t) |\downarrow\rangle \right\}, \quad (14)$$

$$\left| \psi_{-\frac{1}{2}}(t) \right\rangle = e^{i\nu t/2} \left\{ \frac{1-i}{2} \operatorname{sech}(\nu t) |\uparrow\rangle - \left[\frac{i+1}{2} \tanh(\nu t) - \frac{i-1}{2} \right] |\downarrow\rangle \right\}. \quad (15)$$

如果初始时刻 $t \rightarrow -\infty$ 系统处在 $|\uparrow\rangle$ 态上, 随时间演化系统状态将由基矢 $|\psi_{\frac{1}{2}}(t)\rangle$ 决定. 演化过程中系统向 $|\downarrow\rangle$ 状态跃迁的几率为

$$P(t) = \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2(\nu t). \quad (16)$$

在 $t \rightarrow +\infty$ 时, 显然系统仍将回到 $|\uparrow\rangle$ 态上, 也就是说经过整体演化跃迁几率为零. 这与 (6) 式结果 (须取 $1/\tau = \nu$) 一致.

值得指出, 上述解析解使得我们可以描述系统在演化过程中的非绝热跃迁. 定义 $F_{\pm}(t) \equiv \left| \langle \psi_{\pm\frac{1}{2}}^{\text{ad}}(t) | \psi_{\pm\frac{1}{2}}(t) \rangle \right|^2$, 其中 $|\psi_{\pm\frac{1}{2}}^{\text{ad}}(t)\rangle$ 表征系统哈密顿量 (7) 式的瞬时绝热本征态. 由于 $t \rightarrow -\infty$ 时 $|\psi_{\pm\frac{1}{2}}(t)\rangle$ 与 $|\psi_{\pm\frac{1}{2}}^{\text{ad}}(t)\rangle$ 一致, 故 $F_+(t)$ 描述了演化过程中绝热态的保留几率, $F_-(t)$ 则描述非绝热效应所致的绝热态之间的跃迁几率. 图 1 分别画出了驱动过程中上述布居数 $P(t)$ 以及非绝热效应 $F_{\pm}(t)$ 随时间的演变.

3 多能级模型及其精确解

3.1 规范变换及系统的动力学演化

下面将上一节中提出的正则变换求解方法推广到相应的多能级系统. 为此, 研究如下哈密顿量:

$$H(t) = \boldsymbol{\Omega}(t) \cdot \mathbf{J} = 2\nu \operatorname{sech}(\nu t) J_x + \nu J_z, \quad (17)$$

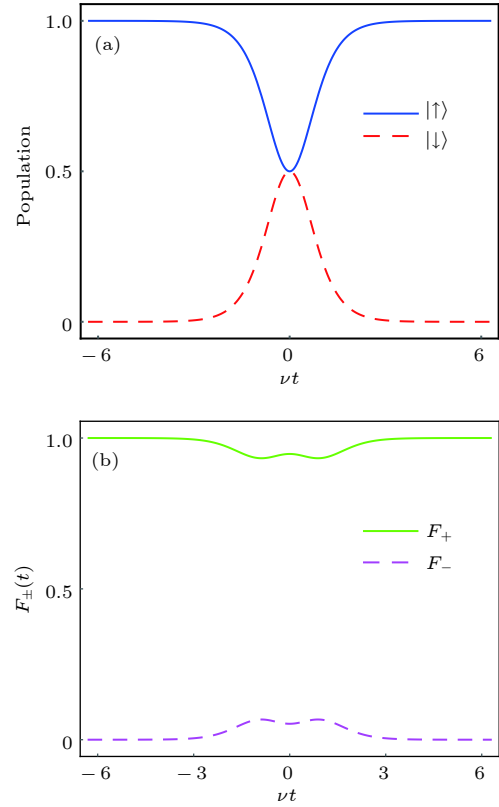


图 1 (a) 二能级系统布居数随时间演化; (b) 绝热态的保留几率 $F_+(t)$ 以及非绝热跃迁几率 $F_-(t)$. 系统初态均取 $|\uparrow\rangle$

Fig. 1. (a) Time evolution of the population of the two-level system; (b) the survival probability $F_+(t)$ of the adiabatic state and the transition probability $F_-(t)$ induced by the nonadiabaticity. In both cases the initial state of the system is in $|\uparrow\rangle$.

其中 \mathbf{J} 是角动量算符, 其分量满足对易关系 $[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk} J_k$. 当角动量量子数 $j = \frac{1}{2}$ 时, 这个哈密顿量就是上面求解的哈密顿量 (7) 式. 欲利用前述变换方法处理目前代数系统, 需要采用特定形式转动变换 (也称规范变换^[30]). 结果表明, 对上述驱动模型采用如下变换可以为求解带来便利:

$$|\psi(t)\rangle = G(t) |\psi^g(t)\rangle = e^{i\alpha(t)J_x} e^{i\beta(t)J_y} |\psi^g(t)\rangle. \quad (18)$$

在新表象中容易得到 $|\psi^g(t)\rangle$ 满足协变薛定谔方程 $i\partial_t |\psi^g(t)\rangle = H_g(t) |\psi^g(t)\rangle$, 相应有效哈密顿量 $H_g(t)$ 可表达为

$$H_g(t) = G^\dagger(t) H(t) G(t) - iG^\dagger(t) \partial_t G(t) = \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{J}, \quad (19)$$

其中 $\mathbf{X}(t)$ 三个分量的具体形式为:

$$\begin{aligned} X_1(t) &= \dot{\alpha} \cos \beta + 2\nu \operatorname{sech}(\nu t) \cos \beta + \nu \cos \alpha \sin \beta, \\ X_2(t) &= \dot{\beta} - \nu \sin \alpha, \\ X_3(t) &= -\dot{\alpha} \sin \beta - 2\nu \operatorname{sech}(\nu t) \sin \beta + \nu \cos \alpha \cos \beta. \end{aligned} \quad (20)$$

容易验证, 如果取

$$\alpha(t) = \frac{\pi}{2} - \arcsin[\tanh(\nu t)], \quad \beta(t) = 2\pi - \alpha(t), \quad (21)$$

可以得到 $X_1(t) = X_2(t) = 0$ 以及 $X_3(t) = \nu$, 从而

$$H_g = \nu J_z. \quad (22)$$

也就是说, 在做规范变换后的新表象, 协变薛定谔方程中的有效哈密顿量不再显含时间, 系统因而具有定态解:

$$|\psi_m^g(t)\rangle = e^{-im\nu t} |m\rangle. \quad (23)$$

这里 $|m\rangle$ 是 J_z 本征态, m 是对应磁量子数. 至此, 原表象中系统动力学基矢的一般表达式可写为

$$\begin{aligned} |\psi_m(t)\rangle &= G(t) |\psi_m^g(t)\rangle \\ &= e^{-im\nu t} e^{i\alpha(t)J_x} e^{i\beta(t)J_y} |m\rangle. \end{aligned} \quad (24)$$

对于二能级系统, 即角动量量子数 $j = \frac{1}{2}$ 的情形, 可以写出

$$\begin{aligned} e^{i\alpha(t)J_x} &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha(t)}{2} & i \sin \frac{\alpha(t)}{2} \\ i \sin \frac{\alpha(t)}{2} & \cos \frac{\alpha(t)}{2} \end{pmatrix}, \\ e^{i\beta(t)J_y} &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta(t)}{2} & \sin \frac{\beta(t)}{2} \\ -\sin \frac{\beta(t)}{2} & \cos \frac{\beta(t)}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (25)$$

从而有:

$$\begin{aligned} |\psi_{\frac{1}{2}}(t)\rangle &= e^{-i\nu t/2} \left[\left(\frac{i-1}{2} \cos \alpha - \frac{i+1}{2} \right) \left| \frac{1}{2} \right\rangle \right. \\ &\quad \left. - \frac{1+i}{2} \sin \alpha \left| -\frac{1}{2} \right\rangle \right], \end{aligned} \quad (26)$$

$$|\psi_1(t)\rangle = e^{-i\nu t} \left\{ \frac{i}{2} [\operatorname{sech}^2(\nu t) - 2i \tanh(\nu t)] |1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} \operatorname{sech}(\nu t) [1 - i \tanh(\nu t)] |0\rangle + \frac{i}{2} \operatorname{sech}^2(\nu t) |-1\rangle \right\},$$

$$|\psi_0(t)\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}} \operatorname{sech}(\nu t) [i + \tanh(\nu t)] |1\rangle + \tanh^2(\nu t) |0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} \operatorname{sech}(\nu t) [-i + \tanh(\nu t)] |-1\rangle,$$

$$|\psi_{-1}(t)\rangle = e^{i\nu t} \left\{ -\frac{i}{2} \operatorname{sech}^2(\nu t) |1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} \operatorname{sech}(\nu t) [1 + i \tanh(\nu t)] |0\rangle + \frac{i}{2} [-\operatorname{sech}^2(\nu t) - 2i \tanh(\nu t)] |-1\rangle \right\}. \quad (30)$$

由上述结果可以看出, 类似于二能级情况, 假如系统初始时刻 $t \rightarrow -\infty$ 处在某一状态 $|\pm 1\rangle$ 或 $|0\rangle$, 在 $t \rightarrow +\infty$ 时系统将回到初始状态 ($|\pm 1\rangle$ 两种状态会多出一相位). 同理, 可以定义跃迁矩阵 $F_{mn}(t) \equiv |\langle \psi_m^{\text{ad}}(t) | \psi_n(t) \rangle|^2$, 其对角元素描述瞬时

$$\begin{aligned} |\psi_{-\frac{1}{2}}(t)\rangle &= e^{i\nu t/2} \left[\frac{1-i}{2} \sin \alpha \left| \frac{1}{2} \right\rangle \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{i-1}{2} - \frac{i+1}{2} \cos \alpha \right) \left| -\frac{1}{2} \right\rangle \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

注意到方程 (21) 式中 $\alpha(t)$ 的表达式, 可以检验这一结果与方程 (14) 式和 (15) 式完全一致.

对于多能级系统, 如 $j = 1$ 和 $j = \frac{3}{2}$ 情形, 变换 $e^{i\beta(t)J_y}$ 的矩阵表达即 d -矩阵 $d_{mn}^j(\beta) \equiv \langle m | e^{i\beta J_y} | n \rangle$ 分别为 [36]

$$d^1 = \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\beta}{2} & \frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} & \sin^2 \frac{\beta}{2} \\ -\frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} & \cos \beta & \frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} \\ \sin^2 \frac{\beta}{2} & -\frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} & \cos^2 \frac{\beta}{2} \end{pmatrix}, \quad (28)$$

及

$$d^{3/2} = \begin{pmatrix} \cos^3 \frac{\beta}{2} & d_{12} & d_{13} & \sin^3 \frac{\beta}{2} \\ -d_{12} & d_{22} & d_{23} & d_{13} \\ d_{13} & -d_{23} & d_{22} & d_{12} \\ -\sin^3 \frac{\beta}{2} & d_{13} & -d_{12} & \cos^3 \frac{\beta}{2} \end{pmatrix}. \quad (29)$$

(29) 式中 $d_{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \beta$, $d_{13} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \beta$, $d_{22} = 3 \cos^3 \frac{\beta}{2} - 2 \cos \frac{\beta}{2}$, $d_{23} = 2 \sin \frac{\beta}{2} - 3 \sin^3 \frac{\beta}{2}$. 再者可以根据上述 d -矩阵与等式 $e^{i\alpha(t)J_x} = e^{i\frac{\pi}{2} J_z} e^{i\alpha(t)J_y} e^{-i\frac{\pi}{2} J_z}$, 获得 $e^{i\alpha(t)J_x}$ 的矩阵表达. 故而规范变换 $G(t)$ 可以用相应 3×3 矩阵及 4×4 矩阵完整表达. 由此相应系统的动力学基矢表达式均可以解析得到. 例如三能级 ($j = 1$) 系统的基矢表达式如下:

绝热态的保留几率, 非对角元则代表非绝热跃迁. 在图 2 中展示了不同初始状态下系统在演化过程中的跃迁几率.

值得指出, 对于更高维度情形, 变换 $e^{i\beta J_y}$ 对应的 d -矩阵也有明确表达式 [36], 故而系统动力学基

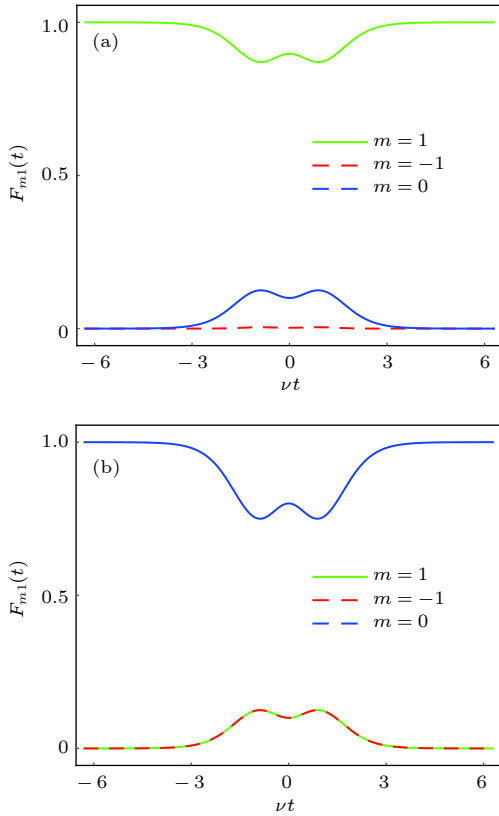


图 2 (a) 初态为 $|1\rangle$ 态时系统演化过程中的非绝热跃迁 $F_{m1}(t)$ ($m=0, \pm 1$)。其中 $|1\rangle \rightarrow |-1\rangle$ 跃迁几率非常小, 在 $t=0$ 时 $F_{-11} \approx 0.0028$; (b) 初态为 $|0\rangle$ 态时系统演化过程中的非绝热跃迁 $F_{m0}(t)$, 其中 $F_{10}(t) = F_{-10}(t)$

Fig. 2. (a) Nonadiabaticity-induced transition of the initial state $|1\rangle$ during the evolution. The transition probability from $|1\rangle$ to $|-1\rangle$ is very small with $F_{-11} \approx 0.0028$ at $t=0$; (b) nonadiabaticity-induced transition of the initial state $|0\rangle$ during the evolution, where $F_{10}(t) = F_{-10}(t)$.

矢原则上都可以解析表达。

3.2 系统的动力学不变量

前面已经得到多能级 Rosen-Zener 模型的精确解。按照代数动力学方法本身^[30], 上述求解过程表明该系统具有 Lewis 动力学不变量

$$\begin{aligned} I(t) &= G(t) J_z G^\dagger(t) \\ &= -\sin \beta(t) J_x + \cos \beta(t) [\sin \alpha(t) J_y \\ &\quad + \cos \alpha(t) J_z], \end{aligned} \quad (31)$$

其中 $\alpha(t), \beta(t)$ 由方程 (21) 式给出。欲检验 $I(t)$ 是否满足

$$i \frac{\partial}{\partial t} I(t) = [H(t), I(t)], \quad (32)$$

可考察其分量方程。记 $I(t) \equiv \mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{J}$, 根据 (21) 式和 (31) 式, 可知

$$\begin{aligned} R_x(t) &= \operatorname{sech}(\nu t), \\ R_y(t) &= \tanh(\nu t) \operatorname{sech}(\nu t), \\ R_z(t) &= \tanh^2(\nu t). \end{aligned} \quad (33)$$

从而可以直接验证 (32) 式的分量方程均成立:

$$\begin{aligned} \dot{R}_x(t) &= -\Omega_z R_y(t), \\ \dot{R}_y(t) &= \Omega_z R_x(t) - \Omega_x(t) R_z(t), \\ \dot{R}_z(t) &= \Omega_x(t) R_y(t). \end{aligned} \quad (34)$$

根据 (31) 式, $I(t)$ 的本征态可表示为 $|\phi_m(t)\rangle = G(t)|m\rangle = e^{i\alpha(t)J_x} e^{i\beta(t)J_y}|m\rangle$ 。对比方程 (24) 式可以看到, $|\phi_m(t)\rangle$ 与 $|\psi_m(t)\rangle$ 仅相差一相位, 此即所谓的 Lewis 总相位^[1,2]:

$$\begin{aligned} \Phi_m(t, t_0) &= \int_{t_0}^t \langle \phi_m(\tau) | i \frac{\partial}{\partial \tau} - H(\tau) | \phi_m(\tau) \rangle \tau \\ &= -m\nu(t - t_0). \end{aligned} \quad (35)$$

4 讨论

哈密顿量 (17) 式存在一个对偶系统:

$$H'(t) = \boldsymbol{\Omega}'(t) \cdot \mathbf{J} = -\nu \operatorname{sech}(\nu t) J_x + \nu J_z. \quad (36)$$

容易检验, 该系统具有如下动力学不变量

$$\begin{aligned} I'(t) &= \sin \beta(t) J_x + \cos \beta(t) \\ &\quad \times [-\sin \alpha(t) J_y + \cos \alpha(t) J_z], \end{aligned} \quad (37)$$

其中 $\alpha(t), \beta(t)$ 仍由方程 (21) 式给出。这一结果可以通过对上面动力学不变量分量方程 (34) 式直接观察得到。实际上, 这样的对偶变换对两分量形式哈密顿量是普适的。由于哈密顿量 $H'(t)$ 与 $H(t)$ 仅 x 分量相差一负号 $\Omega'_x(t) = -\Omega_x(t)$, 只要将不变量算子 x, y 分量做替换 $R_x(t) \rightarrow -R_x(t), R_y(t) \rightarrow -R_y(t)$, 则分量方程 (34) 式仍能成立。上述变换 $I(t) \rightarrow I'(t)$ 相当于将角度参数 $\alpha(t), \beta(t)$ 换成 $-\alpha(t)$ 与 $-\beta(t)$ 。也就是说, 对于上面的对偶哈密顿量 (36) 式, 可以采用规范变换 $G'(t) = e^{-i\alpha(t)J_x} \cdot e^{-i\beta(t)J_y}$, 前述代数动力学求解方法依然有效。

5 结论

本文用代数动力学方法精确求解了一类多能级 Rosen-Zener 模型, 讨论了系统波函数演化、非绝热跃迁以及动力学不变量算子。以往对这类体系基于超几何方程的求解方法难以推广至多能级系统, 我们的方法克服了这一缺点。值得指出的是,

尽管从形式上看代数动力学方法能够普适处理这类含时驱动系统,但是对于具体给定的驱动外场,如何确定规范变换并不是一个平庸的问题. 本文采用了由 J_x 与 J_y 生成元生成的规范变换,形式上与以往采用由 J_y 与 J_z 生成的转动稍有不同. 虽然它们在数学上是等价的,但是本文的做法表明采用不同形式能为求解特定系统带来便利. 这为今后进一步研究含时体系提供了一个可以借鉴的思路.

参考文献

- [1] Lewis H R 1967 *Phys. Rev. Lett.* **18** 510
- [2] Lewis H R, Riesenfeld W B 1969 *J. Math. Phys.* **10** 1458
- [3] Berry M V 2009 *J. Phys. A* **42** 365303
- [4] Demirplak M, Rice S A 2003 *J. Phys. Chem. A* **107** 9937
- [5] Chen X, Lizuain I, Ruschhaupt A, Guery-Odelin D, Muga JG 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 123003
- [6] Bason M G, Viteau M, Malossi N, Huillery P, Arimondo E, Ciampini D, Fazio R, Giovannetti V, Mannella R, Morsch O 2012 *Nat. Phys.* **8** 147
- [7] Cen L X, Li X Q, Yan Y J, Zheng H Z, Wang S J 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 147902
- [8] Zhang J, Shim J H, Niemeyer I, Taniguchi T, Teraji T, Abe H, Onoda S, Yamamoto T, Ohshima T, Isoya J, Suter D 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 240501
- [9] Du Y X, Liang Z T, Li Y C, Yue X X, Lv Q X, Huang W, Chen X, Yan H, Zhu S L 2016 *Nat. Commun.* **7** 12479
- [10] Zhang C L, Liu W W 2018 *Acta Phys. Sin.* **67** 160302 (in Chinese) [张春玲, 刘文武 2018 *物理学报* **67** 160302]
- [11] Yang G, Li W, Cen L X 2018 *Chin. Phys. Lett.* **35** 013201
- [12] Li W, Cen L X 2018 *Ann. Phys.* **389** 1
- [13] Li W, Cen L X 2018 *Quantum Inf. Process.* **17** 97
- [14] Barnes E, Sarma S D 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 060401
- [15] Barnes E 2013 *Phys. Rev. A* **88** 013818
- [16] Landau L D 1932 *Phys. Z. Sowjetunion.* **2** 46
- [17] Zener C 1932 *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **137** 696
- [18] Rosen N, Zener C 1932 *Phys. Rev.* **40** 502
- [19] Rabi I I 1936 *Phys. Rev.* **49** 324
- [20] Rabi I I 1937 *Phys. Rev.* **51** 652
- [21] Zenesini A, Lignier H, Tayebirad G, Radogostowicz J, Ciampini D, Mannella R, Wimberger S, Morsch O, Arimondo E 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 090403
- [22] Wei L F, Johansson J R, Cen L X, Ashhab S, Nori F 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 113601
- [23] Wang L, Zhou C, Tu T, Jiang H W, Guo G P, Guo G C 2014 *Phys. Rev. A* **89** 022337
- [24] McKay D C, Naik R, Reinhold P, Bishop L S, Schuster D I 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 080501
- [25] Thomas G F 1983 *Phys. Rev. A* **27** 2744
- [26] Osherov V I, Voronin A I 1994 *Phys. Rev. A* **49** 265
- [27] Simeonov L S, Vitanov N V 2014 *Phys. Rev. A* **89** 043411
- [28] Ye D F, Fu L B, Liu J 2008 *Phys. Rev. A* **77** 013402
- [29] Li S C, Fu L B, Duan W S, Liu J 2008 *Phys. Rev. A* **78** 063621
- [30] Wang S J, Li F L, Weiguny A 1993 *Phys. Lett. A* **180** 189
- [31] Wang S J, Zuo W 1994 *Phys. Lett. A* **196** 13
- [32] Wang X Q, Cen L X 2011 *Phys. Lett. A* **375** 2220
- [33] Allen L, Eberly J H 1975 *Optical Resonance and Two-Level Atoms* (New York: Dover Press) pp78-109
- [34] Vasilev G S, Vitanov N V 2006 *Phys. Rev. A* **73** 023416
- [35] Lehto J M S, Suominen K A 2016 *Phys. Scr.* **91** 013005
- [36] Wigner E P 1959 *Group Theory and Its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra* (New York: Academic Press) p167

Exact solution to a kind of multi-level Rosen-Zener models

Yao Shao-Wu¹⁾ Cao Hong¹⁾²⁾ Cen Li-Xiang^{1)†}

1) (*Center of Theoretical Physics, College of Physical Science and Technology, Sichuan University, Chengdu 610065, China*)

2) (*School of Material Science and Engineering, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China*)

(Received 13 March 2019; revised manuscript received 29 April 2019)

Abstract

Exact solution to the driven quantum system with an explicitly time-dependent Hamiltonian is not only an issue of fundamental importance to quantum mechanics itself, but also a ubiquitous problem in the design for quantum control. In particular, the nonadiabatic transition induced by the time-dependent external field is often involved in order to target the quantum state for the atomic and molecular systems. In this paper we investigate the exact dynamics and the associated nonadiabatic transition in a typical driven model, the Rosen-Zener model and its multi-level extension, by virtue of the algebraic dynamical method. Previously, this kind of driven models, especially of the two-level case, were solved by converting the corresponding Schrödinger equation to a hypergeometric equation. The property of the dynamical transition of the system was then achieved by the asymptotic behavior of the yielded hypergeometric function. A critical drawback related to such methods is that they are very hard to be developed so as to treat the multi-level extension of the driven model. Differing from the above mentioned method, we demonstrate that the particular kind of the Rosen-Zener model introduced here could be solved analytically via a canonical transformation or a gauge transformation approach. In comparison, we show that the present method at least has two aspects of advantages. Firstly, the method enables one to describe the evolution of the wavefunction of the system analytically over any time interval of the pulse duration. Moreover, we show that the method could be exploited to deal with the multi-level extensions of the model. The explicit expression of the dynamical basis states, including the three-level system and the four-level system, is presented and the transition probabilities induced by the nonadiabatic evolution among different levels are then characterized for the model during the time evolution. In addition, our study reveals further that the dual model of the driven system can be constructed. Since the dynamical invariant of a solvable system can always be obtained within the framework of the algebraic dynamical method, the general connection between the dual model and the original one, including the solvability and their dynamical invariants, are established and characterized distinctly.

Keywords: Rosen-Zener model, canonical transformation, nonadiabaticity-induced transition, dynamical invariant

PACS: 32.80.Qk, 03.65.Fd

DOI: [10.7498/aps.68.20190353](https://doi.org/10.7498/aps.68.20190353)

† Corresponding author. E-mail: lixiangcen@scu.edu.cn