

基于现场可编程逻辑门阵列的磁控忆阻电路对称动力学行为分析

吕晏旻 闵富红

Dynamic analysis of symmetric behavior in flux-controlled memristor circuit based on field programmable gate array

Lü Yan-Min Min Fu-Hong

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 68, 130502 (2019) DOI: 10.7498/aps.68.20190453

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190453>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

磁控二氧化钛忆阻混沌系统及现场可编程逻辑门阵列硬件实现

A memristor-based chaotic system and its field programmable gate array implementation

物理学报. 2016, 65(12): 120503 <https://doi.org/10.7498/aps.65.120503>

基于串并联磁控忆阻器的耦合行为研究

Research of coupling behavior based on series-parallel flux-controlled memristor

物理学报. 2015, 64(23): 237303 <https://doi.org/10.7498/aps.64.237303>

基于忆阻器的数模混合随机数发生器

A digital-analog hybrid random number generator based on memristor

物理学报. 2015, 64(24): 240503 <https://doi.org/10.7498/aps.64.240503>

基于忆阻器反馈的Lorenz超混沌系统及其电路实现

Memristor-based Lorenz hyper-chaotic system and its circuit implementation

物理学报. 2016, 65(19): 190502 <https://doi.org/10.7498/aps.65.190502>

一种数据非易失性、多功能和可编程的自旋逻辑研究进展

Recent progress of nonvolatile, multifunctional and programmable spin logic

物理学报. 2018, 67(12): 127201 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180906>

五阶压控忆阻蔡氏混沌电路的双稳态性

Bistability in fifth-order voltage-controlled memristorbased Chua's chaotic circuit

物理学报. 2018, 67(23): 230502 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20181283>

# 基于现场可编程逻辑门阵列的磁控忆阻电路对称动力学行为分析\*

吕晏旻 闵富红†

(南京师范大学电气与自动化工程学院, 南京 210023)

(2019年3月29日收到; 2019年4月16日收到修改稿)

将含绝对值项的磁控忆阻器引入改进型蔡氏电路, 构建新型磁控忆阻混沌电路, 通过分岔图与 Lyapunov 指数谱创新性地观察到系统的对称分岔行为, 揭示系统双参数平面内运动状态分布的对称性. 同时, 基于忆阻电路参数-初值平面的系统运动分布图, 分析对称吸引域内系统的多稳态特性, 相图的绘制进一步证明电路多稳态现象的存在性. 此外, 应用现场可编程逻辑门阵列完成电路实验, 在数字示波器上捕捉实验结果, 证明所构磁控忆阻电路的物理可实现性.

**关键词:** 磁控忆阻系统, 对称动力学行为, 多稳态特性, 现场可编程逻辑门阵列

**PACS:** 05.45.-a

**DOI:** 10.7498/aps.68.20190453

## 1 引言

忆阻器是一种具有记忆功能的非线性元件, 它的提出弥补了磁通与电荷间关系的缺失<sup>[1]</sup>, 其作为一种非线性二端口元件, 适用于构建混沌振荡电路并产生复杂的非线性现象. 但是, 从 1971 年蔡少棠教授提出忆阻这一概念以来, 忆阻器就因其物理工艺难度大、制造成本高等缺点, 不适用于作为实用电路中的分立元件<sup>[2]</sup>. 因此, 关于建立各类忆阻器等效电路或替代模型, 构建忆阻混沌电路的研究相继广泛开展<sup>[3-7]</sup>. 忆阻模型的建立主要有两种思路, 其一是基于惠普实验室的一类忆阻模型, 研究最为广泛的是 HP  $\text{TiO}_2$  线性参杂漂移模型<sup>[3]</sup> 和 HP  $\text{TiO}_2$  非线性窗函数忆阻模型<sup>[4]</sup>; 其二是根据忆阻原始定义构建的二次非线性模型<sup>[5]</sup>、分段线性模型<sup>[6]</sup>、三次非线性模型<sup>[7]</sup>等. 而将第二类忆阻器引入各类经典混沌系统, 如蔡氏电路<sup>[8]</sup>、Loren 系统<sup>[9]</sup>、

Jerk 电路<sup>[10]</sup> 和文氏桥振荡器<sup>[11]</sup> 等, 是构建忆阻混沌系统最常见的方法之一.

较常规混沌系统而言, 忆阻混沌系统会产生特殊且丰富的非线性动力学行为, 因此有关忆阻系统的非线性动力学研究也已广泛开展<sup>[12-17]</sup>. 近年来, 随着研究的深入, 学者们也提出并定义了一些忆阻电路所特有的新的非线性现象, 如隐藏吸引子<sup>[12]</sup>、自激吸引子<sup>[13]</sup> 及反单调特性<sup>[14]</sup> 等. 其中, 文献<sup>[12]</sup> 构造了一个新型超混沌四维忆阻电路, 针对该电路中存在的无限隐藏多吸引子共存现象进行分析. 为了区别于隐藏吸引子的概念, 文献<sup>[13]</sup> 将传统连续混沌系统中由不稳定鞍焦点产生的吸引子定义为自激吸引子. 文献<sup>[14]</sup> 基于忆阻自激振荡的 jerk 电路, 观察到一些新的特殊非线性现象, 即反单调特性、周期窗与混沌危机. 当然, 多稳态是许多非线性系统中的典型现象<sup>[18-21]</sup>, 也是近年来研究的热点之一. 它解释了系统中多吸引子的共存现象, 表现为在相同系统参数下改变不同的初值, 系统拥

\* 国家自然科学基金 (批准号: 61871230) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: minfuhong@njnu.edu.cn

有多个不同拓扑结构吸引子, 如左右混沌/超混沌、极限环或小周期等共存现象<sup>[18]</sup>. 当这种共存吸引子的数量趋于无穷时便被认为是无穷多吸引子的共存, 研究者们将这种现象称之为超级多稳态<sup>[19]</sup>. 同时, 忆阻系统中的多稳定性可被作为信息应用工程的外加信号源<sup>[22]</sup>, 或用于图像加密处理<sup>[23]</sup>, 因此研究此类忆阻混沌系统的实现方法和多稳态现象具有理论意义与工程价值.

以上所述, 均为目前报道过的忆阻系统中丰富且复杂的动力学行为. 本文将二次非线性磁控忆阻模型引入改进型蔡氏电路<sup>[24]</sup>, 构建新型四维忆阻系统, 观察到忆阻电路中的对称动力学行为, 这一行为在之前极少被报道. 文献<sup>[25,26]</sup>根据忆阻系统对称性出现时的极性平衡需求, 提出极性调整与偏置控制的方法来构建更为多样的对称忆阻系统及繁殖吸引子. 因此, 对系统自身存在的对称行为进行分析是具有物理意义的, 也可为后续控制与应用打下基础. 本文提出的忆阻电路模型简单且规

整, 通过分岔图与 Lyapunov 指数谱等非线性分析手段, 观察到特定系统参数下特殊的对称分岔行为. 随后, 通过双参数映射图进一步探讨这种特殊对称行为的存在性. 对称域内多吸引子共存的多稳态现象则通过对应参数-初值平面内的运动状态分布图展现, 并使用混沌与周期的相轨迹图验证. 最后, 利用现场可编程逻辑门阵列 (field programmable gate array, FPGA) 实现所构四维忆阻系统. 结合“Modelsim”与“ISE Design Suite”软件, 完成数字电路实验, 其结果也验证数值仿真的正确性.

## 2 电路模型

以改进型蔡氏系统<sup>[24]</sup>为基础, 构建一个基于绝对值忆阻模型的新型磁控忆阻混沌电路, 整体电路方案如图 1(a) 所示. 图 1(b) 是磁控忆阻模型的等效电路原理图<sup>[27]</sup>, 其端口的对外特性与二次非线性的有源磁控忆阻器等效.

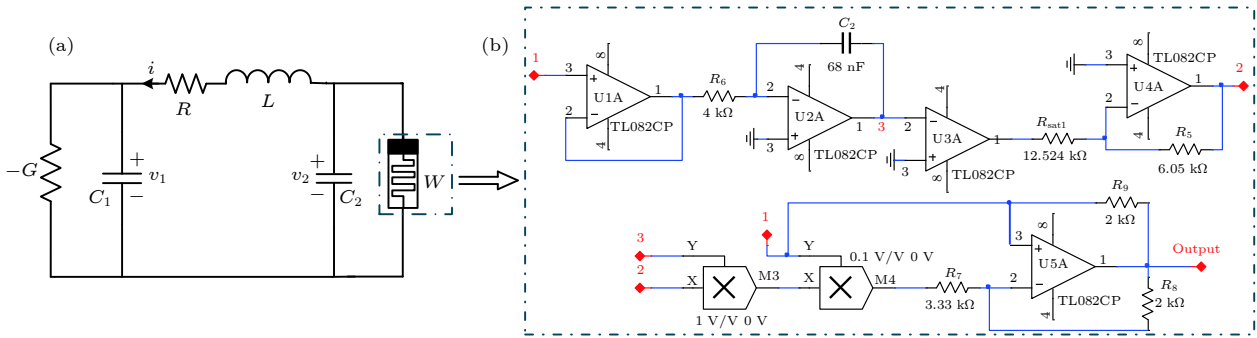


图 1 电路模型 (a) 磁控忆阻电路; (b) 磁控忆阻等效电路

Fig. 1. Circuit schematic: (a) Flux-controlled memristor circuit; (b) equivalent circuit of flux-controlled memristor.

表 1 系统参数

Table 1. The value of system parameters.

参数	数值	参数	数值
$a$	1	$\xi$	0.12
$b$	3.5	$\alpha$	0.3
$c$	1	$\beta$	0.8
$\gamma$	0.86		

在图 1(a) 中, 改进型磁控忆阻电路由四个一阶非线性微分方程表示, 其对应的四个状态变量分别为电压  $v_1$ 、电压  $v_2$ 、电流  $i$  和磁通  $\varphi$ , 这四个变量代表四个电路元件  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $L$  和忆阻器  $W(\varphi)$  的电压-电流或磁通-电荷关系. 根据基尔霍夫定律,

图 1(a) 所对应的状态方程如下

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dt} = \frac{1}{C_1} (i + Gv_1), \\ \frac{dv_2}{dt} = -\frac{1}{C_2} (i + W(\varphi)v_2), \\ \frac{di}{dt} = \frac{1}{L} (v_2 - v_1 - Ri), \\ \frac{d\varphi}{dt} = -v_2, \end{cases} \quad (1)$$

(1) 式中磁控忆阻器的忆导方程如 (2) 式, 其中  $\alpha$  和  $\beta$  为两个正忆阻参数值.

$$W(\varphi) = dq(\varphi)/d\varphi = -\alpha + \beta|\varphi|. \quad (2)$$

在无量纲化过程中, 新的状态变量与系统参数在 (3) 式中给出:

$$\begin{aligned} x &= v_1, y = v_2, z = i, w = \varphi, \\ a &= 1/C_1, b = -1/C_2, c = 1/L, \gamma = G, \zeta = R. \end{aligned} \quad (3)$$

根据 (1) 式对应的电路状态方程, 可得到 (4) 式描述的数学模型, 其中  $W(w) = -\alpha + \beta|w|$  是忆阻器的归一化模型.

$$\begin{cases} \dot{x} = a(\gamma x + z), \\ \dot{y} = -b(z + W(w)y), \\ \dot{z} = c(y - x - \xi z), \\ \dot{w} = -y. \end{cases} \quad (4)$$

后续分析将以 (4) 式所描述的数学模型为基础, 系统参数设置如表 1. 初值设置为  $(10^{-9}, 0, 0, 0)$ , 图 2(a) 为  $y-z$  平面上双涡卷混沌吸引子相图. 图 2(b) 展现  $y-z$  平面上对应的 Poincaré 截面图, 呈现的曲线是连续的, 证明该系统是混沌的.

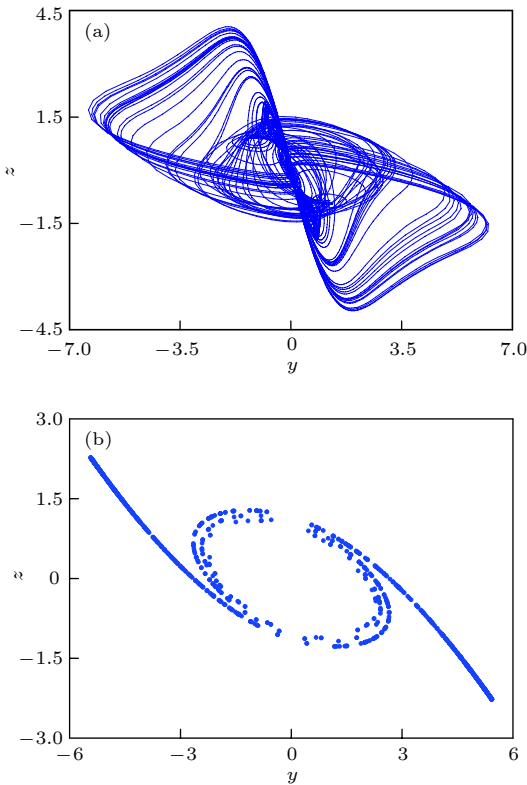


图 2  $y-z$  平面上典型混沌吸引子的相图与 Poincaré 截面图 (a) 相图; (b) Poincaré 截面图  
Fig. 2. Phase portrait and Poincaré map of typical chaotic attractor in  $y-z$  plane: (a) Phase portrait; (b) Poincaré map.

### 3 动力学行为分析

#### 3.1 对称共存分岔

为了讨论不同参数下系统 (4) 的动力学机理, 随参数  $\gamma, c$  变化的分岔图与 Lyapunov 指数谱分

别在图 3 和图 4 中给出, 其他系统参数的选择如表 1 所示. 将仿真初值设置为接近于原点的  $(\pm 10^{-9}, 0, 0, 0)$ , 可最大程度地降低初值对系统动力学行为的影响. 图 3(a) 与图 4(a) 中两重叠的分岔轨迹展现的是状态变量  $x_{\max}$  随参数  $\gamma, c$  的变化趋势, 其中蓝红两色点分别对应初值  $(10^{-9}, 0, 0, 0)$  及  $(-10^{-9}, 0, 0, 0)$ . 其次, 由于取相反初值时 Lyapunov 指数谱是大致相同的, 因此图 3(b) 和图 4(b) 仅给出正初值  $(10^{-9}, 0, 0, 0)$  对应的 Lyapunov 指数谱.

观察图 3(a) 可知, 参数  $\gamma$  在  $(0.704, 0.808)$  范围内变化时, 系统 (4) 处在周期态. 当参数  $\gamma \in (0.808, 0.829) \cup (0.845, 0.9)$ , 四阶忆阻系统 (4) 产生混沌吸引子, 而且图 3(b) 中对应的最大 Lyapunov 指数大于零. 随后, 观察图 4(b) 的 Lyapunov 指数谱发现  $0.9 \leq c \leq 1.13$  时大部分最大 Lyapunov 指数均大于 0, 即系统处在混沌态, 同时运动过程中有多个周期窗出现. 参数  $c$  在  $(1.13, 1.41)$  或  $(1.41, 1.5)$  区间内增加时, 系统分别产生周期轨迹与稳定不动点, 两区间内相应的 Lyapunov 指数如图 4(b) 所示, 分别为零值与小于零的值. 系统动力学状态与具体区间分布如表 2 所列. 总体而言, 随参数  $\gamma$  在 0.66 到 0.9 内增加, 新型忆阻系统从稳定不动点过渡到周期态, 后又通过多个倍周期分岔进入混沌态. 值得注意的是, 在参数  $c$  的变化范围内, 系统所呈现的动力学行为与参数  $\gamma$  变化时大致相反. 换言之, 随这两种不同参数变化时, 系统分岔行为呈现对称性. 当参数  $c$  从 0.9 开始增加时, 系统最先处在混沌状态, 随后经过反向倍周期分岔进入周期, 最后系统运动变为稳定不动点.

#### 3.2 双参数平面的运动分布

通过双参数吸引盆讨论系统参数对运动状态分布对称性的影响. 系统 (4) 初值固定在  $(10^{-9}, 0, 0, 0)$ , 相关系统参数取值依据表 1, 可得到图 5 的双参数吸引盆. 参数组合  $\gamma - b, c - b, \gamma - \xi$  与  $c - \xi$  所对应的运动状态分布分别在图 5(a) — (d) 中展现, 各种系统动力学行为用不同颜色标注, 紫色为稳定不动点, 蓝色为周期 1, 绿色描述周期 2, 黄色代表周期 3, 红色为复杂运动, 具体内容见表 3. 值得指出的是, 被命名为“复杂运动”的红色区域, 包含大于周期 3 的多周期与混沌运动.

观察图 5 可知, 系统 (4) 拥有丰富的动力学行为和典型的非线性电路运动特征, 即稳定不动点、

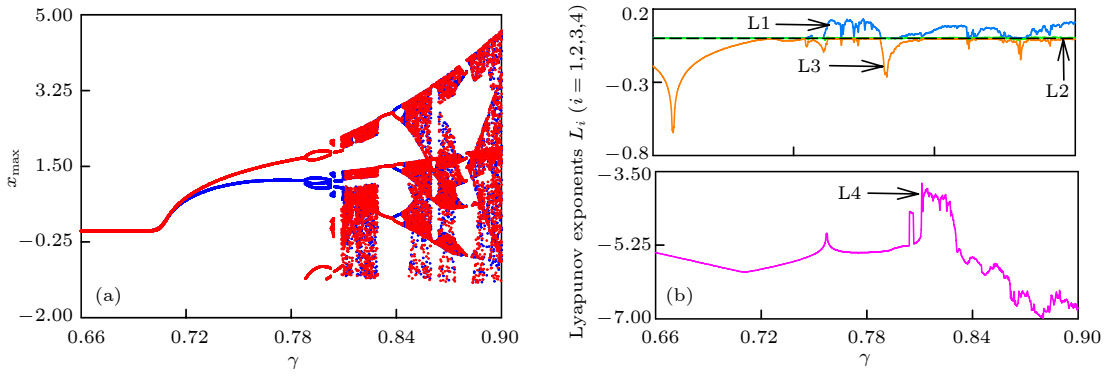


图 3 随参数  $\gamma$  变化的分岔图与 Lyapunov 指数谱 (a) 分岔图; (b) Lyapunov 指数谱

Fig. 3. Bifurcation and Lyapunov exponent spectrum with parameter  $\gamma$ : (a) Bifurcation diagram; (b) Lyapunov exponent spectrum.

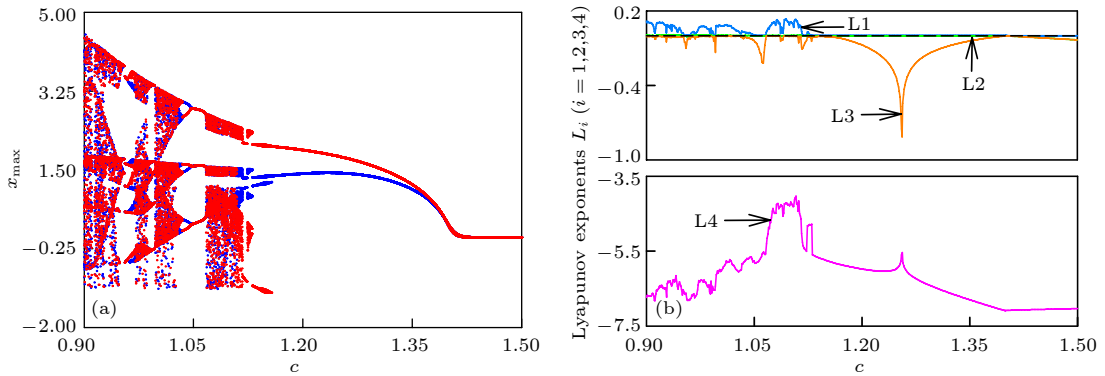


图 4 随参数  $c$  变化的分岔图与 Lyapunov 指数谱 (a) 分岔图; (b) Lyapunov 指数谱

Fig. 4. Bifurcation and Lyapunov exponent spectrum with parameter  $c$ : (a) Bifurcation diagram; (b) Lyapunov exponent spectrum.

表 2 参数  $\gamma, c$  变化时系统运动状态与对应的 Lyapunov 指数

Table 2. The dynamic behavior and Lyapunov exponent with parameter  $\gamma$  and  $c$ .

参数 $\gamma$	运动状态	Lyapunov 指数
(0.66, 0.704)	稳定不动点	(-, -, -, -)
(0.704, 0.808) $\cup$ (0.829, 0.845)	周期运动	(+, -, -, -)
(0.808, 0.829) $\cup$ (0.845, 0.9)	复杂运动(混沌, 多周期)	(+, 0, -, -)
参数 $c$	运动状态	Lyapunov 指数
(0.9, 1.02) $\cup$ (1.07, 1.13)	复杂运动(混沌, 多周期)	(+, 0, -, -)
(1.02, 1.07) $\cup$ (1.13, 1.41)	周期运动	(+, -, -, -)
(1.41, 1.5)	稳定不动点	(-, -, -, -)

周期态与混沌态. 为了方便分析与讨论, 将图 5(a)、图 5(b) 与图 5(c)、图 5(d) 分为两组, 分别命名为组 I 和组 II, 发现同组中的吸引盆是对称的. 当参数  $\gamma \in (0.66, 0.86)$ , 不论另一变化参数取值如何, 系统总是依次历经不动点、周期与混沌三种运动. 而参数  $c$  从 1.0 增加到 1.5 的过程中, 吸引域分布从混沌到周期, 再过渡到稳定不动点. 这意味着双参数平面内运动分布的对称性依然是由于参数  $\gamma, c$  下系统演变趋势的相反性, 同时其他系统参数的取值对这种对称性影响甚微. 若将两组吸引盆进行

组间比较会发现, 组 II 的系统运动分布呈现类带状, 而组 I 的吸引域分布是不规则的, 这种不规则态在混沌与周期交叠区域更为明显. 结合图 1(a) 所示电路模型可知, 组 I 内的另一变化参数  $b$  代表电路中电容  $C_2$ , 组 II 参数  $\xi$  则表示电阻  $R$  的值. 这表明, 当选择不同参数变量时, 系统的运动状态分布会呈现出明显的差异性. 另外, 组 II 稳定不动点的区域更多, 占到总体的 2/3 左右, 但组 I 中的不动点区域仅占总体的 1/4. 组 I 内更大的绿色及黄色范围也说明, 系统在参数  $\gamma - b$  或  $c - b$  组合下,

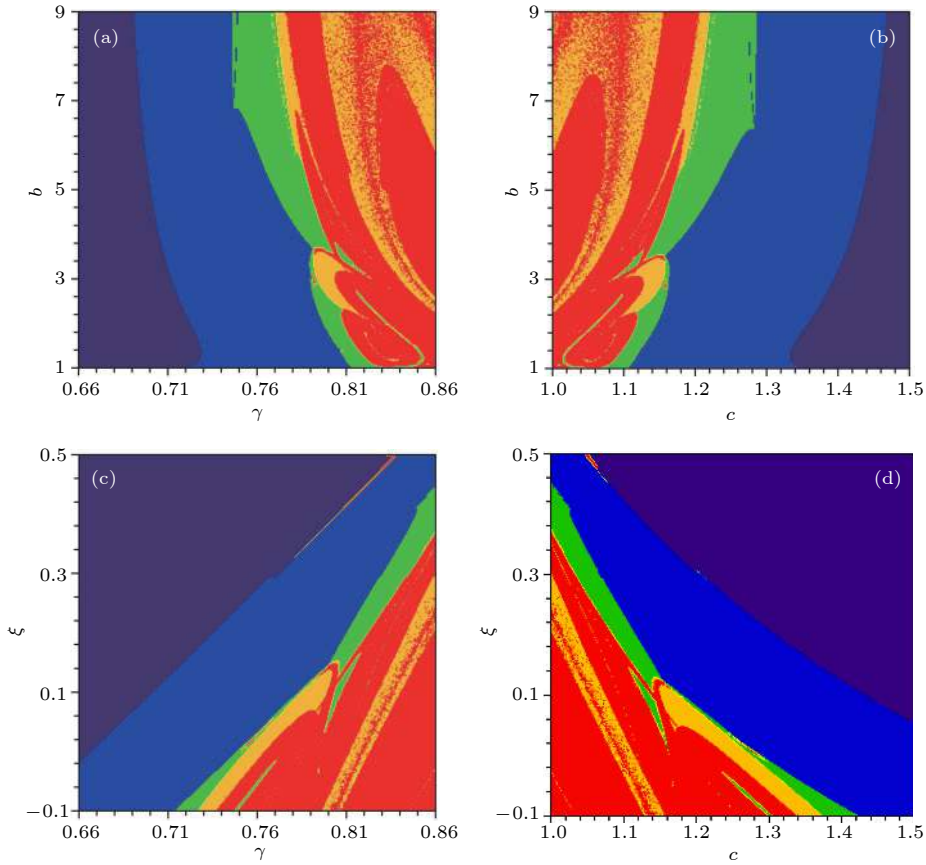


图 5 双参数吸引盆 (a) 参数  $\gamma - b$ ; (b) 参数  $c - b$ ; (c) 参数  $\gamma - \xi$ ; (d) 参数  $c - \xi$

Fig. 5. Parameter mappings: (a) Parameter  $\gamma$  and  $b$ ; (b) parameter  $c$  and  $b$ ; (c) parameter  $\gamma$  and  $\xi$ ; (d) parameter  $c$  and  $\xi$ .

表 3 不同颜色所对应的系统运动状态

Table 3. Colors and the corresponding system states.

颜色	系统运动
紫色	稳定不动点
蓝色	周期1
绿色	周期2
黄色	周期3
红色	复杂运动(混沌, 多周期)

出现以周期 2, 3 为代表的小周期运动的可能性更高. 综上, 系统运动的对称性不会被其他参数变化破坏, 但是吸引域的分布特性会受另一参数变量选择的影响.

当然, 图 5 所呈现的双参数吸引盆在红黄两色区域中的重叠散点也是值得注意的. 由于分布对称性的存在, 参数  $\gamma \in (0.81, 0.86)$  且  $b \in (6, 9)$  或参数  $c \in (1, 1.1)$  且  $b \in (6, 9)$  时, 散点尤为明显. 这表明这两块区域内, 该忆阻系统的运动切换更为频繁, 且吸引子结构稳定性差. 然而, 图 5(c) 和图 5(d) 内的散点较少, 系统会出现完整且稳定的红色区块.

这意味着参数  $\gamma - \xi$  及  $c - \xi$  组合下, 该忆阻系统具有更好的混沌特性及鲁棒性, 并且混沌吸引子结构更为稳定. 如果选择所提出的系统 (4) 作为随机信号发生器或用来产生信息加密的密钥, 在参数范围  $\gamma \in (0.81, 0.86) \cup \xi \in (-0.1, 0.13)$  或  $c \in (1, 1.1) \cup \xi \in (-0.1, 0.13)$  内选择参数值可得到更好的应用效果.

### 3.3 对称域内的多稳态特性

这里主要讨论特定参数下对称多稳态现象的存在性, 以及依赖于初值的多吸引子共存现象. 随  $\gamma - x(0)$  与  $c - x(0)$  变化的吸引子分布分别在图 6(a) 和图 6(b) 中给出, 初始条件设置为  $(x(0), 0, 0, 0)$ , 其中  $x(0)$  为非忆阻初值. 当然, 忆阻系统 (4) 对于忆阻初值的变化十分敏感, 因此在图 7 中给出  $\gamma - w(0)$  及  $c - w(0)$  平面上的吸引盆,  $w(0)$  为忆阻初值, 其中图 7(a) 和图 7(b) 初值为  $(-10^{-9}, 0, 0, w(0))$ . 之后, 为了分析的完整性, 图 7(c) 和图 7(d) 选择相反初值  $(10^{-9}, 0, 0, w(0))$ . 不同颜色区域描述多种形态的共存吸引子, 包括紫色描述的点吸引子、浅蓝与深蓝标注的左右共存周期 1、绿色

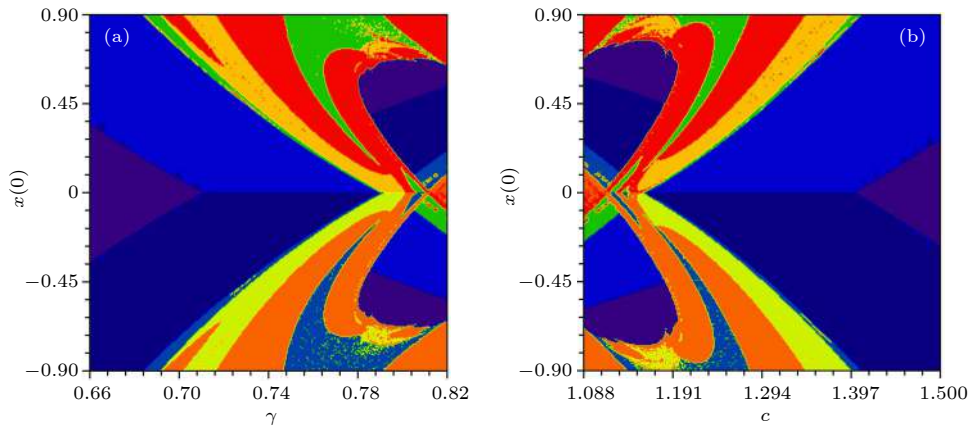


图 6 不同变量组合下的共存吸引盆 (a)  $\gamma - x(0)$  平面, 初始条件为  $(x(0), 0, 0, 0)$ ; (b)  $c - x(0)$  平面, 初始条件为  $(x(0), 0, 0, 0)$

Fig. 6. Attraction basins of coexistence in different planes: (a)  $\gamma - x(0)$  plane, with initial value of  $(x(0), 0, 0, 0)$ ; (b)  $c - x(0)$  plane, with initial value of  $(x(0), 0, 0, 0)$ .

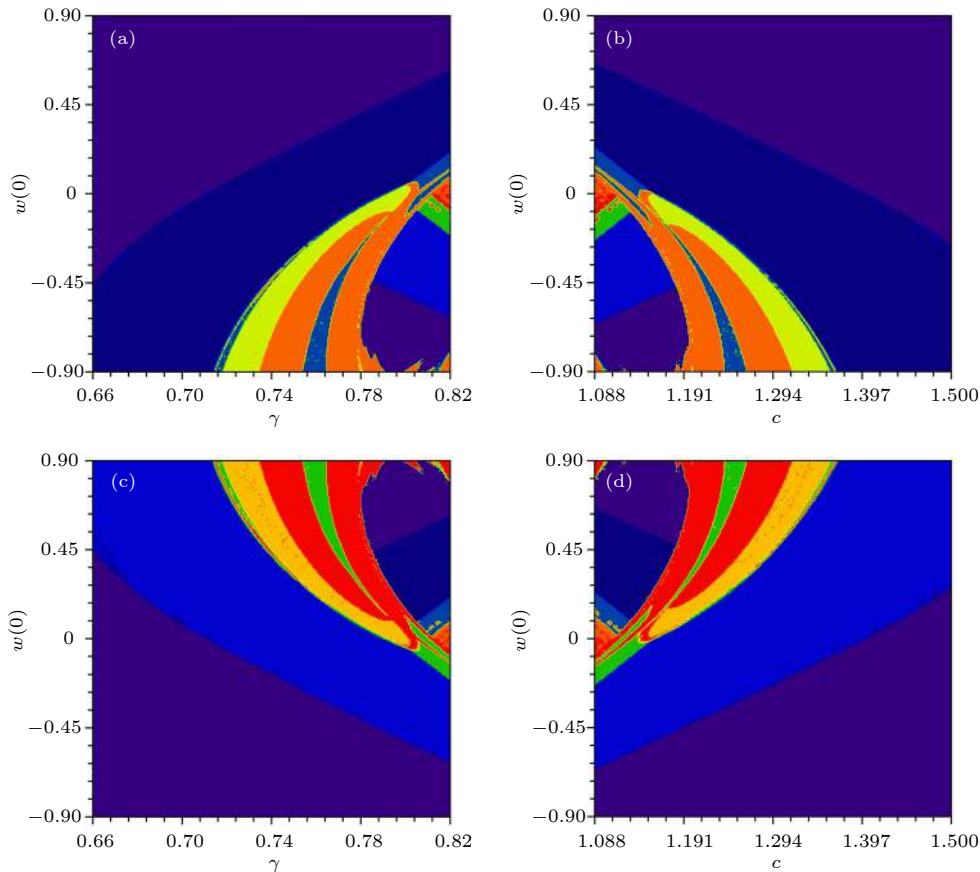


图 7 不同变量组合下系统状态分布图 (a)  $\gamma - w(0)$  平面, 初始条件为  $(-10^{-9}, 0, 0, w(0))$ ; (b)  $c - w(0)$  平面, 初始条件为  $(-10^{-9}, 0, 0, w(0))$ ; (c)  $\gamma - w(0)$  平面, 初始条件为  $(10^{-9}, 0, 0, w(0))$ ; (d)  $c - w(0)$  平面, 初始条件为  $(10^{-9}, 0, 0, w(0))$

Fig. 7. Attraction basins of coexistence in different planes: (a)  $\gamma - w(0)$  plane, with initial value of  $(-10^{-9}, 0, 0, w(0))$ ; (b)  $c - w(0)$  plane, with initial value of  $(-10^{-9}, 0, 0, w(0))$ ; (c)  $\gamma - w(0)$  plane, with initial value of  $(10^{-9}, 0, 0, w(0))$ ; (d)  $c - w(0)$  plane, with initial value of  $(10^{-9}, 0, 0, w(0))$ .

与青色表示的左右周期 2、黄色与草绿描述的左右共存周期 3 及红橙两色标注的左右共存复杂运动, 具体内容如表 4. 需要指出的是, 图中仅有 9 种颜

色, 即 9 种状态被区分. 事实上, 在不同初始条件下, 系统中存在多种不同拓扑结构的吸引子, 这意味着该忆阻系统中存在多稳态或极端多稳态现象.

表 4 运动状态与色标的对应表

Table 4. Different colors and the corresponding dynamical state.

颜色	浅蓝	绿色	黄色	红色	紫色
共存类型	左侧周期1	左侧周期2	左侧周期3	左侧复杂运动(左侧多周期, 混沌)	稳定不动点
颜色	深蓝	青色	草绿	橙色	
共存类型	右侧周期1	右侧周期2	右侧周期3	右侧复杂运动(右侧多周期, 混沌)	

观察图 6 和图 7 所展示的吸引盆, 发现两种类型的对称特性. 其一, 系统运动分布关于相反初值存在对称性. 其二, 在参数  $\gamma, c$  的相应变化范围内, 系统共存吸引子的分布域也是大致对称的. 图 6(a), 图 7(a) 和图 7(c) 所展现的均是随参数  $\gamma$  变化的多吸引子共存现象, 系统总体运动呈现周期到混沌的趋势. 由于特殊参数下的对称性, 系统随参数  $c$  的运动行为与参数  $\gamma$  变化时相反, 如图 6(b), 图 7(b) 和图 7(d) 所示, 这与图 3、图 4 中单参数变化情况一致. 当  $0.708 \leq \gamma \leq 0.82$  时, 可以找到九种不同结构的共存吸引子. 同样地, 在  $1.048 \leq c \leq 1.37$  范围内, 系统也出现 9 种吸引子共存现象. 通过共存相图进一步验证这种多稳态现象的存在性, 按照上述

吸引盆所呈现的运动状态分布, 选择特殊参数下的不同初值绘制出具有多种拓扑结构的共存吸引子. 图 8 和图 9 展示的相轨迹图分别与吸引盆图 6(a)、图 7(a) 和图 7(c) 对应, 图 10、图 11 则对应吸引盆图 6(b)、图 7(b) 及图 7(d), 相应的初值设置见表 5. 其中, 图 8 与图 10 固定参数  $\gamma = 0.74$ , 其他参数按表 1 设置, 得到不同结构的吸引子类型. 特殊的是, 图 10 完整展现吸引盆所区分的 9 种共存吸引子类型, 包括稳定不动点及左右共存周期 1、周期 2、周期 3 和混沌, 其对应的初值分别为  $(\pm 10^{-9}, 0, 0, \mp 0.45)$ ,  $(\pm 10^{-9}, 0, 0, 0)$ ,  $(\pm 10^{-9}, 0, 0 \pm 0.45)$ ,  $(\pm 10^{-9}, 0, 0 \pm 0.5)$  及  $(\pm 10^{-9}, 0, 0, \pm 0.9)$ . 此外, 取参数  $c = 1.274$ , 选取初值  $(\pm 0.45, 0, 0, 0)$ ,  $(\pm 0.8, 0, 0, 0)$  及  $(\pm 0.1, 0,$

表 5 不同初值对应的共存多吸引子类型

Table 5. Coexisting multiple attractor with different initial condition.

参数	吸引子类型	初始条件
$\gamma = 0.74$	左右共存点吸引子	$(\pm 10^{-9}, 0, 0, \mp 0.45)$
	左右共存周期1	$(\pm 0.1, 0, 0, 0), (\pm 10^{-9}, 0, 0, \pm 0.45)$
	左右共存周期2, 左右共存周期3	$(\pm 10^{-9}, 0, 0, \pm 0.45), (\pm 0.4, 0, 0, 0), (\pm 10^{-9}, 0, 0 \pm 0.5)$
	左右共存混沌	$(\pm 0.8, 0, 0, 0), (\pm 10^{-9}, 0, 0, \pm 0.9)$
$c = 1.274$	左右共存点吸引子	$(\pm 10^{-9}, 0, 0, \mp 0.45)$
	左右共存周期1	$(\pm 0.1, 0, 0, 0), (\pm 10^{-9}, 0, 0, 0)$
	左右共存周期3	$(\pm 0.45, 0, 0, 0), (\pm 10^{-9}, 0, 0 \pm 0.45)$
	左右共存混沌	$(\pm 0.8, 0, 0, 0), (\pm 10^{-9}, 0, 0, \pm 0.9)$

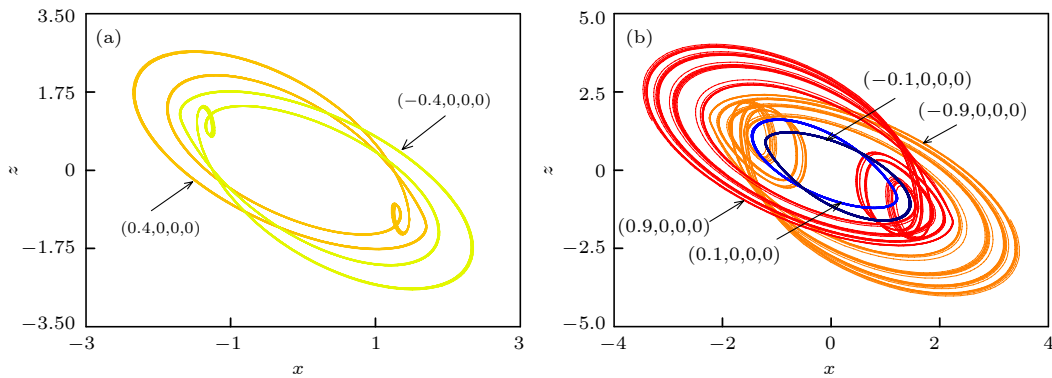


图 8 参数  $\gamma = 0.74$ ,  $x - z$  平面上不同初值下的多种共存吸引子 (a) 左右共存周期 3; (b) 左右共存混沌与左右共存周期 1

Fig. 8. For different initial value, phase diagram of coexisting attractors in  $x - z$  planes when  $\gamma = 0.74$ : (a) Coexisting attractors of period-3; (b) coexisting attractors of chaos and period-1.



0, 0) 可得到图 9 所呈现的周期 3, 混沌与周期 1 吸引子相图; 相图 11 所展示的左右点吸引子, 左右周期 1, 与左右混沌对应的初值分别为  $(\pm 10^{-9}, 0, 0, \pm 0.45)$ ,  $(\pm 10^{-9}, 0, 0, 0)$  及  $(\pm 10^{-9}, 0, 0, \pm 0.9)$ .

由于该忆阻系统吸引域分布对称性的存在, 图 9 及图 11 两张图所展现的吸引子运动相轨迹与图 8、图 10 相一致, 但其呈现形态又因初值的微小差别而不同. 需要指出的是, 从吸引盆的分布情况看出,

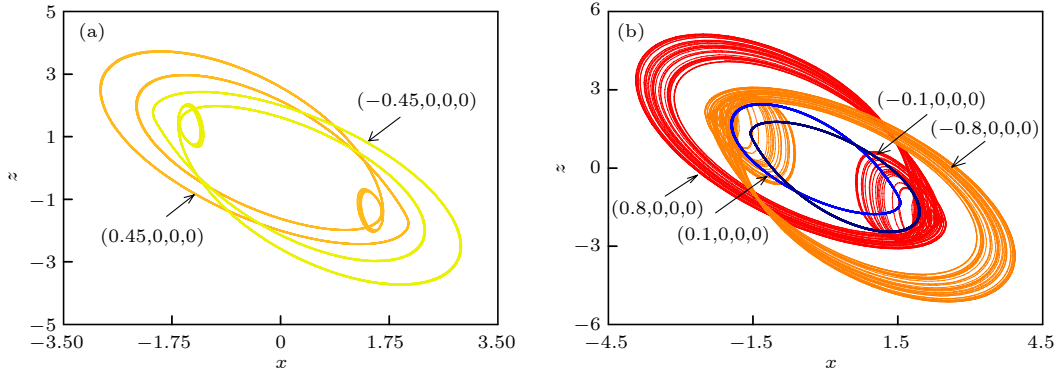


图 9 参数  $c = 1.274$ ,  $x - z$  平面上不同初值下的多种共存吸引子 (a) 左右共存周期 3; (b) 左右共存混沌与左右共存周期 1  
 Fig. 9. For different initial value, phase diagram of coexisting attractors in  $x - z$  planes when  $c = 1.274$ : (a) Coexisting attractors of period-3; (b) coexisting attractors of chaos and period-1.

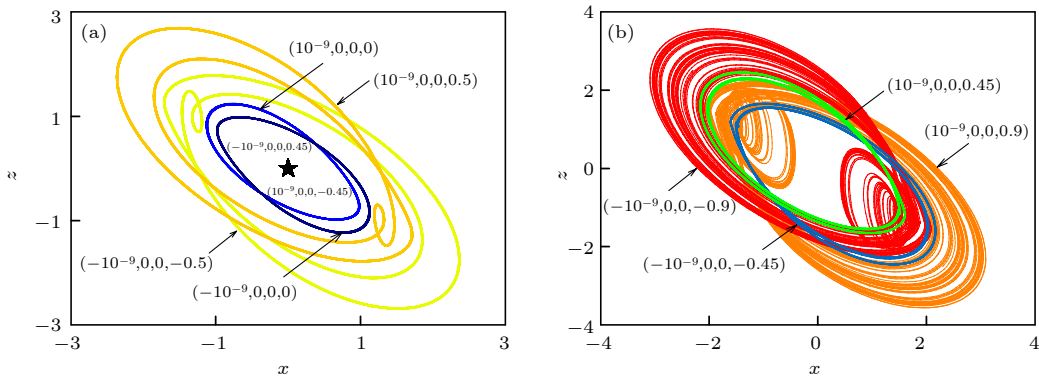


图 10 参数  $\gamma = 0.74$ ,  $x - z$  平面上不同初值下的多种共存吸引子 (a) 左右共存周期 3、左右共存周期 1 与稳定不动点; (b) 左右共存混沌与左右共存周期 2  
 Fig. 10. For different initial value, phase diagram of coexisting attractors in  $x - z$  planes when  $\gamma = 0.74$ : (a) Coexisting attractors of period-3, period-1 and fixed point; (b) coexisting attractors of chaos and period-2.

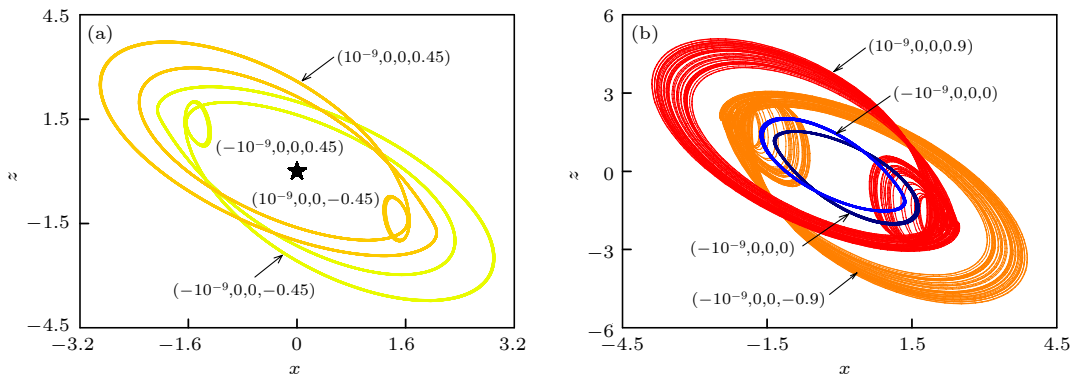


图 11 参数  $c = 1.274$ ,  $x - z$  平面上不同初值下的多种共存吸引子 (a) 左右共存周期 3 与稳定不动点; (b) 左右共存混沌与左右共存周期 1  
 Fig. 11. For different initial value, phase diagram of coexisting attractors in  $x - z$  planes when  $c = 1.274$ : (a) Coexisting attractors of period-3 and fixed point; (b) coexisting attractors of chaos and period-1.

选择的两种固定参数下周期 2 的状态较少, 因此仅在图 10(b) 中展现, 表明在忆阻系统 (4) 中此状态确实存在.

综上, 通过相轨图与吸引盆相互验证, 可证明多稳态现象的存在性. 当然, 由于该系统依赖于初值的极端敏感, 不同参数取值下, 系统 (4) 会出现更多乃至无穷多具有不同拓扑结构的吸引子, 且这些吸引子具有多种统计特性, 即多样的动力学特征. 这也意味着, 所构忆阻系统中存在多稳态甚至超级多稳态现象.

#### 4 基于 FPGA 的忆阻数字电路实现

为了拓展此类记忆元件的应用, 将系统 (4) 进行离散化并用 FPGA 数字平台进行实现. FPGA 是可重复编写的硅芯片, 与定制电路最大的不同就是其内部有事先建立的逻辑块及可被重新编写的布线资源, 其功能的实现依赖于用户的编程. 因此, 这样的数字电路实现平台在更改系统参数或初值等设置上更为方便精准, 适用于实现忆阻混沌电路. 本次使用四阶龙格-库塔法离散忆阻系统 (4), 该算法与其他常用离散化算法, 如 Euler 法或二阶龙格-库塔法相比较, 拥有稳定性高、精度好等一系列优点. 之后, 得到离散化方程 (5), 其中  $i = 1, 2, 3, 4$ , 分别对应方程 (4) 中  $x, y, z, w$  四项, 相应的参数取值如表 1 所示. 同时, 考虑到 DA 转换的  $\pm 5V$  范围, 需要添加一个缩放系数  $E$ , 结合相图中各项范围, 给定  $E$  为 0.5, 迭代步长  $h$  设置为 0.0001.

$$y_{i(n+1)} = y_{in} + h(K_{i1} + 2K_{i2} + 2K_{i3} + K_{i4})/6. \quad (5)$$

各递归参数表示为如下形式:

$$K_{i1} (i = 1, 2, 3, 4): \begin{cases} K_{11} = a(\gamma x_n + z_n) \\ K_{21} = -b[z_n + (-m + n|w_n|)y_n/E] \\ K_{31} = c(y_n - x_n - 0.12z_n) \\ K_{41} = -y_n \end{cases}, \quad (6)$$

$$K_{i2} (i = 1, 2, 3, 4): \begin{cases} K_{12} = a[\gamma(x_n + 0.5hK_{11}) + (z_n + 0.5hK_{31})] \\ K_{22} = -b[(z_n + 0.5hK_{31}) + (-m + n|w_n + 0.5hK_{41}|)(y_n + 0.5hK_{21})/E] \\ K_{32} = c[(y_n + 0.5hK_{21}) - (x_n + 0.5hK_{11}) - 0.12(z_n + 0.5hK_{31})] \\ K_{42} = -(y_n + 0.5hK_{21}), \end{cases} \quad (7)$$

$K_{i3} (i = 1, 2, 3, 4):$

$$\begin{cases} K_{13} = a[\gamma(x_n + 0.5hK_{12}) + (z_n + 0.5hK_{32})] \\ K_{23} = -b[(z_n + 0.5hK_{32}) + (-m + n|w_n + 0.5hK_{42}|)(y_n + 0.5hK_{22})/E] \\ K_{33} = c[(y_n + 0.5hK_{22}) - (x_n + 0.5hK_{12}) - 0.12(z_n + 0.5hK_{32})] \\ K_{43} = -(y_n + 0.5hK_{22}) \end{cases}, \quad (8)$$

$K_{i4} (i = 1, 2, 3, 4):$

$$\begin{cases} K_{14} = a[\gamma(x_n + hK_{13}) + (z_n + hK_{33})] \\ K_{24} = -b[(z_n + hK_{33}) + (-m + n|w_n + hK_{43}|)(y_n + hK_{23})/E] \\ K_{34} = c[(y_n + hK_{23}) - (x_n + hK_{13}) - 0.12(z_n + hK_{33})] \\ K_{44} = -(y_n + hK_{23}) \end{cases}. \quad (9)$$

整体设计编写四个模块, 即 `module_Mem`, `module_K4`, `module_XB` 和 `module_DA` 数字化实现该忆阻系统. 其中, `module_Mem` 模块为顶层模块, 其余三个模块为底层模块, 顶层模块是整体设计的核心, 控制并调用各底层模块, 控制流程如图 12. 从图 12 看出, 按顺序调用 `module_K4` 与 `module_XB` 两模块便可实现四阶龙格-库塔算法. 此外, 另一底层模块 `module_DA` 服务于高速 DA 转换器, 此次采用的数模转换芯片为 AD9767, 其功能是将浮点数转换为定点数, 并赋值给输出通道, 最终在示波器上捕捉到相应时序图与相图.

接着, 完成 FPGA 数字实现, 实物连接图与系统混沌态实现结果如图 13 所示, 其中图 13(b) 为  $y-z$  平面上的双涡卷混沌吸引子相图, 该混沌相图与数值仿真所展示的图 2(a) 相对应. 图 13(c) 分别展示  $y, z$  两项时序图, 并用蓝色与黄色线条表示. 此外, 为了证实所构忆阻系统存在对称共存的多稳态现象, 在图 14 中展现固定参数  $a = 1, b = 3.5, c = 1.274, \gamma = 0.86, \xi = 0.12$ , 选取不同初值时  $y-z$  平面上的共存吸引子. 这组共存吸引子与图 11 所示的数值仿真结果对应, 图 14(a) 和图 14(d) 为左右共存的周期 1 吸引子, 此时初值设定为  $(\pm 10^{-9}, 0, 0, 0)$ ; 图 14(b) 和图 14(e) 呈现初值为  $(\pm 10^{-9}, 0, 0, \pm 0.45)$  时的共存周期 3 吸引子, 与图 11(a) 一致. 共存单涡卷混沌吸引子由图 14(c) 和图 14(f) 给出, 初值选择为  $(10^{-9}, 0, 0, 0.9)$  和  $(-10^{-9}, 0, 0, -0.9)$ . 通

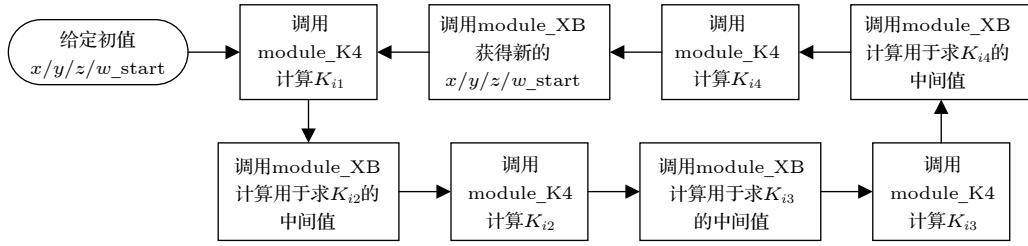


图 12 顶层模块控制流程图

Fig. 12. The flow chart of calling order.

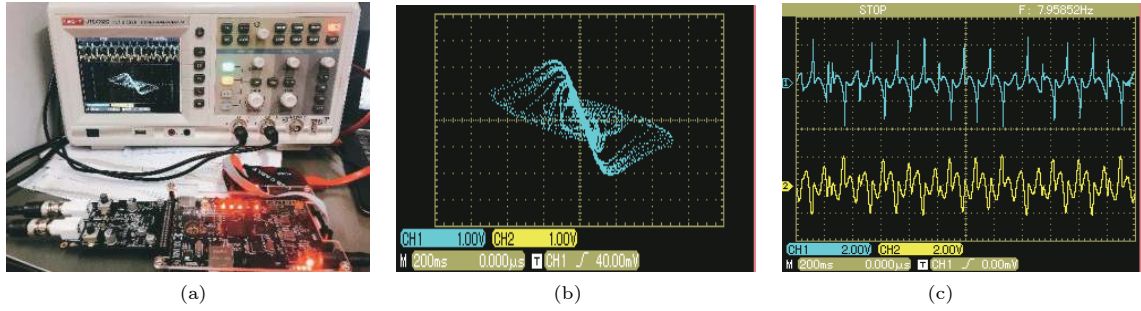


图 13 FPGA 实物连接图与实现结果 (a) 实物连接图; (b)  $y$ - $z$  平面相图; (c)  $y$ ,  $z$  两项时序图

Fig. 13. The hardware connection diagram and the result of implementation: (a) The hardware connection diagram; (b) phase diagram in  $y$ - $z$  plane; (c) timing diagram of the term  $y$  and  $z$ .

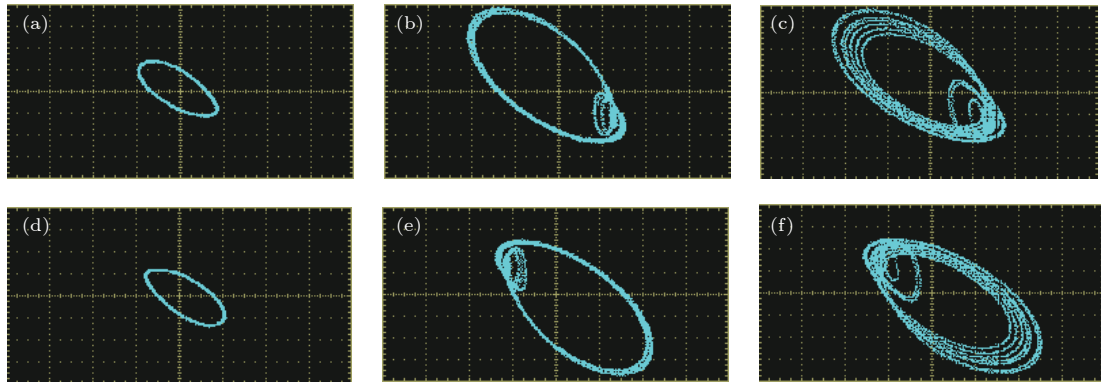


图 14 固定参数  $c = 1.274$  时  $x$ - $z$  平面内不同初值条件下的共存,  $Ch1 = 500$  MV,  $Ch2 = 500$  MV (a) 初值为  $(10^{-9}, 0, 0, 0)$ , 左侧周期 1; (b) 初值为  $(10^{-9}, 0, 0, 0.45)$ , 左侧周期 3; (c) 初值为  $(10^{-9}, 0, 0, 0.9)$ , 左侧混沌; (d) 初值为  $(-10^{-9}, 0, 0, 0)$ , 右侧周期 1; (e) 初值为  $(-10^{-9}, 0, 0, -0.45)$  右侧周期 3; (f) 初值为  $(-10^{-9}, 0, 0, -0.9)$ , 右侧混沌

Fig. 14. The phase diagram of coexistence attractors with different initial conditions at  $c = 1.274$  in  $x$ - $z$  plane,  $Ch1 = 500$  MV,  $Ch2 = 500$  MV: (a) The initial value as  $(10^{-9}, 0, 0, 0)$ , left period-1; (b) the initial value as  $(10^{-9}, 0, 0, 0.45)$ , left period-3; (c) the initial value as  $(10^{-9}, 0, 0, 0.9)$ , left period-3; (d) the initial value as  $(-10^{-9}, 0, 0, 0)$ , right chaos; (e) the initial value as  $(-10^{-9}, 0, 0, -0.45)$ , right period-3; (f) the initial value as  $(-10^{-9}, 0, 0, -0.9)$ , right chaos.

过 FPGA 数字电路实验, 证实所构忆阻系统 (4) 的物理可实现性. 数值仿真结果与电路实验结果的一致性, 也证明该系统确实存在多吸引子共存的多稳态现象.

## 5 结论

本文基于新型四维磁控忆阻电路, 观察特定系

统参数的分岔图与 Lyapunov 指数谱, 发现该忆阻电路中对称分岔行为的存在性. 通过双参数吸引盆再次验证系统运动状态的对称性是真实存在的, 分析该忆阻系统在对称吸引域内的多稳态特性. 同时, 基于 FPGA 技术的电路实验平台, 完成该忆阻系统的数字电路实现, 在示波器上捕捉到双涡卷混沌吸引子与多种状态的共存. 实验结果表明数值仿

真的有效性, 以及新型四维磁控忆阻电路的物理可实现性. 当然, 目前所构忆阻电路中的对称动力学行为还无法从理论角度来解释. 系统的动力学行为会受到平衡点位置的影响, 考虑到无法准确定位该忆阻系统的平衡点, 之后会进行更多的工作并探索新的方法来解决这一问题, 从理论出发更易找出这种特殊对称行为存在原因与规律.

## 参考文献

- [1] Chua L O 1971 *IEEE Trans. Circ. Theory* **18** 507
- [2] Lin Y, Liu W B, Shen Q 2018 *Acta Phys. Sin.* **67** 230502 (in Chinese) [林毅, 刘文波, 沈骞 2018 物理学报 **67** 230502]
- [3] Olumodeji O A, Gottardi M 2017 *Integration* **58** 438
- [4] Joglekar Y N, Wolf S J 2009 *Eur. J. Phys.* **30** 661
- [5] Guo M, Gao Z H, Xue Y B, Dou G, Li Y X 2018 *Nonlinear Dyn.* **93** 1681
- [6] Wang C H, Liu X M, Xia H 2017 *Chaos* **27** 033114
- [7] Peng G Y, Min F H 2017 *Nonlinear Dyn.* **90** 1607
- [8] Li C, Min F H, Li C B 2018 *Nonlinear Dyn.* **94** 2785
- [9] Peng G, Min F 2018 *Computer Electr. Eng. Article ID* **86492** 9
- [10] Feng W, He Y G, Li C L 2018 *Complexity* **2018** 1
- [11] Abuelma'Atti M T, Khalifa Z J 2016 *Int. J. Electr. Eng.* **53** 280
- [12] Bao B C, Li Q D, Wang N 2016 *Chaos* **26** 043111
- [13] Leonov G A, Kuznetsov N V, Vagaitsev V I 2011 *Phys. Lett. A* **375** 2230
- [14] Kengne J, Negou A N, Tchiotso D 2017 *Nonlinear Dyn.* **27** 1
- [15] Bao B C, Xu L, Wang N, Bao H, Xu Q, Chen M 2018 *Int. J. Electr. Com.* **94** 26
- [16] Wang W, Zeng Y C, Sun R T 2017 *Acta Phys. Sin.* **66** 040502 (in Chinese) [王伟, 曾以成, 孙睿婷 2017 物理学报 **66** 040502]
- [17] Min F H, Li C, Zhang L, Li C B 2019 *Chin. J. Phys.* **58** 117
- [18] Feudel U, Kraut S 2008 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **18** 1607
- [19] Ngonghala C N, Feudel U 2011 *Phys. Rev. E: Stat. Nonlinear Soft. Matter Phys.* **83** 056206
- [20] Bao H, Wang N, Bao B C, Chen M, Jin P P, Wang G Y 2018 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **57** 264
- [21] Wang G Y, Yuan F, Chen G R, Zhang Y 2018 *Chaos* **28** 013125
- [22] Da C, Rafael A, Eisencraf M 2019 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **72** 441
- [23] Yavuz O, Erdem E 2019 *Opt. Laser Technol.* **114** 224
- [24] Njitacke Z T, Kengne J 2017 *Chaos, Sol. Frac.* **105** 77
- [25] Li C B, Akgul A, Sprott J C, Lu H H C, Thio W J C 2018 *Int. J. Circ. Theor. Appl.* **46** 2434
- [26] Li C B, Sprott J C, Liu Y J, Gu Z Y, Zhang J W 2018 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **28** 1850163
- [27] Bao B C, Xu J P, Zhou G H, Ma Z H, Zou L 2011 *Chin. Phys. B* **20** 109

# Dynamic analysis of symmetric behavior in flux-controlled memristor circuit based on field programmable gate array<sup>\*</sup>

Lü Yan-Min    Min Fu-Hong<sup>†</sup>*(School of Electrical and Automation Engineering, Nanjing Normal University, Nanjing 210023, China)*

( Received 29 March 2019; revised manuscript received 16 April 2019 )

## Abstract

The lack of the relationship between flux and charge has been made up for by the memristor which is suitable to constructing chaotic circuits as a nonlinear element. Commonly, the memristor-based chaotic systems are constructed by introducing the model of memristor into various classical nonlinear circuits, and more special and abundant dynamic behaviors are existent in these memristive systems. With the deepening of research, several novel nonlinear phenomena of memristor circuits have been found, such as hidden attractors, self-excited attractors and anti-monotonic characteristic. Meanwhile, multistability of a memristor-based circuit explained by the coexistence of multiple attractors with different topological structures is a typical phenomenon in a nonlinear system, and it is also one of the hotspots in this field. In addition, the chaotic sequences generated by the memristive circuits are used as additional signals for information transmission or image encryption. Therefore, the study of modeling memristor systems and analyzing various nonlinear behaviors is of certain valuable.

In this paper, a four-dimensional flux-controlled memristive circuit is constructed by introducing an active memristor with absolute value into an improved Chua's circuit, and the special dynamic behaviors are observed. Through the bifurcation diagrams and Lyapunov exponent spectra, the symmetric bifurcations are shown, and the symmetric system states in parameter mappings are found. Besides, the distribution maps of memristive circuit are used to analyze the multistability in a symmetrical attraction domain, and the corresponding phase diagrams are depicted to confirm the existence of multistability. Furthermore, the circuit experiments of the flux-controlled memristive circuit are implemented by the field programmable gate array simulation, and the experimental results are obtained on a digital oscilloscope, which proves the physical implementability of the memristor-based system.

**Keywords:** flux-controlled memristor circuit, symmetrical dynamic behaviors, multistability, field programmable gate array

**PACS:** 05.45.-a

**DOI:** [10.7498/aps.68.20190453](https://doi.org/10.7498/aps.68.20190453)

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61871230).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [minfuhong@njjnu.edu.cn](mailto:minfuhong@njjnu.edu.cn)