

一簇金刚石晶格上  $S^4$  模型的相变\*尹训昌<sup>1)†</sup> 刘万芳<sup>1)</sup> 马业万<sup>1)</sup> 孔祥木<sup>2)‡</sup> 闻军<sup>1)</sup> 章礼华<sup>1)</sup>

1) (安庆师范大学物理与电气工程学院, 安庆 246011)

2) (曲阜师范大学物理工程学院, 曲阜 273165)

(2018 年 7 月 7 日收到; 2018 年 11 月 29 日收到修改稿)

采用重整化群和累积展开的方法, 研究了一簇金刚石晶格上  $S^4$  模型的相变, 求得了系统的临界点. 结果表明: 当分支数  $m = 2$  和  $m > 12$  时, 该系统只存在一个 Gauss 不动点  $K^* = b_2/2$ ,  $u_2^* = 0$ ; 当分支数  $3 \leq m \leq 12$  时, 该系统不仅有 Gauss 不动点, 还存在一个 Wilson-Fisher 不动点, 并且后一个不动点对系统的临界特性产生决定性的影响.

关键词: 金刚石晶格,  $S^4$  模型, 重整化群

PACS: 64.60.al, 75.10.Hk

DOI: 10.7498/aps.68.20181315

## 1 引言

相变是凝聚态物理学中的一个重要研究领域, 它是自然界中的一种普遍现象, 如人们熟知的水的气态和液态转变就属于相变. 根据自旋模型的自旋取值不同, 可分为离散型和连续型两种不同的模型. 离散模型只能取一些分离的有限数值, Ising 模型和 Potts 模型是两种最有代表性的离散模型. 而连续模型则允许在整个实数空间取连续值, 如  $S^4$  模型和 Gauss 模型. 起初人们主要研究具有平移对称性的平移对称晶格上自旋模型的相变, 随着研究的逐渐深入, 人们对具有高度自相似性的分形晶格产生了浓厚的兴趣. 20 世纪 80 年代, Gefen 等<sup>[1-4]</sup> 率先研究了几种简单有规分形上离散模型的相变, 求得了一系列有意义的结论. 此后, 分形晶格上的相变问题得到了越来越多的重视, 出现了许多有趣的成果<sup>[5-21]</sup>. 1999 年, 孔祥木等<sup>[13]</sup> 研究了金刚石晶格 (2DH) 上 Gauss 模型的相变, 得到了该系统的临界点. 前人的研究发现: 分形晶格上的 Ising 模

型只有当分形维数大于或等于 2 时才存在有限温度的相变; 分形晶格上的 Gauss 模型存在有限温度的相变, 临界点数值的变化依赖于分形维数; 分形晶格上  $S^4$  模型总是存在一个 Gauss 不动点, Wilson-Fisher 不动点是否出现主要取决于分形维数的数值. 本文主要研究具有  $m$  个分支数目的金刚石晶格 ( $m$ DH) 上  $S^4$  模型的相变, 和 Gauss 模型相比较,  $S^4$  模型具有一个很大的优点, 即增加了一个表示四次方项的参数, 它更加接近自然界中的真实铁磁系统. 因此, 研究  $S^4$  模型的相变问题可以更好地解释自然界中的相变. 采用实数空间重整化群变换并结合累积展开的方法, 我们研究了一簇金刚石晶格上  $S^4$  模型的相变.

2  $m$ DH 晶格和  $S^4$  模型

为了便于理解, 我们以两个分支的金刚石晶格 (2DH) 为例阐述  $m$ DH 的生成过程. 它的构造过程见图 1, 先定义由两个格点和一个键组成的图

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11604002)、安徽省自然科学基金 (批准号: 1708085MA10, 1808085MA20) 和安徽高校自然科学重点项目 (批准号: KJ2018A0366, gxyq2017027) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: yxc0212@163.com

‡ 通信作者. E-mail: kongxm@mail.qfnu.edu.cn

形作为一个基元 (即  $n = 0$  级), 再把 6 个基元依次排列形成一个生成元 (即  $n = 1$  级), 然后生成元的每一个键再用生成元本身替换, 这样的步骤一直重复下去, 最后得到的晶格为金刚石晶格. 用同样的方法, 可以得到  $m$ DH 晶格. 该晶格属于非均匀分形, 即格点上的配位数因格点的位置不同而不同. 它的分形维数和分岔度分别为  $d_f = 1 + \ln m / \ln 3$  和  $R = \infty$ . 本文研究的金刚石晶格本质上是由迭代产生的具有自相似性的分形晶格, 只不过从外形上看与金刚石的形状相类似, 我们形象地把它简称为金刚石晶格, 它不同于固体物理中的具有周期性的金刚石晶格.

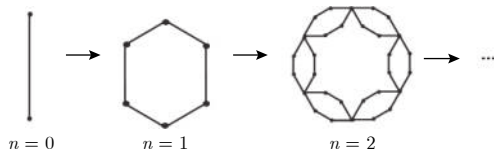


图 1 金刚石晶格的构造过程

Fig. 1. Constructional procedure of diamond lattice.

$m$ DH 晶格上  $S^4$  模型的约化的有效哈密顿量为

$$H = K \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j - \sum_i \frac{b_i}{2} s_i^2 - \sum_i u_i s_i^4, \quad (1)$$

其中参数  $K$  表示格点自旋  $s_i$  和  $s_j$  之间的约化相互作用,  $b_i$  表示格点  $i$  位置上的 Gauss 分布常数, 参数  $u_i$  代表格点  $i$  位置上的四次方项相互作用. 为了求解此种晶格上的相变, 假设 Gauss 分布常数  $b_i$  和四次方项相互作用  $u_i$  取决于格点  $i$  的配位数  $q_i$ , 即满足等式

$$b_i/b_j = u_i/u_j = q_i/q_j. \quad (2)$$

### 3 重整化群变换和累积展开

为了方便描述, 选取  $m$ DH 晶格的生成元来说明重整化群过程 (图 2). 为了避免混淆, 重整化群变换前后的格点位置用不同的字母和数字来表示, 且每个格点上的配位数与格点的位置相关. 通过分析可知,  $q_a = m^n$ ,  $q_b = 2m$ ,  $q_i = q_{i'} = 2$  ( $i = i' = 1, 2, \dots, m$ ). 根据 (1) 式, 生成元的有效哈密顿量写为

$$H = H_0 + V, \quad (3)$$

其中

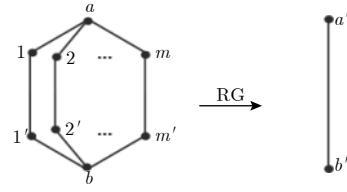


图 2  $m$ DH 晶格的重整化群过程

Fig. 2. The renormalization group procedure of  $m$ DH lattice.

$$H_0 = K \sum_{i=1}^m (s_i s'_i + s_a s_i + s_b s'_i) - \frac{b_2}{2} \sum_{i=1}^m (s_i^2 + S_{i'}^2) - \frac{b_{m^n}}{2} \frac{s_a^2}{m^{n-1}} - \frac{b_{2m}}{2} \frac{s_b^2}{2} - u_{m^n} \frac{s_a^4}{m^{n-1}} - u_{2m} \frac{s_b^4}{2}, \quad (4)$$

$$V = -u_2 \sum_{i=1}^m (s_i^4 + s_{i'}^4). \quad (5)$$

为了便于区分, (4) 式中用  $s'_a$  和  $s'_b$  分别表示图 2 中格点  $a'$  和  $b'$  位置上的自旋变量, 通过一次重整化群变换消约掉内部格点  $1, 2, \dots, m$  和  $1', 2', \dots, m'$  后, 系统的配分函数形式保持不变, 这个过程写为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \prod_1^m ds_i ds'_i \exp(H) = P \exp(H'), \quad (6)$$

其中大写字母  $P$  表示一个与格点自旋无关的重整化群变换常数, 而  $H'$  则代表变换后的有效哈密顿量.

为了方便计算, 把有效哈密顿量分解成  $H_0$  和  $V$  两个表达式, 并把表达式  $V$  看作  $H_0$  的微扰进行计算. 根据正则系统配分函数的定义, 容易得到

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} ds_a ds_b \int_{-\infty}^{\infty} \prod_1^m ds_i ds'_i e^{H_0+V}. \quad (7)$$

下面定义部分迹 (PT) 为

$$(PT) = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_1^m ds_i ds'_i e^{H_0+V}. \quad (8)$$

重新改写 (8) 式为

$$(PT) = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_1^m ds_i ds'_i e^{H_0} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \prod_1^m ds_i ds'_i e^{H_0+V}}{\int_{-\infty}^{\infty} \prod_1^m ds_i ds'_i e^{H_0}} = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_1^m ds_i ds'_i e^{H_0} \langle e^V \rangle_0, \quad (9)$$

其中

$$\langle \cdots \rangle_0 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \prod_1^m ds_i ds'_i (\cdots) e^{H_0}}{\int_{-\infty}^{\infty} \prod_1^m ds_i ds'_i e^{H_0}}. \quad (10)$$

(10) 式称为累积平均。

因为  $V$  是一个十分小的微扰项, 做级数展开为

$$\langle e^V \rangle_0 = e^{\langle V \rangle_0 + (1/2)(\langle V^2 \rangle_0 - \langle V \rangle_0^2) + \cdots}. \quad (11)$$

把 (11) 式代入 (9) 式, 部分迹改写为

$$(PT) = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_1^m ds_i ds'_i e^{H_0} e^{\langle V \rangle_0 + (1/2)(\langle V^2 \rangle_0 - \langle V \rangle_0^2) + \cdots}. \quad (12)$$

消约掉内部格点  $1, 2, \cdots, m$  和  $1', 2', \cdots, m'$  的自旋后, 该系统的有效的哈密顿量重新写为

$$H' = \ln(PT) = H'_0 + \langle V \rangle_0 + \frac{1}{2}(\langle V^2 \rangle_0 - \langle V \rangle_0^2). \quad (13)$$

根据 (12) 式得到

$$\begin{aligned} H'_0 &= \ln \left( \int_{-\infty}^{\infty} \prod_1^m ds_i ds'_i e^{H_0} \right) \\ &= k_{11} s_a s_b + k_{12} (s_a^2 + s_b^2) + k_{13} (s_a^4 + s_b^4), \end{aligned} \quad (14)$$

其中

$$k_{11} = \frac{mK^3}{b_2^2 - K^2},$$

$$\begin{aligned} k_{31} &= [48mK^3(19b_2^6 - 38b_2^5K + 30b_2^4K^2 - 22b_2^3K^3 + 13b_2^2K^4 - 4b_2K^5 + 2K^6)u_2^2]/[(b_2 - K)^7(b_2 + K)^5], \\ k_{32} &= [24mK^2(8b_2^7 - 16b_2^6K + 25b_2^5K^2 - 34b_2^4K^3 + 24b_2^3K^4 - 14b_2^2K^5 + 7b_2K^6)u_2^2]/[(b_2 - K)^7(b_2 + K)^5], \\ k_{33} &= [12mb_2K^4(7b_2^6 - 7b_2^5K + 4b_2^4K^2 - 4b_2^3K^3 + 17b_2^2K^4 - 17b_2K^5)u_2^2]/[(b_2 - K)^7(b_2 + K)^5]. \end{aligned}$$

通过 (13)–(16) 式, 经过重整化群变换后, 得到系统的有效的哈密顿量为

$$\begin{aligned} H' &= (k_{11} + k_{21} + k_{31})s_a s_b + (k_{12} + k_{22} + k_{32}) \\ &\quad \times (s_a^2 + s_b^2) + (k_{13} + k_{23} + k_{33}) \times (s_a^4 + s_b^4). \end{aligned} \quad (17)$$

为了满足重整化群变换前后系统的有效哈密顿量形势保持一致的特点, 对自旋变量进行重新标度, 定义  $s'_i = \xi s_i$  ( $i = a, b$ ), 自旋变量重新标度后系统的有效哈密顿量为

$$\begin{aligned} H' &= K' s'_a s'_b - \frac{b_{m^{n-1}}}{2} \frac{s_a^2}{m^{n-1}} \\ &\quad - \frac{b_2}{2} \frac{s_b^2}{2} - u'_{m^{n-1}} \frac{s_a^4}{m^{n-1}} - u'_2 \frac{s_b^4}{2}, \end{aligned} \quad (18)$$

其中

$$k_{12} = \frac{mb_2(b_2^2 - 3K^2)}{4(K^2 - b_2^2)},$$

$$k_{13} = -\frac{mu_2}{2}.$$

利用 (5) 式和 (10) 式, 计算得到

$$\begin{aligned} \langle V \rangle_0 &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \prod_1^m ds_i ds'_i \left( -u_2 \sum_{i=1}^m (s_i^4 + s_i'^4) \right) e^{H_0}}{\int_{-\infty}^{\infty} \prod_1^m ds_i ds'_i e^{H_0}} \\ &= k_{21} s_a s_b + k_{22} (s_a^2 + s_b^2) + k_{23} (s_a^4 + s_b^4), \end{aligned} \quad (15)$$

其中

$$\begin{aligned} k_{21} &= -\frac{24mb_2K^3(b_2^2 - b_2K)u_2}{(b_2 - K)^4(b_2 + K)^3}, \\ k_{22} &= -\frac{6mK^2(b_2^2 - b_2K)(b_2^2 + K^2)u_2}{(b_2 - K)^4(b_2 + K)^3}, \\ k_{23} &= -\frac{mK^4(b_2^4 + K^4)u_2}{(b_2^2 - K^2)^4}. \end{aligned}$$

应用 (5), (10) 和 (15) 式, 可以得到

$$\frac{1}{2}(\langle V^2 \rangle - \langle V \rangle_0^2) = k_{31} s_a s_b + k_{32} (s_a^2 + s_b^2) + k_{33} (s_a^4 + s_b^4), \quad (16)$$

式中

$$\xi = \sqrt{-\frac{4}{b_2}(k_{12} + k_{22} + k_{32})}, \quad (19)$$

$$K' = (k_{11} + k_{21} + k_{31})/\xi^2, \quad (20)$$

$$u' = -2(k_{13} + k_{23} + k_{33})/\xi^4. \quad (21)$$

(20) 式和 (21) 式为该系统重整化群变换的递推关系。

## 4 计算结果

根据上面得到的递推关系, 通过计算得到下面的结果: 1) 在  $m$ DH 晶格的分支数表  $m = 2$  和  $m > 12$  两种情况下, 该晶格上的  $S^4$  模型只存在一个不动点, 即 Gauss 不动点  $K^* = b_2/2$ ,  $u_2^* = 0$ ;

2) 当  $m$ DH 晶格的分支数满足  $3 \leq m \leq 12$  时, 该晶格上的  $S^4$  模型不但有 Gauss 不动点, 而且还发现一个 Wilson-Fisher 不动点, 不同的分支数  $m$  所对应的 Wilson-Fisher 不动点的数值如表 1 所列. 根据重整化群的标度变换理论, 可以计算出当分支数满足  $3 \leq m \leq 12$  时, Wilson-Fisher 不动点附近关联长度的临界指数  $\nu$  的数值 (表 1).

表 1  $m$ DH 晶格上  $S^4$  模型的 Wilson-Fisher 不动点和关联长度  $\nu$  的数值

Table 1. Wilson-Fisher fixed point of  $S^4$  model on  $m$ DH lattices and the value of correlation length  $\nu$ .

| $m$ | $K^*/b_2$ | $u_2^*/b_2^2$ | $\nu$ |
|-----|-----------|---------------|-------|
| 3   | 0.484     | 0.017         | 0.465 |
| 4   | 0.508     | 0.012         | 0.465 |
| 5   | 0.515     | 0.010         | 0.467 |
| 6   | 0.518     | 0.009         | 0.471 |
| 7   | 0.520     | 0.008         | 0.477 |
| 8   | 0.521     | 0.007         | 0.485 |
| 9   | 0.521     | 0.006         | 0.489 |
| 10  | 0.520     | 0.005         | 0.497 |
| 11  | 0.517     | 0.004         | 0.488 |
| 12  | 0.512     | 0.002         | 0.506 |

## 5 结 论

应用实空间重整化群和累积展开的方法, 研究了  $m$ DH 晶格上  $S^4$  模型的相变, 得到了如下结论:

1) 当分支数  $m = 2$  和  $m > 12$ , 即分形维数  $d_f = 1.63$  和  $d_f > 3.26$  时, 该系统只存在 Gauss 不动点  $K^* = b_2/2$ ,  $u_2^* = 0$ , 其临界点与该晶格上 Gauss

模型的临界点相同, 表明这两个系统属于同一个普适类; 2) 当分支数符合  $3 \leq m \leq 12$ , 即分形维数  $2 \leq d_f \leq 3.26$  时, 该晶格上的  $S^4$  模型同时存在 Gauss 不动点和 Wilson-Fisher 不动点, 并且后一个不动点对系统的临界特性的影响起主导作用. 进一步研究发现,  $m$ DH 晶格上  $S^4$  模型的临界点的个数取决于分形维数, 这与平移对称晶格上的  $S^4$  模型的相变依赖于空间维数十分类似.

## 参考文献

- [1] Gefen Y, Mandelbrot B, Aharony A 1980 *Phys. Rev. Lett.* **45** 855
- [2] Gefen Y, Aharony A, Mandelbrot B 1983 *J. Phys. A* **16** 1267
- [3] Gefen Y, Aharony A, Mandelbrot B 1984 *J. Phys. A* **17** 435
- [4] Gefen Y, Aharony A, Mandelbrot B 1984 *J. Phys. A* **17** 1277
- [5] Hu B 1985 *Phys. Rev. Lett.* **55** 2316
- [6] Wang Z D, Gong C D, Arno H 1986 *Phys. Rev. A* **34** 1531
- [7] Wu Y K, Hu B 1987 *Phys. Rev. A* **35** 1404
- [8] Fahnle M, Braun P 1988 *Phys. Rev. B* **38** 7094
- [9] Yang Z R 1988 *Phys. Rev. B* **38** 728
- [10] Qin Y, Yang Z R 1992 *Phys. Rev. B* **46** 284
- [11] Li S, Yang Z R 1997 *Phys. Rev. E* **55** 6656
- [12] Zhu J Y, Yang Z R 1997 *Phys. Rev. E* **59** 1551
- [13] Kong X M, Li S 1999 *Sci. China A* **42** 325
- [14] Lin Z Q, Kong X M 2001 *Chin. Phys. Lett.* **18** 882
- [15] Zhu J Y, Zhu H 2003 *Chin. Phys.* **12** 264
- [16] Sun C F 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3768 (in Chinese) [孙春峰 2005 物理学报 **54** 3768]
- [17] Li Y, Kong X M 2005 *Physica A* **356** 589
- [18] Sun C F, Kong X M, Yin X C 2006 *Commun. Theor. Phys.* **45** 555
- [19] Chen X, Zhang J S 2014 *Chin. Phys. B* **23** 096401
- [20] Yin X C, Liu W F, Zhu Z S, Kong X M 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 016402 (in Chinese) [尹训昌, 刘万芳, 祝祖送, 孔祥木 2015 物理学报 **64** 016402]
- [21] Chen K P, Lü P, Wang H P 2017 *Acta Phys. Sin.* **66** 068101 (in Chinese) [陈克萍, 吕鹏, 王海鹏 2017 物理学报 **66** 068101]

# Phase transition of $S^4$ model on a family of diamond lattice<sup>\*</sup>

Yin Xun-Chang<sup>1)†</sup> Liu Wan-Fang<sup>1)</sup> Ma Ye-Wan<sup>1)</sup> Kong Xiang-Mu<sup>2)‡</sup>

Wen Jun<sup>1)</sup> Zhang Li-Hua<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> (School of Physics and Electric Engineering, Anqing Normal University, Anqing 246011, China)

<sup>2)</sup> (School of Physica and Physical Engineering, Qufu Normal University, Qufu 273165, China)

( Received 7 July 2018; revised manuscript received 29 November 2018 )

## Abstract

The fractal is a kind of geometric figure with self-similar character. Phase transition and critical phenomenon of spin model on fractal lattice have been widely studied and many interesting results have been obtained. The  $S^4$  model regarded as an extension of the Ising model, can take a continuous spin value. Research of the  $S^4$  model can give a better understanding of the phase transition in the real ferromagnetic system in nature. In previous work, the phase transition of the  $S^4$  model on the translation symmetry lattice has been studied with the momentum space renormalization group technique. It is found that the number of the fixed points is related to the space dimensionality. In this paper, we generate a family of diamond hierarchical lattices. The lattice is a typical inhomogenous fractal with self-similar character, whose fractal dimensionality and the order of ramification are  $d_f = 1 + \ln m / \ln 3$  and  $R = \infty$ , respectively. In order to discuss the phase transition of the  $S^4$  model on the lattice, we assume that the Gaussian distribution constant  $b_i$  and the fourth-order interaction parameter  $u_i$  depend on the coordination number  $q_i$  of the site on the fractal lattices, and the relation  $b_i/b_j = u_i/u_j = q_i/q_j$  is satisfied. Using the renormalization group and the cumulative expansion method, we study the phase transition of the  $S^4$  model on a family of diamond lattices of  $m$  branches. Removing the inner sites, we obtain the system recursion relation and the system corresponding critical point. Furthermore, we find that if the number of branches is  $m = 2$  or  $m > 12$  (fractal dimensionality  $d_f = 1.63$  or  $d_f > 3.26$ ), the system only has the Gaussian fixed point of  $K^* = b_2/2$ ,  $u_2^* = 0$ . The critical point of the system is in agreement with that from the Gaussian model on the fractal lattice, which predicts that the two systems belong to the same universality class. We also find that under the condition of  $3 \leq m \leq 12$  (fractal dimensionality  $2 \leq d_f \leq 3.26$ ), both the Gaussian fixed point and the Wilson-Fisher fixed point can be obtained in the system, and the Wilson-Fisher fixed point plays a leading role in the critical properties of the system. According to the real space renormalization group transformation and scaling theory, we obtain the critical exponent of the correlation length. Finally, we find that the critical points of the  $S^4$  model on a family of diamond lattices depend on the value of the fractal dimensionality. The above result is similar to that obtained from the  $S^4$  model on the translation symmetry lattice.

**Keywords:** diamond lattice,  $S^4$  model, renormalization-group

**PACS:** 64.60.al, 75.10.Hk

**DOI:** 10.7498/aps.68.20181315

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11604002), the Natural Science Foundation of Anhui Province, China (Grant Nos. 1708085MA10, 1808085MA20), and the Key Program for the Natural Science Foundation in University of Anhui Province, China (Grant Nos. KJ2018A0366, gxyq2017027).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [yxc0212@163.com](mailto:yxc0212@163.com)

<sup>‡</sup> Corresponding author. E-mail: [kongxm@mail.qfnu.edu.cn](mailto:kongxm@mail.qfnu.edu.cn)