

相干与信息守恒及其在Mach-Zehnder干涉中的应用

傅双双 骆顺龙 孙源

Coherence and information conservation and their applications in Mach-Zehnder interferometer

Fu Shuang-Shuang Luo Shun-Long Sun Yuan

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 68, 030301 (2019) DOI: 10.7498/aps.68.20181778

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181778>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于光纤锥和纤芯失配的Mach-Zehnder干涉湿度传感器

Mach-Zehnder interferometer based on fiber taper and fiber core mismatch for humidity sensing

物理学报. 2018, 67(2): 24212 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20171677>

基于绝缘体上硅的一种改进的Mach-Zehnder声光调制器

An improved Mach-Zehnder acousto-optic modulator on a silicon-on-insulator platform

物理学报. 2016, 65(1): 14304 <https://doi.org/10.7498/aps.65.014304>

探测器对量子增强马赫-曾德尔干涉仪相位测量灵敏度的影响

Effect of detection efficiency on phase sensitivity in quantum-enhanced Mach-Zehnder interferometer

物理学报. 2018, 67(23): 234202 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20181193>

基于量子增强型光纤马赫-曾德干涉仪的低频信号测量

Measurement of low-frequency signal based on quantum-enhanced fiber Mach-Zehnder interferometer

物理学报. 2018, 67(24): 244202 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20181335>

基于双平行马赫-曾德尔调制器的大动态范围微波光子下变频方法

Dual-parallel Mach-Zehnder modulator based microwave photonic down-conversion link with high dynamic range

物理学报. 2017, 66(9): 98401 <https://doi.org/10.7498/aps.66.098401>

扫频光学相干层析成像系统的波数校正与相位测量研究

Wavenumber calibration and phase measurement in swept source optical coherence tomography

物理学报. 2016, 65(3): 34201 <https://doi.org/10.7498/aps.65.034201>

专题: 量子相干和量子存储研究进展

编者按 量子相干是量子态的基本特性,也是量子叠加原理的客观体现,保持长时间的量子相干是实现量子计算的基本要求.量子相干的研究由来已久,近来,特别是量子相干度量的提出,以及将量子资源理论引入到量子相干的研究中来,人们对量子相干的研究热情被极大地激活,并产生了大量的新研究结果,使得人们对量子相干的认识进一步加深,明晰了量子相干与量子纠缠之间的关系.为帮助读者了解这方面的最新进展,推动量子相干方面的研究,本专题邀请了中国科学院物理研究所、中国科学院数学与系统科学研究院、清华大学等量子相干方面的理论和实验的专家专门撰写了相关的综述报告,为进入本领域的研究人员提供参考.

广义上来说,量子存储是将一个未知的量子状态(一般是一个量子叠加态)存储到一个量子系统中,当人们需要使用此量子态时,可以高保真度地获得这个量子态.量子存储在远程量子通信、量子中继、量子网络、量子精密测量以及分布式量子计算中都发挥着关键性的作用.实现量子存储功能有很多候选物理系统,目前不同的物理体系在量子存储方面都有各自的优缺点.现阶段,相对比较成熟的量子存储体系主要包括原子系统(包括冷原子和热原子)和固态系统.在这两种物理系统中中国科学家们都做出了重要贡献.为促进本方向的交流合作,并鼓励更多的学者了解和进入这一重要的领域,本专题特别邀请了中国科学技术大学、上海交通大学、清华大学、中国科学院武汉物理与数学研究所、山西大学等单位的专家撰文介绍了这方面的最新实验进展.

希望通过本专题的这些文章能够对读者了解量子相干和量子存储的基本理论和最新进展提供帮助.

(客座编辑:中国科学技术大学 郭光灿)

相干与信息守恒及其在 Mach-Zehnder 干涉中的应用*

傅双双¹⁾ 骆顺龙^{2)3)†} 孙源²⁾³⁾

1) (北京科技大学数理学院, 北京 100083)

2) (中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190)

3) (中国科学院大学数学学院, 北京 100049)

(2018 年 9 月 27 日收到; 2018 年 12 月 12 日收到修改稿)

自量子力学诞生以来,相干性和互补性一直是被广泛而深入研究的两个重要课题.随着量子信息近年来的发展,人们引入了若干度量来定量地刻画相干性和互补性.本文建立两个信息守恒关系式,分别基于“Bures 距离-保真度”和“对称-非对称”,并且利用它们来刻画相干性和互补性.具体来说,首先从信息守恒的观点解释 Bures 距离和保真度的互补关系,并由此自然推导出 Mach-Zehnder 干涉仪中的 Englert “干涉-路径”互补关系.其次在量子态和信道相互作用的一般框架中讨论“对称-非对称”信息守恒关系,并揭示其与 Bohr 互补性和量子相干性的内在联系.最后,在 Mach-Zehnder 干涉仪中探讨相干、退相干及互补性,刻画两个信息守恒关系之间的密切联系.

关键词: 相干, 互补性, 信息守恒, Mach-Zehnder 干涉仪

PACS: 03.65.Ta, 03.67.-a, 07.60.Ly

DOI: 10.7498/aps.68.20181778

* 北京市自然科学基金 (批准号: 1174017)、国家自然科学基金青年科学基金 (批准号: 11605006)、国家自然科学基金 (批准号: 11875317)、国家数学与交叉科学中心 (批准号: Y029152K51) 和中国科学院随机复杂结构与数据科学重点实验室 (批准号: 2008DP173182) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: luosl@amt.ac.cn

1 引言

互补原理是量子力学的理论核心之一, 在量子科学中具有本质的重要性和广泛的适用性^[1]. Bohr 互补原理指出共轭的物理量具有互补性质, 波粒二相性和 Heisenberg 不确定性关系被广泛认为是互补性的表现^[2–11]. 波粒二相性的一个具体形式是干涉仪中量子的粒子特性和波动特性之间的互补关系^[8], 前者通常联系于量子的路径信息, 后者则联系于干涉强度. 互补性的概念是多方面的, 其定性和定量的研究都是人们关心的课题. Jaeger 等^[12]和 Englert^[8]研究了如下形式的“干涉-路径”互补关系:

$$\mathcal{D}^2 + \mathcal{V}^2 \leq 1,$$

其中 $\mathcal{D}$ 是路径的可区分程度, 用来量化粒子性; $\mathcal{V}$ 是干涉条纹强度, 用来量化波动性. $\mathcal{V}$ 和 $\mathcal{D}$ 的具体定义和表达式见本文 3.2 节或文献^[8]. 该互补关系已在许多实验中得到了证实和应用.

量子力学的另一个重要特征是相干性, 相干与退相干相伴, 因此与互补性密切相关, 是量子力学区别于经典力学的一个基本特征. 近年来, 随着量子技术研究的推进, 为了刻画量子力学的哪些特性会导致潜在的操作优势, 量子资源理论得到很大发展. 在资源理论的框架下, 已有大量对相干性的量化研究^[13–28]. 此外, 量子相干性在量子热力学、量子计算和量子生物学等领域也发挥了关键作用^[29–31], 并与最近发展起来的“对称-非对称”量化研究有着内在的联系^[32–35].

量子相干是干涉现象的核心. 量子系统中相干性与波动性相联系, 而粒子性则与路径可区分性相联系. 它们之间的定量联系在干涉实验中进行了大量研究^[36–38]. 近期, 文献^[39]从量子力学的基本形式出发, 从交换和反交换的观点导出了在态-信道相互作用中对称性和非对称性的定量互补关系, 该互补关系表现为恒等式 (一种守恒关系), 揭示了互补性和相干性之间的某些内在联系.

本文主要探讨相干与信息守恒及其在 Mach-Zehnder 干涉中的应用. 具体安排如下: 第 2 节讨论两种信息守恒关系, 其一是基于“Bures 距离-保真度”的, 其二是基于“对称-非对称”的; 第 3 节首先回顾 Englert 关于 Mach-Zehnder 干涉仪中互补关系的不等式刻画, 其次利用第 2 节中的信息守恒关系给出互补性的一个等式刻画, 然后借助该等式形式的互补关系推导出 Englert 的不等式, 最后探讨 Mach-Zehnder 干涉仪中的相干性和互补性, 并

讨论其与第 2 节的信息守恒关系的联系.

2 两个信息守恒关系

考虑给定的 Hilbert 空间上的两个量子态 ρ 和 σ ^[40], 它们之间的 Bures 距离^[41]可写成如下形式:

$$D_b(\rho, \sigma) := 2 - 2\text{tr}\sqrt{\rho^{1/2}\sigma\rho^{1/2}},$$

其中 $\text{tr}(A) \equiv \sum_i A_{ii}$ 表示矩阵 A 的迹^[40]. 由于 Bures 距离具有黎曼性和单调性, 在量子信息理论中有广泛的应用^[42–47]. 与之紧密相关的概念是保真度 $F(\rho, \sigma) := \text{tr}\sqrt{\rho^{1/2}\sigma\rho^{1/2}}$, 显然从定义有

$$D_b(\rho, \sigma) = 2 - 2F(\rho, \sigma),$$

或等价地,

$$\frac{1}{2}D_b(\rho, \sigma) + F(\rho, \sigma) = 1.$$

从信息论的角度, $D(\rho, \sigma) := \frac{1}{2}D_b(\rho, \sigma)$ 刻画了两个量子态 ρ 和 σ 之间的可区分程度, 而 $F(\rho, \sigma)$ 刻画了两个量子态之间的相似性 (不可区分程度). 因此可将

$$D(\rho, \sigma) + F(\rho, \sigma) = 1 \quad (1)$$

解释为一个信息守恒关系. 数学上, (1) 式可由 $D(\rho, \sigma)$ 和 $F(\rho, \sigma)$ 的定义平凡地得到, 但从信息的角度看, (1) 式可解释为 Bohr 互补关系的一个刻画和量化, 将在第 3 节中详细阐述这一点.

首先回顾本文中将会用到的保真度 $F(\rho, \sigma)$ 的几个重要性质^[40]:

$$1) \ 0 \leq F(\rho, \sigma) \leq 1;$$

$$2) \text{ 对所有的酉算子 } U,$$

$$F(U\rho U^\dagger, U\sigma U^\dagger) = F(\rho, \sigma);$$

$$3) \ F(\rho, \sigma) = \max_U \text{tr}(U\sqrt{\rho}\sqrt{\sigma}), \text{ 其中 } \max \text{ 是对所有的酉算子 } U \text{ 取的.}$$

此外, 保真度与迹距离 $D_{\text{tr}}(\rho, \sigma) = \frac{1}{2}\text{tr}|\rho - \sigma|$ 密切相关 (其中 $|A| \equiv \sqrt{A^\dagger A}$). 事实上, 由不等式^[39] $1 - F(\rho, \sigma) \leq D_{\text{tr}}(\rho, \sigma) \leq \sqrt{1 - F(\rho, \sigma)^2}$ 可知

$$D(\rho, \sigma) \leq D_{\text{tr}}(\rho, \sigma) \leq \sqrt{1 - F(\rho, \sigma)^2}. \quad (2)$$

设 ρ 为量子态, Φ 为完全正的保迹映射 (亦称作量子信道), $\Phi(\rho) = \sum_i K_i \rho K_i^\dagger$, $\{K_i\}$ 称为 Kraus 算子, 其对偶信道可表示为 $\Phi^\dagger(X) = \sum_i K_i^\dagger X K_i$, 其中 X 为任意算子. 文献^[39]提出可将“态-信道”相互作用的对称部分和非对称部分分别量化为

$$\begin{aligned}
 J(\rho, \Phi) &= \frac{1}{4} \sum_i \|\{\sqrt{\rho}, K_i\}\|^2 \\
 &= \frac{1}{4} \text{tr} (\Phi(\rho) + 2\sqrt{\rho}\Phi^\dagger(\sqrt{\rho}) + \Phi^\dagger(\rho)), \\
 I(\rho, \Phi) &= \frac{1}{4} \sum_i \|\llbracket\sqrt{\rho}, K_i\rrbracket\|^2 \\
 &= \frac{1}{4} \text{tr} (\Phi(\rho) - 2\sqrt{\rho}\Phi^\dagger(\sqrt{\rho}) + \Phi^\dagger(\rho)),
 \end{aligned}$$

其中, $\{\sqrt{\rho}, K_i\} = K_i\sqrt{\rho} + \sqrt{\rho}K_i$, 表示算子的对称 (Jordan) 积, $\|A\|^2 = \text{tr} A^\dagger A$, 表示算子的 Hilbert-Schmidt 范数平方, $\llbracket\sqrt{\rho}, K_i\rrbracket = \sqrt{\rho}K_i - K_i\sqrt{\rho}$, 表示反对称 (Lie) 积. 从上述表达式可得到如下“对称-非对称”互补关系^[39]:

$$J(\rho, \Phi) + I(\rho, \Phi) = \frac{1}{2} \text{tr} (\Phi(\rho) + \Phi^\dagger(\rho)).$$

事实上, 非对称部分 $I(\rho, \Phi)$ 可解释为刻画量子态 ρ 相对于量子信道 Φ 的量子相干^[39], 亦即 ρ 在 Φ 作用后的退相干. 特别地, 当 Φ 为保单位 (unital) 信道 (即 Φ 将单位算子 $\mathbf{1}$ 映成单位算子, $\Phi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$) 时, $\Phi^\dagger(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$, $J(\rho, \Phi)$ 和 $I(\rho, \Phi)$ 满足如下信息守恒关系:

$$J(\rho, \Phi) + I(\rho, \Phi) = 1. \quad (3)$$

下一节将用等式 (1) 和 (3) 这两个不同但有联系的信息守恒关系来探讨 Mach-Zehnder 干涉仪中的互补性和相干性.

3 Mach-Zehnder 干涉仪中的互补性和相干性

3.1 Mach-Zehnder 干涉仪

为了在具体的框架中研究相干性和互补性, 考虑对称 MZI (如图 1 所示), 其中有 50 : 50 分束器 BS 和相移器 PS. 分束器将输入态沿 a 和 b 两条路径分布. 用 $|0\rangle$ 表示路径 a, $|1\rangle$ 表示路径 b. 设光子进入干涉仪的初始态为 $\rho_Q^{\text{in}} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + r_x\sigma_x + r_y\sigma_y + r_z\sigma_z)$, 其中 (r_x, r_y, r_z) 为三维实向量, 且 $r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 \leq 1$. $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 表示 Pauli 算子^[39]. 为了获得光子的路径信息, 引进初始态为 ρ_D^{in} 的路径探测器 (WWD). 若光子沿路径 a 传播, 则探测器的初始态保持不变; 若光子沿着路径 b 传播, 则探测器的态经过一个酉演化变为 $U\rho_D^{\text{in}}U^\dagger$. 这一相互作用导致光子与 WWD 产生关联. 因此, 在 MZI 中, 探测器实际上可看作光子所处的环境. 光子与探测器的相互作用导致光子退相干, 光子部分信息流失到探

测器上, 这样就可以从探测器上检测到光子的相关信息. 在 Englert 干涉-路径互补关系中, 路径信息正是用探测器量子态在演化前后的迹距离刻画的.

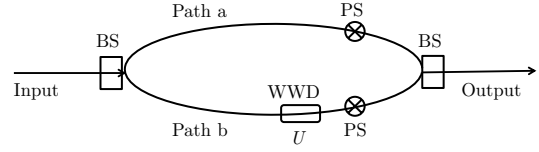


图 1 对称 MZI (BS, 50 : 50 分束器; PS, 相移器; WWD, 路径探测器)

Fig. 1. A schematic sketch of the symmetric Mach-Zehnder interferometer. BS, 50:50 beam splitter; PS, phase shifter; WWD, which-way detector.

分束器 (BS) 的作用由酉算子 $U_{\text{BS}} = \exp(-i\frac{\pi}{4}\sigma_y)$ 表示, 相移器 (PS) 的作用由酉算子 $U_{\text{PS}} = \exp(-i\frac{\phi}{2}\sigma_z)$ 表示. 光子和探测器的相互作用由算子 $V^{\text{QD}} = |0\rangle\langle 0| \otimes \mathbf{1}^D + |1\rangle\langle 1| \otimes U$ 描述. 经过干涉仪后, 复合系统的初始态 $\rho_Q^{\text{in}} \otimes \rho_D^{\text{in}}$ 演化为

$$\begin{aligned}
 \rho^f &= U_{\text{tot}}(\rho_Q^{\text{in}} \otimes \rho_D^{\text{in}})U_{\text{tot}}^\dagger \\
 &= \frac{1}{4}(1 - r_x)(\mathbf{1} + \sigma_x) \otimes \rho_D^{\text{in}} \\
 &\quad + \frac{1}{4}(1 + r_x)(\mathbf{1} - \sigma_x) \otimes U\rho_D^{\text{in}}U^\dagger \\
 &\quad - \frac{1}{4}e^{-i\phi}(r_z - ir_y)(\sigma_z - i\sigma_y) \otimes \rho_D^{\text{in}}U^\dagger \\
 &\quad - \frac{1}{4}e^{i\phi}(r_z + ir_y)(\sigma_z + i\sigma_y) \otimes \rho_D^{\text{in}}U^\dagger,
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 U_{\text{tot}} &= U_{\text{BS}}^{\text{QD}} V^{\text{QD}} U_{\text{PS}}^{\text{QD}} U_{\text{BS}}^{\text{QD}}, \\
 U_{\text{BS}}^{\text{QD}} &= U_{\text{BS}} \otimes \mathbf{1}^D, \\
 U_{\text{PS}}^{\text{QD}} &= U_{\text{PS}} \otimes \mathbf{1}^D, \\
 V^{\text{QD}} &= |0\rangle\langle 0| \otimes \mathbf{1}^D + |1\rangle\langle 1| \otimes U.
 \end{aligned}$$

对两体量子态 ρ^f 关于 WWD 取偏迹^[40], 得到光子的输出态

$$\begin{aligned}
 \rho_Q^f &= \frac{1}{4}(1 - r_x)(\mathbf{1} + \sigma_x) + \frac{1}{4}(1 + r_x)(\mathbf{1} - \sigma_x) \\
 &\quad - \frac{1}{4}e^{-i\phi}(r_z - ir_y)(\sigma_z - i\sigma_y)\text{tr}(\rho_D^{\text{in}}U^\dagger) \\
 &\quad - \frac{1}{4}e^{i\phi}(r_z + ir_y)(\sigma_z + i\sigma_y)\text{tr}(\rho_D^{\text{in}}U).
 \end{aligned}$$

类似地, WWD 的输出态为

$$\rho_D^f = \frac{1 - r_x}{2}\rho_D^{\text{in}} + \frac{1 + r_x}{2}U\rho_D^{\text{in}}U^\dagger.$$

有了以上准备, 以下两小节将讨论 Mach-Zehnder 干涉仪中的相干性和互补性.

3.2 Mach-Zehnder 干涉仪中的互补性

Bohr 互补原理在 MZI 中具体表现为波粒二相性, 对此已有丰富的理论和实验研究^[4-9,12], 其中一个很重要的工作是 Englert^[8]给出的波粒二相性的不等式刻画. 本节将信息守恒关系 (1) 解释为波粒二相性的等式刻画, 特别地, Englert 的结果是该等式的推论.

Englert 在初始量子态 $\rho_Q^{\text{in}} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + r_x\sigma_x + r_y\sigma_y + r_z\sigma_z)$ 的 Bloch 向量 (r_x, r_y, r_z) 在满足 $r_x = 0$, $r_z + ir_y = e^{i\theta}$ 的条件下得到了以下干涉-路径互补关系:

$$\mathcal{V}^2 + \mathcal{D}^2 \leq 1, \quad (4)$$

其中干涉条纹强度 $\mathcal{V} = |\text{tr}(U\rho_D^{\text{in}})|$ 量化了波动性, 路径的可区分程度 $\mathcal{D} = \frac{1}{2}|\text{tr}(\rho_D^{\text{in}} - U\rho_D^{\text{in}}U^\dagger)|$ 量化了粒子性. Englert 的这个不等式是 MZI 中波粒二相性的一个具体刻画, 具有清晰的物理解释. 但正如 Englert 在文中所言, 光子的路径信息是储存在探测器中的, Englert 对探测器进行测量去提取光子的路径信息, 从而得到 $\mathcal{D}$ 的表达式. 然而从信息论的角度来看, 测量会导致量子系统信息损失. 在 MZI 中光子与探测器相互作用, 如果考虑整个量子系统, 则信息在这一过程中是守恒的. 相互作用只是导致光子的部分信息流失到环境 (探测器) 中, 因此光子退相干. 在这个过程中相干与退相干相伴, 我们希望得到一个体现信息守恒和互补性的等式关系. 本文将说明 (1) 式所示的信息守恒关系可看作 Bohr 互补原理的一个等式刻画.

首先, 注意粒子性与量子态 ρ_D^{in} 和 $U\rho_D^{\text{in}}U^\dagger$ 的可区分程度紧密相关. Englert 提出的量 $\mathcal{D}$ 本质上为两个量子态之间的迹距离^[39], 虽然该量具有好的操作性解释, 但从信息论的角度来看, 该量有一些缺陷, 如它不是黎曼的. 与此对照, Bures 距离 D_b 既是黎曼的又是单调的, 故利用

$$D(\rho_D^{\text{in}}, U\rho_D^{\text{in}}U^\dagger) = \frac{1}{2}D_b^2(\rho_D^{\text{in}}, U\rho_D^{\text{in}}U^\dagger)$$

刻画粒子性具有理论上的优点. 为提供一个直观易理解的例子, 不妨考虑直角三角形的三个边长, 显然边长本身具有明确的物理长度含义, 但它们之间并无明显的数量关系, 但是如果用长度的平方代替长度, 类似于此处用 Bures 距离代替迹距离, 则得到勾股定理这一优美结果.

波动性与粒子性互补, 粒子性用 Bures 距离来刻画, 相应的波动性度量便自然地用保真度来刻画. 此外, 还可直接从 $\mathcal{V}$ 的表达式出发, 给出用保

真度刻画波动性的进一步解释. 由保真度的定义和性质, 可得

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= |\text{tr}(U\rho_D^{\text{in}})| = \left| \text{tr} \left(U \sqrt{\rho_D^{\text{in}}} \sqrt{\rho_D^{\text{in}}} \right) \right| \\ &= \left| \text{tr} \left(U \sqrt{\rho_D^{\text{in}}} U^\dagger U \sqrt{\rho_D^{\text{in}}} \right) \right| = \left| \text{tr} \left(\sqrt{\rho_D^{\text{in}}} U \sqrt{\rho_D^{\text{in}}} U^\dagger U \right) \right| \\ &\leq \left| \max_V \text{tr} \left(\sqrt{\rho_D^{\text{in}}} U \sqrt{\rho_D^{\text{in}}} U^\dagger V \right) \right| = F(\rho_D^{\text{in}}, U\rho_D^{\text{in}}U^\dagger). \end{aligned} \quad (5)$$

因此, 波动性自然地可由 ρ_D^{in} 和 $U\rho_D^{\text{in}}U^\dagger$ 之间的保真度, 亦即 $F(\rho_D^{\text{in}}, U\rho_D^{\text{in}}U^\dagger)$ 来刻画. 这样由信息守恒关系 (1) 式自然得到波粒二相性的如下等式:

$$D(\rho_D^{\text{in}}, U\rho_D^{\text{in}}U^\dagger) + F(\rho_D^{\text{in}}, U\rho_D^{\text{in}}U^\dagger) = 1. \quad (6)$$

(6) 式的等式关系是从现代量子信息的观点出发, 考虑光子与探测器相互作用过程中的信息流动而自然得到的. 实际上, Englert 的互补关系 (4) 式可由上面的等式关系 (6) 式直接得到

$$\begin{aligned} 1 &= (D(\rho_D^{\text{in}}, U\rho_D^{\text{in}}U^\dagger) + F(\rho_D^{\text{in}}, U\rho_D^{\text{in}}U^\dagger))^2 \\ &= (1 - F^2(\rho_D^{\text{in}}, U\rho_D^{\text{in}}U^\dagger)) \\ &\quad + F^2(\rho_D^{\text{in}}, U\rho_D^{\text{in}}U^\dagger) \geq \mathcal{D}^2 + \mathcal{V}^2. \end{aligned}$$

最后一个不等式可由不等式 (2) 和 (5) 直接得到.

3.3 Mach-Zehnder 干涉仪中的相干性

上面的讨论指出在 MZI 中光子与探测器相互作用, 导致光子退相干, 部分信息流失到探测器上. 本节具体计算 Mach-Zehnder 干涉仪中的相干性, 并揭示其与波粒二相性之间的密切关联. 在上述 MZI 中, 考虑信道

$$\Phi(\rho_Q^{\text{in}}) = \text{tr}_D \left(U_{\text{tot}}(\rho_Q^{\text{in}} \otimes \rho_D^{\text{in}}) U_{\text{tot}}^\dagger \right), \quad (7)$$

易证其为保单位 (unital) 信道. 对量子态 $\rho_Q^{\text{in}} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + r_x\sigma_x + r_y\sigma_y + r_z\sigma_z)$, 直接计算可得

$$J(\rho_Q^{\text{in}}, \Phi) = 1 - \frac{1}{4s} [r^2 + r_x^2 + \mathcal{V}(r^2 - r_x^2) \cos(\phi + \alpha + \gamma)],$$

$$I(\rho_Q^{\text{in}}, \Phi) = \frac{1}{4s} [r^2 + r_x^2 + \mathcal{V}(r^2 - r_x^2) \cos(\phi + \alpha + \gamma)],$$

其中 $\alpha = \arg(\text{tr}(U\rho_D^{\text{in}}))$, $s = 1 + \sqrt{1 - r^2}$, $r^2 = r_x^2 + r_y^2 + r_z^2$, 且 $\gamma = \arctan \frac{2r_y r_z}{r_y^2 - r_z^2}$.

非对称部分 $I(\rho_Q^{\text{in}}, \Phi)$ 刻画了量子态 ρ_Q^{in} 关于信道 Φ 的相干, 亦即由 Φ 导致的 ρ_Q^{in} 的退相干^[39]. 从信息论的观点, $I(\rho_Q^{\text{in}}, \Phi)$ 度量了流失到探测器上的路径信息, 故通过对相位求最小, 路径信息 (或粒子性) 可量化为^[39]

$$\mathcal{P} = \min_{\phi} I(\rho_Q^{\text{in}}, \Phi) = \frac{1}{4s} [r^2 + r_x^2 - (r^2 - r_x^2)\mathcal{V}]. \quad (8)$$

相应地, 对称部分 $J(\rho_Q^{\text{in}}, \Phi)$ 可解释为输出态关于两条路径的可获得信息, 故该量与观测到的干涉条纹有关. 通过调节相位得到最大的干涉强度, 可定义波动性度量为^[39]

$$\mathcal{W} = \max_{\phi} J(\rho_Q^{\text{in}}, \Phi) = \frac{1}{4s} [(4s - r^2 - r_x^2) + (r^2 - r_x^2)\mathcal{V}]. \quad (9)$$

由 (8) 和 (9) 式, 可得到波粒二相性的另一个等式刻画

$$\mathcal{P} + \mathcal{W} = 1. \quad (10)$$

利用不等式 (5) 式, 可得到 $\mathcal{P}$ 的下界和 $\mathcal{W}$ 的上界为

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &\geq \frac{1}{4s} [2r_x^2 + (r^2 - r_x^2)(1 - F(\rho_D^{\text{in}}, U\rho_D^{\text{in}}U^\dagger))] \\ &= \frac{1}{4s} [2r_x^2 + (r^2 - r_x^2)D(\rho_D^{\text{in}}, U\rho_D^{\text{in}}U^\dagger)], \end{aligned} \quad (11)$$

$$\mathcal{W} \leq \frac{1}{4s} [(4s - r^2 - r_x^2) + (r^2 - r_x^2)F(\rho_D^{\text{in}}, U\rho_D^{\text{in}}U^\dagger)]. \quad (12)$$

因此, 信息守恒关系 (1) 式与波粒二相性的等式刻画 (10) 式紧密相关, 且当不等式 (11) 和 (12) 变为等式时, 两种守恒关系一致. 特别地, 当 ρ_D^{in} 取特殊的量子态, 如 $r_x = 0$, $r_z + ir_y = e^{i\theta}$ 时,

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &\geq \frac{1}{4}(1 - F(\rho_D^{\text{in}}, U\rho_D^{\text{in}}U^\dagger)) = \frac{1}{4}D(\rho_D^{\text{in}}, U\rho_D^{\text{in}}U^\dagger), \\ \mathcal{W} &\leq \frac{1}{4}(3 + F(\rho_D^{\text{in}}, U\rho_D^{\text{in}}U^\dagger)). \end{aligned}$$

因此, 基于相干给出的波粒二相性的刻画中的粒子性度量 $\mathcal{P}$ 的下界可用 D 刻画, 而波动性的度量 $\mathcal{W}$ 的上界可用 F 刻画. 这与前面用信息守恒关系 (1) 式来描述互补性原理是一致的.

4 结 论

本文讨论了“Bures-保真度”互补关系和“对称-非对称”互补关系, 并将它们解释为信息守恒关系. 作为应用, 由信息守恒关系直接推导出 Englert 的“干涉-路径”不等式. 进一步利用信息守恒关系揭示了 Mach-Zehnder 干涉仪中互补性与相干性的关系, 证明了可区分程度是态关于信道的非对称性 (相干性) 的下界, 而保真度是态关于信道的对称性的上界. 我们期望“对称-非对称”守恒关系能为相干性与互补关系的研究提供一个统一的框架.

参考文献

- [1] Bohr N 1937 *Phil. Sci.* **4** 289
- [2] Heisenberg W 1927 *Zeit. Physik* **43** 172
- [3] Heisenberg W 1930 *The Physical Principles of the Quantum Theory* (Chicago: The University of Chicago Press) pp13–39
- [4] Wootters W K, Zurek W H 1979 *Phys. Rev. D* **19** 473
- [5] Scully M O, Englert B G, Walther H 1991 *Nature* **351** 111
- [6] Mandel L 1991 *Opt. Lett.* **16** 1882
- [7] Jaeger G, Horne M A, Shimony A 1993 *Phys. Rev. A* **48** 1023
- [8] Englert B G 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 2154
- [9] Busch P, Shilladay C 2006 *Phys. Rep.* **435** 1
- [10] Coles P J, Kaniewski J, Wehner S 2014 *Nat. Commun.* **5** 5814
- [11] Coles P J, Berta M, Tomamichel M, Wehner S 2017 *Rev. Mod. Phys.* **89** 015002
- [12] Jaeger G, Shimony A, Vaidmann L 1995 *Phys. Rev. A* **51** 54
- [13] Åberg J 2006 arXiv:quant-ph/0612146
- [14] Levi F, Mintert F 2014 *New J. Phys.* **16** 033007
- [15] Baumgratz T, Cramer M, Plenio M B 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 140401
- [16] Girolami D 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 170401
- [17] Streltsov A, Singh U, Dhar H S, Bera M N, Adesso G 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 020403
- [18] Pires D P, Celeri L C, Soares-Pinto D O 2015 *Phys. Rev. A* **91** 042330
- [19] Yao Y, Xiao X, Ge L, Sun C P 2015 *Phys. Rev. A* **92** 022112
- [20] Winter A, Yang D 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 120404
- [21] Ma J, Yadin B, Girolami D, Vedral V, Gu M 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 160407
- [22] Chang L, Luo S, Sun Y 2017 *Commun. Theor. Phys.* **68** 565
- [23] Streltsov A, Adesso G, Plenio M B 2017 *Rev. Mod. Phys.* **89** 041003
- [24] Luo S, Sun Y 2017 *Phys. Rev. A* **96** 022130
- [25] Luo S, Sun Y 2017 *Phys. Rev. A* **96** 022136
- [26] Yao Y, Dong G H, Xiao X, Li M, Sun C P 2017 *Phys. Rev. A* **96** 052322
- [27] Zhao H, Yu C 2018 *Sci. Rep.* **8** 299
- [28] Jin Z X, Fei S M 2018 *Phys. Rev. A* **97** 062342
- [29] Horodecki M, Oppenheim J 2013 *Nat. Commun.* **4** 2059
- [30] Narasimhachar V, Gour G 2015 *Nat. Commun.* **6** 7689
- [31] Lloyd S 2011 *J. Phys. Conf. Ser.* **302** 012037
- [32] Marvian I, Spekkens R W 2014 *Nat. Commun.* **5** 3821
- [33] Marvian I, Spekkens R W 2016 *Phys. Rev. A* **94** 052324
- [34] Fang Y N, Dong G H, Zhou D L, Sun C P 2016 *Commun. Theor. Phys.* **65** 423
- [35] Yao Y, Dong G H, Xiao X, Sun C P 2016 *Sci. Rep.* **6** 32010
- [36] Bagan E, Bergou J A, Cottrell S S, Hillery M 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 160406
- [37] Bera M N, Qureshi T, Siddiqui M A, Pati A K 2015 *Phys. Rev. A* **92** 012118
- [38] Hu M L, Hu X, Wang J C, Peng Yi, Zhang Y R, Fan H 2018 arXiv:1703.01852 [quant-ph]
- [39] Luo S, Sun Y 2018 *Phys. Rev. A* **98** 012113
- [40] Nielsen, M A, Chuang I L 2000 *Quantum Computation and Quantum Information* (10th Anniversary Edition) (New York: Cambridge University Press) pp60–111, 399–416
- [41] Bures D 1969 *Trans. Amer. Math. Soc.* **135** 199–212
- [42] Hubner M 1993 *Phys. Lett. A* **179** 226
- [43] Fuchs C A, Caves C M 1995 *Open Sys. Inf. Dyn.* **3** 345
- [44] Barnum H, Caves C M, Fuchs C A, Jozsa R, Schumacher B 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 2818
- [45] Uhlmann A 2000 *Phys. Rev. A* **62** 032307
- [46] Dodd J L, Nielsen M A 2002 *Phys. Rev. A* **66** 044301
- [47] Luo S, Zhang Q 2004 *Phys. Rev. A* **69** 032106

SPECIAL TOPIC—Advances in quantum coherence and quantum storage

Coherence and information conservation and their applications in Mach-Zehnder interferometer^{*}

Fu Shuang-Shuang¹⁾ Luo Shun-Long^{2)3)†} Sun Yuan²⁾³⁾

1) (*School of Mathematics and Physics, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China*)

2) (*Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China*)

3) (*School of Mathematical Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China*)

(Received 27 September 2018; revised manuscript received 12 December 2018)

Abstract

Coherence and complementarity are two important themes in quantum mechanics, which have been widely and thoroughly investigated. Recently, with the rapid development of quantum information theory, various measures have been introduced for quantitatively studying the coherence and complementarity. However, most of these studies are independent of each other in that they focus on only one theme, for example, the wave-particle duality and Heisenberg uncertainty principle are usually regarded as manifestation of Bohr's complementary principle, while coherence is a quantum feature closely related to quantum superposition. During the past few years, there has been a flurry of research interest in the study of quantum coherence from the quantum resource-theoretic point of view. In this paper, we establish two information conservation relations and employ them to characterize complementarity and quantum coherence. As an illustration of the main results, we discuss these two themes in the Mach-Zehnder interferometer. Our study reveals that these two quantum themes are closely related to each other. Our main results are listed as follows. Firstly, we establish two information conservation relations, one is based on “Bures distance versus fidelity” and the other based on “symmetry versus asymmetry”. Then we employ these information conservation relations to investigate coherence and complementarity. Specifically, we provide an explanation of the “Bures distance versus fidelity” trade-off relation from the information conservation perspective, establish the link between the information conservation relation and wave-particle duality, and derive the famous Englert inequality concerning “fringe visibility versus path distinguishability” from the information conservation relation. Furthermore, in the general framework of state-channel interaction, we derive “symmetry versus asymmetry” trade-off relation and explain it as an information conservation relation, reveal its intrinsic relations with coherence and complementarity. Lastly, we demonstrate that the two information conservation relations are closely interrelated, and we also discuss the coherence, decoherence and complementarity in the Mach-Zehnder interferometer, explicitly, we reveal that the Bures distance can be regarded as a lower bound of the asymmetry of state-channel interaction while fidelity is an upper bound of the symmetry of state-channel interaction. We expect that our information conservation relation can provide a unified framework for the study of coherence and complementarity.

Keywords: coherence, complementary, information conservation, Mach-Zehnder interferometer

PACS: 03.65.Ta, 03.67.-a, 07.60.Ly

DOI: 10.7498/aps.68.20181778

^{*} Project supported by the Natural Science Foundation of Beijing, China (Grant No. 1174017), the Young Scientists Fund of the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11605006), the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11875317), the National Center for Mathematics and Interdisciplinary Sciences, Chinese Academy of Sciences, China (Grant No. Y029152K51), and the Key Laboratory of Random Complex Structures and Data Science, Chinese Academy of Sciences, China (Grant No. 2008DP173182).

[†] Corresponding author. E-mail: luosl@amt.ac.cn