物理学报 Acta Physica Sinica
Chinese Physical Society
Institute of Physics, CAS

量子相干

李保民 胡明亮 范桁

Quantum coherence

Li Bao-Min Hu Ming-Liang Fan Heng

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 68, 030304 (2019) DOI: 10.7498/aps.68.20181779
在线阅读 View online: https://doi.org/10.7498/aps.68.20181779
当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn

物理学报 Acta Phys. Sin. Vol. 68, No. 3 (2019) 030304

专题: 量子相干和量子存储研究进展

量子相干*

李保民[1)2)] 胡明亮[1)3)†] 范桁[1)4)]

1) (中国科学院物理研究所, 固态量子信息与计算实验室, 北京 100190)

2) (中国科学院大学, 北京 100049)

3) (西安邮电大学理学院, 西安 710121)

4) (中国科学院大学, 拓扑量子计算卓越创新中心, 北京 100190)

(2018 年 9 月 28 日收到; 2018 年 10 月 24 日收到修改稿)

量子相干不仅是量子力学中的一个基本概念, 同时也是重要的量子信息处理的物理资源. 随着基于资源理论框架的量子相干度量方案的提出, 量子相干度的量化研究成为近年来人们关注的一个热点问题. 量子相干作为一种物理资源也十分脆弱, 极容易受到环境噪声的影响而产生退相干, 因此开放系统中的量子相干演化和保持也是人们广泛关注的课题. 另外, 量子相干在量子多体系统、量子热动力学、量子生物学等领域也有着潜在的应用价值. 本文介绍量子相干度量的资源理论框架和基于该框架定义的相对熵相干性、l_1 范数相干性、基于量子纠缠的相干性、基于凸顶结构的相干性和相干鲁棒性等量子相干度量函数, 概述开放系统中量子相干演化的动力学行为、典型信道的量子相干产生和破坏能力以及量子相干的冻结等现象, 同时例举量子相干在 Deutsch-Jozsa 算法、Grover 算法以及量子多体系统相变问题研究等方面的重要应用. 量子相干研究仍处于快速发展之中, 期望本综述能为该领域的发展带来启示.

关键词： 量子相干, 资源理论, 量子信息

PACS： 03.67.–a, 03.65.Yz, 03.67.Ac, 03.65.Ud **DOI:** 10.7498/aps.68.20181779

1 引 言

相干性不仅是经典物理学关注的一个根本问题, 在量子力学中同样占有举足轻重的地位. 实际上, 量子相干已成为量子力学区别于经典物理学的一个重要特征. 对量子相干性的研究, 以相空间分布和多点关联函数为代表的传统方式虽然有助于通过与经典波动力学的类比来获得对量子相干性的某些直觉认识, 并确定那些偏离经典行为的量子相干现象, 但是却很难基于此构建起一个严谨而完整的量子相干刻画和度量的理论框架.

近年来, 随着量子信息学的快速发展, 对量子相干的研究也从单纯的量子力学基本问题范畴发展到将其视为一种可被利用的物理资源. 事实上, 量子相干不仅是引起量子干涉以及非定域性、量子导引、量子纠缠、量子失谐等两体和多体量子关联现象的原因, 借助量子态的相干性进行量子通信和量子计算还可实现诸多经典信息处理方式无法或难以完成的任务, 在量子度量学中利用相干性也可以极大地提高物理量测量的精度[1]. 此外, 量子相干在量子热力学[2–4]和量子生物学[5]等的研究中也有着潜在的应用. 这激发了人们尝试从多个不同角度建立量子相干大小的度量理论, 并基于这些理论进一步探讨相干叠加态的非经典特性以及其他相关问题, 从而为量子信息学的发展提供理论基础.

2014 年, 德国乌尔姆大学的 Baumgratz 等[6]

* 国家重点基础研究发展计划 (批准号: 2016YFA0302104, 2016YFA0300600)、国家自然科学基金 (批准号: 91536108, 11774406, 11675129) 和中国科学院先导 B 专项 (批准号: XDB28000000) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: mingliang0301@163.com

提出了基于资源理论框架的量子相干度量方案和量子相干度量函数需满足的四个准则, 并基于这些准则证明了相对熵和 l_1 范数相干度量函数. 受Baumgratz 等[6]开创性工作的启发, 人们陆续提出了一系列其他满足上述准则的量子相干度量函数, 如基于量子纠缠的相干度量[7]、相干鲁棒性[8]、相干权重[9]、斜信息相干性[10]以及基于凸顶组合的相干度量[11–13]. 通过改变 Baumgratz 等提出的四个准则, 人们还考察了其他一些可能的相干度量函数, 感兴趣的读者可以参见文献[1].

除了研究各种度量方案, 考虑到量子相干是一种有用的物理资源, 同时它又非常脆弱, 极易受到周围环境的扰动而产生退相干, 因此研究开放系统中的量子相干演化和保持也是很有意义的课题. 在这方面人们做了大量工作, 特别是研究发现对某些噪声信道, l_1 范数相干性和相对熵相干性在演化过程中存在冻结现象[14], 对特定的噪声信道量子相干的演化还会满足演化分解率[15]. 此外, 对于某些信道的相干产生和相干破坏能力[16], 人们也进行了深入的研究.

该领域其他方面的相关研究还有量子相干与量子关联的转化、量子相干的蒸馏与稀释等[1]. 限于篇幅, 本文仅概述基于资源理论框架的重要量子相干度量和开放系统中量子相干演化的奇异行为, 展示相干度量在典型量子信息处理和多体系统研究方面的应用, 并针对上述几个方向的发展趋势进行展望.

2 量子相干的度量

如何给出物理意义明确、数学定义严谨的量子相干度量方案是研究人员长久以来十分关注的问题. 过去, 人们仅是基于经验, 将量子态密度矩阵非对角元的大小理解为量子相干性的大小. 2014年, Baumgratz 等[6]提出了基于资源理论框架的量子相干度量方案. 与量子纠缠的资源理论相似[17], 在构建量子相干的资源理论时, 首先需要定义自由态 (非相干态) 集合 $\mathcal{I}$ 以及不会产生相干的自由量子操作 $\varLambda$, 不同的是量子相干依赖于基矢的选取. 在 d 维希尔伯特空间中, 若选定正交基矢 $\{|i\rangle\}_{i=1}^{d}$, 则任意非相干态的密度算符 δ 都是对角的, 即

$$\delta=\sum_{i=1}^{d}\delta_i\left|i\right\rangle\left\langle i\right|, \tag{1}$$

式中 $\delta_i\geqslant 0$ 为对应的密度算符对角元. 该非相干态的定义也决定了对应的量子相干度量是依赖于选定的基矢的, 因为除非 δ 是最大混合态, 否则总是可以通过基矢变换将其转换为非对角态.

自由操作则将任意自由态映射为自由态, 在Baumgratz 等[6]的理论中, 它被定义为如下形式的非相干操作 (incoherent operation, IO):

$$\varLambda\left(\rho\right)=\sum\nolimits_i K_i\rho K_i^{\dagger},$$

其中 Kraus 算子 $\{K_i\}$满足 $\sum_i {K_i}^{\dagger}K_i=\mathbb{I}$, 且对任意的 $\delta\in\mathcal{I}$ 和任意的 K_i 有

$$\frac{K_i\rho {K_i}^{\dagger}}{p_i}\in\mathcal{I},\ \ p_i=\mathrm{tr}(K_i\rho {K_i}^{\dagger}). \tag{2}$$

此外, 根据是否对测量结果进行子选择 (subselection), 还可以进一步将非相干操作分为如下两大类:

1) 非相干完全正定保迹操作 $\varLambda\left(\rho\right)=\sum_i K_i\rho K_i^{\dagger}$, 对此情形所有的 Kraus 算子 K_i 具有相同的维数 $d_{\mathrm{out}}\times d_{\mathrm{in}}$.

2) 对测量结果进行子选择的非相干操作, 此时每一个 Kraus 算子 K_i 可以有不同的维数 $d_n\times d_{\mathrm{in}}$, 但仍需满足 $K_i\rho {K_i}^{\dagger}/p_i\in\mathcal{I}$.

一般而言, 描述非相干操作的 Kraus 算子可表示为 $K_i=\sum_i c_i\left|f\left(i\right)\right\rangle\left\langle i\right|$, 其中 $c_i\in[0,\ 1]$[18]. K_i 的形式也是受到很多限制的, 例如它的矩阵表示中每一列最多只能有一个非零元素[19,20]. 此外, 对 d 维量子态, 任意非相干操作最多只能被分解为 d^4+1个 Kraus 算子, 当 $d=2$ 和 3 时该上界进一步降为 5 和 39[21].

尽管 Baumgratz 等[6]提出的非相干操作已被广泛接受, 量子相干资源理论框架中自由操作的定义并不惟一. 出于物理上或数学上不同的考虑, 研究人员还提出了许多其他形式的自由操作并基于这些操作定义了相应的量子相干度量函数.

1) 最大非相干操作 (maximally incoherent operation, MIO)[22]. 它是将非相干态映射到非相干态的一类量子操作 $\varPhi$ 的集合, $\varPhi(\mathcal{I})\in\mathcal{I}$. 显然, 在量子相干度量理论中, 最大非相干操作集是自由操作的最大集合.

2) 退相位协变非相干操作 (dephasing-covariant incoherent operation, DIO)[23–25]. 它是最大非相干操作集的一个子集, 且满足 $\varLambda\left[\varDelta\left(\rho\right)\right]=\varDelta\left[\varLambda\left(\rho\right)\right]$, 其中

$$\varDelta\left(\rho\right)=\sum_i\left\langle i\right|\rho\left|i\right\rangle\left|i\right\rangle\left\langle i\right| \tag{3}$$

是 ρ 在基底 $|i\rangle$ 下的对角部分.

3) 严格非相干操作 (strictly incoherent operation, SIO)[18]. 该操作具有非相干的 Kraus 算子分解 $\{K_i\}$, 并且对于任意的 i, $K_i^\dagger$ 也是非相干的, 即

$$\Delta\left(K_i\rho K_i^\dagger\right)=K_i\Delta(\rho)K_i^\dagger. \tag{4}$$

上述四种非相干量子操作关系为 SIO⊂IO⊂MIO 或 SIO⊂DIO⊂MIO. 此外人们还讨论了完全非相干操作、真实非相干操作等自由量子操作的集合[26], 它们在不同的理论框架和特定的物理背景下有着各自的应用.

基于自由态和自由量子操作的定义, Baumgratz 等[6]提出了一般量子相干度量函数 $C(\rho)$ 应满足的四个条件:

(C1) 非负性, $C(\rho)\geqslant 0$, 当且仅当 $\delta\in\mathcal{I}$ 时, $C(\delta)=0$;

(C2a) 非相干完全正定保迹操作下的单调性, $C(\rho)\geqslant C(\Lambda[\rho])$;

(C2b) 带有子选择非相干操作下的单调性, $C(\rho)\geqslant\sum_i p_iC(\rho_i)$;

(C3) 凸性, $\sum_i p_iC(\rho_i)\geqslant C(\sum_i p_i\rho_i)$.

类似于量子纠缠资源理论中的相关概念, 如果度量函数 $C(\rho)$ 同时满足以上四个条件, 则我们称其为相干度量子 (coherence measure); 如果 $C(\rho)$ 仅满足条件 (C1), (C2a) 和 (C2b), 而不满足条件 (C3), 则我们称其为相干单调子 (coherence monotone). 值得注意的是, 上述四个条件还有等价的表述方式, 例如基于量子相干可加性的要求, 对于两个不同子空间内的态 ρ_1 和 ρ_2, 应有

$$C(p_1\rho_1\oplus p_2\rho_2)=p_1C(\rho_1)+p_2C(\rho_2). \tag{5}$$

可以证明上面的条件等价于 Baumgratz 等[6]提出的条件中的 (C2b) 和 (C3)[27].

与非相干态相对的概念是最大相干态. 在 Baumgratz 等[6]的资源理论框架中, 它被定义为

$$|\Psi_d\rangle=\frac{1}{\sqrt{d}}\sum_{i=1}^{d}|i\rangle. \tag{6}$$

通过对 (6) 式所示最大相干态进行不同的非相干操作, 可以得到同一个希尔伯特空间中的任意态 ρ, 通过非相干操作也可以实现某些纯态之间的转化[28]. 需要注意的是, 虽然最大相干态 $|\Psi_d\rangle$ 相干度的值为最大, 但它却没有构成最大值相干态 $\mathcal{M}$ 的完全集, 后者的一般形式为 $\rho^{\rm mcs}=|\Psi_d^{\rm mcs}\rangle\langle\Psi_d^{\rm mcs}|$, 其中

$$|\Psi_d^{\rm mcs}\rangle=\frac{1}{\sqrt{d}}\sum_j {\rm e}^{{\rm i}\theta_j}|j\rangle. \tag{7}$$

对于任意好的量子相干度量 $C(\rho)$, 只有当量子态为 $\rho^{\rm mcs}$ 时它才会取最大值[29].

基于资源理论的量子相干度量框架提出后, 研究人员陆续证明了一系列量子相干度量函数. 这些度量函数有的满足 Baumgratz 等[6]提出的四个准则, 而有的只满足其中的一部分. 接下来我们将做一简单回顾.

一种直观的描述量子相干度大小的方法是将其定义为所考察量子态与非相干态集合的最小距离,

$$C_D(\rho)=\min_{\delta\in I}D(\rho,\delta), \tag{8}$$

其中 $D(\rho,\delta)$ 为量子态 ρ 和 δ 之间的某种距离度量. 显然, $D(\rho,\delta)$ 满足相干度量的条件 (C1). 如果对任意的非相干量子操作 Λ 进一步有 $D(\rho,\delta)\geqslant D(\Lambda[\rho],\Lambda[\delta])$, 那么 D 也满足条件 (C2a). 同样地, 如果 $D(\sum_i p_i\rho_i,\sum_i p_i\delta_i)\leqslant\sum_i p_i D(\rho_i,\delta_i)$, 则 D 将进一步满足条件 (C3). 基于此, Braumgratz 等首先证明了相对熵可以作为量化量子相干度的有效工具. 相对熵量子相干定义为[6]

$$C_{\rm r}(\rho)=\min_{\delta\in\mathcal{I}}S(\rho||\delta), \tag{9}$$

很容易证明上述相干度量函数的解析表达式为 $C_{\rm r}(\rho)=S(\rho_{\rm diag})-S(\rho)$, 其中 $S(\cdot)$ 表示冯诺依曼熵, $\rho_{\rm diag}$ 为 ρ 的对角部分. 除冯诺依曼熵以外, 人们也讨论了其他一些基于熵理论的量子相干度量 (如 Tsallis 相对熵等[30]). 相对熵量子相干性的大小与基矢的选取密切有关, 如果对所有基矢进行最优化, 则可得其最大值为 $C_{\rm r}^{\max}(\rho)=\log_2 d-S(\rho)$, 其中 d 是量子态 ρ 的维数[31,32].

矩阵范数是另一种常见的量子态距离的度量, 相应的距离函数取某种矩阵范数. Baumgratz 等 [6] 证明了 l_1 范数量子相干度量函数, 其定义为

$$C_{l_1}(\rho)=\min_{\delta\in\mathcal{I}}||\rho-\delta||_{l_1}, \tag{10}$$

它满足相干度量的全部四个条件, 其解析表达式为 $C_{l_1}(\rho)=\sum_{i\neq j}|\langle i|\rho|j\rangle|$, 正好对应量子态密度算符所有非对角元的绝对值之和. 另外, 由于任意量子态 ρ 都可以分解为

$$\rho=\frac{1}{d}\mathcal{I}_d+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d^2-1}x_iX_i, \tag{11}$$

其中 $x_i={\rm tr}(\rho X_i)$, $\{X_i/\sqrt{2}\}$ 是希尔伯特空间中正交算子基, 因此如果将 $\boldsymbol{X}$ 写为

$$\boldsymbol{X}=\{u_{12},v_{12},\cdots,u_{d-1,d},v_{d-1,d},w_1,w_2,\cdots,w_{d-1}\},\tag{12}$$

其中

$$u_{jk}=|j\rangle\langle k|+|k\rangle\langle j|,v_{jk}=-i(|j\rangle\langle k|-|k\rangle\langle j|),$$
$$w_l=\sqrt{\frac{2}{l(l+1)}\sum_{j=1}^{l}(|j\rangle\langle j|-l|l+1\rangle\langle l+1|)},\tag{13}$$

且$j,k\in\{1,2,\cdots,d\},j<k,l\in\{1,2,\cdots,d-1\}$, 则$C_{l_1}(\rho)$的表达式为[33]

$$C_{l_1}(\rho)=\sum_{r=1}^{(d^2-d)/2}\sqrt{x_{2r-1}^2+x_{2r}^2}.\tag{14}$$

由此可以证明在一般的基矢下, $C_{l_1}(\rho)$的最大值为$C_{l_1}^{\max}(\rho)\leqslant\sqrt{(d^2-d)/2}|\boldsymbol{x}|$, 式中, $|\boldsymbol{x}|$为向量$(x_1,x_2,\cdots,x_{d^2-1})$的模[31].

若采用 Schatten-1 范数 (迹范数), 则相应的量子相干度量函数为

$$C_{\rm tr}(\rho)=\min_{\delta\in I}||\rho-\delta||_1,\tag{15}$$

(15) 式定义的$C_{\rm tr}(\rho)$满足量子相干度量的条件 (C1), (C2a) 和 (C3), 但在非相干操作下它不满足$C(p_1\rho_1\oplus p_2\rho_2)=p_1C(\rho_1)+p_2C(\rho_2)$, 因此它不满足条件 (C2b). Rana 等[34]进一步证明了当 $p\geqslant2$ 时, l_p 范数和 Schatten-p 范数定义的相干度量函数在 Baumgratz 等给出的非相干操作下都不满足条件 (C2b).

Streltsov 等[7]则给出了一种基于量子纠缠的相干度量, 其定义为

$$C_E\left(\rho^{\rm S}\right)=\lim_{d_{\rm A}\to\infty}\left\{\sup E^{\rm S:A}\left(\varLambda^{\rm SA}\left[\rho^{\rm S}\otimes\left|0^{\rm A}\right\rangle\left\langle0^{\rm A}\right|\right]\right)\right\},\tag{16}$$

其中$\rho^{\rm S}$为系统 S 的密度算符; A 为辅助系统, 其维数为 $d_{\rm A}$; $E^{\rm S:A}$是 S 和 A 之间的纠缠度量; $\varLambda^{\rm SA}$为作用在系统 SA 上的非相干操作, 式中上界取遍所有的$\varLambda^{\rm SA}$. 该度量方法主要基于以下事实: 即如果系统$\rho^{\rm S}$是非相干的, 那么在任何非相干操作$\varLambda^{\rm SA}$下, S 与 A 之间都不会产生纠缠; 而如果系统 S 的相干度不为零, 那么在某些非相干操作下, S 与 A 之间就会产生纠缠. 当纠缠度量 E 满足纠缠资源理论中的相应条件时, C_E 同样也满足相干资源理论中的四个条件; 而当 E 仅为量子纠缠的单调子时, C_E 同样也是量子相干的单调子.

对某些特定的纠缠度量方案, 可以得到 C_E 的具体表达式. 例如当 E 取蒸馏纠缠时, C_E 恰好为蒸馏相干[18], 即$C_E(\rho)=C_d(\rho)$, 其中

$$C_d(\rho)=\sup\Big\{R:\lim_{n\to\infty}\Big([\inf\big\|\varLambda\left[\rho^{\otimes n}\right]-|\varPsi_2\rangle\langle\varPsi_2|^{\otimes\lfloor nR\rfloor}\big\|\Big)=0\Big\}.\tag{17}$$

如果进一步将自由操作限制为非相干操作, 那么蒸馏相干与相对熵量子相干相等, 即

$$C_d(\rho)=C_{\rm r}(\rho)=S(\varDelta[\rho])-S(\rho).\tag{18}$$

而当纠缠取其几何度量 $E_{\rm g}=1-\max_{\sigma\in S}F(\rho,\sigma)$时[35], 则相应的相干度量也恰为几何度量,

$$C_g(\rho)=1-\max_{\delta\in\mathcal{I}}F(\rho,\delta).\tag{19}$$

此外, 研究人员还构造了多种量子相干的凸顶度量. 如果给定一个纯态的相干度量$C(|\varPsi\rangle)$, 可以通过标准的凸顶构造将其推广到混态,

$$C(\rho)=\inf\sum_i p_iC(|\varPsi_i\rangle),\tag{20}$$

式中下界取遍所有的纯态分解$\rho=\sum_i p_i|\varPsi_i\rangle\langle\varPsi_i|$. 基于此, 研究人员提出了量子相干的固有随机性度量[11]、基于生成纠缠的度量[12]和基于保真度的度量[13]. 量子相干的几何度量$C_{\rm g}(\rho)$同样可以视为基于凸顶结构的度量

$$C_{\rm g}(\rho)=\inf\{\sum\nolimits_i p_iC_{\rm g}(|\varPsi_i\rangle)\}.\tag{21}$$

除了基于量子态距离的度量外, Napoli 等[8]提出了量子相干鲁棒性的概念. 对于一个给定的量子态ρ, 相干鲁棒性被定义为

$$C_R(\rho)=\min_\sigma\left\{s\geqslant0|\frac{\rho+s\sigma}{1+s}\in\mathcal{I}\right\},\tag{22}$$

其中最小值取遍同一希尔伯特空间中所有的量子态 ρ. $C_R(\rho)$满足量子相干度量条件中的 (C1), (C2a) 和 (C3), 并且在非相干操作下满足条件 (C2b). 相干鲁棒性度量还有着较好的操作解释, 例如对于任一个相干见证算子 W和非相干态δ都有${\rm tr}[\delta W]\geqslant0$, $W\leqslant\mathbb{I}$时相干鲁棒性度量与相干见证之间有以下关系:

$$C_R(\rho)\geqslant\max\{0,-{\rm tr}[\rho W]\}.\tag{23}$$

对于任意的量子态ρ都存在一个相干性证据 W使得 (23) 式等号成立, 因此实验上可以通过测量相干见证算子的期望值来得到量子相干鲁棒性的大小.

除上述提到的几类度量, 近几年人们还研究了基于斜信息的相干度量[10], 另外对无穷维系统 (如光的量子态、高斯态等) 中的量子相干度量人们也进行了深入探讨[36–40], 从而为相关的实验研究提供了理论支撑.

3 量子相干动力学

量子相干是量子通信和量子计算的宝贵物理资源, 但是它却十分脆弱. 在开放系统中环境噪声的干扰会引起系统量子相干大小的快速衰减. 本节主要概述典型噪声信道中系统量子相干动力学演化的行为, 包括量子相干的冻结现象、量子信道的相干能力和退相干能力等.

对于特定的系统初态和噪声信道, 量子态的相干性在系统演化过程中可以保持不变, 这种现象就是量子相干的冻结. Bromley 等[14]研究了 N 量子比特系统中每个量子比特处在局域独立信道中时的量子相干演化动力学演化行为. 对于以下形式的 N 量子比特贝尔对角态

$$\rho_N^{\text{Bell}} = \frac{1}{2^N}(\mathbb{I}_2^{\otimes N} + \sum_{i=1}^{3} c_i \sigma_i^{\otimes N}), \tag{24}$$

研究发现若 N 为偶数且 $c_2 = -1^{N/2} c_1 c_3$, 则所有基于距离的合理量子相干度量在比特翻转信道作用下都会被永久冻结 (对于比特-相位翻转信道, 调换 c_1 和 c_2 可以得到相同的结果). 若考虑相对熵量子相干性, 上述结论对所有的偶数 N 都成立, 而对于迹范数量子相干性, 仅当 $N=2$ 时上述结论才成立. 另外, 对于一般的单量子比特态 (即贝尔对角态中 $N=1$ 的情形), 在比特翻转信道作用下, 当 $c_2 = 0$ 时 l_1 范数相干性也将被永久冻结. 实验上, 在相位阻尼信道作用下, 双量子比特和四量子比特态的相对熵量子相干、基于保真度的量子相干和迹范数量子相干的冻结现象也已经在核磁共振系统中被观察到[41].

在量子信道 $\mathcal{E}$ 作用下, 系统的相干性可能会增加或减少. Mani 和 Karimipour[42]研究了信道 $\mathcal{E}$ 的相干生成和相干破坏能力. 他们将 $\mathcal{E}$ 的相干生成能力定义为该信道作用在非相干态上能够产生的最大相干值, 而将 $\mathcal{E}$ 的相干破坏能力定义为在该信道作用下最大相干态相干度减少的值. 具体如下:

$$CP(E) = \max_{\delta \in \mathcal{I}} C(E[\delta]), \tag{25}$$

$$DP(\mathcal{E}) = C(\rho^{\text{mcs}}) - \min_{\rho^{\text{mcs}} \in \mathcal{M}} C(\mathcal{E}[\rho^{\text{mcs}}]). \tag{26}$$

对单量子比特态, 他们发现幺正信道的相干生成和相干破坏能力在任何基矢下都相等. 对 N 个相互独立的幺正信道,相应的相干生成能力为

$$CP(\otimes_{i=1}^{N} U_i) = \prod_{i=1}^{N} [CP(U_i) + 1] - 1, \tag{27}$$

而相干破坏能力有如下形式的下界,

$$DP(\otimes_{i=1}^{N} U_i) \geqslant 2^N - \prod_{i=1}^{N} [2 - DP(U_i)]. \tag{28}$$

对一般的量子信道 $\mathcal{E}$, 尽管其相干生成能力没有解析表达式, 但根据相干能力的物理意义, 它仍应满足如下的可加性[43]:

$$CP_{l_1}(\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2) + 1 = (CP_{l_1}(\mathcal{E}_1) + 1)(CP_{l_1}(\mathcal{E}_2) + 1), \tag{29}$$

$$CP_r(\otimes_{i=1}^{N} \mathcal{E}_i) = \sum_{i=1}^{N} CP_r(\mathcal{E}_i). \tag{30}$$

量子信道 $\mathcal{E}$ 的相干生成能力的定义并不惟一. 更一般地, 可以将任意量子态在 $\mathcal{E}$ 作用下的最大相干增量定义为其相干能力,

$$CP^{(\rho)}(\mathcal{E}) = \max_{\rho} \{C(\mathcal{E}[\rho]) - C(\rho)\}, \tag{31}$$

式中最大值取遍所有的量子态 ρ. 由于 ρ 不止局限于非相干态, 因此 $CP(\mathcal{E}) \leqslant CP^{(\rho)}(\mathcal{E})$. 对 l_1 范数量子相干性和单量子比特系统, 任意幺正信道的相干能力在两种表述下相等, 即 $CP(\mathcal{E}) = CP^{(\rho)}(\mathcal{E})$; 而当系统的维数大于或等于 3 时, $CP(\mathcal{E})$ 严格小于 $CP^{(\rho)}(\mathcal{E})$. 此外, 若考虑相对熵相干度量, 则可以证明幺正操作的相干产生能力可以转化为其列矢量的最大相干值[44]. 对非幺正信道, 研究发现上述结论仍然适用[43]. 此外, 研究人员也对其他一些典型量子信道的相干产生能力和退相干能力进行了深入研究[16,45].

开放系统中量子相干的演化行为也是一个重要的研究课题. 量子态随时间的演化可以用主方程来描述, 如果量子主方程在时间上是局域的, 那么可以用一个线性映射 $\rho(t) = \mathcal{E}(\rho(0))$ 来刻画. 如果映射 E 是完全正定且保迹的[46], 那么可以借助 Kraus 算子 $\{E_\mu\}$ 将其具体写为 $\mathcal{E}(\rho) = \sum_\mu E_\mu \rho E_\mu^\dagger$. 考虑量子态

$$\rho = \frac{1}{d}\mathbb{I}_{\text{d}} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d^2-1} x_i X_i. \tag{32}$$

在海森伯绘景下, $\mathcal{E}^\dagger(X_i) = \sum_\mu E_\mu^\dagger X_i E_\mu$, $x_i' = \text{tr}(\rho \mathcal{E}^\dagger(X_i))$. 将 $\mathcal{E}^\dagger$ 用转换矩阵 $\boldsymbol{T}$ 表示为 $\mathcal{E}^\dagger(X_i) = \sum_{j=0}^{d^2-1} T_{ij} X_j$, 其中 $T_{ij} = \text{tr}(\mathcal{E}^\dagger(X_i) X_j)$, 那么有 $x_i' = \sum_{j=0}^{d^2-1} T_{ij} x_j$. 若 $\boldsymbol{X}$ 选取前文所述形式, 则对于如下形式的量子态,

$$\rho^{\hat{n}} = \frac{\mathbb{I}_d}{d} + \frac{1}{2}\chi \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{X}, \tag{33}$$

式中 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 为单位向量, 当 $T_{k0} = 0\,(1 \leqslant k \leqslant d^2-1)$ 时,

l_1 范数相干度量函数的演化满足如下的分解关系式[15]:

$$C_{l_1}\left(\mathcal{E}\left[\rho^{\hat{n}}\right]\right)=C_{l_1}(\rho)\,C_{l_1}\left(\mathcal{E}[\rho_p^{\hat{n}}]\right), \tag{34}$$

式中

$$\rho_p^{\hat{n}}=\frac{\mathbb{I}}{d}+\frac{1}{2}\chi_p\hat{n}\cdot\boldsymbol{X},\quad \chi_p=\frac{1}{\sum_{r=1}^{d_0}\left(n_{2r-1}^2+n_{2r}^2\right)^{\frac{1}{2}}}. \tag{35}$$

如果映射$\mathcal{E}$不仅满足$\sum_\mu E_\mu^\dagger E_\mu=\mathbb{I}$, 而且算符$A=\sum_\mu E_\mu E_\mu^\dagger$是对角的, 那么在此量子信道作用下 l_1 范数量子相干度量的演化便满足上面的关系式.

而对于如下形式的量子态

$$\rho=\frac{\mathbb{I}_d}{d}+\frac{1}{2}\sum_{k=k}^{k_\beta}x_kX_k+\sum_{l=d^2-d+1}^{d^2-1}x_lX_l,\beta\leqslant d^2-d, \tag{36}$$

如果$\mathcal{E}$满足$\mathcal{E}^\dagger\left(X_k\right)=q\left(t\right)X_k$(如泡利信道和盖尔曼信道), 那么对应量子相干的演化则由其初始相干值和噪声因子$|q\left(t\right)|$共同决定, 也即

$$C_{l_1}\left(\mathcal{E}\left[\rho\right]\right)=|q\left(t\right)|\,C_{l_1}\left(\rho\right). \tag{37}$$

4 量子相干度量的应用

量子态的相干性在量子通信、量子计算和量子计量学等实际问题的处理中都发挥着重要作用, 同时它还在量子多体理论、量子热动力学、量子生物学等一些问题的研究中具有潜在的应用价值. 特别是量子相干的量化使得人们可以更好地理解量子相干在量子计算等过程中所扮演的角色. 接下来, 我们就通过几个具体的实例来说明近几年该领域的一些主要进展.

Deutsch-Jozsa 算法[47]是最早的量子算法之一, 尽管其所能解决的问题十分局限, 但是却很好地展示了量子计算相对于经典计算的优势. 如果一个布尔函数只有两种可能: 常数值 (对于整个定义域其函数值要么全部为 0, 要么全部为 1) 或平衡值 (恰好有一半函数值为 0, 另一半为 1), 则区分这两种可能经典计算机最多需要 $2^{N-1}+1$ 个函数值. 而对于 N 比特量子系统, Deutsch-Jozsa 算法仅需要一个函数值就可以做到. Hillery[48]从数值上讨论了量子相干对 Deutsch-Jozsa 算法的影响, 发现系统的相干度越小, 区分平衡或常数的能力就越低.

量子相干在 Grover 搜索算法中也发挥着重要作用. Anand 和 Pati[49]考察了类 Grover 算法 (Grover 算法基于绝热哈密顿量演化的一种形式), 并建立了搜索成功概率 $p_{\rm succ}$ 和与其对应的量子态相干值之间的关系,

$$C_{l_1}\left(p_{\rm succ}\right)=2\sqrt{p_{\rm succ}\left(1-p_{\rm succ}\right)}, \tag{38}$$

$$C_r\left(p_{\rm succ}\right)=-p_{\rm succ}\log_2 p_{\rm succ}-\left(1-p_{\rm succ}\right)\log_2\left(1-p_{\rm succ}\right). \tag{39}$$

进一步的研究则发现 Grover 搜索算法中量子相干的消耗越大, 其成功的概率就越大, 当然必要的最佳搜索时间也会越长. 而这两者与量子纠缠、量子失谐等量子关联度量之间并没有直接的关系[50].

利用量子相干度量研究多体系统的量子行为也是行之有效的方法, 例如超导理论中著名的非对角长程序就与系统的 l_1 范数相干度量直接相关[1]. 量子纠缠在多体系统中的一种重要应用是探测和描述量子相变, 而量子相干度量作为系统量子特性的一种重要量化描述, 同样可以扮演类似的角色.

Karpat 等[51]考察了基于斜信息的量子相干度量在研究量子相变中的有效性, 对如下形式的自旋 1/2 海森伯 XY 模型

$$\hat{H}=-\frac{\Lambda}{2}\sum_i\left[\left(1+\gamma\right)\sigma_i^x\sigma_{i+1}^x+\left(1-\gamma\right)\sigma_i^y\sigma_{i+1}^y\right]-\sum_i\sigma_i^z, \tag{40}$$

他们计算了对应的单自旋相干$I\left(\rho,\sigma^\beta\right)$、双自旋局域相干$I\left(\rho,\sigma^\beta\otimes I_2\right)$以及它们的下界, 进而观测到了热基态的二阶量子相变.

Chen 等[52]则展示了相干敏感度在研究量子相变中的应用. 相干敏感度被定义为相对熵量子相干的一阶导数, 即

$$\chi^{\rm co}=\frac{\partial C_r\left(\rho\right)}{\partial\Lambda}, \tag{41}$$

式中λ为系统哈密顿量的特征参数. 对横场伊辛模型、自旋 1/2 海森伯 XX 模型和 Kitaev 蜂巢模型, 借助相干敏感度的奇异点不仅可以准确找到量子相变点, 还可以找到量子临界的温度结构, 而后者正是相干敏感度方法的优势所在.

利用量子相干度量研究其他模型中量子相变的工作可以参见文献[53—55]. 除了在量子算法和量子多体问题研究中的重要应用之外, 量子相干度量在量子计量学[8,10]、量子热力学[2—4,56,57]和量子生物学[5]等领域的研究中也都有相应的应用. 限于篇幅, 在此不再一一赘述.

5 总结与展望

量子相干起源于量子态的叠加, 它是量子理论

中的基本概念, 在量子信息等新兴领域同样扮演着十分重要的角色. 深入研究量子相干的各种性质不仅可以使人们更好地理解这一基本物理概念, 也可以推动相领域的交叉融合与发展. 量子相干的度量一直以来都是研究人员非常关心的问题, 特别是自 Baumgratz 等[6]提出基于资源理论框架的量子相干度量方案并首次在数学上严格地量化了量子相干以来, 关于量子相干度量及相关问题的研究进入了快速发展期. 本文对近年来该领域的一些主要进展做了概述.

首先, 我们回顾了量子相干资源理论的基本框架, 包括非相干态、最大相干态和非相干操作的定义以及量子相干度量函数需满足的基本条件, 介绍了基于量子态之间距离的量子相干度量、基于量子纠缠的量子相干度量等一些具体的度量形式. 回顾了量子相干度量在不同物理体系、不同量子信道作用下的动力学演化行为, 着重介绍了量子相干的冻结现象, 量子信道的相干产生能力和相干破坏能力以及某些特定量子态中量子相干度量的动力学演化分解率. 除此之外, 量子相干的非马尔可夫演化和开放体系量子相干演化的操控等领域也有丰富的研究成果涌现[1]. 最后简要回顾了量子相干的一些典型应用, 包括量子相干在 Deutsch-Jozsa 算法、Grover 搜索算法中起到的作用, 以及量子相干度量在多体量子相变研究中的应用.

尽管已有较为广泛且深入的研究成果, 量子相干相关领域的研究仍然富有生命力, 许多有趣的、富有挑战性的问题尚有待解决. 例如迄今为止大部分量子相干的度量都是基于 Baumgratz 等[6]提出的四个公理化条件, 许多度量至今没有找到确切的物理含义. 另外, 如果适当地放宽约束条件, 或许可以定义更多富有物理含义、数学上严格的量子相干度量函数. 量子相干与量子关联更加本质的关系也有待人们深入的讨论. 量子相干的严格度量为开放系统退相干过程的分析提供了可能, 量子相干在量子多体系统的研究方面仍然有巨大的应用潜力. 相信在未来的几年中, 这个领域将会有更好的发展.

参考文献

[1] Hu M L, Hu X, Wang J, Peng Y, Zhang Y R, Fan H 2018 *Phys. Rep.* **762** 1

[2] Aberg J 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 150402

[3] Lostaglio M, Jennings D, Rudolph T 2015 *Nat. Commun.* **6** 6383

[4] Narasimhachar V, Gour G 2015 *Nat. Commun.* **6** 7689

[5] Lambert N, Chen Y N, Cheng Y C, Li C M, Chen G Y, Nori F 2013 *Nat. Phys.* **9** 10

[6] Baumgratz T, Cramer M, Plenio M B 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 140401

[7] Streltsov A, Singh U, Dhar H S, Bera M N, Adesso G 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 020403

[8] Napoli C, Bromley T R, Cianciaruso M, Piani M, Johnston N, Adesso G 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 150502

[9] Bu K, Anand N, Singh U 2018 *Phys. Rev. A* **97** 032342

[10] Yu C S 2017 *Phys. Rev. A* **95** 042337

[11] Yuan X, Zhou H, Cao Z, Ma X 2015 *Phys. Rev. A* **92** 022124

[12] Qi X, Gao T, Yan F L 2017 *J. Phys. A* **50** 285301

[13] Liu C L, Zhang D J, Yu X D, Ding Q M 2017 *Quantum Inf. Process.* **16** 198

[14] Bromley T R, Cianciaruso M, Adesso G 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 210401

[15] Hu M L, Fan H 2016 *Sci. Rep.* **6** 29260

[16] Zanardi P, Styliaris G, Venuti L C 2017 *Phys. Rev. A* **95** 052306

[17] Horodecki R, Horodecki P, Horodecki M, Horodecki K 2009 *Rev. Mod. Phys.* **81** 865

[18] Winter A, Yang D 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 120404

[19] Shao L H, Xi Z, Fan H, Li Y 2015 *Phys. Rev. A* **91** 042120

[20] Yao Y, Xiao X, Ge L, Li M, Sun C P 2015 *Phys. Rev. A* **92** 022112

[21] Streltsov A, Rana S, Boes P, Eisert J 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 140402

[22] Aberg J 2006 arXiv:0612146 [quant-ph]

[23] Chitambar E, Gour G 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 030401

[24] Chitambar E, Gour G 2016 *Phys. Rev. A* **94** 052336

[25] Marvian I, Spekkens R W 2016 *Phys. Rev. A* **94** 052324

[26] de Vincenzo J I, Streltsov A 2017 *J. Phys. A* **50** 045301

[27] Yu X D, Zhang D J, Xu G F, Tong D M 2016 *Phys. Rev. A* **94** 060302

[28] Du S, Bai Z, Guo Y 2015 *Phys. Rev. A* **91** 052120

[29] Peng Y, Jiang Y, Fan H 2016 *Phys. Rev. A* **93** 032326

[30] Rastegin A E 2016 *Phys. Rev. A* **93** 032136

[31] Hu M L, Fan H 2017 *Phys. Rev. A* **95** 052106

[32] Yao Y, Dong G H, Ge L, Li M, Sun C P 2016 *Phys. Rev. A* **94** 062339

[33] Singh U, Bera M N, Dhar H S, Pati A K 2015 *Phys. Rev. A* **91** 052115

[34] Rana S, Parashar P, Lewenstein M 2016 *Phys. Rev. A* **93** 012110

[35] Streltsov A, Kampermann H, Bruß D 2010 *New J. Phys.* **12** 123004

[36] Marvian I, Spekkens R W 2014 *Nat. Commun.* **5** 3821

[37] Marvian I, Spekkens R W, Zanardi P 2016 *Phys. Rev. A* **93** 052331

[38] Zhang Y R, Shao LH, Li Y, Fan H 2016 *Phys. Rev. A* **93** 012334

[39] Xu J 2016 *Phys. Rev. A* **93** 032111

[40] Tan K C, Volkoff T, Kwon H, Jeong H 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 190405

[41] Silva I A, Souza A M, Bromley T R, Cianciaruso M, Marx R, Sarthour R S, Oliveira I S, Franco R L, Glaser S J, deAzevedo E R, Soares-Pinto D O, Adesso G 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 160402

[42] Mani A, Karimipour V 2015 *Phys. Rev. A* **92** 032331

[43] Bu K, Kumar A, Zhang L, Wu J 2017 *Phys. Lett. A* **381** 1670

[44] Xi Z J, Hu M L, Li Y M, Fan H 2018 *Quantum Inf. Process.* **17** 34

[45] Situ H, Hu X 2016 *Quantum Inf. Process.* **15** 4649

[46] Andersson E, Cresser J D, Hall M J W 2007 *J. Mod. Opt.* **54**

1695
[47] Deutsch D, Jozsa R 1992 *Proc. R. Soc. Landon A* **439** 553
[48] Hillery M 2016 *Phys. Rev. A* **93** 012111
[49] Anand N, Pati A K 2016 arXiv:1611.04542 [quant-ph]
[50] Shi H L, Liu S Y, Wang X H, Yang W L, Yang Z Y, Fan H 2017 *Phys. Rev. A* **95** 032307
[51] Karpat G, Çakmak B, Fanchini F F 2014 *Phys. Rev. B* **90** 104431
[52] Chen J J, Cui J, Zhang Y R, Fan H 2016 *Phys. Rev. A* **94** 022112
[53] Lei S, Tong P 2016 *Quantum Inf. Process.* **15** 1811
[54] Li Y C, Lin H Q 2016 *Sci. Rep.* **6** 26365
[55] Malvezzi A L, Karpat G, Çakmak B, Fanchini F F, Debarba T, Vianna R O 2016 *Phys. Rev. B* **93** 184428
[56] Faist P, Oppenheim J, Renner R 2015 *New J. Phys.* **17** 043003
[57] Misra A, Singh U, Bhattacharya S, Pati A K 2016 *Phys. Rev. A* **93** 052335

SPECIAL TOPIC—Advances in quantum coherence and quantum storage

Quantum coherence*

Li Bao-Min[1)2)] Hu Ming-Liang[1)3)†] Fan Heng[1)4)]

1) (*Solid State Quantum Information and Computation Laboratory, Institute of Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100190, *China*)

2) (*University of Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100049, *China*)

3) (*School of Science, Xi'an University of Posts and Telecommunications, Xi'an* 710121, *China*)

4) (*Center for Excellence in Topological Quantum Computation, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100190, *China*)

(Received 28 September 2018; revised manuscript received 24 October 2018)

Abstract

Quantum coherence is not only a fundamental concept of quantum mechanics, but also an important physical resource for quantum information processing. Along with the formulation of the resource theoretic framework of quantum coherence, the quantification of coherence is still one of the recent research focuses. Quantum coherence is also very fragile, and the environmental noise usually induces a system to decohere. Hence it is also an important subject to make clear the dynamical behavior and to seek a flexible way of preserving quantum coherence of an open quantum system. Besides, there are many potential applications of quantum coherence in quantum many-body system, quantum thermodynamics, quantum biology and other related fields. We review in this paper the resource theoretic framework for quantifying coherence and the relevant quantum coherence measures defined within this framework which includes the relative entropy of coherence, the l_1 norm of coherence, the entanglement-based measure of coherence, the convex roof measure of coherence, and the robustness of coherence. We also review the dynamical behaviors of quantum coherence for certain open quantum systems, the coherence generating and breaking power of typical quantum channels, and the freezing phenomenon of quantum coherence. Moreover, we exemplify applications of quantum coherence in Deutsch-Jozsa algorithm, Grover search algorithms, and the study of quantum phase transitions in multipartite systems. We hope that these results may provide not only an overview of the relevant field, but also an outlook of the future research direction of this exciting field.

Keywords: quantum coherence, resource theory, quantum information

PACS: 03.67.–a, 03.65.Yz, 03.67.Ac, 03.65.Ud **DOI:** 10.7498/aps.68.20181779

* Project supported by the National Key R&D Program of China (Grant Nos. 2016YFA0302104, 2016YFA0300600), the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 91536108, 11774406, 11675129), and the Strategic Priority Research Program of Chinese Academy of Sciences (Grant No. XDB28000000).

† Corresponding author. E-mail: mingliang0301@163.com