

一维准周期晶格的性质及应用

王玉成 刘雄军 陈澍

Properties and applications of one dimensional quasiperiodic lattices

Wang Yu-Cheng Liu Xiong-Jun Chen Shu

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 68, 040301 (2019) DOI: 10.7498/aps.68.20181927

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181927>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

新型Fibonacci准周期结构一维等离子体光子晶体的全方位带隙特性研究

Omnidirectional photonic bandgap of the one-dimensional plasma photonic crystal based on a novel Fibonacci quasiperiodic structure

物理学报. 2016, 65(24): 244204 <https://doi.org/10.7498/aps.65.244204>

多模1064nm光纤激光器实现一维远失谐光晶格

One-dimensional far-detuned optical lattice realized with a multimode 1064 nm laser

物理学报. 2016, 65(4): 043701 <https://doi.org/10.7498/aps.65.043701>

无序效应对1T-TaS₂材料中Mott绝缘相的影响

Anderson localization effect on Mott phase in 1T-TaS₂

物理学报. 2017, 66(5): 057101 <https://doi.org/10.7498/aps.66.057101>

表层厚度渐变一维耦合腔光子晶体的反射相位特性及其应用

Reflection phase characteristics and their applications based on one-dimensional coupled-cavity photonic crystals with gradually changed thickness of surface layer

物理学报. 2016, 65(7): 074201 <https://doi.org/10.7498/aps.65.074201>

高压下准一维纳米结构的研究

Studies of quasi one-dimensional nanostructures at high pressures

物理学报. 2017, 66(3): 039101 <https://doi.org/10.7498/aps.66.039101>

专题：冷原子-分子物理

编者按 20世纪八十年代,激光冷却中性原子技术的发展开创了冷原子分子物理研究领域;1995年玻色-爱因斯坦凝聚体在冷原子气体中的实验实现吸引了凝聚态和统计物理等多学科研究人员的广泛关注,这两项开创性研究分别获得了1997年和2001年的诺贝尔物理学奖.随后,研究者在该领域迅速取得了若干其他重要突破,并逐渐和物理学的各分支学科,如凝聚态物理、光物理、精密测量物理、理论物理和量子信息等交叉融合,从而形成了一个全新的研究领域.近几十年来,冷原子-分子物理始终是物理学国际前沿热点研究领域之一.由于冷原子或冷分子都是高度可控并近乎完美的量子体系,描写它的哈密顿量的每一项参数,如动能、势能、相互作用、无序度、等效规范场等都是实验可控的,因此它可以用来模拟强关联体系以及研究一些极端条件的物理现象,同时它是量子计算物理实现的有力候选体系.另外,它可以用于精密测量各种物理量,如实现最高时间测量精度的原子钟、精密测量电磁场等,从而在军民两用领域都有重大应用价值.本专题邀请了若干活跃在该领域前沿的专家撰稿,介绍冷原子和冷分子领域部分国际前沿课题和最新研究进展.专题以短篇综述为主,从研究内容上可大致分为三类:一是基于冷原子分子的量子模拟(大部分文章属于此类);二是冷原子分子的实现和精确操控;三是基于冷原子分子的精密测量.

希望这个专题能够为青年学者选择科学方向、研究课题以及从事相关领域的研究人员提供帮助,并进而促进我国原子分子和量子物理学的发展.

(客座编辑:南京大学物理学院 朱诗亮)

一维准周期晶格的性质及应用*

王玉成^{1)2)3)†} 刘雄军²⁾⁶⁾ 陈澍^{4)5)6)‡}

1) (南方科技大学物理系,深圳量子科学与工程研究院,深圳 518055)

2) (北京大学物理学院,国际量子材料中心,北京 100871)

3) (中国科学技术大学,量子信息与量子物理协同创新中心,合肥 230026)

4) (中国科学院物理研究所,北京凝聚态物理国家研究中心,北京 100190)

5) (中国科学院大学物理科学学院,北京 100049)

6) (量子物质科学协同创新中心,北京 100084)

(2018年10月30日收到;2018年12月25日收到修改稿)

准周期晶格在冷原子领域被广泛研究,它使得人们可以在一维或者二维系统里研究扩展到安德森局域的转变.2008年,Inguscio研究组在冷原子系统里制备了一维准周期晶格,并观测到了安德森局域化现象,这极大地推动了准周期系统的理论和实验研究.后来,Bloch研究组在制备的一维和二维准周期晶格中都观测到了多体局域的现象.最近,他们还在准周期晶格中成功观测到迁移率边以及存在迁移率边的系统的多体局域现象.这些冷原子实验推动了多体局域以及迁移率边等方向的研究.准周期晶格已经成为一个平台,它对很多物理现象的影响正在被广泛研究,并可以尝试在冷原子实验中观测到这种影响.本文结合作者的一些相关工作,对一维准周期晶格一些近期的研究进行了简要综述,介绍了一些相关的重要的冷原子实验,讨论了准周期晶格的一些重要性质,以及它对一些物理现象(比如拓扑态)的影响.

关键词: 光晶格,安德森局域化,多体局域,拓扑态

PACS: 03.65.Vf, 04.60.Kz, 71.10.Fd, 72.15.Rn

DOI: 10.7498/aps.68.20181927

* 国家重点研发计划(批准号:2016YFA0301604,2016YFA0300600,2016YFA0302104)、国家自然科学基金(批准号:11674301,11574008,11761161003,11425419)、中国青年千人计划和中国科学院战略优先研究计划(批准号:XDB07020000)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: wangyc3@sustc.edu.cn

‡ 通信作者. E-mail: schen@iphy.ac.cn

1 引言

近三十年来,随着一系列原子的激光冷却与陷俘技术的实现和进步^[1],人们能够研究超冷原子气体中新奇的量子现象.一些关键性的技术,比如菲斯巴赫 (Feshbach) 共振技术^[2],应用到冷原子系统上,人们可以调节原子间的有效相互作用.由于超冷原子气具有高度纯净和容易操控的优点,成为了理想的量子模拟的平台,比如人们已经成功模拟了费米和玻色哈伯德 (Hubbard) 模型^[3],自旋轨道耦合^[4,5],拓扑模型及相变^[6,7],科斯特利茨-索利斯 (Kosterlize-Thouless) 相变^[8],甚至霍金辐射^[9]等.所以现在的理论物理学家提出一个新的现象时,往往会考虑怎么在冷原子中模拟这种现象.另外,这些量子模拟不仅仅是验证凝聚态里的一些已知的结果,而且通过引入一些参数和新的环境,可以得到一些新的物理现象,这些新的物理现象又推动了理论物理的发展.

在 1980 年, Aubry 和 André 研究了一维准周期系统^[10](以下简称 AA 模型). 尽管该系统不是随机无序的,但是它仍然没有平移对称性,它具有扩展到局域的转变的性质. 此后,对于该模型以及该模型的一些推广^[11–14]被广泛研究. 2008 年, Roati 等^[15]在冷原子系统里成功模拟了 AA 模型,并且观测到了安德森局域化的现象. 这开启了人们在冷原子系统里研究局域化问题的新篇章,一系列理论与实验的成果被发现. 同时 AA 模型成为了研究其他物理现象的重要平台,比如在 AA 模型上加上 p 波配对项^[16–19],可以用来研究拓扑超导到安德森局域相的转变,在 AA 模型上加上相互作用^[20–22],可以研究热化相到多体局域相的转变. 2015 年, Schreiber 等^[23]在冷原子里制备出了带有相互作用的 AA 模型,从而第一次观测到多体局域相,这在一定程度上引发了多体局域研究的热潮.

本文详细介绍一些一维准周期系统及其应用,先介绍 AA 模型以及它的实验实现和在其基础上的一些推广模型,接着在 AA 模型上加上相互作用,讨论热化到多体局域的转变,并介绍如何在冷原子实验中观测多体局域现象,然后介绍 AA 模型相关的动力学研究,最后讨论准周期势对拓扑超导和拓扑半金属的影响.

2 AA 模型简介及其冷原子实验实现

2.1 AA 模型简介

1958 年,美国物理学家 Anderson^[24]研究了无序晶体中电子的运动,提出了强无序体系中电子局域化的概念. 由于无序的存在,晶格的周期性被破坏,电子的波函数不再能扩展到整个晶体中,而是在空间中按照指数形式衰减,这就是局域态. 由于无序的存在,动量不再是描述电子态的好量子数,因此通常采用紧束缚近似,在瓦尼尔基下进行讨论. 考虑安德森模型 $H = \sum_i \varepsilon_i |i\rangle\langle i| + \sum_{i \neq j} J_{ij} |i\rangle\langle j|$, 其中 $|i\rangle$ 表示第 i 个格点的态矢量, J_{ij} 表示 i, j 格点之间的跃迁, ε_i 是 i 格点的化学势,它在 $\left[-\frac{W}{2}, \frac{W}{2}\right]$ 范围内随机分布. 本征态可写为 $|\psi\rangle = \sum_i C_i |i\rangle$, 其中 C_i 是粒子在 i 格点的概率幅. 容易得到动力学方程为

$$i\hbar \frac{dC_i}{dt} = \varepsilon_i C_i + \sum_j J_{ij} C_j. \quad (1)$$

如果初始时刻粒子在 i 格点,即 $C_i(t=0) = 1$, 且 $C_j = 0 (j \neq i)$. 由 (1) 式可以得到 t 时刻的波函数分布,在热力学极限下,若 $C_i(t \rightarrow \infty) = 0$, 则系统处于扩展态,若 $C_i(t \rightarrow \infty)$ 是不等于零的有限值,则系统处于局域态.

对于一维或二维系统,很弱的随机无序就会使系统变得局域. AA 模型是一个一维准周期系统^[10](也可以称为非公约系统),其哈密顿量为

$$H = J \sum_j (\hat{c}_j^\dagger \hat{c}_{j+1} + \text{H.c.}) + \sum_{j=1}^L \Delta \cos(2\pi\alpha j + \delta) \hat{n}_j, \quad (2)$$

其中 \hat{c}_j^\dagger (\hat{c}_j) 是费米子的产生 (湮灭) 算符, J 是近邻格点的跃迁强度, α 是一个无理数, Δ 是准周期势的强度. AA 模型的扩展到局域的转变点是 $\Delta/J = 2$, 当 $\Delta/J < 2$ 时,所有的本征态都是扩展的,当 $\Delta/J > 2$ 时,所有的本征态都是局域的. 这个转变点可以通过下面的对偶变换解析得到. 不失一般性,设初相位 $\delta = 0$. 本征态写为 $|\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle$, $|n\rangle$ 是 n 格点的瓦尼尔态,利用本征方程 $\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle$ 可把 (2) 式化为

$$J(c_{n-1} + c_{n+1}) + \Delta \cos(2\pi\alpha n)c_n = Ec_n. \quad (3)$$

引入变换 $c_n = \sum_k c_k e^{i2\pi\alpha nk}$, 则 (3) 式变为

$$\frac{\Delta}{2}(c_{k-1} + c_{k+1}) + 2J \cos(2\pi\alpha k)c_k = Ec_k. \quad (4)$$

可以看到 (3) 式和 (4) 式有着完全类似的形式, 这时称这两个方程是对偶的. 对于固定的 J 和 Δ , 如果波函数 $|\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle$ 是扩展的 (局域的), 其变到对偶空间的波函数 $|\phi\rangle = \sum_k c_k |k\rangle$ 应该是局域的 (扩展的). 所以这个系统的扩展-局域的转变点是 $\frac{\Delta}{2} = J$.

为了直观展示 AA 模型的扩展局域的性质, 下面研究这个系统的倒参与率 (the inverse participation ratio, IPR) 和波函数的分布. 倒参与率是一个最常用的描述系统局域扩展性质的量 [25-27]: $IPR_n = \sum_{j=1}^L |\psi_{n,j}|^4$, 这里 j 代表第 j 个格点, ψ_n 是系统的第 n 个本征态, 它满足归一化条件 $\sum_j |\psi_{n,j}|^2 = 1$. 如果一个态是扩展的, 容易验证 $IPR_n \propto 1/L$, 当 $L \rightarrow \infty$ 时, IPR_n 趋于 0. 而对于局域态, 在热力学极限下, IPR 是一个有限的非零值. 固定跃迁强度 $J = 1$ 和系统尺寸 $L = 1000$, 在图 1 中展示了 AA 模型的基态的倒参与率随准周期势强度 Δ 的变化, 这里取的是开边界条件 (open boundary condition, OBC). 可以看出, IPR 在 $\Delta < 2$ 时接近于零, 在 $\Delta = 2$ 处突变为一个有限值, 说明系统在这一点从

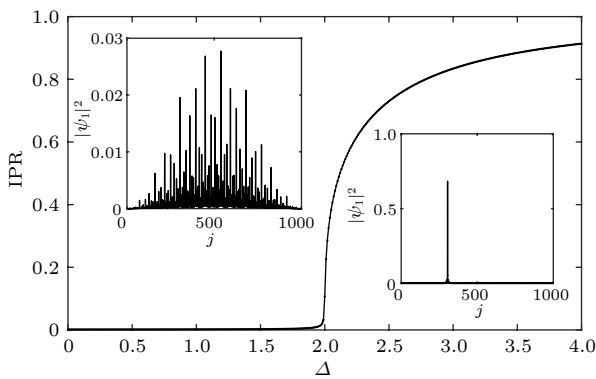


图 1 基态的倒参与率随 Δ 的变化, 这里固定 $J = 1$ 和 $L = 1000$. 左右的插图分别展示了 $\Delta = 1.9$ 和 $\Delta = 2.1$ 时系统的基态波函数的分布

Fig. 1. IPR of ground states as a function of Δ for this system with $J = 1$ and $L = 1000$. The left and right insets show the distribution of the ground state with $\Delta = 1.9$ and $\Delta = 2.1$ respectively.

扩展态变为了局域态. 在图 1 的左右插图中, 分别展示了 $\Delta = 1.9$ 和 $\Delta = 2.1$ 时系统的基态波函数的分布, 可以看出 $\Delta = 1.9$ 时系统的基态波函数分布在整个空间, 这是扩展态的特征, 而 $\Delta = 2.1$ 时系统的基态波函数分布在一个很小的区域内, 这是局域态的分布特征. 不止是基态, 容易验证其他态仍然有类似的特征.

2.2 AA 模型的冷原子实验实现

由于晶体中存在电子-电子以及电子-声子的相互作用, 所以很难在晶体中直接观测到安德森局域化. 冷原子系统干净和可控的特性为直接观测到安德森局域现象提供了可能. 2008 年, Roati 等 [15] 在冷原子系统中成功模拟了 AA 模型, 并在此基础上观测到了安德森局域态. 他们首先在光势阱中冷却得到一团玻色-爱因斯坦凝聚体 (Bose-Einstein condensate), 然后通过菲斯巴赫共振技术将原子间的相互作用调到零, 最后将其放入一维双色光晶格中, 如图 2 所示 [15]. 一维双色光晶格势可以通过两束激光以驻波的形式产生, 一束激光的波长为 λ_1 , 产生主晶格, 另一束波长为 λ_2 产生弱的次晶格, 它们的形式为 [28,29]:

$$V_b(x) = s_1 E_1 \sin^2(k_1 x) + s_2 E_2 \sin^2(k_2 x + \phi), \quad (5)$$

其中 $k_i = 2\pi/\lambda_i$ ($i = 1, 2$) 对应主次晶格的波数, s_i 是以各自反冲能量 $E_i = \hbar^2/(2m\lambda_i^2)$ 为单位的主次晶格的深度, ϕ 是一个任意的相位. 因此一维双色光晶格的单粒子哈密顿量可写为

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_x^2 + V_b(x), \quad (6)$$

如果以主晶格的参数为单位, 即以 k_1^{-1} 和 E_1 分别作为长度和能量的单位, 可将 (6) 式中的哈密顿量无量纲化:

$$\begin{aligned} H/E_1 &= -\nabla_\xi^2 + s_1 \sin^2(\xi) + s_2 \beta^2 \sin^2(\beta\xi + \phi) \\ &= H_1 + s_2 \beta^2 \sin^2(\beta\xi + \phi), \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $\xi = k_1 x$, $\beta = \lambda_1/\lambda_2$, $\beta^2 = E_2/E_1$.

将系统在主晶格的瓦尼尔基 $w_j = w(\xi - \xi_j)$ 下展开, 其中 j 表示格点, 即 H_1 最低能带的波函数可写为 $|\psi\rangle = \sum_j c_j |w_j\rangle$. 那么哈密顿量可以被写为

$$H \rightarrow \langle \psi | H | \psi \rangle = \sum_{ij} c_i^\dagger c_j \langle w_i | H | w_j \rangle, \quad (8)$$

式中矩阵元为

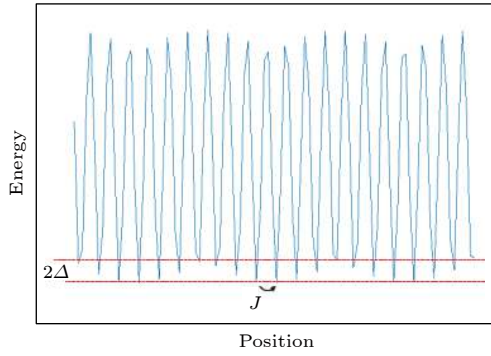


图 2 实验实现准周期晶格的原理示意图. J 描述的是主晶格最近邻格点之间的跃迁, 2Δ 是由次晶格导致的在位能最大的差别

Fig. 2. Sketch of the quasiperiodic lattice realized in the experiment. J describes the hopping between the nearest-neighbor sites of the primary lattice and 2Δ is the maximum shift of the on-site energy induced by the secondary lattice.

$$\langle w_i | H | w_j \rangle \approx \varepsilon_0 \delta_{ij} - J \delta_{i,j\pm 1} + \delta_{ij} s_2 \beta^2 \int d\xi \sin^2(\beta\xi + \phi) |w_i(\xi)|^2, \quad (9)$$

其中

$$\varepsilon_0 = \int d\xi w_i(\xi) H_1 w_i(\xi); J = \int d\xi w_{i+1}(\xi) H_1 w_i(\xi). \quad (10)$$

考虑到晶格势很深时瓦尼尔函数的高度局域化, 这里交叠积分只取到了跃迁项的次近邻部分和次晶格势的在位部分. 利用 $\sin^2(\beta\xi + \phi) = (1 - \cos(2\beta\xi + 2\phi))/2$ 和

$$\begin{aligned} & \int d\xi \cos(2\beta\xi + \phi') |w_i(\xi)|^2 \\ &= \cos(2\pi\beta i + \phi') \int d\xi \cos(2\beta\xi) |w(\xi)|^2, \end{aligned} \quad (11)$$

(9) 式最后一项的积分可以写成 AA 模型中的准周期势项对应的形式. 定义

$$\Delta = \frac{s_2 \beta^2}{2} \int d\xi \cos(2\beta\xi) |w(\xi)|^2, \quad (12)$$

舍去常数项, 易得

$$\langle w_i | H | w_j \rangle \approx -J \delta_{i,j\pm 1} - \delta_{ij} \Delta \cos(2\pi\beta i + \phi'). \quad (13)$$

因此, 得到了 AA 模型类似的哈密顿量

$$\begin{aligned} H &= -J \sum_j (c_{j+1}^\dagger c_j + c_j^\dagger c_{j+1}) \\ &+ \Delta \sum_j \cos(2\pi\beta j + \phi) c_j^\dagger c_j. \end{aligned} \quad (14)$$

并且, 从 (10) 式和 (12) 式可以看到, 通过实验

控制 s_1, s_2 和 β , 就可以得到 (14) 式中的参数 J 和 Δ .

实验上可以测量系统的输运性质来研究扩展-局域转变: 突然撤掉简谐势让原子在这个晶格中运动, 然后利用原位吸收成像技术测量原子随时间的演化. 会发现在准周期势强度很弱的情况下, 系统迅速膨胀; 而在准周期势强度很大的情况下, 系统基本上没有扩散发生. 这和前面通过动力学方程对安德森模型中扩展态和局域态的描述是一致的.

3 AA 模型的推广

3.1 存在迁移率边的一维准周期模型

对于三维系统, 如果加的无序强度在某个范围内, 系统的能带中可能会出现迁移率边 E_c 和 E_c' . 满足 $E_c < E < E_c'$ 的本征值对应的态是扩展的, 如果费米面在这个范围内, 系统就表现出金属属性, $E > E_c'$ 或者 $E < E_c$ 范围的本征值对应的态是局域的, 如果费米面在这个范围, 系统就表现出绝缘体属性. 通常可以通过掺杂、加压或者加电磁场等方式调节费米面或迁移率边的位置, 从而使系统可以发生金属-绝缘体的转变.

在 AA 模型之后, 科学家们在此基础上提出几个准周期模型^[11-14], 这使得可以在一维系统里研究迁移率边. 如哈密顿量 (2) 式中化学势项写为 $\sum_{j=1}^L \Delta \cos(2\pi\alpha j^\nu + \delta) \hat{n}_j$ ^[11,12]. 可以看出, 当 $\nu = 1$ 时, 该系统简化为 AA 模型. 固定跃迁强度 $J = 1$, 理论和数值研究发现, 当 $\nu < 1$ 以及 $\Delta < 2$ 时, 这个系统存在迁移率边, 在能带的中间 ($|E| < 2 - \Delta$), 所有的态是扩展的, 在能带的两边 ($2 - \Delta < |E| < 2 + \Delta$), 所有的态是局域的, $E_c = |2 - \Delta|$ 是两个迁移率边的位置. 当 $\Delta > 2$ 时, 所有的态都是局域的.

另一种扩展是在跃迁项上做文章^[13,14]. 考虑下面一个紧束缚模型:

$$E u_n = \sum_{n' \neq n} J e^{-p|n-n'|} u_{n'} + \Delta \cos(2\pi\alpha n + \delta) u_n, \quad (15)$$

其中 α 是个无理数, $p > 0$. 可以看出, 这里的跃迁不仅仅是只包含近邻的跃迁, 它的强度是随距离指数衰减的短程跃迁. 仿照 AA 模型的对偶变换, 这里做类似的处理. 定义参数 $p_0 > 0$, 使它满足:

$$(E + J) - \Delta \cos(2\pi\alpha n + \delta) = \omega^2 T_n, \quad (16)$$

$$T_n = \frac{\cosh(p_0) - \cos(2\pi\alpha n + \delta)}{\sinh(p_0)}, \quad (17)$$

其中 $\omega^2 = \sqrt{(E+J)^2 - \Delta^2}$, 由 (16)、(17) 式得 $(E+J)/\Delta = \cosh(p_0)$, 同时 (15) 式可写为

$$\omega^2 T_n u_n = \sum_{n'} J e^{-p|n-n'|} u_{n'}. \quad (18)$$

如果做下面的变换:

$$\tilde{u}_m = \sum_n e^{im(2\pi\alpha n + \delta)} T_n u_n, \quad (19)$$

可以得到 \tilde{u}_m 满足:

$$\omega^2 \tilde{T}_m \tilde{u}_m = \sum_{m'} J e^{-p_0|m-m'|} \tilde{u}_{m'}, \quad (20)$$

这里 \tilde{T}_m 定义为:

$$\tilde{T}_m = \frac{\cosh(p) - \cos(2\pi\alpha m + \delta)}{\sinh(p)}. \quad (21)$$

可以看到在 (19) 式的变换下, 当 $p = p_0$ 时, (18) 式是自对偶的. 类似于对 AA 模型的讨论, 当 $p > p_0$ 时, 所有的态是局域的, 当 $p < p_0$ 时, 所有的态是扩展的. 因此可以给出临界条件:

$$\cosh(p) = \frac{E_0 + J}{\Delta}. \quad (22)$$

满足这个方程的 E_0 , 对应的态应该是临界态. $E > E_0$ 对应的态是局域的, $E < E_0$ 对应的态应该是扩展的.

3.2 存在迁移率边的一维准周期光晶格的实验实现

最近, Li 等^[30] 和 Lüschen 等^[31] 在冷原子系统中成功实现了存在迁移率边的一维准周期光晶格

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{V_p}{2} \cos(2k_p x) + \frac{V_d}{2} \cos(2k_d x + \phi), \quad (23)$$

这里, V_p, V_d 分别是主次晶格的晶格势强度, $k_i = 2\pi/\lambda_i$ ($i = p, d$) 表示两个晶格的波矢, ϕ 是它们的相对相位, m 是实验中用到的 ^{40}K 原子的质量. 实际上这个哈密顿量反映的就是前面讨论的含有指数衰减的短程跃迁的模型^[13].

这个系统存在三个相: 局域相, 扩展相和中间相 (包含局域态和扩展态的相). 实验中为了测得这三个相, 他们制备了一个电荷密度波 (charge density wave, CDW) 的初态, 如图 3(a) 所示, 然后考虑这个初态的演化. 如果系统中存在局域态, 那么初始的 CDW 的模式将会存在很长的时间, 考虑一个能反映奇偶格点的密度分布差异的量 $I =$

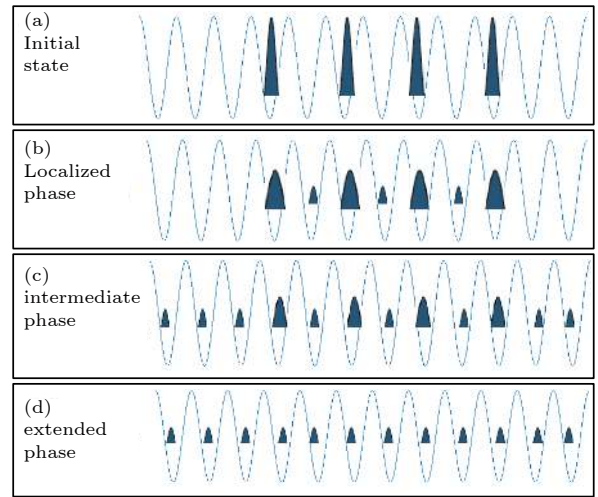


图 3 实验原理图. 制备的初始 CDW 态, 以及在局域、中间和扩展相中, 经过一段时间演化后, 分别对应的系统的末态 (a) 初态分布, 制备为 CDW 态 (根据定义, 有 $I > 0, \xi = 0$); (b) 局域态 ($I > 0, \xi = 0$); (c) 中间态, 对应于不同的能量存在局域态和扩展态 ($I > 0, \xi > 0$); (d) 扩展态 ($I = 0, \xi > 0$)

Fig. 3. Schematics of the experiment. Schematic illustration of the initial CDW state and the states reached after time evolution in the localized, intermediate, and extended phase, respectively: (a) Initial state: CDW state ($I > 0, \xi = 0$); (b) localized phase ($I > 0, \xi = 0$); (c) the intermediate phase, extended and localized states coexist at different energies ($I > 0, \xi > 0$); (d) extended phase ($I = 0, \xi > 0$).

$(N_e - N_o)/(N_e + N_o)$, 在很长时间的演化后, 它仍不等于零, 如图 3(b) 和图 3(c) 所示. 这里, N_e (N_o) 表示偶 (奇) 格点的原子数. 如果系统中存在扩展态, 那么初态会往整个空间扩散, 因此原子云的总尺寸 σ 将变大. 引入可以反映这个变化的量 $\xi \sim (\sigma(t) - \sigma(0))$, 那么如果系统存在扩展态, ξ 将大于零, 如图 3(c) 和图 3(d) 所示. 如果所有的态都是局域的, ξ 则等于零, 如图 3(b) 所示. 如果所有的态都是扩展的, I 将等于零, 如图 3(d) 所示. 如果系统中既存在扩展态又存在局域态, 那么在一段时间演化之后, I 和 ξ 都将不为零, 如图 3(c) 所示. 在实验中通过测量这两个量, 证明了这个系统中中间相的存在, 从而间接地说明了迁移率边的存在.

4 存在相互作用的一维准周期系统

安德森局域化考虑的是单粒子的问题, 下面加上粒子间的相互作用. 相互作用可以影响系统的自能, 自能的虚部在一定程度上反映了单粒子激发的寿命, 如果单粒子激发在有限时间内可衰减, 系统

是可热化的, 如果单粒子激发有无限长的衰减时间, 系统可稳定存在, 它是多体局域的, 所以相互作用可以影响热化相和多体局域相之间的转变^[32]. 另外, 从动力学角度来分析一个封闭的多体系统的初态在任意长的时间内会演化成什么样的态. 根据初始态的细节信息会不会在演化过程中消失也可以区分热化相和多体局域相^[33]. 多体局域的系统在任意长的时间演化后都不会热化, 从动力学上看它保留了初始态的信息, 并且它对于局域的微扰是不敏感的. 多体局域在过去几年里被广泛研究^[34–37], 它正逐渐成为其他理论的基础, 比如时间晶体 (time crystal), 就是通过弗洛凯 (Floquet) 周期驱动和多体局域结合定义的^[38]. 人们第一次在实验中观测到多体局域现象就是在一维的准周期晶格中^[23]. 下面先讨论加相互作用的 AA 模型的相变^[20–22].

4.1 存在相互作用的 AA 模型

考虑在 AA 模型中加上近邻排斥相互作用的费米子模型, 其哈密顿量为^[21]:

$$H = \sum_j [-J(\hat{c}_j^\dagger \hat{c}_{j+1} + \hat{c}_{j+1}^\dagger \hat{c}_j) + h \cos(2\pi\alpha j + \theta) \hat{n}_j + U \hat{n}_j \hat{n}_{j+1}], \quad (24)$$

其中 \hat{c}_j (\hat{c}_j^\dagger) 是费米子湮灭 (产生) 算符, $\hat{n}_j = \hat{c}_j^\dagger \hat{c}_j$ 是粒子数算符, h 是准周期势强度, α 是无理数, 仍取 $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, θ 是一个任意的相移. 为了方便, 设跃迁振幅 J 作为能量单位, 即 $J = 1$, 并且固定近邻格点的费米子之间的相互作用强度 $U = 0.4$, 其他情况可做类似的讨论. 考虑半填充的情况, 即固定 $N/L = 1/2$, 这里 N 是总的费米子数, L 是晶格尺寸.

下面用能级间距统计^[34,39] 和纠缠熵^[40,41] 来研究热化相到多体局域相的转变. 热化相的能级间距服从高斯正交分布 $P_T(\delta) = \frac{\pi}{2s^2} \exp\left[-\frac{\pi}{4}\left(\frac{\delta}{s}\right)^2\right]$, 而多体局域相的能级间距服从泊松分布 $P_M(\delta) = \frac{1}{s} \exp\left[-\frac{\delta}{s}\right]$, 其中 δ 表示近邻能级间距, s 是其平均值, 即 $s = \langle \delta \rangle$. 由于能级间距 δ 的最大值和最小值差距很大, 不方便进行能级统计, 所以通常会对能级间距做进一步的处理. 将多体系统的本征值从小到大进行排列, 定义 $r^{(n)} = \min\{\delta^{(n)}, \delta^{(n+1)}\} / \max\{\delta^{(n)}, \delta^{(n+1)}\}$, 其中 $\delta^{(n)} = E^{(n)} - E^{(n-1)}$, 这里

$E^{(n)}$ 是系统的第 n 个本征值, 那么 $r^{(n)}$ 的大小显然属于 $[0, 1]$. 通常要对所有的态和样品做平均得到 $\langle r \rangle$. 可以解析证明, 对于多体局域相 $\langle r \rangle = 0.387$, 而对于热化相 $\langle r \rangle \approx 0.529$ ^[42]. 所以可以通过 $\langle r \rangle$ 的变化来研究系统从热化相到多体局域相的转变. 图 4(a) 展示了 $\langle r \rangle$ 随 h 的变化, 可以看到随着 h 的增大, $\langle r \rangle$ 从 0.529 变到 0.387, 对应于系统从热化相变到多体局域相.

把一个系统分成子系统 A 与其他部分 B, 对于一个多体本征态 $|n\rangle$, 可以得到其对应的密度矩阵 $\rho^{(n)} = |n\rangle\langle n|$ 和子系统 A 的约化密度矩阵 $\rho_A^{(n)} = \text{Tr}_B |n\rangle\langle n|$. 可以定义一个本征态的纠缠熵 $S = -\sum \lambda_i \ln \lambda_i$, 其中 λ_i 是对应的约化密度矩阵 ρ_A 的第 i 个本征值. 在图 4(b) 中, 展示了能谱中间 1/3 能级对应的本征态的平均纠缠熵 $\langle S \rangle$ 和 $d\langle S \rangle/dh$ 随 h 的变化^[43]. 热化相的纠缠熵服从“体积律”, 而多体局域系统的纠缠熵服从“面积律”, 这可以简单地理解为只有 B 与子系统 A 接触的部分才会对 A 产生影响. 由于这里考虑的是一维系统, 所以, 热化相对应的纠缠熵应与尺寸 L 成正比, 而多体局域相对应的纠缠熵应该是与尺寸 L 无关的常数. 从图 4(b) 中可以看出, 随着准周期势强度 h 的增大, 纠缠熵的确从与 L 成正比的分布变到一个与 L 无关的数, 这意味着系统从热化相变到了多体局域相. 从图 4(b) 的插图中可以看到, 这个平均的纠缠熵的导数在转变点处有个尖峰, 所以这个系统的热化相到多体局域相的转变点大约在 $h_c = 2.4-2.5$ 处.

4.2 一维准周期系统中多体局域的实验实现

实验上第一次观测到多体局域现象的是 Schreiber 等^[23]. 他们制备的系统是在 AA 模型上加上在位的相互作用, 即

$$H = \sum_{j,\sigma} [-J(\hat{c}_{j,\sigma}^\dagger \hat{c}_{j+1,\sigma} + \hat{c}_{j+1,\sigma}^\dagger \hat{c}_{j,\sigma}) + \Delta \cos(2\pi\alpha j + \delta) \hat{c}_{j,\sigma}^\dagger \hat{c}_{j,\sigma}] + U \hat{n}_{j,\uparrow} \hat{n}_{j,\downarrow}, \quad (25)$$

其中 Δ 是准周期势强度, α 是无理数, δ 是一个任意的相移, U 表示在位格点费米子间相互作用强度, $\sigma \in \{\uparrow, \downarrow\}$. 仍然设跃迁振幅 J 作为能量单位, 即 $J = 1$. 他们首先制备了一个 CDW 的初态, 仍然是在一段时间演化后测量前面提到的能反映奇偶格点的密度分布差异的量 $I = (N_e - N_o)/(N_e + N_o)$, 不过这里是有相互作用的系统. 在相互作用 U 为

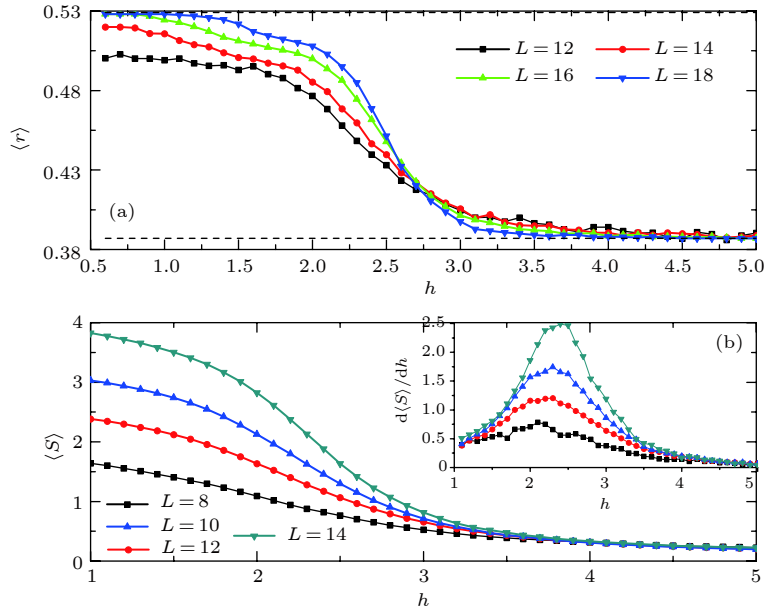


图 4 (a) $\langle r \rangle$ 随 h 的变化. 当系统尺寸为 $L=12$ 和 $L=14$ 时用的样品数是 50, 当 $L=16$ 时用的样品数是 30, 当 $L=18$ 时用的样品数是 20; (b) 平均的纠缠熵 $\langle S \rangle$ 和 $d\langle S \rangle/dh$ 随 h 的变化. 当 $L=8$ 和 $L=10$ 时用 500 个样品, 当 $L=12$ 时用 100 个样品, 当 $L=14$ 时用 30 个样品. 相互作用强度始终被固定为 $U=0.4$. 这里一个样品指的是任选一个初相位 θ [21]

Fig. 4. (a) $\langle r \rangle$ as a function of h . Here we use 50 samples for $L=12$ and $L=14$, 30 samples for $L=16$, and 20 samples for $L=18$; (b) averaged entanglement entropy $\langle S \rangle$ and $d\langle S \rangle/dh$ versus h . Here we use 500 samples for $L=8$ and $L=10$, 100 samples for $L=12$ and 30 samples for $L=14$. The interaction strength is fixed at $U=0.4$. Here a sample is specified by choosing an initial phase θ [21].

0 时, 这个系统的哈密顿量就是 AA 模型的哈密顿量, 所以扩展局域的转变点应该在 $\Delta/J=2$, 将其对应的 I 作为热化相到多体局域相的转变点的参考值, 从而可以得到相互作用为 U 时, 发生热化到多体局域转变对应的准周期势强度 Δ_c . 从实验结果可以看出, 当相互作用 $|U|$ 比较小时, 转变点会稍微变大, 这与前面研究的相互作用是近邻时的情况是一致的. 但是当相互作用 $|U|$ 很大时, 转变点反而变小. 为了理解这种情况, 假设初态为每个格点要么是空的, 要么是双占据, 由于能量守恒的原因, $|U|$ 很大时, 双占据的粒子不会分离, 所以, 有效的跃迁是个二阶过程, 有效的跃迁强度为 $J_{\text{eff}} = \frac{2J^2}{|U|} \ll J$, 那么粒子感受到的准周期势的强度 $\Delta/J_{\text{eff}} \gg \Delta/J$, 这会有利于形成局域态.

另外, 热化相和多体局域相的纠缠熵随时间的变化也明显不同 [44,45]. 多体局域相对应的纠缠熵随时间变化是对数增加的, 这是既不同于热化相, 也不同于安德森局域态的性质. 所以也可以在实验中测量纠缠熵随时间的变化观测系统从热化到多体局域的转变 [23].

进一步, Bordia 等 [46] 也成功在二维系统中观

测到多体局域现象. 最近, Kohlert 等 [47] 还在已经实现的有迁移率边的系统里引入相互作用, 并观测到多体局域. 这些实验都是在准周期的系统中完成的, 并极大地促进了多体局域方面的理论研究.

5 一维准周期系统中的动力学

正如前面提到的, 扩展态和局域态在动力学上会表现出明显不同的性质. 下面基于 AA 模型讨论常见的三种动力学方面的研究: 系统参数不变的动力学演化, 周期驱动和参数突变的动力学演化.

5.1 AA 模型的动力学演化

考虑 (2) 式所示的 AA 模型的动力学演化. 假设在时间 $t=0$ 时, 把一个粒子放在 $L/2$ 格点, 那么在 t 时刻的波函数可写为 $|\psi(t)\rangle = \sum \psi_n(t) c_n^\dagger |0\rangle$, 这里 $|0\rangle$ 指的是真空态, 显然有 $\psi_n(t=0) = \delta_{n, L/2}$. 为了描述这个初始波包的时间演化, 定义 t 时刻波函数的位移均方 [48,49]: $\langle (\delta x)^2 \rangle = \sum_n (n - L/2)^2 |\psi_n(t)|^2$. 取开边界条件, 并固定 $L=3000$ 和 $J=1$, 在图 5 中展示了取不同的准周期势强度 Δ 时 $\sqrt{\langle (\delta x)^2 \rangle}$ 随时间 t 的变化.

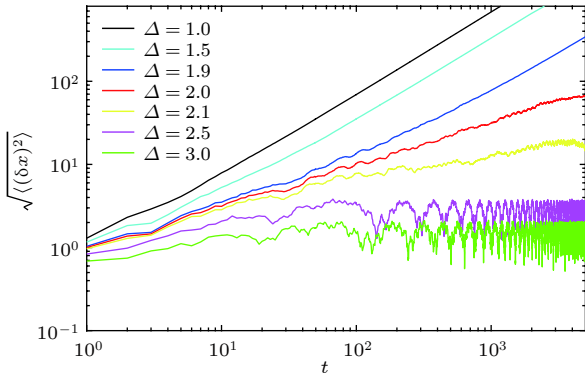


图 5 AA 模型中取不同的 Δ 时 $\sqrt{\langle(\delta x)^2\rangle}$ 随时间 t 的变化对数-对数图, 这里固定 $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 跃迁强度 $J = 1$, 以及系统尺寸 $L = 3000$

Fig. 5. Log-log plot of the width $\sqrt{\langle(\delta x)^2\rangle}$ vs time t for several values of Δ in the AA model with $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $J = 1$ and $L = 3000$.

通常, $\sqrt{\langle(\delta x)^2\rangle}$ 与时间 t 的关系满足幂律关系, 即 $\sqrt{\langle(\delta x)^2\rangle} \sim t^\beta$, 所以在图 5 中, 横纵坐标均取了对数. 从图中可以看出, 当 $\Delta < 2$ 时, 粒子的运动属于弹道 (ballistic) 输运, 即 $\beta = 1$, 并且与准周期势强度 Δ 的大小无关. 当 $\Delta = 2$ 时, 粒子的运动属于扩散 (diffusive) 输运, 即 $\beta = 1/2$ ^[50-52]. 当 $\Delta > 2$ 时, $\sqrt{\langle(\delta x)^2\rangle}$ 在很长的一段时间后会在一个值附近波动, 即 $\beta = 0$, 这个值对应着这个系统的局域长度. 在 AA 模型里, 局域长度 l_c 和准周期势强度 Δ 以及跃迁强度 J 的关系为 $l_c = 1/\ln\left(\frac{\Delta}{J}\right)$ ^[10]. 可以看出, 局域、扩展和临界相的动力学演化或者输运性质有明显的差异.

另一个常用来描述 AA 模型不同相的动力学演化差异的是初态的残存率 (return probability)^[53,54], 即若假设初态是粒子在某一个格点上, 在一段时间演化之后, 研究这个粒子还待在这个格点的概率. 因为在后面的 AA 模型的动力学相变中会详细介绍这个量, 所以这里不再赘述.

5.2 周期驱动的准周期晶格

考虑下面的准周期势是周期驱动模型^[55]:

$$H = \sum_i \left[\left(-J \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_{i+1} + \text{H.c.} \right) + \sum_n \delta(t - nT) V_i \hat{n}_i \right], \quad (26)$$

其中 $\hat{n}_i = \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_i$ 是粒子数算符, \hat{c}_i^\dagger (\hat{c}_i) 是产生 (湮灭) 算符, J 是近邻的跃迁强度. 其中 $V_i = \lambda \cos(2\pi i\alpha)$, 这里 α 是无理数, λ 是准周期势强度. 对比 AA 模

型可以看出, 这里的准周期势是每隔周期 T 加上去的, 这在实验上也是容易实现的^[55].

引入弗洛凯 (Floquet) 算符 $U(T)$ 描述这个系统的演化^[56,57], 易得

$$U(T) = \exp(-iH_0 T) \exp\left(-i \sum_j^L V_j \hat{c}_j^\dagger \hat{c}_j\right),$$

其中 $H_0 = -\sum_j (\hat{c}_j^\dagger \hat{c}_{j+1} + \text{H.c.})$, L 是系统尺寸. 为了方便, 设 $\hbar = 1$, 以及 $J = 1$ 作为能量单位. 假如 $|\psi_\eta\rangle$ 是弗洛凯算符的本征态, 对应的弗洛凯本征值是 E_η , 即 $U(T)|\psi_\eta\rangle = e^{-iE_\eta T}|\psi_\eta\rangle$. 引入 $|i\rangle = c_i^\dagger|0\rangle$ 表示一个粒子局域在第 i 个格点, 那么以 $|i\rangle$ 为基矢, 本征态可写为 $|\psi_\eta\rangle = \sum_{i=1}^L C_i(E_\eta)|i\rangle$. 下面引入信息熵^[58-60]

$$S_\eta^{\text{inf}} \equiv -\sum_{i=1}^L |C_i(E_\eta)|^2 \ln |C_i(E_\eta)|^2.$$

容易验证它的最小值是 $S_\eta^{\text{inf}} = 0$, 对应着一个态完全局域在一个格点, 而它的最大值是 $S_\eta^{\text{inf}} = \ln(L)$, 对应着这个态完全扩展, 即 $|C_i(E_\eta)| = 1/\sqrt{L}$.

由于 AA 模型中不存在迁移率边, 所以可以定义一个平均的信息熵 $\bar{S}^{\text{inf}} \equiv L^{-1} \sum_{\eta=1}^L S_\eta^{\text{inf}}$. 图 6 展

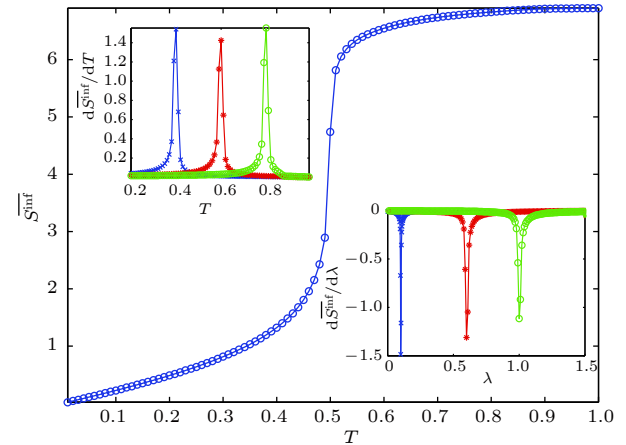


图 6 固定 $\lambda = 1$ 和 $L = 1500$, 平均信息熵随周期 T 的变化. 左上角的插图展示了平均纠缠熵的导数随周期 T 的变化, 这里固定 $\lambda = 0.8$ (蓝色), $\lambda = 1.2$ (红色), 和 $\lambda = 1.6$ (绿色). 右下角的插图展示了平均纠缠熵随 λ 的变化, 这里分别固定 $T = 0.05$ (蓝色), $T = 0.3$ (红色), $T = 0.5$ (绿色)^[55]

Fig. 6. The mean information entropy as a function of T for this system with $\lambda = 1$ and $L = 1500$. The left up inset shows the derivative of the mean information entropy as a function of T with fixed $\lambda = 0.8$ (blue), $\lambda = 1.2$ (red), and $\lambda = 1.6$ (green). The right down inset shows the derivative of the mean information entropy as a function of λ with $T = 0.05$ (blue), $T = 0.3$ (red), and $T = 0.5$ (green)^[55].

示了这个平均的信息熵随驱动周期 T 的变化, 这里固定了准周期势的强度 $\lambda = 1$. 可以看出, 随着周期 T 的增大, 这个平均的信息熵从近似于零的小值变为一个非零的有限值, 这意味着这个系统的波函数从局域态变为扩展态. 在图 6 的插图中, 展示了不同强度的准周期势时, 平均信息熵的导数随周期 T 的变化. 当 $\lambda = 0.8$, $\lambda = 1.2$ 和 $\lambda = 1.6$ 时, 这个导数的尖峰分别出现在 $T = 0.4$, $T = 0.6$ 和 $T = 0.8$ 处. 图 6 下方的插图展示了不同周期时, 平均信息熵的导数随 λ 的变化, 可以看出当 $T = 0.05$, $T = 0.3$ 和 $T = 0.5$ 时, 平均信息熵导数的尖峰分别出现在 $\lambda = 0.1$, $\lambda = 0.6$ 和 $\lambda = 1.0$ 的地方. 可以看出, 平均信息熵导数的尖峰位置满足 $\lambda/T = 2$, 这对应于这个系统从动力学局域到扩展的转变点.

下面从这个系统的有效哈密顿量中来分析这个转变点,

$$U(T) = \exp(-iH_0T) \exp(-i\lambda\hat{V}) = \exp(-iH_{\text{eff}}T), \quad (27)$$

其中 $\hat{V} = \sum_j^L \cos(2\pi i\alpha) \hat{c}_j^\dagger \hat{c}_j$. 利用公式^[61]

$$e^{\hat{A}\hat{B}} = \exp\left(\hat{A} + \hat{B} + \frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{12}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \frac{1}{12}[[\hat{A}, \hat{B}], \hat{B}] + \dots\right), \quad (28)$$

可以得到有效哈密顿量为

$$H_{\text{eff}} = H_0 + \frac{\lambda}{T}\hat{V} - i\frac{\lambda}{2}[H_0, \hat{V}] - \frac{T\lambda}{12}[H_0, [H_0, \hat{V}]] - \frac{\lambda^2}{12}[[H_0, \hat{V}], \hat{V}] + \dots \quad (29)$$

可以看出, 当 $1/T \gg 1$ 和 $\lambda \ll 1$ 时, 这个有效哈密顿量可写为 $H_{\text{eff}} = H_0 + \frac{\lambda}{T}\hat{V}$, 设 $\lambda_{AA} = \lambda/T$, 这就是 AA 模型, 所以在高频的情况下, $\lambda/T = 2$ 是系统局域到扩展的转变点. 但是, 在低频情况下, 即 $1/T$ 小于 1 的时候, 就需要考虑高阶项. 为了说明这一点, 图 7 展示了平均信息熵随准周期势强度和驱动周期的变化. 可以看出, 在高频的情况下, 在 $\lambda/T = 2$ 处, 平均信息熵有明显的突变, 但是当 $1/T < 1$ 时, 平均信息熵的变化就比较复杂, 转变点不再是 $\lambda/T = 2$.

5.3 准周期晶格中扩展-局域转变的动力学相变

动力学相变最近被广泛研究^[62–65], 它扩展了

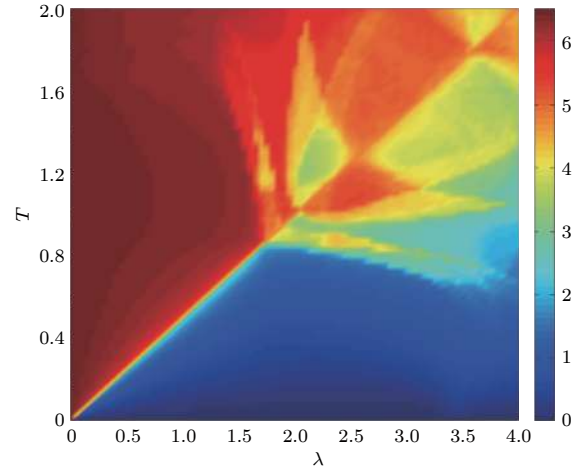


图 7 固定系统尺寸 $L = 900$, 平均信息熵随 λ 和 T 的变化^[55]

Fig. 7. The mean information entropy versus both λ and T for the system with $L = 900$ ^[55].

我们对相变的理解. 第一次在局域扩展的转变中引入动力学相变的概念是在 AA 模型中^[66], 即哈密顿量如 (2) 式所示, 下面设 $J = 1$ 作为能量单位. 制备一个初态, 使之是哈密顿量 $H(\Delta_i)$ 的一个本征态, 然后突然改变系统的参数, 用哈密顿量 $H(\Delta_f)$ 描述, 研究在一段时间演化后, 初态的残存率^[67–71]

$$L(t, \Delta_i, \Delta_f) = |\langle \Phi_0(\Delta_f) | e^{-itH(\Delta_f)} | \Phi_0(\Delta_i) \rangle|^2, \quad (30)$$

也被称为 Loschmidt echo. 这里 $|\Phi_0(\Delta_i)\rangle$ 表示初始哈密顿量的本征态, Δ_i 和 Δ_f 分别是参数突然变化前和变化后的准周期势的强度. Loschmidt echo 在动力学相变中扮演着重要的角色, 它可以类比于统计力学中的配分函数, 它的对数可类比自由能^[62]. 热力学极限下, 在一些时间点 t , Loschmidt echo 能够变为零被认为是动力学相变发生的标志, 因为 Loschmidt echo 等于 0 意味着其对数 (即类比于自由能) 在这些时间点是发散的, 其对数的一阶导数在这些时间点是连续的.

在图 8(a) 和图 8(b) 中, 选择初始的准周期势强度为 $\Delta_i = 0.5$, 在图 8(c) 和图 8(d) 中, 选择初始的准周期势强度为 $\Delta_i = 4$. 初态为相应系统的基态, 这些图展示了不同的 Δ_f 时, Loschmidt echo 的演化情况. 可以看出, 当 Δ_i 和 Δ_f 在相同的相区间, 即都在局域区 ($\Delta > 2$) 或者都在扩展区 ($\Delta < 2$) 时, $L(t)$ 随时间振荡并且不会变为零, 如图 8(a) 和图 8(c) 所示. 但是, 如果 Δ_i 和 Δ_f 对应不同的相区间, $L(t)$ 会在一些时间变为零, 如图 8(b) 和图 8(d) 所示.

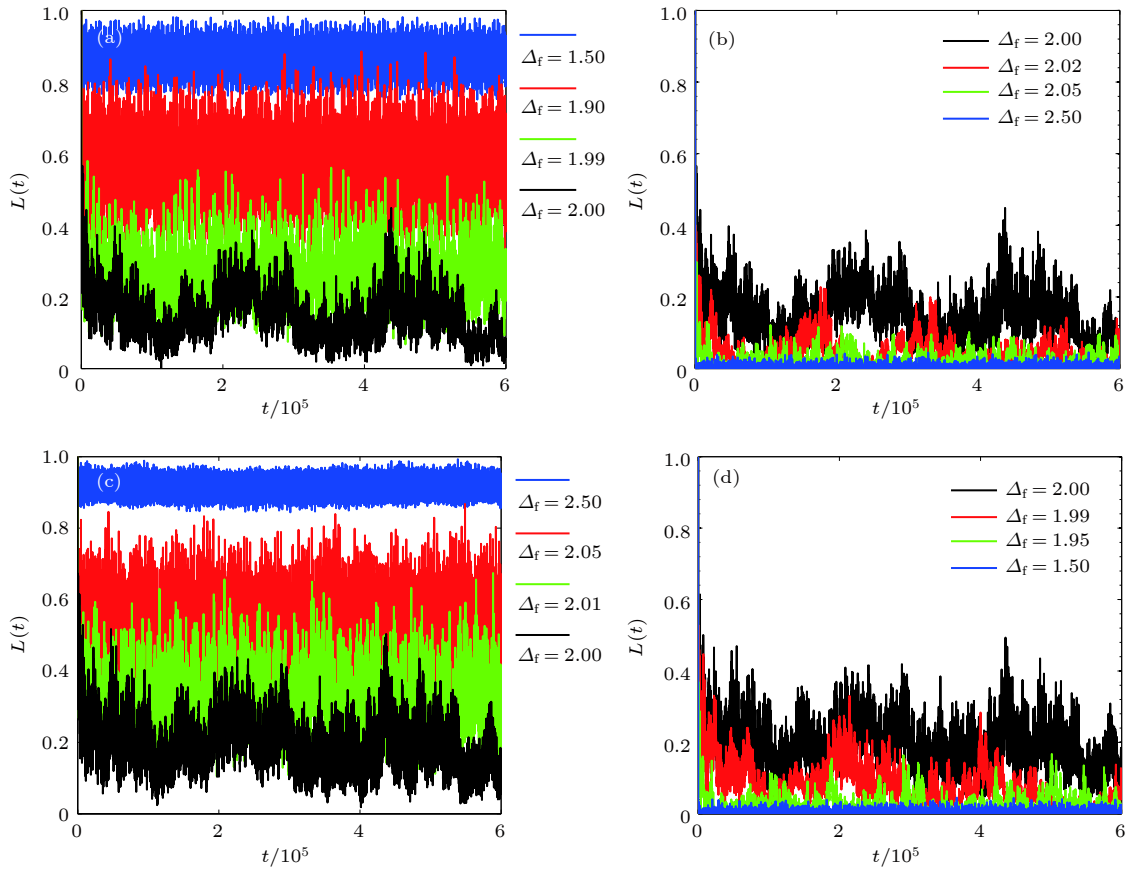


图 8 Δ_f 取不同值时 Loschmidt echo 的演化. 初态选准周期势强度为 $\Delta_i = 0.5$ ((a), (b)) 和 $\Delta_i = 4$ ((c), (d)) 的哈密顿量的基态^[66]
 Fig. 8. Evolution of Loschmidt echo in a long time with different Δ_f s. The initial state is chosen to be the ground state of the Hamiltonian with $\Delta_i = 0.5$ ((a), (b)) and $\Delta_i = 4$ ((c), (d))^[66].

下面对 Loschmidt echo 怎么趋于零进行定量描述, 引入一个接近于零的小量 ε 对 $L(t)$ 做截断. 给定一个大的时间间隔 T , 在 $t \in [0, T]$ 中, 测量满足 $L(t) \leq \varepsilon$ 的时间间隔长度, 定义为 $M(\varepsilon)$. 相当于引入了一个勒贝格测度 (Lebesgue measure) $I(L \leq \varepsilon)$ ^[66]. 为了方便, 研究 $m(\varepsilon) = \frac{M(\varepsilon)}{T}$. 固定 $\Delta_i = 0.5$, 在图 9(a) 中, 展示了 ε 取不同值同时 ($\varepsilon = 5 \times 10^{-4}$, 3×10^{-4} , 2×10^{-4} 和 1×10^{-4}), $m(\varepsilon)$ 随 Δ_f 的变化. 这里的初态仍然是选系统的基态. 可以看出, $m(\varepsilon)$ 在 $\Delta_f < 2$ 和 $\Delta_f > 2$ 时的表现确实不同. 当 $\Delta_f < 2$ 时, $m(\varepsilon)$ 总是零, 但是过了转变点 $\Delta_c = 2$ 后, 它随着 Δ_f 的变大突然增大到一个有限的非零值. 尽管这个非零值会依赖于截断的 ε 的大小, 但是这种在转变点突变的性质不会随着截断的不同而改变.

尽管上面考虑的初态是 $H(\Delta_i)$ 的基态, 但是对于其他本征态也有类似的现象. 为了说明这一点, 把初态选为初始哈密顿量不同的本征态, 并在图 9(b) 中展示 $m(\varepsilon)$ 随 Δ_f 的变化. 可以看到, 在

$\Delta_f = 2$ 处, 对于所有的本征态, $m(\varepsilon)$ 都有从零到有限非零值的明显的转变. 所以, 对于 AA 模型, 它的动力学相变点和它的局域-扩展的转变点是一致的.

6 准周期势对系统拓扑性质的影响

最近几十年, 拓扑态 (拓扑绝缘体、拓扑超导体和拓扑半金属) 的发展是凝聚态发展的一个重要的方向^[72–75]. 对拓扑相变的描述超出了朗道对称性破缺的理论, 加深了我们对凝聚态的认识. 如果系统是周期的, 可以通过调节跃迁强度的相对大小来诱导拓扑和非拓扑之间的转变^[76,77]. 在开边界条件下, 这个转变会对应于边缘态的出现或消失; 在周期边界条件下, 这个转变可以计算拓扑不变量来描述, 这个不变量在实验上可以通过索利斯泵浦 (Thouless Pumping) 来测量^[78–81]. 如果系统中存在无序或者准周期势, 那么一个自然且有趣的问题是它们会对系统的拓扑性质产生什么影响. 下面研究在一维 p 波超导链^[82] 和外尔半金属^[83–85] 中增

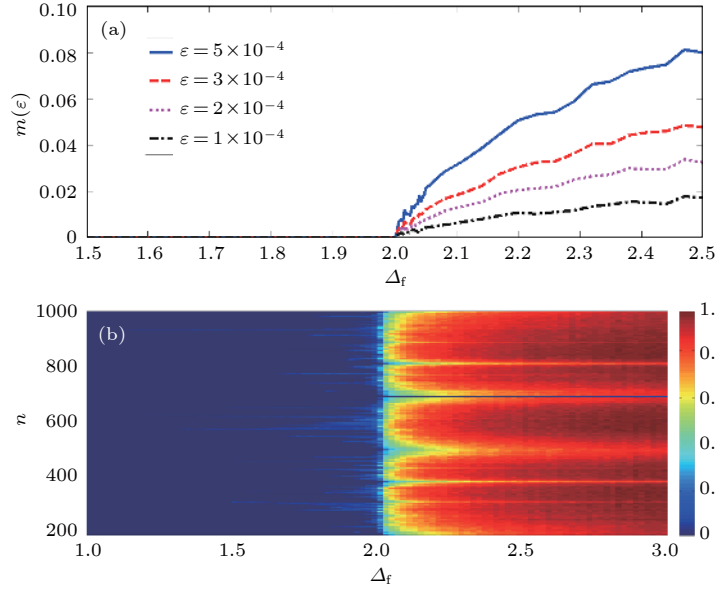


图 9 固定系统参数 $L = 1000$, $T = 6 \times 10^5$ 和 $\Delta_i = 0.5$ 时 $m(\varepsilon)$ 随 Δ_f 的变化: (a) 不同的颜色对应不同的 ε 值, 这里的初态是初始哈密顿量的基态; (b) 选取不同的初态, n 表示初始哈密顿量的第 n 个本征态. 在 $\Delta_f = 2$ 处, 可以清晰地看到一个相边界. 这里固定 $\varepsilon = 0.01$ [66]

Fig. 9. The behavior of m versus Δ_f for the system with $L = 1000$, $T = 6 \times 10^5$ and $\Delta_i = 0.5$: (a) Different colors correspond to different ε s and the initial state is chosen to be the ground state of the initial Hamiltonian; (b) different choice of initial state with n standing for the n th eigenstates of the initial Hamiltonian $H(\Delta_i)$. A clear boundary can be seen at $\Delta_f = 2$. Here we choose $\varepsilon = 0.01$ [66].

加准周期势对系统产生的影响.

6.1 准周期势对一维 p 波超导链的影响

在一维 p 波超导链上加上准周期势 [16,18,19], 讨论其影响. 系统的哈密顿量为

$$H = \sum_i \left[\left(-J\hat{c}_i^\dagger\hat{c}_{i+1} + \Delta\hat{c}_i\hat{c}_{i+1} + \text{H.c.} \right) + V \cos(2\pi i\alpha) \hat{n}_i \right], \quad (31)$$

其中 $\hat{n}_i = \hat{c}_i^\dagger\hat{c}_i$ 是粒子数算符, \hat{c}_i^\dagger (\hat{c}_i) 是费米子的产生 (湮灭) 算符. J 是近邻跃迁强度, Δ 是 p 波配对强度. α 是无理数, 不失一般性, 仍然取 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. V 是准周期势强度. 可以看出, 当 $\Delta = 0$ 时, 这个模型就是 AA 模型. 当 $\alpha = 0$ 时, 这个哈密顿量描述的是一维 Kitaev 模型 [82], 这个模型在 $|V| = 2J$ 处会发生拓扑相变, 当 $|V| < 2J$ 时, 这个系统是拓扑的, 有马约拉纳 (Majorana) 零能模 [86–88], 当 $|V| > 2J$ 时, 这个系统是拓扑平庸 (topologically trivial) 的. 下面设 $J = 1$ 作为能量单位, 研究在准周期势和 p 波超导项共同作用下, 这个系统发生的相变.

这个哈密顿量可以用波戈留波夫-德热纳变换 (Bogoliubove-de Gennes (BDG) transformation) [16,89] 来对角化:

$$\eta_n^\dagger = \sum_{i=1}^L \left[u_{n,i}\hat{c}_i^\dagger + v_{n,i}\hat{c}_i \right], \quad (32)$$

其中 L 是晶格尺寸, $n = 1, \dots, L$. 利用 η_n 和 η_n^\dagger , 哈密顿量可被对角化为 $H = \sum_{n=1}^L \Lambda_n \left(\eta_n^\dagger \eta_n - \frac{1}{2} \right)$, 这里 Λ_n 是单个的准粒子谱. 通过解下面的 BDG 方程, 可以得到 Λ_n , 以及对应的 $u_{n,i}$, $v_{n,i}$:

$$\begin{pmatrix} \hat{h} & \hat{\Delta} \\ -\hat{\Delta} & -\hat{h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \Lambda_n \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}, \quad (33)$$

其中 $\hat{h}_{ij} = -J(\delta_{j,i+1} + \delta_{j,i-1}) + V_i\delta_{ij}$, $\hat{\Delta}_{ij} = -\Delta(\delta_{j,i+1} - \delta_{j,i-1})$, $u_n^\top = (u_{n,1}, \dots, u_{n,L})$ 和 $v_n^\top = (v_{n,1}, \dots, v_{n,L})$.

既然这个系统存在准周期势, 那么随着准周期势强度的增加, 它应该会发生扩展到局域的转变. 定义这个系统的倒参与率 [25–27]: $\text{IPR}_n = \sum_{i=1}^L (u_{n,i}^4 + v_{n,i}^4)$, $u_{n,j}$ 和 $v_{n,j}$ 满足归一化条件 $\sum_i (u_{n,i}^2 + v_{n,i}^2) = 1$. 由于这个系统的基态是所有的负准粒子能级全填满, 所以可以定义一个平均 IPR, 即 $\text{MIPR} = \sum_{n=1}^L P_n/L$, 来刻画这个系统基态的局域-扩展性质. 图 10(a) 展示了 $\Delta = 0.5$ 和 0.8 时 MIPR 随 V 的变化. 可以看出在满足 $V = 2|\Delta - J|$ 和 $V = 2(\Delta +$

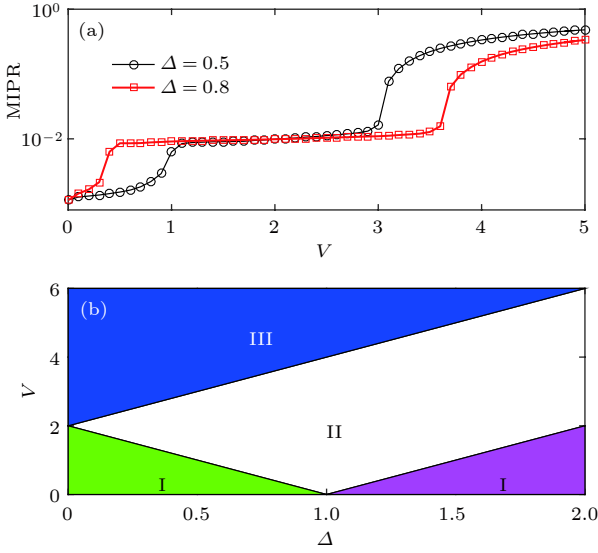


图 10 (a) 固定两个 p 波配对强度 $\Delta = 0.5$ 和 $\Delta = 0.8$ 时, MIPR 随准周期势强度 V 的变化, 这里用的系统尺寸是 $L = 1000$; (b) 系统随 p 波配对强度 Δ 和准周期势强度 V 变化的相图, I: 扩展相, II: 临界相, III: 局域相. 这里固定 $J = 1$

Fig. 10. (a) MIPR as a function of the incommensurate potential strength V at two p-wave pairing strength $\Delta = 0.5$ and $\Delta = 0.8$. Here use $L = 1000$; (b) phase diagram of this system with a p-wave pairing strength Δ and incommensurate potential strength V . I: extended phase, II: critical phase and III: localized phase. Here fix $J = 1$.

J) 处, MIPR 有突然的变化. 进一步分析发现 $V < 2|\Delta - J|$ 时, 系统是扩展的, $2|\Delta - J| < V < 2(\Delta + J)$ 时, 系统是临界的, $V > 2(\Delta + J)$ 时, 系统是局域的. 这个系统的相图如图 10(b) 所示, 图中 I 对应扩展相, II 对应临界相, 它的波函数会展现出多分形的性质, III 对应局域相. 这三个相会在能谱统计和多分形分析上表现出明显的差异, Wang 等^[19] 也对这个系统做过尺寸分析, 给出这个系统临界相的一些临界参数和这些临界参数满足的标度律.

随着准周期势强度 V 和 p 波配对强度 Δ 的变化, 这个系统的拓扑性质也应该发生变化. 为了直观地看出拓扑相变, 取开边界条件, 分析这个系统零能模的变化. 图 11(a) 展示了在开边界条件下这个 BDG 方程的准粒子谱, 这里固定 $\Delta = 0.5$. 在图 11(a) 的插图中, 展示了 Λ_1 随 V 的变化, 可以看出 Λ_1 在 $V = 3$ (满足 $V = 2(\Delta + J)$) 处突然由零变为非零. 这里零能模的存在往往对应于马约拉纳边界态的存在. 为了清楚看到这一点, 引入马约拉纳算符 $\gamma_i^A = \hat{c}_i^\dagger + \hat{c}_i$ 和 $\gamma_i^B = (\hat{c}_i - \hat{c}_i^\dagger)/i$, 它们满足

$(\gamma_i^\alpha)^\dagger = \gamma_i^\alpha$ 和反对易关系 $\{\gamma_i^\alpha, \gamma_j^\beta\} = 2\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = A, B$), 那么准粒子算符可用马约拉纳算符重新写为

$$\eta_n^\dagger = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^L [\phi_{n,i} \gamma_i^A - i \Psi_{n,i} \gamma_i^B], \quad (34)$$

容易得到 $\phi_{n,i} = (u_{n,i} + v_{n,i})$ 和 $\psi_{n,i} = (u_{n,i} - v_{n,i})$. 图 11(b) 和图 11(c) 展示了最低激发 Λ_1 对应的 ϕ_i 和 ψ_i . $V < 2(\Delta + J)$ 时, ϕ_i 和 ψ_i 的分布是局域在链的两端, 对应于存在两个孤立的马约拉纳费米子局域在链的两端, 这时系统是拓扑超导的. 当 $V > 2(\Delta + J)$ 时, 例如图中所示的 $V = 3.5$, 最低激发模对应的 ϕ_i 和 ψ_i 的分布不在链的两端, 而是局域在体态内, 这意味着这个态是安德森局域态. 还可进一步计算这个系统的拓扑数 (马约拉纳数) 来标定这个系统的拓扑转变^[16]. 总的来说, 上面得到的扩展相和临界相是拓扑的, 得到的局域相是拓扑平庸的. 在 $V = 2(\Delta + J)$ 处, 存在拓扑超导到安德森局域的相变.

6.2 准周期势对外尔半金属的影响

考虑下面的可在冷原子中实现的外尔半金属模型的哈密顿量^[90]:

$$H_0 = - \sum_{m,n,l} (t_x e^{-i\phi_{m,n,l}} a_{m+1,n,l}^\dagger a_{m,n,l} + t_y a_{m,n+1,l}^\dagger a_{m,n,l} + t_z e^{-i\phi_{m,n,l}} a_{m,n,l+1}^\dagger a_{m,n,l} + \text{H.c.}), \quad (35)$$

这里 $a_{m,n,l}$ ($a_{m,n,l}^\dagger$) 是在点 (m, n, l) 上的湮灭 (产生) 算符, t_x , t_y 和 t_z 分别是 x , y 和 z 方向的跃迁强度, $\phi_{m,n,l} = (m+n)\pi$ (取除以 2π 的余数). 这个哈密顿量在动量空间中可写为

$$H_0 = \sum_{k_x, k_y, k_z} \Gamma^\dagger h_0(k_x, k_y, k_z) \Gamma,$$

这里 $\Gamma^\dagger = (a_{k_x, k_y, k_z}^\dagger, a_{k_x, k_y, k_z}^\dagger)$, 以及

$$h_0(k_x, k_y, k_z) = -2[t_y \cos(k_y a) \sigma_x + t_x \sin(k_x a) \sigma_y - t_z \cos(k_z a) \sigma_z], \quad (36)$$

其中 $\sigma_{x,y,z}$ 是泡利矩阵. 容易得到这个系统的能谱为

$$E = \pm 2\sqrt{t_x^2 \sin^2(k_x) + t_y^2 \cos^2(k_y) + t_z^2 \cos^2(k_z)}, \quad (37)$$

这两个带的四个接触点是外尔点 $(k_x, k_y, k_z) = (0, \pm\pi/2, \pm\pi/2)$ ^[90].

考虑系统体积为 $L_x \times L_y \times L_z$, 为了方便, 取 $L_x = L_y = L_z = Na$, 并设晶格常数 $a = 1$ 和 $t_x =$

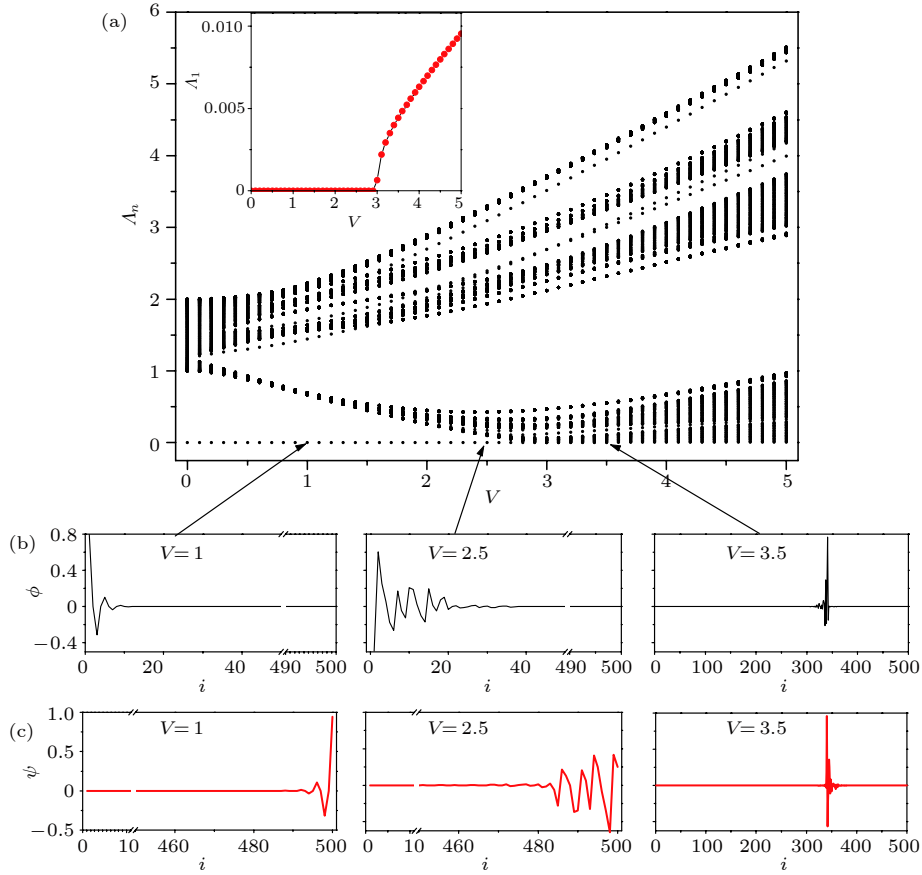


图 11 (a) 在开边界条件下, 固定 $\Delta = 0.5$ 和 $L = 500$ 时系统的能谱; (b), (c) 不同的 V 值时最低激发模的 ϕ_i ((b)) 和 ψ_i ((c)) 的分布^[16]

Fig. 11. (a) Energy spectra of this system with $\Delta = 0.5$ and $L = 500$ under OBC. The distributions of ϕ_i (b) and ψ_i (c) for the lowest excitation with different V ^[16].

$t_y = t_z = 1$ 作为能量单位. 下面沿 z 方向加上准周期势, 则哈密顿量变为

$$H = H_0 + V \sum_{m,n,l} \cos(2\pi\alpha l) n_{m,n,l}, \quad (38)$$

这里 $n_{m,n,l} = a_{m,n,l}^\dagger a_{m,n,l}$, V 是准周期势的强度, α 是一个无理数, 这里仍然取为 $\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2$. 这时, k_x 和 k_y 仍然是好量子数, 且 $k_x = \frac{2\pi}{N} i_x$, $k_y = \frac{2\pi}{N} i_y$, $(i_x = -\frac{N}{4}, -\frac{N}{4} + 1, \dots, \frac{N}{4} - 1, i_y = -\frac{N}{2}, -\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2} - 1)$. 固定动量 k_x 和 k_y 时, 这个系统可等效于一个一维系统, 可以对角化哈密顿量 (38) 式. 第 n 个本征值 $E_n(k_x, k_y)$ 对应的本征态可写为

$$|\Psi_n\rangle = \sum_l (\psi_{n,l,A} a_{k_x,k_y,l}^{A\dagger} + \psi_{n,l,B} a_{k_x,k_y,l}^{B\dagger}) |0\rangle, \quad (39)$$

式中 $a_{k_x,k_y,l}^A$ ($a_{k_x,k_y,l}^B$) 是固定 k_x 和 k_y 时沿 z 方向第 l 层的子格 A (B) 上的湮灭算符. 然后由本征方程可得:

$$\begin{aligned} E_n \psi_{n,l,A} &= t_z (\psi_{n,l-1,A} + \psi_{n,l+1,A}) \\ &\quad + V \cos(2\pi\alpha l) \psi_{n,l,A} \\ &\quad + (-2t_y \cos k_y + 2it_x \sin k_x) \psi_{n,l,B}, \\ E_n \psi_{n,l,B} &= -t_z (\psi_{n,l-1,B} + \psi_{n,l+1,B}) \\ &\quad + (-2t_y \cos k_y - 2it_x \sin k_x) \psi_{n,l,B} \\ &\quad + V \cos(2\pi\alpha l) \psi_{n,l,B}, \end{aligned} \quad (40)$$

如果引入基矢 $\Psi = (\psi_{n,1,A}, \psi_{n,1,B}, \psi_{n,2,A}, \psi_{n,2,B}, \dots, \psi_{n,N,A}, \psi_{n,N,B})$, 解方程 (40) 简化成求一个 $2N \times 2N$ 矩阵的本征值问题.

可以想象, 由于准周期势的作用, z 方向应该存在扩展到局域的转变. 为了研究这种转变, 可以引入倒参与率:

$$\text{IPR} = \sum_j (\psi_{n,j,A}^2 + \psi_{n,j,B}^2), \quad (41)$$

这里波函数 Ψ_n 已经归一化. 对于填满的下带, 同样可以定义一个平均的 IPR:

$$\text{MIPR} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_j (\psi_{n,j,A}^2 + \psi_{n,j,B}^2), \quad (42)$$

这是下带所有本征态的 IPR 的平均. MIPR 可以给出下带所有填充态的扩展到局域转变的信息. 图 12(a) 和图 12(b) 分别展示了第 N 个本征态的 IPR 和 MIPR 作为 k_x 和 k_y 的函数, 这里取 $V = 1.9$. 从图中可以看出, 在 $(k_x, k_y) = (0, \pm\pi/2)$ 附近的态是扩展的, 而其他区域的态在 z 方向已经变得局域, 也就是说 $(k_x, k_y) = (0, \pm\pi/2)$ 附近的态在 z 方向更难变得局域, 即需要更大的 V 才能使外尔点附近的态变得局域. 图 12(c) 和图 12(d) 分别刻画了固定 $k_y = \frac{\pi}{2}$ 时第 N 个本征态的 IPR 和 MIPR 作为 k_x 和 V 的函数. 图 12(e) 和图 12(f) 展示了固定 $k_x = 0$ 时第 N 个本征态的 IPR 和 MIPR 作为 k_y 和 V 的函数. 从这些图中可以看出在 $V > 0.4$ 时开始有本征态在 z 方向变得局域, 而动量在 $(k_x, k_y) = (0, \pm\pi/2)$ 附近的本征态在 $V > 2$ 时才由扩展变为局域. 从 (40) 式出发, 可以直观地理解这一现象. A 和 B 子格之间的有效跃迁强度大小依赖于 k_x 和 k_y . A 和 B 子格间的跃迁是在 xy 平面内, 其跃迁强度越大, 粒子在 z 方向的运动就会更容易变得局域, 反之, xy 平面内的跃迁强度越小, 则 z 方向的

运动变得局域所需要的 V 就越大. 当 $k_x = 0$ 和 $k_y = \pm\frac{\pi}{2}$ 时, 从 (40) 式中可以看出, 两个子格间的有效跃迁强度是零, 这时粒子在 z 方向的运动发生扩展到局域的转变所需要的 V 最大, 而且可以看出这时这个模型可以简化为 AA 模型, 所以 $V > 2$ 时所有 z 方向的本征态变成局域, 这我们的数值结果是一致的.

为了研究系统的费米面随着准周期势增大的变化, 下面数值计算态密度 (density of states, DOS), 其定义为

$$\begin{aligned} \rho(E) &= \frac{1}{N^3} \sum_{i=1}^{N^3} \delta(E - E_i) \\ &= \frac{1}{N^3} \sum_{l=1}^{2N} \sum_{i_x=-\frac{N}{4}}^{\frac{N}{4}-1} \sum_{i_y=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \delta(E - E_{l,i_x,i_y}), \end{aligned} \quad (43)$$

其中 E_{l,i_x,i_y} 是固定 $k_x = \frac{2\pi}{N}i_x$ 和 $k_y = \frac{2\pi}{N}i_y$ 时的第 l 个本征态. 为了数值上推导 $\delta(E - E_i)$, 用高斯函数 $\frac{1}{\sqrt{\pi\sigma^2}} \exp(-\frac{x^2}{\sigma^2})$ 近似代替 $\delta(x)$ [92]. 外尔半金属的费米面附近的态密度满足 $\rho(E) \sim |E|^2$ [93], 易得

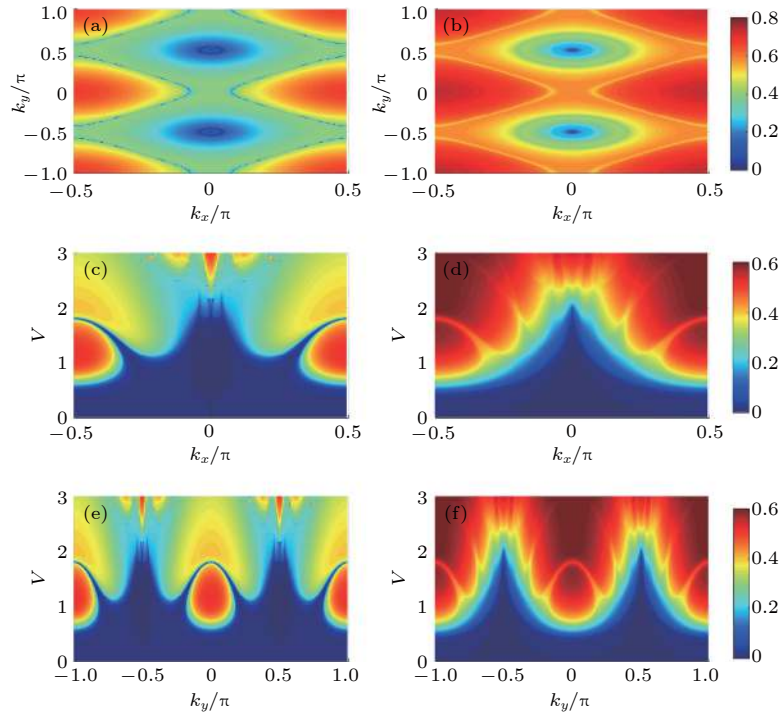


图 12 第 N 个本征态的 IPR((a)) 和 MIPR((b)) 随 k_x 和 k_y 的变化, 这里固定 $V = 1.9$; 第 N 个本征态的 IPR((c)) 和 MIPR((d)) 随 k_x 和 V 的变化, 这里固定 $k_y = \frac{\pi}{2}$; 第 N 个本征态的 IPR((e)) 和 MIPR((f)) 作为 k_y 和 V 的函数, 这里固定 $k_x = 0$. 其他参数是 $L = 300$ 和 $t_x = t_y = t_z = 1$ [91]

Fig. 12. IPR((a)) and MIPR((b)) as a function of k_x and k_y with fixed $V = 1.9$; IPR((c)) and MIPR((d)) as a function of k_x and V with fixed $k_y = \frac{\pi}{2}$; IPR((e)) and MIPR((f)) as a function of k_y and V with fixed $k_x = 0$. The lattice size is $L = 300$ and $t_x = t_y = t_z = 1$ [91].

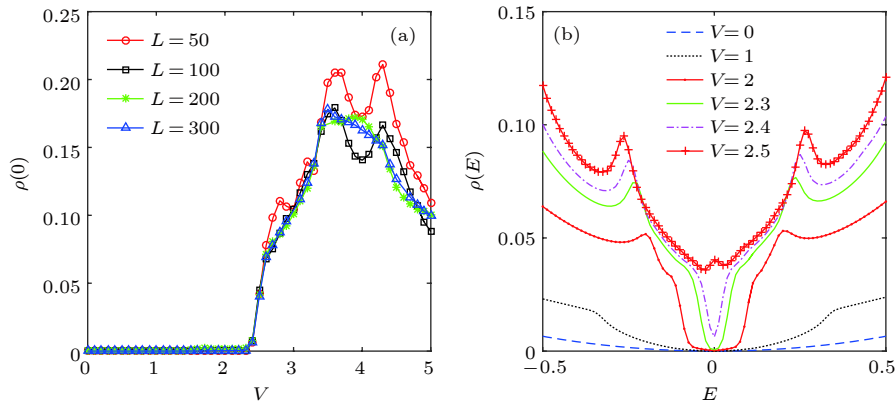


图 13 (a) 不同晶格尺寸 N 时, $\rho(0)$ 随 V 的变化, 这里固定 $\sigma = 0.02$; (b) 固定 $N = 300$, 取不同的准周期势强度 V 时系统的态密度随能量的变化^[91]

Fig. 13. (a) $\rho(0)$ versus V for different lattice size N with fixed $\sigma = 0.02$; (b) DOS with $N = 300$ as a function of energy for various values of incommensurate potential strength V ^[91].

$\rho(0) = 0$. 如果 $\rho(0)$ 变成一个有限值, 系统就进入了金属相, 所以能够用 $\rho(0)$ 来描述外尔半金属相到金属相的转变^[94,95]. 图 13(a) 显示了不同 N 时零能的态密度随准周期势强度的变化, 可以看到当 $N > 50$ 时转变点已经不依赖于系统尺寸, 所以下面选择 $N = 300$ 得到的结果是可靠的. 另外可以看出, 半金属到金属的转变点大约在 $V = 2.3$. 图 13(b) 展示了不同的准周期势强度 V 下系统的态密度作为能量的函数. 当 $V = 0$ 时, 可以看出 $\rho(E)$ 是 E 的二次函数, 即 $\rho(E) \sim |E|^2$, 在 $|E| \sim 0$ 附近, 即使加上一个较小的准周期势, 这个二次函数的关系也是近似满足的. 当 $V < 2.3$ 时, 都有 $\rho(0) = 0$, 当 $V > V_c (= 2.3)$ 时, $\rho(0)$ 成为一个非零的有限值, 这说明系统进入了金属相. 由于 $V_c > 2$, 所以系统在进入金属相之前 z 方向已经变得局域, 因此 $V > 2.3$ 时, 系统是一个准二维的金属.

最近, 人们还研究了在外尔半金属的三个方向上都加上准周期势^[96] 以及在节链 (nodal-link) 半金属的一个方向上加上准周期势^[97,98] 时系统发生的相变, 都得到了一些有趣的结果.

7 总结与展望

当一个新的物理现象被发现的时候, 一个自然而有趣的问题就是这种物理现象能否被无序 (或准周期势) 轻易地破坏, 比如前面提到的准周期势对拓扑超导体相和拓扑半金属相的影响. 所以对无序 (或准周期势) 的研究具有持久的生命力. 在一维系统或者冷原子系统中, 准周期势的优点显得尤

为突出: 一方面它本身具有很好的性质, 比如可解析得到扩展到局域的转变点等, 使得对这类模型本身的研究就很有意义, 如文中提到的动力学性质的研究; 另一方面, 这种势在冷原子实验中更容易实现, 因此正如文中提到的, 第一次实验观测到准周期势导致的局域转变, 第一次实验观测到多体局域, 第一次实验验证迁移率边的存在等等都是在冷原子中实现的准周期势的晶格中完成的. 正是在冷原子中实现了很多与准周期势有关的物理现象, 反过来又推动了这方面的理论研究. 相信在将来, 准周期势会被应用到更多的领域, 会带来更多有趣的物理现象. 本文主要涉及了准周期势带来的局域转变方面的工作, 实际上当体系处于扩展态时在准周期格子系统中也展示了丰富的拓扑相, 有兴趣的读者可以参考相关的文献^[77,99-101].

参考文献

- [1] Wang Y Q 2007 *Atomic Laser Cooling And Trapping* (Beijing: Peking University Press) (in Chinese) [王义道 2007 原子的激光冷却与陷阱(北京: 北京大学出版社)]
- [2] Stwalley W C 1976 *Phys. Rev. Lett.* **37** 1628
- [3] Bloch I, Dalibard J, Zwirger W 2008 *Rev. Mod. Phys.* **80** 885
- [4] Lin Y J, Jimenez-Garcia K, Spielman I B 2011 *Nature* **471** 83
- [5] Wu Z, Zhang L, Sun W, Xu X T, Wang B Z, Ji S C, Deng Y J, Chen S, Liu X J, Pan J W 2016 *Science* **354** 83
- [6] Zhang L, Liu X J 2018 arXiv:1806.05628
- [7] Cooper N R, Dalibard J, Spielman I B 2018 arXiv:1803.00249
- [8] Jian C M, Zhai H 2011 *Phys. Rev. B* **84** 060508
- [9] Hu J, Feng L, Zhang Z, Chin C, 2018 arXiv:1807.07504
- [10] Aubry S, André G 1980 *Ann. Israel Phys. Soc* **3** 18
- [11] Das Sarma S, He S, Xie X C 1988 *Phys. Rev. Lett.* **61** 2144

- [12] Das Sarma S, He S, Xie X C 1990 *Phys. Rev. B* **41** 5544
- [13] Biddle J, Das Sarma S 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 070601
- [14] Biddle J, Priour Jr D J, Wang B, Das Sarma S 2011 *Phys. Rev. B* **83** 075105
- [15] Roati G, D'Errico C, Fallani L, Fattori M, Fort C, Zaccanti M, Modugno G, Modugno M, Inguscio M 2008 *Nature* **453** 895
- [16] Cai X, Lang L J, Chen S, Wang Y 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 176403
- [17] DeGottardi W, Sen D, Vishveshwara S 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 146404
- [18] Wang J, Liu X J, Gao X, Hu H 2016 *Phys. Rev. B* **93** 104504
- [19] Wang Y, Wang Y, Chen S 2016 *Eur. Phys. J. B* **89** 254
- [20] Iyer S, Oganessian V, Refael G, Huse D A 2013 *Phys. Rev. B* **87** 134202
- [21] Wang Y, Hu H, Chen S 2016 *Eur. Phys. J. B* **89** 77
- [22] Setiawan F, Deng D L, Pixley J H 2017 *Phys. Rev. B* **96** 104205
- [23] Schreiber M, Hodgman S S, Bordia P, Lüschen H P, Fischer M H, Vosk R, Altman E, Schneider U, Bloch I 2015 *Science* **349** 842
- [24] Anderson P W 1958 *Phys. Rev.* **109** 1492
- [25] Thouless D J 1974 *Phys. Rep.* **13** 93
- [26] Schreiber M 1985 *J. Phys. C* **18** 2493
- [27] Hashimoto Y, Niizeki K, Okabe Y 1992 *J. Phys. A* **25** 5211
- [28] Modugno M 2009 *New J. Phys.* **11** 033023
- [29] Lang L J 2014 *Ph. D. Dissertation* (Beijing: University of Chinese Academy of Sciences) (in Chinese) [郎利君 2014 博士学位论文(北京: 中国科学院大学)]
- [30] Li X, Li X, Das Sarma S 2017 *Phys. Rev. B* **96** 085119
- [31] Lüschen H P, Scherg S, Kohlert T, Schreiber M, Bordia P, Li X, Das Sarma S, Bloch I 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 160404
- [32] Basko D, Aleiner I, Altshuler B 2006 *Ann. Phys.* **321** 1126
- [33] Nandkishore R, Huse D A 2015 *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.* **6** 15
- [34] Pal A, Huse D A 2010 *Phys. Rev. B* **82** 174411
- [35] Vosk R, Huse D A, Altman E 2015 *Phys. Rev. X* **5** 031032
- [36] Agarwal K, Gopalakrishnan S, Knap M, Müller, Demler E 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 160401
- [37] Fan R, Zhang P, Shen H, Zhai H 2017 *Sci. Bull.* **62** 707
- [38] Else D V, Bauer B, Nayak C 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 090402
- [39] Oganessian V, Huse D A 2007 *Phys. Rev. B* **75** 155111
- [40] Vosk R, Altman E 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 067204
- [41] Bauer B, Nayak C 2013 *J. Stat. Mech.* **2013** P09005
- [42] Wang Y 2018 *Ph. D. Dissertation* (Beijing: University of Chinese Academy of Sciences) (in Chinese) [王玉成 2018 博士学位论文(北京: 中国科学院大学)]
- [43] Serbyn M, Papić, Abanin D A 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 127201
- [44] Bardarson J H, Pollmann F, Moore J E 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 017202
- [45] Serbyn M, Papić Z, Abanin D A 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 260601
- [46] Bordia P, Lüschen H P, Scherg S, Gopalakrishnan S, Knap M, Schneider U, Bloch I 2017 *Phys. Rev. X* **7** 041047
- [47] Kohlert T, Scherg S, Li X, Lüschen H P, Das Sarma S, Bloch I, Aidelsburger M 2018 arXiv:1809.04055
- [48] Hiramoto H, Abe S 1988 *J. Phys. Soc. Jpn.* **57** 230
- [49] Hiramoto H, Abe S 1988 *J. Phys. Soc. Jpn.* **57** 1365
- [50] Metzler R, Klafter J 2000 *Phys. Rep.* **339** 1
- [51] Battiatto M, Carva K, Oppeneer P M 2012 *Phys. Rev. B* **86** 024404
- [52] Foster S, Thesberg M, Neophytou N 2017 *Phys. Rev. B* **96** 195425
- [53] Ketzmerick R, Petschel G, Geisel T 1992 *Phys. Rev. Lett.* **69** 695
- [54] Ketzmerick R, Kruse K, Kraut S, Geisel T 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 1959
- [55] Qin P, Yin C, Chen S 2014 *Phys. Rev. B* **90** 054303
- [56] Floquet G 1883 *Ann. ENS* **12** 47
- [57] Grifoni M, Hänggi P 1998 *Phys. Rep.* **304** 229
- [58] Blümel R, Smilansky U 1984 *Phys. Rev. Lett.* **52** 137
- [59] Izrailev F M 1988 *Phys. Lett. A* **134** 13
- [60] Amico L, Fazio R, Osterloh A, Vedral V 2008 *Rev. Mod. Phys.* **80** 517
- [61] Wilcox R M 1967 *J. Math. Phys.* **8** 962
- [62] Heyl M, Polkovnikov A, Kehrein S 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 135704
- [63] Heyl M 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 205701
- [64] Heyl M 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 140602
- [65] Heyl M 2018 *Rep. Prog. Phys.* **81** 054001
- [66] Yang C, Wang Y, Wang P, Gao X, Chen S 2017 *Phys. Rev. B* **95** 184201
- [67] Jalabert R A, Pastawski H M 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 2490
- [68] Cucchietti F M, Dalvit D A R, Paz J P, Zurek W H 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 210403
- [69] Gorin T, Prosen T, Seligman T H, Znidaric M 2006 *Phys. Rep.* **435** 33
- [70] Quan H T, Song Z, Liu X F, Zanardi P, Sun C P 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 140604
- [71] Jafari R, Johannesson H 2017 *Phys. Rev. Lett.* **118** 015701
- [72] Yang B J, Nagaosa N 2014 *Nat. Commun.* **5** 4898
- [73] Hassan M Z, Kane C L 2010 *Rev. Mod. Phys.* **82** 3045
- [74] Qi X L, Zhang S C 2011 *Rev. Mod. Phys.* **83** 1057
- [75] Fang C, Weng H, Dai X, Fang Z 2016 *Chin. Phys. B* **25** 117106
- [76] Su W P, Schrieffer J R, Heeger A J 1979 *Phys. Rev. Lett.* **42** 1698
- [77] Guo H, Chen S 2015 *Phys. Rev. B* **91** 041402
- [78] Thouless D J 1983 *Phys. Rev. B* **27** 6083
- [79] Wang L, Troyer M, Dai X 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 026802
- [80] Nakajima S, Tomita T, Taie S, Ichinose T, Ozawa H, Wang L, Troyer M, Takahashi Y 2016 *Nat. Phys.* **12** 296
- [81] Xu Z, Zhang Y, Chen S 2017 *Phys. Rev. A* **96** 013606
- [82] Kitaev A Y 2001 *Phys. Usp.* **44** 131
- [83] Wan X, Turner A M, Vishwanath A, Savrasov S Y 2011 *Phys. Rev. B* **83** 205101
- [84] Xu G, Weng H, Wang Z, Dai X, Fang Z 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 186806
- [85] Lv B Q, Xu N, Weng H M, Ma J Z, Richard P, Huang X C, Zhao L X, Chen G F, Matt C E, Bisti F, Strocov V N, Mesot J, Fang Z, Dai X, Qian T, Shiang M, Ding H 2015 *Nat. Phys.* **11** 724
- [86] Alicea J 2012 *Rep. Prog. Phys.* **75** 076501
- [87] Gangadharaiah S, Braunecker B, Simon P, Loss D 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 036801
- [88] Zhu G Y, Wang R R, Zhang G M 2017 *Phys.* **46** 154 (in Chinese) [朱国毅, 王瑞蕊, 张广铭 2017 物理 **46** 154]
- [89] Lieb E, Schultz T, Mattis D 1961 *Ann. Phys.* **16** 407
- [90] Dubček T, Kennedy C J, Lu L, Ketterle W, Soljačić M, Buljan H 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 225301
- [91] Wang Y, Chen S 2017 *Phys. Rev. A* **95** 053634
- [92] Weiße A, Wellein G, Alvermann A, Fehske H 2006 *Rev. Mod. Phys.* **78** 275
- [93] Bera S, Sau J D, Roy B 2016 *Phys. Rev. B* **93** 201302
- [94] Kobayashi K, Ohtsuki T, Imura K I, Herbut I F 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 016402
- [95] Pixley J H, Goswami P, Das Sarma S 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 076601

- [96] Pixley J H, Wilson J H, Huse D A, Gopalakrishnan S 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 207604
- [97] Yan Z, Bi R, Shen H, Lu L, Zhang S C, Wang Z 2017 *Phys. Rev. B* **96** 041103
- [98] Wang Y, Hu H, Chen S 2018 *Phys. Rev. B* **98** 205410
- [99] Kraus Y E, Lahini Y, Ringel Z, Verbin M, Zilberberg O 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 106402
- [100] Lang L, Cai X, Chen S 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 220401
- [101] Madsen K, Bergholtz E J, Brouwer 2013 *Phys. Rev. B* **88** 125118

SPECIAL TOPIC—Cold atoms and molecules

Properties and applications of one dimensional quasiperiodic lattices*

Wang Yu-Cheng^{1)2)3)†} Liu Xiong-Jun²⁾⁶⁾ Chen Shu^{4)5)6)‡}

1) (*Shenzhen Institute for Quantum Science and Engineering, Department of Physics, Southern University of Science and Technology, Shenzhen 518055, China*)

2) (*International Center for Quantum Materials, School of Physics, Peking University, Beijing 100871, China*)

3) (*Synergetic Innovation Center of Quantum Information and Quantum Physics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China*)

4) (*Beijing National Laboratory for Condensed Matter Physics, Institute of Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China*)

5) (*School of Physical Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China*)

6) (*Collaborative Innovation Center of Quantum Matter, Beijing 100084, China*)

(Received 30 October 2018; revised manuscript received 25 December 2018)

Abstract

Quasiperiodic lattices have been widely studied in cold atoms, which make one study extended-Anderson localization transition in one-dimensional (1D) or two-dimensional (2D) systems. In 2008, Inguscio's group prepared one-dimensional quasiperiodic lattice in cold atomic system and observed Anderson localization, which promoted the theoretical and experimental studies of quasiperiodic systems. Later, Bloch's group observed the many body localization in their prepared 1D and 2D quasiperiodic lattices. Recently, they also successfully observed the mobility edge and many body localization in a system with mobility edge in quasiperiodic lattices. These cold atom experiments have promoted the researches of many body localization and mobility edge. Quasiperiodic lattices have become a platform and its effects on many physical phenomena are being extensively studied, which can be expectantly observed in cold atomic experiments. This paper is based on the authors' some related work and briefly review some recent studies on the 1D quasiperiodic lattices, including some important cold atom experiments, some important properties of the quasiperiodic lattices and their effects on some physical phenomena, such as topological states.

Keywords: optical lattice, Anderson localization, many body localization, topological states

PACS: 03.65.Vf, 04.60.Kz, 71.10.Fd, 72.15.Rn

DOI: 10.7498/aps.68.20181927

* Project supported by the National Key Research and Development Program of China (Grant Nos. 2016YFA0301604, 2016YFA0300600, 2016YFA0302104), the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11674301, 11574008, 11761161003, 11425419), the Thousand-Young-Talent Program of China, and the Strategic Priority Research Program (B) of the Chinese Academy of Sciences (Grant No. XDB07020000).

† Corresponding author. E-mail: wangyc3@sustc.edu.cn

‡ Corresponding author. E-mail: schen@iphy.ac.cn