物理学报 Acta Physica Sinica
Chinese Physical Society
Institute of Physics, CAS

可积系统多孤子解的全反演对称表达式

楼森岳

Full reversal symmetric multiple soliton solutions for integrable systems

Lou Sen-Yue

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 69, 010503 (2020)   DOI: 10.7498/aps.69.20191172
在线阅读 View online: https://doi.org/10.7498/aps.69.20191172
当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn

专题：非线性物理

可积系统多孤子解的全反演对称表达式*

楼森岳†

(宁波大学物理科学与技术学院, 宁波 315211)

(2019 年 7 月 31 日收到; 2019 年 9 月 26 日收到修改稿)

多孤子解是非线性数学物理系统的基本激发模式. 文献中存在各种类型的表达式, 如广田 (Hirota) 形式, 朗斯基 (Wronskian) 或双朗斯基形式和法夫 (Phaffian) 形式. 最近在多地系统的研究中, 我们发现使用一种全新但等价的形式具有极为简洁和方便的优点. 本文主要综述多种类型可积非线性系统的多孤子解的新型表达式, 同时对 SK 方程、非对称 NNV 系统、修正 KdV 型、sG 型、AKNS 模型和全离散 H_1 系统也给出一些文献中还没出现过的新的更为简便的表达式. 新的孤子表达式通常具有显然的时空全反演 (包括时间反演、空间反演、孤子初始位置反演及电荷共轭反演 (正反粒子反演)) 对称性. 这种具有显式全反演对称性的表达式在研究多地非局域系统和局域和非局域可积系统的各种共振结构时具有很大的优越性.

关键词： 可积系统, 多孤子解, 全反演对称性, 多地系统

PACS： 05.45.Yv, 02.30.Ik, 11.30.Er, 11.10.Lm **DOI:** 10.7498/aps.69.20191172

1 引 言

自从孤立波的发现[1]、孤立子 (孤子) 概念的提出[2] 和反散射方法的建立[3] 以来, 孤子在物理学的各个分支如流体物理[4]、等离子体物理[5]、光纤物理[6]、光学[7−10]、复杂系统和复杂网络[11]、量子场论和粒子物理[12]、引力理论[13]、玻色爱恩斯坦凝聚[14]、大气和海洋物理[15] 等等起着非常重要的作用.

求解可积系统的多孤子解有很多方法, 如广田 (Hirota) 法[16]、达布 (Darboux) 变换法[17]、反散射方法[3]、对称性方法[18] 等等. 通常使用不同的方法得到的多孤子解表面上可以是很不一样的. 如 Hirota 方法得到的指数函数形式的组合求和解和 Phaffian 解及达布变换方法得到的朗斯基或双朗斯基解等等. 而要证明这些看起来不同的表达式的等价性也往往不是显然的, 也因此经常误导一些作者声称得到了“新”的孤子解. 对于众所周知的可积系统, 要声称得到新解必须非常慎重. 对于单孤子解, 各种非线性模型的单孤子解绝大多数的文献都采用紧致简洁的双曲函数形式, 因此很多著名专家如 Hirota 和 Toda 及我国的陈登远[19] 等都期望能用双曲函数来简洁地表达多孤子解, 但是这一期望直到我们的工作[15,20] 发表前一直没有被实现.

自然界隐含着各种各样的对称性, 如时空平移不变性、标度不变性、空间转动不变性、宇称反演 (空间反演) 不变性等等. 因此, 描述物理基本规律的方程都自然地包含了这些反映自然规律的不变性质. 然而, 作为非线性可积系统的最基本的非线性激发, 现有的多孤子解却往往没有把它们具有的对称性反映出来. 最近, 在文献 [20] 中我们把多孤子解的全反演 (包括时空反演、所有孤子的初始位置反演、电荷共轭反演、位相反演和场反演等) 对称性明显地体现在了新的表达式中.

本文第 2 节我们首先综述给出 Korteweg de-Vries(KdV) 型方程的多孤子解的 Hirota 形式并将

* 国家自然科学基金 (批准号: 11975131, 11435005).

† 通信作者. E-mail: lousenyue@nbu.edu.cn

它改写成具有明显的全反演对称表达式. 在相应的子节中我们给出 KdV 方程、Toda 方程、Kadomtsev-Petviashvilli (KP) 方程 (包括 KdV 方程和 Boussinesq 方程)、(1 + 1 维和 2 + 1 维) Sawada-Kotera (SK) 方程、非对称 Nizhnik-Novikov-Veselov (NNV) 等对应方程的具有明显的全反演对称性的多孤子解. 在第 3 节我们综述给出修正 KdV (MKdV) 和 sine-Gordon (sG) 型方程的多孤子解的 Hirota 形式以及具有明显的全反演对称表达式. 特别给出 MKdV 方程和 sG 方程的一个新的具有明显全反演对称性的多孤子解. 第 4 节中, 我们给出散焦型非线性薛定谔 (NLS) 方程多孤子解的具有明显全反演对称 (包括电荷共轭对称) 的表达式. 对于聚焦型 NLS 方程, 具有显式的时空反演对称性和电荷共轭对称性的表达式比 Hirota 形式更为复杂. 因此, 本文不作直接讨论. 在第 5 节中, 我们直接给出 Ablowitz-Kaup-Newell-Segur (AKNS) 系统多孤子解的一种新表达式: 范德蒙-朗斯基行列式形式. 同时指出该新形式包含的全反演对称性. 本文第 6 节, 我们在重新定义全离散的双曲函数后, 写下全离散势 KdV 系统 (H_1) 的具有明显的全反演对称多孤子解. 最后一节是总结和讨论.

2 KdV-KP-Toda 型多孤子解的新型表达式

KdV-KP-Toda 型方程文献中简单地称之为 KdV 型方程[21]. 其一般的多孤子解 (N-孤子解) 的 Hirota 形式可以统一地写为

$$u = 2\,(\ln F)_{xx}\,, \tag{1}$$

$$F = \sum_{\mu=0,1} \exp\left(\sum_{j=1}^{N} \mu_j \xi_j + \sum_{1\leqslant j<l}^{N} \mu_j \mu_l \theta_{jl}\right), \tag{2}$$

其中关于 μ的求和是关于 $\mu_i = 0,\ 1,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N$的各种可能组合的求和, ξ_j为

$$\begin{aligned}\xi_j &= \boldsymbol{k}_j \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{0j}),\\ \boldsymbol{k}_j &= \{k_{j1},\ k_{j2},\ \ldots,\ k_{jd}\},\\ \boldsymbol{x} &= \{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_d\},\end{aligned} \tag{3}$$

$x_i,\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ d$,可以是连续的或离散的空间和时间变量. $\boldsymbol{x}_{0j}$代表第 j 个孤子的任意初始位置向量. 对于给定的模型 $\boldsymbol{k}_{ji}$要满足相应的色散关系, $\exp(\theta_{jl})$要满足三孤子存在条件. (1) 中的 F满足所谓的 Hirota 双线性方程

$$P(D_{\boldsymbol{x}})F\cdot F = 0. \tag{4}$$

(4) 式中 Hirota 双线性算子 $D_{\vec{x}}$定义为

$$D_{\boldsymbol{x}}^n F\cdot G = (\partial_{\boldsymbol{x}} - \partial_{\boldsymbol{y}})^n F(\boldsymbol{x})G(\boldsymbol{y})|_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}}\,. \tag{5}$$

文献 [21] 对各种可能存在三孤子的 $P(D_{\boldsymbol{x}})$作了完整的分类.

从 (1) 和 (2), 我们可以看到时空平移不变性 (任意初始位置向量) 外, 我们并不能看到其它对称性. 为了找到明显的全反演不变的多孤子解表达式, 我们可以利用 (1) 和 (2) 的下述的显然的对称性,

$$F \to \beta \exp(Kx + \varOmega t + X_0)F, \tag{6}$$

其中 β, K, $\varOmega$ 和 X_0为任意常数. 利用对称性 (6), 重新定义任意的孤子初始位置向量, 将ξ_j重写为

$$\xi_j = \eta_j - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{j-1}\theta_{ij} - \frac{1}{2}\sum_{i=j+1}^{N}\theta_{ji}, \tag{7}$$

$$\eta_j = \boldsymbol{k}_j \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{0j}), \tag{8}$$

则 (1) 和 (2) 可以重新改写为

$$u = 2\left[\ln \sum_{\nu} K_\nu \cosh\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\nu_j\eta_j\right)\right]_{xx}, \tag{9}$$

其中关于$\nu = \{\nu_1,\ \nu_2,\ \cdots,\ \nu_N\}$的求和必须对所有 $\nu_i = 1,\ -1,\ i = 1,\ 2\ \cdots,\ N$的非对偶组合求和. 由于 (9) 中的双曲函数是偶函数, 所以 ν 和 $-\nu$产生的是一样的贡献, 所以我们称 ν 和 $-\nu$是互为对偶的. 在 (9) 中的与组合 ν相关的常数 K_ν与模型的多孤子存在条件相关. 下面各子节我们列出具体的 KdV-KP-Toda 型多孤子解的具有全反演对称性的具体表达式.

2.1 KdV 方程的多孤子解

对于 KdV 方程

$$KdV \equiv u_t + u_{xxx} + 6uu_x = 0, \tag{10}$$

多孤子解为

$$u = 2\left[\ln \sum_{\nu} K_\nu \cosh\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\nu_j\eta_j\right)\right]_{xx},$$

$$\eta_j = k_j(x - x_{0j}) - k_j^3(t - t_{0j}), \tag{11}$$

其中

$$K_{\nu}=\prod_{i>j}(k_i-\nu_i\nu_jk_j). \tag{12}$$

从 (11) 可以看出, KdV 方程的多孤子解 (11) 具有显然的全反演 (时空反演 $\{x,t\}\to\{-x,-t\}$ 和孤子初始位置反演 $\{x_{0j},t_{0j}\}\to\{-x_{0j},-t_{0j}\}$) 变换下的不变性. 换句话说 KdV 方程的多孤子解 (11) 是在全反演变换

$$\eta_j\to-\eta_j \tag{13}$$

下不变的.

两地非局域 KdV 系统 (也称作是 Alice-Bob KdV(ABKdV) 系统)

$$\Delta(A,\ B)=0,\ B=A(-x,-t) \tag{14}$$

具有如下性质

$$\Delta(A,\ A)=KdV, \tag{15}$$

其中 KdV 由 (10) 定义. 许多具体的 $\Delta(A,\ B)$ 可在文献 (如 [20]) 中找到. 由于 (11) 的全反演变换不变性, 因此

$$A=2\left[\ln\sum_{\nu}K_{\nu}\cosh\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\nu_j\eta_j\right)\right]_{xx},$$
$$\eta_j=k_jx-k_j^3t, \tag{16}$$

是任意 ABKdV 系统 (14) 的 PT(P 宇称, T 时间反演) 不变解.

2.2 KP 方程的多孤子解

对于 KP 方程 (包括 KdV 方程 $u_y=0$ 和 Boussinesq 方程 $u_t=0$)

$$KP\equiv(u_t+u_{xxx}+6uu_x)_x+3\sigma^2u_{yy}=0,\quad \sigma^2=\pm1, \tag{17}$$

多孤子解为

$$u=2\left[\ln\sum_{\nu}K_{\nu}\cosh\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\nu_j\eta_j\right)\right]_{xx},$$
$$\eta_j=k_j(x-x_{0j})+k_jl_j(y-y_{0j})-k_j(3\sigma^2l_j^2+k_j^2)(t-t_{0j}), \tag{18}$$

其中

$$K_{\nu}^2=\prod_{i>j}\left[(k_i-\nu_i\nu_jk_j)^2-\sigma^2(l_i-l_j)^2\right]. \tag{19}$$

从 (18) 可知, KP 方程的多孤子解 (18) 是在全反演变换 (13) 下不变的.

两地非局域 KP 系统 (Alice-Bob KP(ABKP) 系统)

$$\Delta(A,\ B)=0,\ B=A(-x,\ -y,\ -t) \tag{20}$$

是具有如下性质

$$\Delta(A,\ A)=KP, \tag{21}$$

的非局域系统, 其中 KP 由 (17) 定义. 一些具体的 $\Delta(A,\ B)$ 可在文献 (如 [20]) 中找到. 由于 (18) 的全反演变换不变性, 因此

$$A=2\left[\ln\sum_{\nu}K_{\nu}\cosh\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\nu_j\eta_j\right)\right]_{xx},$$
$$\eta_j=k_jx+k_jl_jy-k_j(3\sigma^2l_j^2+k_j^2)t, \tag{22}$$

是任意 ABKP 系统 (20) 的 PT (P 宇称, T 时间反演) 不变解.

2.3 Toda 方程的多孤子解

为了将多孤子解写成统一的形式, 对于 Toda 系统我们采用下述等价形式

$$Toda\equiv(u_n+2)u_{n,xx}-u_{n,x}^2+\frac{1}{2}(u_n+2)^2E^2u_{n-1}=0, \tag{23}$$

其中差分算子 E 定义为

$$Eu_n=u_{n+1}-u_n. \tag{24}$$

Toda 方程 (23) 的全反演对称多孤子解为

$$u=2\left[\ln\sum_{\nu}K_{\nu}\cosh\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\nu_j\eta_j\right)\right]_{xx},$$
$$\eta_j=k_j(n-n_{0j})+2\sinh\frac{k_j}{2}(x-x_{0j}), \tag{25}$$

其中

$$K_{\nu}=\prod_{i>j}\sinh\frac{1}{4}(k_i-\nu_i\nu_jk_j). \tag{26}$$

从 (25) 可知, Toda 方程的多孤子解 (25) 是在全反演变换 (13) 下不变的.

两地非局域 Toda 系统 (Alice-Bob Toda(ABT) 系统)

$$\Delta(A,\ B)=0,\ B=A(-x,-n) \tag{27}$$

是具有如下性质

$$\Delta(A,\ A)=Toda, \tag{28}$$

的非局域系统, 其中 $Toda$ 由 (23) 定义. 具体的 $\Delta(A,\ B)$ 的例子可在文献 (如文献 [20]) 中找到. 由于 (25) 的全反演变换不变性, 因此

$$A=2\left[\ln\sum_{\nu}K_{\nu}\cosh\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\nu_j\eta_j\right)\right]_{xx},$$

$$\eta_j=k_jn+2\sinh\frac{k_j}{2}x, \tag{29}$$

是任意 ABToda 系统 (27) 的 PP_n (P 宇称, P_n 离散变量 n 的反演) 不变解.

2.4 SK 方程的多孤子解

关于 (2 + 1)-维的 SK 方程

$$SK\equiv u_t-5v_y+(u_{xxxx}+15u^3+15uu_{xx}+15uv+5v_{xx})_x=0,$$
$$u_y=v_x \tag{30}$$

的全反演对称多孤子解为

$$u=2\left[\ln\sum_{\nu}K_{\nu}\cosh\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\nu_j\eta_j\right)\right]_{xx},$$

$$\eta_j=k_j[(x-x_{0j})+l_j(y-y_{0j})-(k_j^4+5k_j^2l_j-5l_j^2)(t-t_{0j})], \tag{31}$$

其中 ($k_{ij}\equiv k_i-\nu_i\nu_jk_j$)

$$K_{\nu}^2=\prod_{i>j}[k_{ij}^2(k_{ij}^2+\nu_i\nu_jk_ik_j+2l_i+2l_j)-k_{ij}(k_il_j-\nu_i\nu_jk_jl_i)+(l_i-l_j)^2]. \tag{32}$$

从 (31) 可知, SK 方程的多孤子解 (31) 是在全反演变换 (13) 下不变的.

(1 + 1)-维的 SK 系统的多孤子解可以简单地在 (2 + 1)-维的结果中取 $l_j=0$ 使得 $u_y=0,\ v=0$ 即可.

两地非局域 SK 系统 (Alice-Bob SK(ABSK) 系统)

$$\Delta(A,\ B)=0,\ B=A(-x,\ -y,\ -t) \tag{33}$$

是具有如下性质

$$\Delta(A,\ A)=SK, \tag{34}$$

的非局域系统, 其中 SK 由 (30) 定义. 由于 (31) 的全反演变换不变性, 因此

$$A=2\left[\ln\sum_{\nu}K_{\nu}\cosh\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\nu_j\eta_j\right)\right]_{xx},$$

$$\eta_j=k_j[x+l_jy-(k_j^4+5k_j^2l_j-5l_j^2)t], \tag{35}$$

是任意 ABSK 系统 (33) 的 PT 不变解.

2.5 非对称 NNV 方程的多孤子解

非对称的 NNV 方程

$$ANNV\equiv u_t+(u_{xx}+3uv+av)_x=0,\quad u_x=v_y \tag{36}$$

的全反演对称多孤子解为

$$u=2\left[\ln\sum_{\nu}K_{\nu}\cosh\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\nu_j\eta_j\right)\right]_{xx},$$

$$\eta_j=k_j[(x-x_{0j})+l_j(y-y_{0j})-(al_j^{-1}+k_j^2)(t-t_{0j})], \tag{37}$$

其中

$$K_{\nu}^2=\prod_{i>j}[a(l_i-l_j)^2-3l_il_j(k_i-\nu_i\nu_jk_j)(k_il_i-\nu_i\nu_jk_jl_j)]. \tag{38}$$

从 (37) 可知, 非对称 NNV 方程的多孤子解 (37) 是在全反演变换 (13) 下不变的.

两地非局域非对称 NNV 系统 (Alice-Bob ANNV(ABANNV) 系统)

$$\Delta(A,\ B)=0,\ B=A(-x,\ -y,\ -t) \tag{39}$$

是具有如下性质

$$\Delta(A,\ A)=ANNV, \tag{40}$$

的非局域系统, 其中 $ANNV$ 由 (36) 定义. 由于 (37) 的全反演变换不变性, 因此

$$A=2\left[\ln\sum_{\nu}K_{\nu}\cosh\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\nu_j\eta_j\right)\right]_{xx},$$

$$\eta_j=k_j[x+l_jt-(ak_jl_j^{-1}+k_j^2)t], \tag{41}$$

是任意 ABANNV 系统 (39) 的 PT 不变解.

3 MKdV-sG 型多孤子解的新型表达式

MKdV-sG 型方程在传统文献中通常分为 MKdV 型和 sG 型两种类型的方程[21]. 其实从多孤子解的表达式可知, 这两种类型可以归结为同一种类型. 实际上人们都知道, MKdV 方程的势形式和 sG 方程是属于同一个可积梯队的. MKdV-sG 型方程的多孤子解的 Hirota 形式可以统一地写为[19] ($\mathrm{i}\equiv\sqrt{-1}$)

$$u^{MKdV}=\frac{1}{2}u_x^{sG}=\mathrm{i}\left(\ln\frac{F_-}{F_+}\right)_x, \tag{42}$$

$$F_{\pm}=\sum_{\mu=0,1}\exp\left(\sum_{j=1}^{N}\mu_j\left(\xi_j\pm \mathrm{i}\frac{\pi}{2}\right)+\sum_{1\leqslant j<l}^{N}\mu_j\mu_l\theta_{jl}\right),\tag{43}$$

其中关于μ的求和是关于$\mu_i=0,\ 1,\ i=1,\ 2\ \cdots,\ N$的各种可能组合的求和, ξ_j为

$$\begin{aligned}&\xi_j=\boldsymbol{k}_j\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{0j}),\\&\boldsymbol{k}_j=\{k_{j1},\ k_{j2},\ \cdots,\ k_{jd}\},\\&\boldsymbol{x}=\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_d\},\end{aligned}\tag{44}$$

$x_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ d,$可以是连续的或离散的空间和时间变量. $\boldsymbol{x}_{0j}$代表第 j 个孤子的任意初始位置向量. 对于给定的模型$\boldsymbol{k}_{ji}$要满足相应的色散关系, $\exp(\theta_{jl})$要满足三孤子存在条件. (42) 式中的$F_{\pm}$满足所谓的 Hirota 双线性方程[21]

$$P(D_{\boldsymbol{x}})F_+\cdot F_-=0,\tag{45}$$

$$Q(D_{\boldsymbol{x}})(F_+\cdot F_+ +aF_-\cdot F_-)=0,\tag{46}$$

其中 Q 是偶函数, P 可以是偶函数 (sG) 也可以是奇函数 (MKdV). 如果 P 是奇函数, (45) 和 (46) 式通过转动变换可以等价地写为

$$P(D_{\bar{x}})F_+\cdot F_-=0,\tag{47}$$

$$Q(D_{\bar{x}})F_+\cdot F_-=0.\tag{48}$$

在文献 [21] 中, Hietarinta 对各种可能的三孤子存在条件对 P 和 Q 作了完整的分类.

为了找到 MKdV-sG 系统的明显的全反演不变的多孤子解表达式, 可以利用 (42) 和 (43) 式的下述显然的对称性,

$$F_{\pm}\to\beta\exp\left(Kx+\varOmega t+X_0\pm \mathrm{i}\frac{M\pi}{2}\right)F_{\pm},\tag{49}$$

其中$\beta,\ K,\ \varOmega$和X_0为任意常数, M为任意整数. 利用对称性 (49), 类似于 KdV 型的情况, 重新定义任意的孤子初始位置向量, 解 (42) 和 (43) 可以等阶地改写为

$$u^{\mathrm{MKdV}}=\frac{1}{2}u_x^{sG}=\mathrm{i}\left[\ln\frac{\displaystyle\sum_{\nu}K_{\nu}\cosh\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\nu_j\eta_j^-\right)}{\displaystyle\sum_{\nu}K_{\nu}\cosh\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\nu_j\eta_j^+\right)}\right]_x,$$

$$\eta_j^{\pm}=\boldsymbol{k}_j\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{0j})\pm \mathrm{i}\frac{\pi}{2}\equiv\eta_j\pm \mathrm{i}\frac{\pi}{2},\tag{50}$$

其中关于$\nu=\{\nu_1,\ \nu_2,\ \ldots,\ \nu_N\}$的求和必须对所有$\nu_i=1,\ -1,\ i=1,\ 2\ \ldots,\ N$的非对偶组合求和. 在 (50) 中的与组合 ν 相关的常数K_{ν}与模型的多孤子存在条件相关. 在表达式 (50) 中显然的全反演对称变换包含了时空反演$\boldsymbol{x}\to-\boldsymbol{x}$, 孤子初始位置反演$\boldsymbol{x}_{0j}\to-\boldsymbol{x}_{0j}$, 电荷共轭反演$i\to-i$以及场反演$u\to-u$. 实际上, 波向量$\boldsymbol{k}_j$为实的话, 解 (50) 也是实的. 所以对于实的$\boldsymbol{k}_j$, 解 (50) 可以进一步改写成实形式,

$$\begin{aligned}u^{\mathrm{MKdV}}&=\frac{1}{2}u_x^{sG}\\&=\pm 2\frac{\partial}{\partial x}\tan^{-1}\frac{\displaystyle\sum_{\nu_e}K_{\nu}\sinh\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\nu_j\eta_j\right)}{\displaystyle\sum_{\nu_o}K_{\nu}\cosh\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\nu_j\eta_j\right)},\\ \eta_j&=\boldsymbol{k}_j\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{0j}),\end{aligned}\tag{51}$$

其中关于ν_o和ν_e的求和分别是关于 ν 的非对偶的奇排列和偶排列求和. 奇 (偶) 排列定义为排列$\nu_i=1,\ -1,\ i=1,\ 2\ \ldots,\ N$中具有奇 (偶) 数个$\nu_i=1$.

下面各子节我们列出一些具体的 MKdV-sG 型多孤子解的具有全反演对称性的具体表达式.

3.1 MKdV 方程多孤子解

对于修正 KdV 方程

$$MKdV\equiv u_t+6u^2u_x+u_{xxx}=0\tag{52}$$

的多孤子解由 (50) 或 (51) 给出, 其中第 j 个孤子的行波变量η_j和分布系数 (相互作用常数) K_{ν}为

$$\eta_j=k_j(x-x_{0j})-k_j^3(t-t_{0j}),\tag{53}$$

$$K_{\nu}\equiv\prod_{i>j}(k_i-\nu_i\nu_jk_j).\tag{54}$$

任意的具有性质$\Delta(A,\ A)=MKdV$的两地 MKdV 系统

$$\Delta(A,\ B)=0,\ B=A(-x,\ -t)$$

的 PT 群不变多孤子解具有与 (50) 或 (51) 相同的形式, 但 (53) 中的x_{0j}和t_{0j}都必须为零.

3.2 sG 方程的多孤子解

对于 sG 方程

$$sG\equiv u_{xt}=\sin(u)\tag{55}$$

的多孤子解由 (50) 或 (51) 给出, 其中第 j 个孤子的行波变量η_j和分布系数 (相互作用常数) K_{ν}为

$$\eta_j=k_j\left(x-x_{0j}\right)+k_j^{-1}\left(t-t_{0j}\right),\tag{56}$$

$$K_\nu \equiv \prod_{i>j}(k_i - \nu_i\nu_j k_j). \tag{57}$$

任意的具有性质$\Delta(A,\ A) = sG$的两地 sG 系统

$$\Delta(A,\ B) = 0,\ B = A(-x,\ \ -t)$$

的 PT 群不变多孤子解具有与 (50) 或 (51) 相同的形式, 但 (56) 中的x_{0j}和t_{0j}都应取为零.

4 NLS 方程多孤子解的新型表达式

对应于非线性薛定谔 (NLS) 方程

$$NLS \equiv \mathrm{i}u_t + u_{xx} + 2\sigma|u|^2u = 0, \quad \sigma = \pm 1, \tag{58}$$

存在散焦 ($\sigma = -1$) 和聚焦 ($\sigma = 1$) 两种完全不同的情况, 需要区别对待. 由于聚焦 NLS 方程的双曲函数表达式过于复杂, 我们不在本文讨论这种形式, 而仅仅处理散焦 NLS 方程的新型孤子解.

散焦 ($\sigma = -1$) NLS 系统 (58) 的多孤子解的 Hirota 形式为[19]

$$u = \sqrt{2}\alpha\exp(-\mathrm{i}\alpha^2 t + \mathrm{i}\phi_0)$$
$$\times\frac{\displaystyle\sum_{\mu}\exp\left(\sum_{j=1}^{N}\mu_j(\xi_j + 2\mathrm{i}\theta_j) + \sum_{j<l}\mu_j\mu_l\theta_{jl}\right)}{\displaystyle\sum_{\mu}\exp\left[\sum_{j=1}^{N}\mu_j\xi_j + \sum_{j<l}\mu_j\mu_l\theta_{jl}\right]}, \tag{59}$$

其中孤子行波变量为

$$\xi_j = \sqrt{2}\alpha\sin(\theta_j)\left(x + \sqrt{2}\alpha\cos(\theta_j)t\right) + \xi_{0j}, \tag{60}$$

相互作用常数为

$$\exp(\theta_{jl}) = \left(\frac{\sin\dfrac{1}{2}(\theta_j - \theta_l)}{\sin\dfrac{1}{2}(\theta_j + \theta_l)}\right)^2, \tag{61}$$

而 $\alpha,\ \xi_{0j},\ \theta_j,\ j = 1,\ 2,\ \dots,\ N$ 和 ϕ_0 为任意常数. (59) 中的关于μ的求和是对所有可能组合$\mu_j = 0,\ 1,\ j = 1,\ 2,\ \dots,\ N$的求和.

类似于 KdV-KP-Toda 型方程的情况, 多孤子解 (59) 可以重新改写成全反演对称形式,

$$u = \sqrt{2}\alpha\exp\left[-\mathrm{i}\alpha^2 t + \mathrm{i}\phi_0'\right]$$
$$\times\frac{\displaystyle\sum_{\nu}K_\nu\cosh\left[\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\nu_j(\eta_j + 2\mathrm{i}\theta_j)\right]}{\displaystyle\sum_{\nu}K_\nu\cosh\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\nu_j\eta_j\right)}, \tag{62}$$

其中关于ν的求和是对所有可能的非对偶组合$\nu_j = 1, -1,\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ N$求和. 表达式 (62) 中的孤子行波变量$\eta_j$及相互作用常数$K_\nu$为

$$\eta_j = \sqrt{2}\alpha\sin(\theta_j)\left[x - x_{0j} + \sqrt{2}\alpha\cos(\theta_j)(t - t_{0j})\right], \tag{63}$$

$$K_\nu = \prod_{l<j}\sin\frac{\theta_j - \nu_j\nu_l\theta_l}{2}, \tag{64}$$

$\theta_j,\ x_{0j},\ t_{0j},\ \alpha$ and ϕ_0'为任意实常数.

由于解 (62) 的全反演 (时空反演, 孤子初始位置和初始位相反演, 电荷共轭反演) 不变性, 任意的具有性质$\Delta(A,\ A) = NLS(\sigma = -1)$的两地 NLS 系统

$$\Delta(A,\ B) = 0,\ B = A^*(-x,\ \ -t)$$

的 PTC (C 为电荷共轭, 即复共轭) 群不变多孤子解具有与 (62) 相同的形式, 但 (63) 中的x_{0j}、t_{0j}和初始位相ϕ_0'都应取为零.

聚焦 NLS 系统多孤子解的 Hirota 形式虽然没有显式的简单的全反演对称形式, 但是这一对称性还是隐含着的[15].

5 AKNS 系统多孤子解的新型表达式

AKNS 系统

$$AKNS \equiv \begin{cases}\mathrm{i}u_t + u_{xx} + 2\sigma u^2 v = 0,\\ -\mathrm{i}v_t + v_{xx} + 2\sigma v^2 u = 0,\end{cases} \quad \sigma = \pm 1, \tag{65}$$

是最重要的数学物理模型之一, 除了著名的局域的 NLS 方程是其最基本的约化 ($v = u^*$) 外, 很多非局域 NLS 方程也是其对称性约化[15,22,23]. AKNS 的严格解已经为很多研究者用很多方法研究过[24,22]. 其多孤子解可以用双朗斯基行列式表示[22]. 为了较为明显地显示多孤子解的全反演对称性, 我们可以将 AKNS 系统 (65) 的双朗斯基行列式解等价地改写成下述范德蒙-朗斯基行列式形式 ($\{u, v\} \to \{u_{M,N}, v_{M,N}\}$):

$$\begin{aligned}
&u_{M,N} = a\frac{\Delta_{M,N+1}}{\Delta_{M,N}},\\
&v_{M,N} = \frac{-\sigma\Delta_{M,N-1}}{a\Delta_{M,N}},\\
&\Delta_{m,n} = \det(\Gamma_{m,n}),\\
&1 \leqslant N \leqslant M - 1,\\
&M \leqslant 1,
\end{aligned} \tag{66}$$

其中 $e_j=(-1)^j\exp[k_j(x-x_{0j})-\mathrm{i}k_j^2(t-t_{0j})]$,

$$\Gamma_{m,n}=\begin{pmatrix}1 & 1 & \dots & 1 & 1\\ k_1 & k_2 & \dots & k_{m-1} & k_m\\ k_1^2 & k_2^2 & \dots & k_{m-1}^2 & k_m^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \dots & k_{m-1}^{n-1} & k_m^{n-1}\\ e_1 & e_2 & \dots & e_{m-1} & e_m\\ k_1e_1 & k_2e_2 & \dots & k_{m-1}e_{m-1} & k_me_m\\ k_1^2e_1 & k_2^2e_2 & \dots & k_{m-1}^2e_{m-1} & k_m^2e_m\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ k_1^{m-n-1}e_1 & k_2^{m-n-1}e_2 & \dots & k_{m-1}^{m-n-1}e_{m-1} & k_m^{m-n-1}e_m\end{pmatrix}. \tag{67}$$

矩阵 (67) 的前 n 行是范德蒙矩阵形式, 后 m 行是朗斯基矩阵形式, 因此我们称解为范德蒙-朗斯基行列式解.

可以证明 AKNS 的范德蒙-朗斯基行列式解 (66) 具有下述全反演变换下的不变性:

时空反演：$\{x,\ t\}\to\{-x,\ -t\}$,

孤子初始位置反演：$\{x_{0j},\ t_{0j}\}\to\{-x_{0j},\ -t_{0j}\}$,

场交换：$u_{M,N}\to(-1)^Ma^2\sigma v_{M,M-N}$. (68)

为了明显看出不变性 (68), 这里我们列出一些小的 M,N 解的具体形式

$$k_{ij}\equiv k_i-k_j,$$
$$E_i\equiv\exp[k_j(x-x_{0j})-\mathrm{i}k_j^2(t-t_{0j})],$$
$$E_{ij}\equiv E_iE_j,$$
$$K_{ijp}=k_{ij}k_{ip}k_{jp},$$
$$K_{ijpq}=k_{ij}k_{ip}k_{iq}k_{jp}k_{iq}k_{pq}$$

$$u_{2,1}=\frac{ak_{12}}{E_1+E_2},\quad v_{2,1}=\frac{\sigma a^{-1}k_{12}}{E_1^{-1}+E_2^{-1}}, \tag{69}$$

$$u_{3,2}=\frac{aK_{123}}{k_{23}E_1+k_{13}E_2+k_{12}E_3},\quad v_{3,2}=\frac{k_{12}E_{12}+k_{13}E_{13}+k_{23}E_{23}}{a\sigma(k_{23}E_1+k_{13}E_2+k_{12}E_3)}, \tag{70}$$

$$v_{3,1}=\frac{-\sigma a^{-1}K_{123}}{k_{23}E_1^{-1}+k_{13}E_2^{-1}+k_{12}E_3^{-1}},\quad u_{3,1}=-\frac{a(k_{12}E_{12}^{-1}+k_{13}E_{13}^{-1}+k_{23}E_{23}^{-1})}{k_{23}E_1^{-1}+k_{13}E_2^{-1}+k_{12}E_3^{-1}}, \tag{71}$$

$$u_{4,3}=\frac{aK_{1234}}{K_{234}E_1+K_{134}E_2+K_{124}E_3+K_{123}E_4},\quad v_{4,3}=\frac{k_{12}k_{34}(E_{12}+E_{34})+k_{13}k_{24}(E_{13}+E_{24})+k_{23}k_{14}(E_{23}+E_{14})}{a\sigma(K_{234}E_1+K_{134}E_2+K_{124}E_3+K_{123}E_4)}, \tag{72}$$

$$v_{4,1}=\frac{\sigma a^{-1}K_{1234}}{K_{234}E_1^{-1}+K_{134}E_2^{-1}+K_{124}E_3^{-1}+K_{123}E_4^{-1}},\quad u_{4,1}=\frac{k_{12}k_{34}(E_{12}^{-1}+E_{34}^{-1})+k_{13}k_{24}(E_{13}^{-1}+E_{24}^{-1})+k_{23}k_{14}(E_{23}^{-1}+E_{14}^{-1})}{a^{-1}(K_{234}E_1^{-1}+K_{134}E_2^{-1}+K_{124}E_3^{-1}+K_{123}E_4^{-1})}, \tag{73}$$

$$u_{4,2}=\frac{-a(K_{234}E_1+K_{134}E_2+K_{124}E_3+K_{123}E_4)}{k_{34}k_{12}(E_{12}+E_{34})+k_{24}k_{13}(E_{13}+E_{24})+k_{23}k_{14}(E_{14}+E_{23})},\quad v_{4,2}=\frac{-a^{-1}\sigma(K_{234}E_1^{-1}+K_{134}E_2^{-1}+K_{124}E_3^{-1}+K_{123}E_4^{-1})}{k_{34}k_{12}(E_{12}^{-1}+E_{34}^{-1})+k_{24}k_{13}(E_{13}^{-1}+E_{24}^{-1})+k_{23}k_{14}(E_{14}^{-1}+E_{23}^{-1})}, \tag{74}$$

解 (69)—(74) 在全反演变换 (68) 下的不变性是显然的.

6 全离散系统多孤子解的新型表达式

前面几节讨论的全反演对称形式的结果也可以在全离散形式下实现. 本文我们仅仅讨论全离散势 KdV 系统 (H_1) 的

$$H_1 \equiv (u-\hat{\tilde{u}})(\tilde{u}-\hat{u})+q-p=0 \tag{75}$$

全反演对称形式. H_1方程 (75) 中,

$$\begin{aligned}&u=u(m,\ n),\\&\tilde{u}=T_1u=u(m+1,\ n),\\&\hat{u}=T_2u=u(m,\ n+1),\\&\hat{\tilde{u}}=T_2T_1u=u(m+1,\ n+1)\end{aligned}$$

$p,\ q$ 为任意常数.

H_1方程的多孤子解可以用 Phaffian 来表示[25]

$$A=an+bm+\gamma-\frac{h}{g} \tag{76}$$

其中 $a=\sqrt{p},\ b=\sqrt{q}$,

$$\begin{cases}g=|\psi,\ T_3\psi,\ T_3^2\psi,\ \ldots,\ T_3^{N-1}\psi|,\\h=|\psi,\ T_3\psi,\ \ldots,\ T_3^{N-2}\psi,\ T_3^N\psi|,\\\psi=\psi(n,\ m,\ l)=(\psi_1,\ \ldots,\ \psi_n)^T,\\T_3\psi=\psi(n,\ m,\ l+1),\\\psi_i=\psi_i(n,\ m,\ l)=\rho_i^+(a+k_i)^n(b+k_i)^mk_i^l\\\qquad+\rho_i^-(a-k_i)^n(b-k_i)^m(-k_i)^l,\end{cases} \tag{77}$$

$\rho_i^{\pm}$和k_i任意常数.

为了看出明显的全反演变换不变性, 我们引入全离散双曲函数,

$$\begin{aligned}\sinh(\xi_i)=&\left(\frac{a+k_i}{a-k_i}\right)^{n-n_{0i}}\left(\frac{b+k_i}{b-k_i}\right)^{m-m_{0i}}\\&-\left(\frac{a+k_i}{a-k_i}\right)^{n_{0i}-n}\left(\frac{b+k_i}{b-k_i}\right)^{m_{0i}-m},\end{aligned} \tag{78}$$

$$\begin{aligned}\cosh(\xi_i)=&\left(\frac{a+k_i}{a-k_i}\right)^{n-n_{0i}}\left(\frac{b+k_i}{b-k_i}\right)^{m-m_{0i}}\\&+\left(\frac{a+k_i}{a-k_i}\right)^{n_{0i}-n}\left(\frac{b+k_i}{b-k_i}\right)^{m_{0i}-m}.\end{aligned} \tag{79}$$

这样定义的双曲函数满足连续双曲函数的加法公式:

$$\begin{aligned}&\sinh(\xi_1+\xi_2)=\sinh(\xi_1)\cosh(\xi_2)+\sinh(\xi_2)\cosh(\xi_1),\\&\cosh(\xi_1+\xi_2)=\cosh(\xi_1)\cosh(\xi_2)+\sinh(\xi_2)\sinh(\xi_1).\end{aligned} \tag{80}$$

可以证明在上述双曲函数定义下, H_1方程 (75) 的多孤子解可以重写为

$$u=an+bm+\gamma-\frac{\displaystyle\sum_\nu K_\nu\sum_{j=1}^N\nu_jk_j\sinh\left(\sum_{i=1}^N\frac{1}{2}\nu_i\xi_i\right)}{\displaystyle\sum_\nu K_\nu\cosh\left(\sum_{i=1}^N\frac{1}{2}\nu_i\xi_i\right)}, \tag{81}$$

其中

$$K_\nu=\prod_{i<j}(\nu_ik_i-\nu_jk_j).$$

显然 (81) 是全反演变换

$$\begin{aligned}&\{m,\ n,\ m_{0j},\ n_{0j},\ \gamma,\ u\}\\\to&\{-m,\ -n,\ -m_{0j},\ -n_{0j},\ -\gamma,\ -u\}\end{aligned}$$

下不变的. 这一不变性很容易用来求解非局域H_1系统的多孤子解.

7 结论和讨论

本文既综述了最近我们在研究非局域系统的 P-T-C 群不变的多孤子解时新发现的很多局域可积系统 (KdV、KP、Toda、MKdV、sG、Boussinesq 和 NLS 系统等等) 的具有全反演对称性的多孤子表达式, 也给出了一些公开发表的文献中尚未出现过的局域可积系统新的全反演对称性的表达式. 如, (2 + 1) 维和 (1 + 1) 维 SK 方程的解 (31), 非对称 NNV 方程的解 (37), 修正 KdV 和 sG 方程多孤子解 (50), AKNS 的范德蒙-朗斯基解 (66), 全离散势 KdV 系统 (H_1系统) 的多孤子解 (81) 都是文献中尚未出现过的新结果.

当前在非线性系统求解方向有一些重要的热门课题, 如各种共振解 (呼吸子、怪波 (瞬子)、团块解 (lump)、帐篷解 (Dromion)、网格解和孤子分子等等) 的寻求和分类及多地非局域系统的求解等等. 多孤子解的不同形式在寻求各种共振孤子时可以体现出不同的优点[28], 初步的研究表明本文提出的新的形式会提供极大的方便甚至给出新的共振激发模式. 在多地非局域系统的求解研究中, 对很多非局域系统, 全反演对称形式的多孤子解会自然地得到这些系统群不变多孤子解, 对于对称性破

缺解的求解也非常有用并可揭示非局域系统的很多新的物理, 如经典禁戒、非线性激发结构改变和相变等等[26,27]. 与本文相关的还有很多没有得到解决的问题, 有的仅仅只是一个开始, 值得在以后的研究中进一步深入和扩展.

感谢李玉奇老师的各种有益讨论, 特别是在 AKNS 系统的范德蒙-朗斯基解表达式中的建设性意见.

参考文献

[1] Russell J S 1837 *Rep. Meet. Brit. Assoc. Adv. Sci.* **7th** 417

[2] Zabusky N J, Kruskal M D 1965 *Phys. Rev. Lett.* **15** 240

[3] Gardner C S, Greene J M, Kruskal M D, Miura R M 1976 *Phys. Rev. Lett.* **19** 1095

[4] Kivshar Y S, Malomed B A 1989 *Rev. Mod. Phys.* **61** 763

[5] Köttig F, Tani T, Travers J C, Russell P St J 2017 *Phys. Rev. Lett.* **118** 263902

[6] Wright L G, Christodoulides D N, Wise F W 2017 *Science* **358** 94

[7] Dudley J M, Dias F, Erkintalo M, Genty G 2014 *Nat. Photonics* **8** 755

[8] Stratmann M, Pagel T, Mitschke F 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 143902

[9] Herink G, Kurtz F, Jalali B, Solli D R, Ropers C 2017 *Science,* **356** 50

[10] Liu X M, Yao X K, Cui Y D 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 023905

[11] Strogatz S 2001 *Nature (London)* **410** 268

[12] Forte S 1992 *Rev. Mod. Phys.* **64** 193

[13] Hertog T, Horowitz G T 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 221301

[14] Drummond P D, Kheruntsyan K V, He H 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 3055

[15] Lou S Y, Huang F 2017 *Sci. Rep.* **7** 869

[16] Hirota R 2004 *The Direct Method in Soliton Theory*, Edited and translated by Nagai A, Nimmo J, Gilson C, *Cambridge TractsinMathematics*No.155 (Cambrifge:CambridgeUniversity Press) pp1–61

[17] Gu C H, Hu H S, Zhou Z X 2005 *Darboux Transformations in Integrable Systems: Theory and their Applications to Geommetry* (Dordrecht, Netherland: Springer) pp1–64

[18] Li Y Q, Chen J C, Chen Y, Lou S Y 2014 *Chin. Phys. Lett.* **31** 010201

[19] Chen D Y 2006 *Introduction on Solitons* (Beijing: China Science Publishing and Media Ltd) pp14—42 (in Chinese) [陈登远 2006 孤子引论 (北京: 科学出版社) pp14—42]

[20] Lou S Y 2018 *J. Math. Phys.* **59** 083507

[21] Hietarinta J 1987 *J. Math. Phys.* **28** 1732; 2094; 2586

[22] Chen K, Deng X, Lou S Y, Zhang D J 2018 *Stud. Appl. Math.* **141** 113

[23] Ablowitz M J, Musslimani Z H 2016 *Nonlinearity* **29** 915

[24] Ablowitz M J, Kaup D J, Newell A C, Segur H 1974 **53** 249

[25] Hietarinta J, Zhang D J 2009 *J. Phys. A: Math. Theor.* **42** 404006

[26] Lou S Y 2019 *Stud. Appl. Math.* **143** 123; 2018 arXiv: 1806.07559[nlin.SI]

[27] Li C C, Lou S Y, Jia M 2018 *Nonl. Dynamics,* **93** 1799

[28] Xu D H, Lou S Y 2020 *Acta Phys. Sin.* **69** 014208 (in Chinese) [徐丹红, 楼森岳 2020 物理学报 **69** 014208]

SPECIAL TOPIC—Nonlinear physics

Full reversal symmetric multiple soliton solutions for integrable systems*

Lou Sen-Yue †

(*School of Physical Science and Technology, Ningbo University, Ningbo* 315211, *China*)

(Received 31 July 2019; revised manuscript received 26 September 2019)

Abstract

Multiple soliton solutions are fundamental excitations. There are many kinds of equivalent representations for multiple soliton solutions such as the Hirota forms, Wronskian and/or double Wronskian expressions and Phaffian representations. Recently, in the studies of multi-place nonlocal systems, we find that there are a type of novel but equivalent simple and elegant forms to describe multiple soliton solutions for various integrable systems. In this paper, we mainly review novel types of expressions of multiple soliton solutions for some kinds of nonlinear integrable systems. Meanwhile, some completely new expressions for the Sawada-Kortera equations, the asymmetric Nizhnik-Novikov-Veselov system, the modified KdV equation, the sine-Gordon equation, the Ablowitz-Kaup-Newell-Segue system and the completely discrete H_1 equation are firstly given in this paper. New expressions usually possess explicit full reversal symmetries including parity, time reversal, soliton initial position reversal and charge conjugate reversal. These kinds of explicitly symmetric forms are very useful and convenient in the studies on the nonlinear physical problems such as the multi-place nonlocal systems and the resonant structures.

Keywords: Integrable systems, multiple soliton solutions, full reversal symmetries, multi-place systems

PACS: 05.45.Yv, 02.30.Ik, 11.30.Er, 11.10.Lm **DOI:** 10.7498/aps.69.20191172

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11975131, 11435005).

† Corresponding author. E-mail: lousenyue@nbu.edu.cn