

高阶Ablowitz-Ladik方程的局域波解 及稳定性分析

闻小永 王昊天

Dynamics of localized wave solutions for a higher-order Ablowitz-Ladik equation

Wen Xiao-Yong Wang Hao-Tian

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 69, 010205 (2020) DOI: 10.7498/aps.69.20191235

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191235>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

高阶拓扑绝缘体和高阶拓扑超导体简介

Higher-order topological insulators and superconductors

物理学报. 2019, 68(22): 226101 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20191101>

三端磁隧道结的稳定性分析

Stability analysis in three-terminal magnetic tunnel junction

物理学报. 2019, 68(20): 207201 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190927>

正三角型三芯光纤中等腰对称平面波的调制不稳定性分析

Modulation instabilities in equilateral three-core optical fibers for isosceles-triangle symmetric continuous waves

物理学报. 2018, 67(5): 054203 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20171650>

高次谐波发射的亚原子尺度研究

Subatomic scale study of atom-generated higher-order harmonic

物理学报. 2019, 68(17): 173202 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190790>

基于场变换的毫米波半波片设计

Millimeter-wave half-waveplate based on field transformation

物理学报. 2018, 67(7): 070201 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20171774>

非线性薛定谔方程的高阶分裂改进光滑粒子动力学算法

Numerical study of nonlinear Schrödinger equation with high-order split-step corrected smoothed particle hydrodynamics method

物理学报. 2019, 68(9): 090203 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190169>

专题：非线性物理

# 高阶 Ablowitz-Ladik 方程的局域波解 及稳定性分析\*

闻小永<sup>†</sup> 王昊天

(北京信息科技大学理学院, 北京 100192)

(2019年8月17日收到; 2019年11月25日收到修改稿)

本文构造了一类高阶 Ablowitz-Ladik 方程的广义  $(M, N - M)$ -波 Darboux 变换, 借助符号计算从不同背景出发研究了该模型丰富的局域波解, 并利用数值模拟研究了这些解的动力学稳定性.

**关键词:** 高阶 Ablowitz-Ladik 方程, 广义  $(M, N - M)$ -波 Darboux 变换, 局域波, 怪波

**PACS:** 02.30.Ik, 02.30.Jr, 05.45.Yv, 04.60.Nc

**DOI:** 10.7498/aps.69.20191235

## 1 引言

1955年, Fermi, Pasta 和 Ulam 领导的科学家小组用数值方法计算了用非线性弹簧联结的 64 个质点组成的谐振子的振动, 其目的是从数值实验上验证统计力学中的能量均分定理, 这在后来被人们称为著名的 FPU 实验<sup>[1]</sup>. 1967年, Toda<sup>[2]</sup>考虑晶体的非线性振动, 提出了著名的 Toda 晶格方程近似模拟这种情况, 并得到了该模型的孤子解, 从而使 FPU 试验问题得到合理的解释和正确解答<sup>[1]</sup>. Toda 晶格方程作为一类可积的半离散的非线性微分差分方程可以描述一些物理学中的非线性波的传播现象, 该方程的提出引起了人们对可积的离散孤子方程研究的热潮. 可积系统中的非线性微分差分方程 (又称离散的孤子方程) 是一类重要的半离散的非线性偏微分方程, 近年来国际上对这类模型的研究有着极大的兴趣, 这些方程与元胞自动机、DNA 的研究、辛算法有密切的关系, 在电学、光学、磁性流体、超导、生物和等离子体中有着广泛的应用, 有十分广阔的应用前景, 目前离散问题的

研究是国际上研究热点之一<sup>[3]</sup>. 日本科学家 Hirota<sup>[4]</sup>指出连续的孤子方程可以被离散化, 并且不久的将来将会是差分方程的时代, 这里所说的差分方程就是离散的孤子方程.

近年来, 孤子方程的局域波解受到了数学家和物理学家的广泛关注, 按传播特性, 局域波主要包括孤子、呼吸子、怪波等<sup>[5-18]</sup>, 广泛存在于非线性光学、玻色斯坦凝聚、等离子物理等各种非线性物理系统<sup>[5-16]</sup>. 孤子又称孤立波, 是一种在传播过程中形状、幅度和速度都维持不变的脉冲状行波, 并且孤子与其他同类孤子相遇后, 能维持其幅度、形状和速度不变<sup>[5,6]</sup>. 呼吸子是一种特殊的局域周期振荡孤子, 按传播方向有空间周期的 Akhmediev 呼吸子和时间周期的 Kuznetsov-Ma 呼吸子<sup>[5,6]</sup>, 从光学和流体力学到玻色-爱因斯坦凝聚体和等离子体等各种物理情况下都能广泛地观察到呼吸子的传播现象, 关于呼吸子碰撞特性的研究最近取得一系列有趣的结果, 包括棋盘干涉时空结构<sup>[7]</sup>, 具有不同传播特征的 super-regular 呼吸子作用现象<sup>[8-11]</sup>等. 怪波最初是用来描述海洋中出现的大振幅波, 突然出现然后又很快消失得无影无踪, 怪

\* 国家自然科学基金 (批准号: 61471406) 和北京信息科技大学“拔尖人才”培育项目 (批准号: QXTCP-B201704) 资助的课题.

<sup>†</sup> 通信作者. E-mail: xiaoyongwen@163.com

波也被称为畸形波,是一种短时间内存在的大振幅的局域波动 [5,6,14–18]. 怪波发生物理机理的研究是怪波研究的重点,调制不稳定性通常被认为是呼吸子和怪波发生的主要机制,并且一些文献认为它可能是形成怪波和呼吸子的必要条件 [10,11]. 目前不同类型的局域波作用解是国际上研究的热点问题,然而大部分问题和方法仅限于连续的孤子方程的局域波及其作用 [5–24]. 例如文献 [5,6] 研究了高维非线性模型的局域波作用解包括呼吸子和怪波以及 Lump 解之间的相互作用解;文献 [14] 研究了非线性光纤中呼吸子和怪波的相互作用现象. 这些局域波作用对于理解新的物理现象具有重要的理论意义. 然而对于离散孤子方程的局域波的研究,由于研究的困难性,据我们所知,研究还不充分,不系统 [25,26], 因此本文将研究离散的非线性微分差分方程丰富的局域波解. 作为例子,研究下面的非线性微分差分方程

$$r_{n,t} = i(1 - \sigma|r_n|^2)[\sigma r_n^*(r_{n-1}^2 + r_{n+1}^2) + \sigma r_n(r_{n-1}r_{n+1}^* + r_{n-1}^*r_{n+1}) - r_{n-2}(1 - \sigma|r_{n-1}|^2) - r_{n+2}(1 - \sigma|r_{n+1}|^2) + 2(r_{n-1} + r_{n+1})], \quad (1)$$

其中  $r_n = r(n, t)$ ,  $r_{n,t} = dr_n/dt$ , 星号 \* 表示共轭,  $i$  是虚数单位,  $\sigma = \pm 1$ , 这里加号和减号分别表示聚焦和散焦情况. 方程 (1) 可以通过 AKNS 方法得到 [3], 这里为节省篇幅不给出具体推导过程. 由于方程 (1) 和 Ablowitz-Ladik 方程 [3,27] (即  $ir_{n,t} = r_{n-1} + r_{n+1} - 2r_n - \sigma|r_n|^2(r_{n-1} + r_{n+1})$ ) 属于同一个梯队, 是这个梯队的第二个方程, 我们称方程 (1) 为高阶的 Ablowitz-Ladik 方程. 正如五阶 KdV 方程可以像 KdV 方程能描述浅水波的运动一样 [3], 我们有理由相信方程 (1) 也可能像它对应的低阶 Ablowitz-Ladik 方程一样可以描述光纤中光孤子的传播, 因此研究方程 (1) 具有重要的理论和物理意义. 虽然对离散的 Ablowitz-Ladik 方程的局域波已经有了一定的研究结果, 特别是应用双线性方法得到了它的怪波 [28–30], 然而对于离散的孤子方程 (1) 还没有系统的方法进行研究, 特别是仍然没有通过我们提出的广义  $(M, N - M)$  波 Darboux 变换进行系统的研究. 因此本文将应用广义  $(M, N - M)$  波 Darboux 变换从研究方程 (1) 的精确解出发, 寻找其新奇的局域波结构, 特别是不同类型的局域波相互作用的新奇局域波结构.

本文的主要结构安排如下: 第二节构造出方程 (1) 的 Lax 对和广义  $(M, N - M)$  波 Darboux 变换; 第三节将应用广义  $(M, N - M)$ -波 Darboux 变换给出方程 (1) 不同类型的局域波解, 并通过数值模拟研究其传播稳定性; 最后是本文的结论.

## 2 Lax 对和广义 $(M, N - M)$ -波 Darboux 变换

由 AKNS 方法 [3], 可以构造方程 (1) 的 Lax 对如下

$$E\varphi_n = U_n\varphi_n, \quad \varphi_{n,t} = V_n\varphi_n, \quad (2)$$

这里

$$U_n = \begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda r_n \\ \sigma \lambda r_n^* & 1 \end{pmatrix}, \quad V_n = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix},$$

其中

$$\begin{aligned} V_{11} &= -\frac{i}{2}\lambda^4 + i(1 + \sigma r_n r_{n-1}^*)\lambda^2 \\ &\quad + \sigma i r_{n+1} r_{n-1}^* (1 - \sigma|r_n|^2) \\ &\quad + i\sigma r_n r_{n-2}^* (1 - \sigma|r_{n-1}|^2) - i r_n^2 r_{n-1}^{*2} \\ &\quad - \frac{i}{2\lambda^4} + \frac{i(1 + \sigma r_{n-1} r_n^*)}{\lambda^2}, \\ V_{12} &= i(\sigma|r_n|^2 r_{n+1}^* + \sigma r_n^2 r_{n-1}^* - r_{n+1} + 2r_n)\lambda \\ &\quad - i r_n \lambda^3 + \frac{i r_{n-1}}{\lambda^3} \\ &\quad + \frac{i(r_{n-2} - \sigma r_{n-1}^2 r_n^* - \sigma r_{n-1} r_{n-1}^* r_{n-2} - 2r_{n-1})}{\lambda}, \\ V_{21} &= i(-\sigma r_{n-2}^* + r_{n-1}^{*2} r_n + |r_{n-1}|^2 r_{n-2}^* \\ &\quad + 2\sigma r_{n-1}^*)\lambda - \sigma i r_{n-1}^* \lambda^3 + \frac{i\sigma r_n^*}{\lambda^3} \\ &\quad + \frac{i(\sigma r_{n+1}^* - r_n^{*2} r_{n-1} - |r_n|^2 r_{n+1}^* - 2\sigma r_n^*)}{\lambda}, \\ V_{22} &= \frac{i}{2}\lambda^4 - i(1 + \sigma r_n r_{n-1}^*)\lambda^2 \\ &\quad - i\sigma r_{n-1} r_{n+1}^* (1 - \sigma|r_n|^2) \\ &\quad - i\sigma r_{n-2} r_n^* (1 - \sigma|r_{n-1}|^2) + i r_n^{*2} r_{n-1}^2 \\ &\quad + \frac{i}{2\lambda^4} - \frac{i(1 + \sigma r_{n-1} r_n^*)}{\lambda^2}, \end{aligned}$$

这里  $\varphi_n = (\phi_n, \psi_n)^T$  表示 Lax 对 (2) 式的解,  $T$  表示转置. 借助符号计算 Maple, 容易验证方程 (2) 的相容性条件  $U_{n,t} = V_{n+1}U_n - U_nV_n$  等价于方

程 (1). 接下来基于 Lax 对 (2) 式, 构造方程 (1) 的广义  $(M, N - M)$ -波 Darboux 变换, 然后通过它构造方程 (1) 的局域波解. 为此考虑下面的规范变换

$$\tilde{\varphi}_n = T_n \varphi_n, \quad (3)$$

其中是  $T_n$  是  $2 \times 2$  的矩阵, 根据 Darboux 变换的知识,  $\tilde{\varphi}_n$  必须满足

$$\tilde{\varphi}_{n+1} = \tilde{U}_n \tilde{\varphi}_n, \quad \tilde{\varphi}_{n,t} = \tilde{V}_n \tilde{\varphi}_n, \quad (4)$$

这里  $\tilde{U}_n, \tilde{V}_n$  和  $U_n, V_n$  有相同的形式, 是将  $U_n, V_n$  的  $r_n$  替换为  $\tilde{r}_n$  得到的. 由 (3) 式和 (4) 式, 可知  $T_n, \tilde{U}_n, \tilde{V}_n, U_n, V_n$  必须满足

$$\begin{aligned} \tilde{U}_n &= T_{n+1} U_n T_n^{-1}, \\ \tilde{V}_n &= (T_{n,t} + T_n V_n) T_n^{-1}, \end{aligned} \quad (5)$$

为此, 我们构造一个特殊的 Darboux 阵如下

$$T_n = \begin{pmatrix} \lambda^{2N} + \sum_{j=1}^N a_n^{(2j-2)} \lambda^{2j-2} & \sum_{j=1}^N b_n^{(2j-1)} \lambda^{2j-1} \\ -\sigma \sum_{j=1}^N b_n^{(2N-2j+1)*} \lambda^{2j-1} & 1 + \sum_{j=1}^N a_n^{(2N-2j)*} \lambda^{2j} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

这里  $N$  是正整数,  $a_n^{(k)}, b_n^{(k)}$  是  $n, t$  的未知函数. 当选择  $N$  个合适的  $\lambda_k (k = 1, 2, \dots, N)$ ,  $a_n^{(k)}, b_n^{(k)}$  可以通过解下面的方程组得到:

$$\Delta_{j,s}^{(i)} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{j-1} C_{2N-2s}^k \lambda_i^{(2N-2s-k)} \phi_i^{(j-1-k)}, & 1 \leq j \leq m_i + 1, 1 \leq s \leq N, \\ \sum_{k=0}^{j-1} C_{4N-2s+1}^k \lambda_i^{(4N-2s+1-k)} \psi_i^{(j-1-k)}, & 1 \leq j \leq m_i + 1, N + 1 \leq s \leq 2N, \\ \sum_{k=0}^{j-(N+1)} C_{2N-2s}^k \lambda_i^{2N-2s-k*} \psi_i^{(j-1-k)*}, & m_i + 2 \leq j \leq 2(m_i + 1), 1 \leq s \leq N, \\ -\sigma \sum_{k=0}^{j-(N+1)} C_{4N-2s+1}^k \lambda_i^{2s-1+k*} \phi_i^{(j-N-1-k)*}, & m_i + 2 \leq j \leq 2(m_i + 1), N + 1 \leq s \leq 2N, \end{cases}$$

$\Delta a_n^{(0)}$  和  $\Delta b_n^{(1)}$  由向量  $(g^{(1)}, g^{(2)}, \dots, g^{(n)})$  替换  $\Delta_N^\epsilon$  中第  $N$  列和  $2N$  列得到, 将  $\Delta a_n^{(0)}$  和  $\Delta b_n^{(1)}$  中的  $n$  替换为  $n + 1$  可以得到  $\Delta a_{n+1}^{(0)}$  和  $\Delta b_{n+1}^{(1)}$ , 这里  $g^{(i)} = (g_j^{(i)})_{2(m_i+1) \times 1}$ , 这里当  $1 \leq j \leq (m_i + 1)$  时,  $g_j^{(i)} = -\sum_{k=0}^{j-1} C_{2N}^k \lambda_i^{2N-k} \phi_i^{(j-1-k)}$ , 当  $m_i + 2 \leq j \leq 2(m_i + 1)$  时,  $g_j^{(i)} = -\psi_i^{(j-N-1)*}$ .

这里需要说明的是: 对于定理 1, (3) 式和 (8) 式 (即  $(r_n, \varphi_n) \rightarrow (\tilde{r}_n, \tilde{\varphi}_n)$ ) 称为方程 (1) 的广义  $(M, N - M)$ -波 Darboux 变换, 这里  $M$  表示使用

$$\begin{cases} T_n^{(0)}(\lambda_i) \varphi_n^{(0)}(\lambda_i) = 0, \\ T_n^{(0)}(\lambda_i) \varphi_n^{(1)}(\lambda_i) + T_n^{(1)}(\lambda_i) \varphi_n^{(0)}(\lambda_i) = 0, \\ \dots, \\ \sum_{j=0}^{m_i} T_n^{(j)}(\lambda_i) \varphi_n^{(m_i-j)}(\lambda_i) = 0, \end{cases} \quad (7)$$

这里  $N = M + \sum_{i=1}^M m_i$ , 其中  $1 \leq M \leq N$  是正整数.

通过上面的分析并根据文献 [7-10] 中的步骤, 若  $\varphi(\lambda_k) = (\phi(\lambda_k), \psi(\lambda_k))^T, (k = 1, 2, \dots, M)$  是 Lax 对的  $M$  个解, 且  $r_n$  是方程 (1) 的种子解, 则可以得到关于方程 (1) 如下的广义  $(M, N - M)$ -波 Darboux 变换定理:

**定理 1** 当方程 (1) 的新解  $\tilde{r}_n$  和旧解  $r_n$  的变换如下

$$\tilde{r}_n = b_{n+1}^{(1)} + r_n a_{n+1}^{(0)}, \quad (8)$$

则由 (4) 式确定的矩阵  $\tilde{U}_n, \tilde{V}_n$  和  $U_n, V_n$  具有相同的形式. 这里在 (8) 式中  $a_n^{(0)} = \Delta a_n^{(0)} / \Delta_N^\epsilon, b_n^{(1)} = \Delta b_n^{(1)} / \Delta_N^\epsilon,$

$$\Delta_N^\epsilon = \det([\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \dots, \Delta^{(n)}]^T),$$

$$\Delta^{(i)} = (\Delta_{j,s}^{(i)})_{2(m_i+1) \times 2N},$$

其中

$$\begin{cases} 1 \leq j \leq m_i + 1, 1 \leq s \leq N, \\ 1 \leq j \leq m_i + 1, N + 1 \leq s \leq 2N, \\ m_i + 2 \leq j \leq 2(m_i + 1), 1 \leq s \leq N, \\ m_i + 2 \leq j \leq 2(m_i + 1), N + 1 \leq s \leq 2N, \end{cases}$$

谱参数的个数,  $N - M$  表示 Darboux 阵中使用泰勒展开式最高阶导数的和. 当  $M = N, m_i = 0 (i = 1, 2, \dots, M)$ , 通常的  $N$ -波 Darboux 变换就是定理 1 的特殊情况, 可以从零种子解 (平面波种子解) 求得方程 (1) 的多孤子解 (多呼吸子解); 当  $M = 1, m_1 = N - 1$ , 定理 1 就约化为  $(1, N - 1)$ -波 Darboux 变换, 可以从平面波种子解求得方程 (1) 的怪波解; 当  $M = 2, m_2 = N - 2$ , 定理 1 就约化为  $(2, N - 2)$ -波 Darboux 变换, 可以从平面波种子解求得方程 (1) 的怪波与呼吸子的混合作用解; 当

$M$ 取3到 $N-1$ 之间的整数时,可以得到更丰富的局域波作用解.

### 3 方程 (1) 的局域波解及其动力学稳定性

在这一节将讨论如何应用定理 1 中的  $(M, N-M)$ -波 Darboux 变换得到方程 (1) 丰富的

局域波解. 下面考虑两类种子解情形下的 Lax 对的解.

**情形 1** 把种子解  $r_n = 0$  代入 (2) 式中得到 Lax 对的解为  $\varphi_n = (\phi_n, \psi_n)^T = (\lambda^{2n} e^\xi, e^{-\xi})^T$ , 这里  $\xi = \left(-\frac{i\lambda^4}{2} + i\lambda^2 - \frac{i}{2\lambda^4} + \frac{i}{\lambda^2}\right)t$ .

**情形 2** 把种子解  $r_n = ce^{i(c^2+1)(-6c^2+2)t}$  代入 (2) 中得到 Lax 对的解为

$$\varphi_n = \begin{pmatrix} \phi_n \\ \psi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \tau_+^n e^{\rho_+ t + \delta(\varepsilon)} + C_2 \tau_-^n e^{\rho_- t - \delta(\varepsilon)} \\ \frac{e^{2i(c^2+1)(3c^2-1)t}}{c} [C_1(-\lambda^2 + \tau_+^n) \tau_+^n e^{\rho_+ t + \delta(\varepsilon)} + C_2(-\lambda^2 + \tau_-^n) \tau_-^n e^{\rho_- t - \delta(\varepsilon)}] \end{pmatrix},$$

其中

$$\begin{aligned} \tau_\pm &= \frac{\lambda^2}{2} + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^4 - 4\lambda^4 c^2 - 2\lambda^2 + 1}, \\ \rho_\pm &= -\frac{i(c^2+1)(6c^2-2)\lambda^4 \pm i(\lambda^2-1)(2\lambda^2 c^2 + \lambda^4 + 1)\sqrt{\lambda^4 - 4\lambda^2 c^2 - 2\lambda^2 + 1}}{2\lambda^4}, \\ \delta(\varepsilon) &= \sqrt{-4\lambda^2 c^2 + \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1} \sum_{\omega=0}^N (e_\omega + i d_\omega) \varepsilon^{2k}, \end{aligned}$$

这里  $e_\omega, d_\omega$  是任意的实常数. 为了得到怪波解, 需要对情形 2 的解进行泰勒展开, 为此令  $\lambda = -c + \sqrt{1+c^2} + \varepsilon^2, C_1 = -C_2 = 1/\varepsilon, c = 3/4$ , 在  $\varepsilon = 0$  处对情形 2 的解进行泰勒展开, 有  $\varphi(\varepsilon^2) = \sum_{\omega=0}^{\infty} \varphi^{(\omega)} \varepsilon^{(2k)} = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} \varepsilon^2 + \varphi^{(2)} \varepsilon^4 + \dots$ , 这里略去  $\varphi^{(i)} (i \geq 1)$  的展开式, 仅列出  $\varphi^{(0)} = (\phi^{(0)}, \psi^{(0)})^T$ , 这里  $\phi^{(0)} = \frac{\sqrt{15}}{80} \left(\frac{5}{8}\right)^n (64in - 645t) e^{-\frac{275i}{256}t}, \psi^{(0)} = \frac{\sqrt{15}}{240} \left(\frac{5}{8}\right)^n (192in + 320i - 1935t) e^{\frac{275i}{256}t}$ . 下面将讨论三种特殊情况的 Darboux 变换得到不同的局域波解.

#### 3.1 应用 $N$ -波 Darboux 变换得到多孤子和多呼吸子解

根据定理 1, 当  $M = N$ , 广义  $(M, N-M)$ -波 Darboux 变换可以约化为通常的  $N$ -波 Darboux 变换, 当  $N = 1$ , 使用情形 1 中 Lax 对的解, 一孤子解  $\tilde{r}_n = b_{n+1}^{(1)}$  可以整理为

$$\tilde{r}_n = -\frac{\lambda_1 (|\lambda_1|^4 - 1) e^{\eta_1 - \eta_1^*}}{2\lambda_1^{*2} |\lambda_1|} \operatorname{sech}(\eta_1 + \eta_1^* + \ln |\lambda_1|), \quad (9)$$

这里  $\eta_1 = n \ln \lambda_1 + \left(-\frac{i\lambda_1^4}{2} + i\lambda_1^2 - \frac{i}{2\lambda_1^4} + \frac{i}{\lambda_1^2}\right)t$ . 关

于一孤子解 (9) 式, 我们能计算出一些重要物理量: 振幅为  $\left|\frac{(|\lambda_1|^4 - 1)}{2|\lambda_1|^2}\right|$ , 波数为  $2 \ln |\lambda_1|$ , 波宽为  $\frac{1}{2 \ln |\lambda_1|}$ , 速度为

$$i \left( -\frac{\lambda_1^4}{2} + \lambda_1^2 - \frac{1}{2\lambda_1^4} + \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{\lambda_1^{*4}}{2} - \lambda_1^{*2} + \frac{1}{2\lambda_1^{*4}} - \frac{1}{\lambda_1^{*2}} \right) \frac{1}{2 \ln |\lambda_1|},$$

能量为  $\frac{(|\lambda_1|^4 - 1)^2}{4|\lambda_1|^6 |\ln |\lambda_1||}$ , 初相为  $\ln |\lambda_1|$ . 当参数  $\lambda_1 = -1 + 2i$  时, 图 1(a1) 显示了一孤子解 (9) 式的钟型亮孤子结构; 下面进一步通过向前差分格式<sup>[31]</sup> 研究一孤子解 (9) 式的动力学传播稳定性, 图 1(b1) 显示了一孤子精确解 (9) 式作为初值时的数值演化, 从图像上看, 数值解几乎重现了精确解, 这也说明 (9) 式的精确解和数值算法的正确性; 图 1(c1) 显示了加入了 2% 小噪声时一孤子解的数值演化, 可以看出小噪声在较短的时间内对一孤子的稳定传播影响很小. 这里需要说明的是, 在下面的图像中左边第 1 列表示精确解, 中间第 2 列表示没有加入噪声的数值解, 右边第 3 列表示加入 2% 小噪声的数值解.

当  $N = 2$ , 由定理 1 中 (8) 式, 我们能够得到二孤子解, 这里为节省篇幅, 不列出具体的表达式,

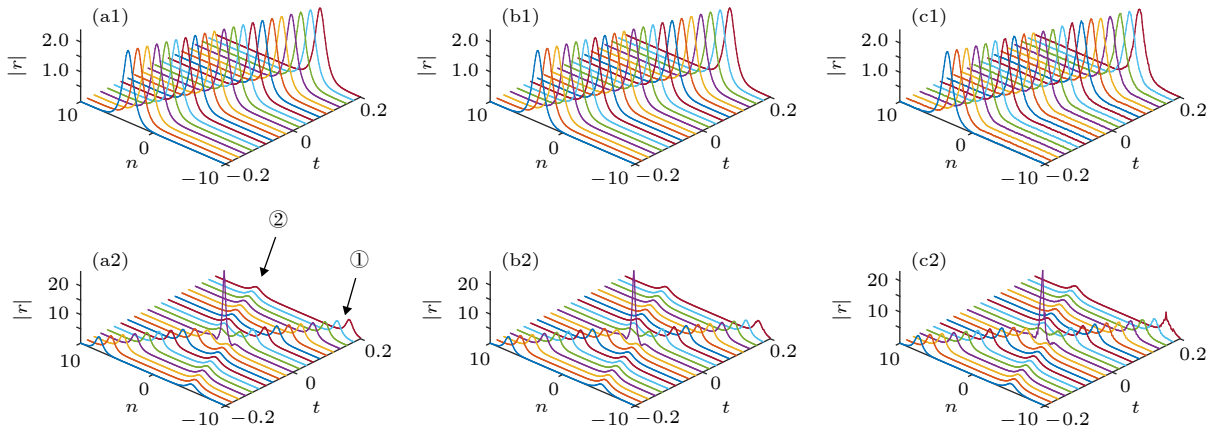


图 1 (a1)–(c1) 取参数  $\lambda_1 = -1 + 2i$  时的一孤子解; (a2)–(c2) 取参数  $\lambda_1 = 3 + i, \lambda_2 = 1 + 2i$  时的二孤子解. 左列: 精确解; 中列: 数值解; 右列: 加 2% 小噪声的数值解. 圈中的数字 1 和 2 分别表示参数  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  对应的孤子  
 Fig. 1. (a1)–(c1) One-soliton solution with parameter  $\lambda_1 = -1 + 2i$ ; (a2)–(c2) two-soliton solution with parameters  $\lambda_1 = 3 + i, \lambda_2 = 1 + 2i$ . Left column: Exact solutions; Middle column: Numerical solutions without noise; Right column: Numerical solutions with 2% small noise.

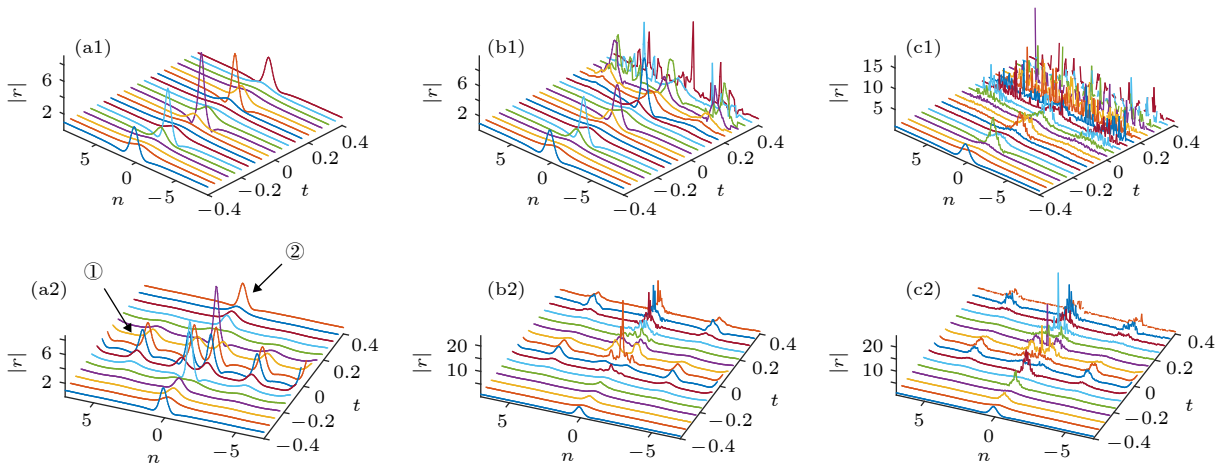


图 2 (a1)–(c1) 取参数  $\lambda_1 = 11/4$  时的一呼吸子解; (a2)–(c2) 取参数  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$  时的二呼吸子解. 左列: 精确解; 中列: 数值解; 右列: 加 2% 小噪声的数值解. 圈中的数字 1 和 2 分别表示参数  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  对应的呼吸子  
 Fig. 2. (a1)–(c1) One-breather solution with parameter  $\lambda_1 = 11/4$ ; (a2)–(c2) two-breather solution with parameters  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$ . Left column: Exact solutions; Middle column: Numerical solutions without noise; Right column: Numerical solutions with 2% small noise.

通过渐近分析, 可以知道二孤子之间的碰撞是弹性作用. 图 1(a2) 显示了二孤子的弹性作用结构, 两孤子在碰撞前后, 形状振幅速度没有发生改变. 图 1(b2) 显示了二孤子没有加入噪声时的数值演化, 图 1(c2) 显示了二孤子加入 2% 小噪声时的数值演化. 类似于一孤子, 在较短的时间内小噪声对二孤子的碰撞作用影响很小.

下面利用  $N$ -波 Darboux 变换和情形 2 时的 Lax 对的解研究方程 (1) 的呼吸子解. 这里取参数  $C_1 = -C_2 = c = 1, \delta(\varepsilon) = 0$ . 当  $N = 1, 2$ , 由 (8) 式可以得到一呼吸子和二呼吸子解. 图 2(a1)–图 2(c1)

和图 (a2)–图 2(c2) 分别显示了一和二呼吸子的精确解、数值解以及加 2% 小噪声的数值解. 在较短的时间内, 一、二呼吸子都有较好的数值稳定性, 随着时间的增加, 不论是否有噪声, 数值演化都显示出较大的振动, 表现出不稳定.

### 3.2 应用 (1, $N-1$ )-波 Darboux 变换得到怪波解

根据定理 1, 当  $M = 1$  时, 我们仅使用一个谱参数, 利用 (1,  $N-1$ )-波 Darboux 变换和情形 2 时 Lax 对的解结合泰勒展开式可以得到方程 (1)

的怪波解. 这里取参数  $C_1 = -C_2 = 1/\varepsilon$ ,  $c = 3/4$ , 当  $N = 1, 2$ , 由 (8) 式可以得到一阶和二阶怪波解.

当  $N = 1$  时, 由 (1, 0)-波 Darboux 变换可以得到一阶怪波解  $\tilde{r}_n = b_{n+1}^{(1)} + r_n a_{n+1}^{(0)}$ , 通过整理为

$$\tilde{r}_n = \frac{3715200it + 110592n^2 + 11232675t^2 + 294912n - 61440}{16384(3n + 4)^2 + 14976900t^2 + 65536} e^{-\frac{275i}{128}t}, \quad (10)$$

该解是非奇性的, 并且在时间和空间上都是局部的. 图 3(a1)—图 3(c1) 显示了一阶怪波 (10) 式的精确解、数值解以及加 2% 小噪声的数值解. 在较短的时间内, 一阶怪波解具有较好的数值稳定性.

由定理 1 中 (8) 式, 当  $N = 2$  时, 由 (1, 1)-波 Darboux 变换可以得到二阶怪波解, 这里为节省篇幅, 不列出具体表达式. 图 3(a2)—图 3(c2) 和图 3(a3)—图 3(c3) 分别显示了具有强作用和弱作用的二阶怪波解的精确解、数值解以及加 2% 小噪声的数值解. 在较短的时间内, 二阶怪波具有较好的数值稳定性. 随着时间的增加, 不论是否有噪声, 数值演化都表现出较强的振动和不稳定.

### 3.3 应用 (2, N-2)-波 Darboux 变换得到怪波与呼吸子的混合作用解

根据定理 1, 当  $M = 2$  时, 我们将使用两个谱参数, 利用 (2, N-2)-波 Darboux 变换和情形 2 时 Lax 对的解结合泰勒展开式, 可以得到方程 (1)

的怪波与呼吸子的混合作用解. 由 (8) 式, 当  $N = 2$  时, 需要说明的是, 对于两个谱参数, 一个谱参数使用情形 2 时 Lax 对的解结合泰勒展开式, 参数选取与 3.2 小节中求怪波参数相同, 对另一个谱参数仍使用情形 2 时 Lax 对的解但不使用泰勒展开, 参数  $C_1 = -C_2 = 1, c = 3/4, \delta(\varepsilon) = 0$ . 由 (2, 0)-波 Darboux 变换可以得到一阶怪波和一呼吸子的混合作用解, 这里不列出具体表达式. 如果在泰勒展开式中对变量  $n$  做一定的平移变换, 就可以控制怪波的位置. 图 4(a1)—图 4(c1) 和图 4(a2)—图 4(c2) 分别显示了一阶怪波和一呼吸子的强作用和弱作用情况下的精确解、数值解以及加 2% 小噪声的数值解. 两行图的区别是弱作用时, 对怪波沿  $n$  轴正半轴平移了 10 个单位, 实现了怪波和呼吸子的分离. 数值模拟显示了这些混合解的正确性, 在较短时间内, 不论是否有噪声, 混合作用解均具有较好的数值稳定性.

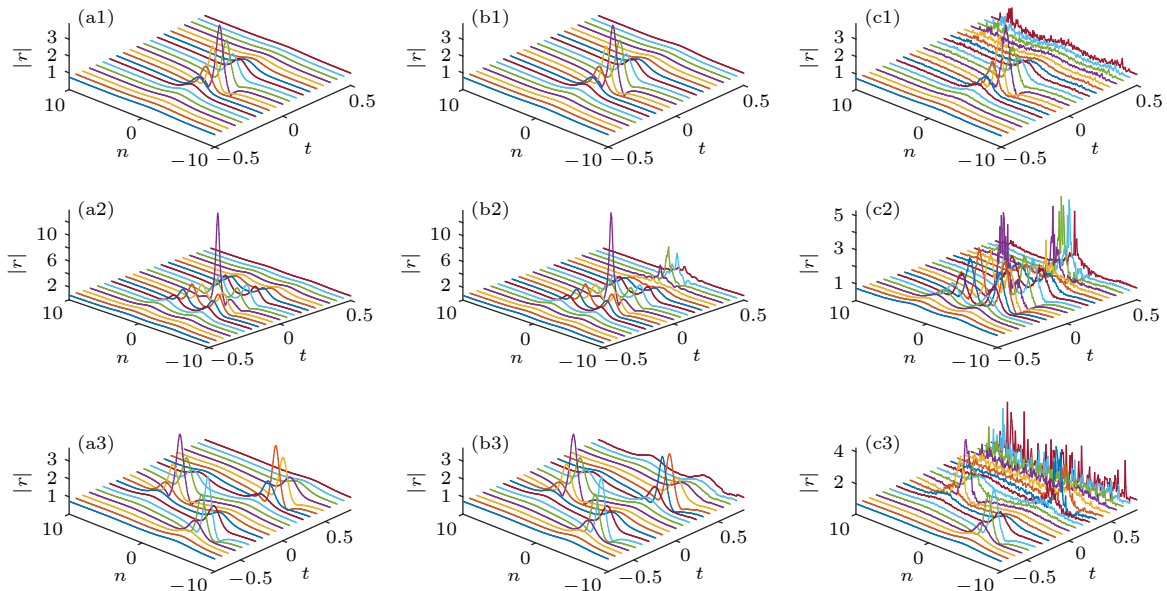


图 3 (a1)—(c1) 一阶怪波解; (a2)—(c2) 取参数  $e_1 = d_1 = 0$  时具有强作用的二阶怪波解; (a3)—(c3) 取参数  $e_1 = 100, d_1 = 0$  时具有弱作用的二阶怪波解. 左列: 精确解; 中列: 数值解; 右列: 加 2% 小噪声的数值解

Fig. 3. (a1)—(c1) First-order rogue wave solution; (a2)—(c2) strong interaction second-order rogue wave solution with  $e_1 = d_1 = 0$ ; (a3)—(c3) weak interaction second-order rogue wave solution with  $e_1 = 100, d_1 = 0$ . Left column: Exact solutions; Middle column: Numerical solutions without noise; Right column: Numerical solutions with 2% small noise.

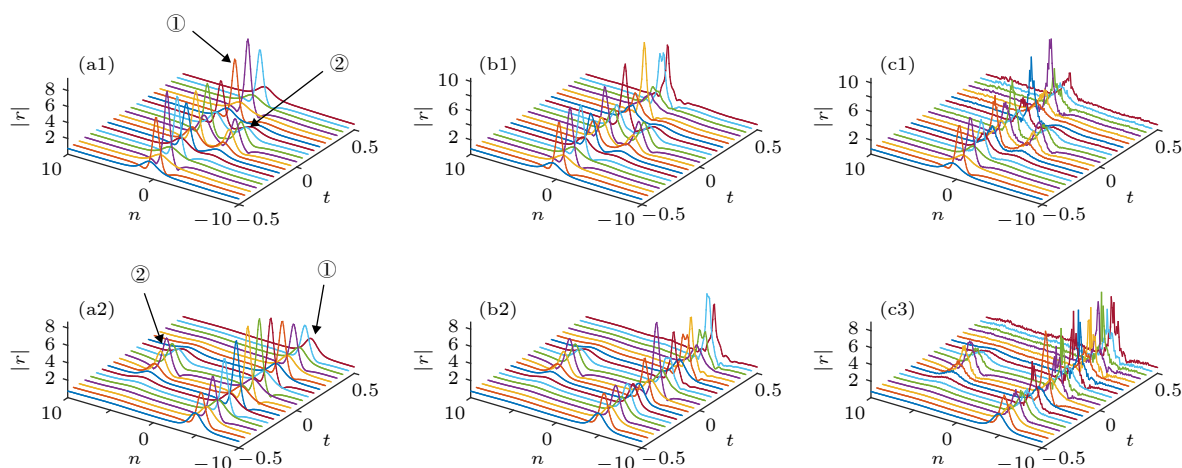


图 4 (a1)–(c1) 一呼吸子和一阶怪波的混合强作用; (a2)–(c2) 一呼吸子和一阶怪波的混合弱作用. 左列: 精确解; 中列: 数值解; 右列: 加 2% 小噪声的数值解. 圈中的数字 1 表示呼吸子, 数字 2 表示怪波

Fig. 4. (a1)–(c1) Mixed strong interaction between one-breather and first-order rogue wave; (a2)–(c2) mixed weak interaction between one-breather and first-order rogue wave. Left column: Exact solutions; Middle column: Numerical solutions without noise; Right column: Numerical solutions with 2% small noise.

## 4 结 论

本文构造了高阶 Ablowitz-Ladik 方程的广义  $(M, N - M)$ -波 Darboux 变换, 借助符号计算和数值计算, 通过不同特殊情形的 Darboux 变换, 得到了该模型多孤子解、多呼吸子解、高阶怪波解以及怪波与呼吸子的相互作用解, 并且应用数值模拟研究了它们的稳定性. 需要说明的是当  $3 \leq M \leq N - 1$ , 利用广义  $(M, N - M)$ -波 Darboux 变换, 也可以得到更丰富的局域波作用结构, 本文不做讨论. 本文给出的广义  $(M, N - M)$ -波 Darboux 变换方法为研究 Lax 可积模型丰富的局域波提供了很好的解决思路, 得到的结果更为全面, 比通常的 Darboux 变换更具有普遍性, 关于方程 (1) 的局域波结构的研究丰富了非线性微分方程的已知结果, 将为实际应用提供可靠的理论支持, 希望本文得到的结果为解释实际的物理现象提供理论依据.

感谢北京信息科技大学理学院孤子与可积系统讨论班成员的讨论.

## 参考文献

[1] You F C 2008 *Ph. D. Dissertation* (Shanghai: Shanghai University) (in Chinese) [尤福财 2008 博士学位论文 (上海: 上海大学)]  
 [2] Toda M 1967 *J. Phys. Soc. Jpn.* **23** 501

[3] Li Y S 1999 *Soliton and Integrable System* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) p25 (in Chinese) [李翊神 1999 孤子与可积系统 (上海: 上海科技教育出版社) 第25页]  
 [4] Hirota R (translated by Wang H Y, Li C X, Zhao J X, Yu G F) 2004 *The Direct Method in Soliton Theory* (New York: Cambridge University Press) p59 (in Chinese) [広田良吾 著 (王红艳, 李春霞, 赵俊霄, 虞国富 译) 2004 孤子理论中的直接方法 (北京: 清华大学出版社) 第59页]  
 [5] Yue Y F, Huang L L, Chen Y 2018 *Comput. Math. Appl.* **75** 2538  
 [6] Huang L L, Yue Y F, Chen Y 2018 *Comput. Math. Appl.* **74** 831  
 [7] Liu C, Yang Z Y, Yang W L, Akhmediev N 2019 *J. Opt. Soc. Am. B* **36** 1294  
 [8] Ren Y, Wang X, Liu C, Yang Z Y, Yang W L 2018 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **63** 161  
 [9] Liu C, Ren Y, Yang Z Y, Yang W L 2017 *Chaos* **27** 083120  
 [10] Liu C, Yang Z Y, Yang W L 2017 *Chaos* **28** 083110  
 [11] Ren Y, Liu C, Yang Z Y, Yang W L 2018 *Phys. Rev. E* **98** 062223  
 [12] Li H, Lou S Y 2019 *Chin. Phys. Lett.* **36** 050501  
 [13] Zhao L C, Yang Z Y, Yang W L 2019 *Chin. Phys. B* **28** 010501  
 [14] Liu X S, Zhao L C, Duan L, Peng G, Yang Z Y, Yang W L 2018 *Chin. Phys. Lett.* **35** 020501  
 [15] Li S Q, Yang G Y, Li L 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 104215 (in Chinese) [李淑青, 杨光晔, 李禄 2014 物理学报 **63** 104215]  
 [16] Sun J C, Zhang Z G, Dong H H, Yang H W 2014 *Acta Phys. Sin.* **21** 210201 (in Chinese) [孙俊超, 张宗国, 董焕河, 杨红卫 2014 物理学报 **21** 210201]  
 [17] Wen X Y, Yan Z Y 2015 *Chaos* **25** 123115  
 [18] Wen X Y, Yang Y Q, Yan Z Y 2015 *Phys. Rev. E* **92** 012917  
 [19] Wen X Y, Yan Z Y, Yang Y Q 2016 *Chaos* **26** 063123  
 [20] Wen X Y, Yan Z Y 2017 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **43** 311  
 [21] Wang H T, Wen X Y, Wang D S 2019 *Wave Motion* **91** 102396  
 [22] Huang L L, Qiao Z J, Chen Y 2018 *Chin. Phys. B* **27** 020201  
 [23] Zhang G, Yan Z Y, Wen X Y, Chen Y 2017 *Phys. Rev. E* **95**



042201

- [24] Zhang G, Yan Z Y, Wen X Y 2018 *Physica D* **366** 27
- [25] Yang J, Zhu Z N 2018 *Chin. Phys. Lett.* **35** 090201
- [26] Wen X Y, Yan Z, Malomed B A 2016 *Chaos* **26** 123110
- [27] Ablowitz M J, Clarkson P A 1991 *Soliton, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering* (New York: Cambridge University Press) p55
- [28] Ankiewicz A, Akhmediev N, Soto-Crespo J M 2010 *Phys. Rev. E* **82** 026602
- [29] Ankiewicz A, Akhmediev N, Lederer F 2011 *Phys. Rev. E* **83** 056602
- [30] Ohta Y, Yang J 2014 *J. Phys. A: Math. Theor.* **47** 255201
- [31] Lee L, Lyng G, Vankova I 2012 *Physica D* **241** 1767

SPECIAL TOPIC—Nonlinear physics

## Dynamics of localized wave solutions for a higher-order Ablowitz-Ladik equation\*

Wen Xiao-Yong<sup>†</sup> Wang Hao-Tian

(School of Applied Science, Beijing Information Science and Technology University, Beijing 100192, China)

( Received 17 August 2019; revised manuscript received 25 November 2019 )

### Abstract

It is an important research topic to study diverse local wave interaction phenomena in nonlinear evolution equations, especially for the semi-discrete nonlinear lattice equations, there is little work on their diverse local wave interaction solutions due to the complexity and difficulty of research. In this paper, a semi-discrete higher-order Ablowitz-Ladik equation is investigated via the generalized  $(M, N - M)$ -fold Darboux transformation. With the aid of symbolic computation, diverse types of localized wave solutions are obtained starting from constant and plane wave seed background. Particularly, for the case  $M = N$ , the generalized  $(M, N - M)$ -fold Darboux transformation may reduce to the  $N$ -fold Darboux transformation which can be used to derive multi-soliton solutions from constant seed background and breather solutions from plane wave seed background, respectively. For the case  $M = 1$ , the generalized  $(M, N - M)$ -fold Darboux transformation reduce to the generalized  $(1, N - 1)$ -fold one which can be used to obtain rogue wave solutions from plane wave seed background. For the case  $M = 2$ , the generalized  $(M, N - M)$ -fold Darboux transformation reduce to the generalized  $(2, N - 2)$ -fold one which can be used to give mixed interaction solutions of one-breather and first-order rogue wave from plane wave seed background. To study the propagation characteristics of such localized waves, the numerical simulations are used to explore the dynamical stability of such obtained solutions. Results obtained in the present work may be used to explain related physical phenomena in nonlinear optics and relevant fields.

**Keywords:** higher-order Ablowitz-Ladik equation, generalized  $(M, N - M)$ -fold Darboux transformation, localized wave, rogue wave

**PACS:** 02.30.Ik, 02.30.Jr, 05.45.Yv, 04.60.Nc

**DOI:** 10.7498/aps.69.20191235

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61471406) and Qin Xin Talents Cultivation Program of Beijing Information Science and Technology University, China (Grant No. QXTCP-B201704).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [xiaoyongwen@163.com](mailto:xiaoyongwen@163.com)