

## 自旋轨道耦合量子气体中的一些新进展

施婷婷 汪六九 王璟琨 张威

### Some recent progresses on the study of ultracold quantum gases with spin-orbit coupling

Shi Ting-Ting Wang Liu-Jiu Wang Jing-Kun Zhang Wei

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 69, 016701 (2020) DOI: 10.7498/aps.69.20191241

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191241>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

一维谐振子束缚的自旋轨道耦合玻色气体

One-dimensional spin-orbit coupling Bose gases with harmonic trapping

物理学报. 2019, 68(17): 173201 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190143>

Rashba自旋轨道耦合下square-octagon晶格的拓扑相变

Topological phase transitions in square-octagon lattice with Rashba spin-orbit coupling

物理学报. 2018, 67(23): 237101 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180624>

自旋轨道耦合系统中的整数量子霍尔效应

Integer quantum Hall effect in a spin-orbital coupling system

物理学报. 2019, 68(11): 117101 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190037>

梯度磁场中自旋-轨道耦合旋转两分量玻色-爱因斯坦凝聚体的基态研究

Ground state of spin-orbit coupled rotating two-component Bose-Einstein condensate in gradient magnetic field

物理学报. 2018, 67(11): 110302 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180539>

自旋轨道矩调控的垂直磁各向异性四态存储器结构

Demonstration of four-state memory structure with perpendicular magnetic anisotropy by spin-orbit torque

物理学报. 2018, 67(11): 117501 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180216>

线性塞曼劈裂对自旋-轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体中亮孤子动力学的影响

Effects of linear Zeeman splitting on the dynamics of bright solitons in spin-orbit coupled Bose-Einstein condensates

物理学报. 2019, 68(8): 080301 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20182013>

## 自旋轨道耦合量子气体中的一些新进展\*

施婷婷<sup>1)</sup> 汪六九<sup>1)2)</sup> 王璟琨<sup>1)2)†</sup> 张威<sup>1)2)‡</sup>

1) (中国人民大学物理学系, 北京 100872)

2) (中国人民大学, 光电功能材料与微纳器件北京市重点实验室, 北京 100872)

(2019年8月19日收到; 2019年11月26日收到修改稿)

随着人造规范势和自旋轨道耦合在冷原子体系中的实现, 对这类效应的研究成为了冷原子物理研究的热门方向之一. 冷原子系统具有丰富的可操控性, 因此不仅可以作为优秀的量子模拟平台来研究其他领域中有意义的模型和问题, 还基于体系自身的特点衍生出了一系列新颖的问题和方向. 本文将以综述的形式介绍具有自旋轨道耦合的超冷原子系统中的一些新研究进展, 重点关注该体系中特有的物理要素, 如耗散、新颖的相互作用形式、大自旋和长程相互作用对系统性质的影响. 这些研究进展可以为理解自旋轨道耦合效应提供新的启示和思路.

**关键词:** 自旋轨道耦合, 超辐射, 拓扑态, 超固体, 大自旋体系

**PACS:** 67.85.-d, 03.75.Ss, 05.30.Fk, 67.85.Hj

**DOI:** 10.7498/aps.69.20191241

## 1 引言

自旋轨道耦合 (spin-orbit coupling, SOC) 是指一个物体的自旋角动量和轨道角动量之间的耦合. 在经典物理中, 一个熟悉的例子是月球的自转和绕地球的公转通过潮汐力相互耦合, 最终锁定为相同的运动周期. 在原子物理中, 电子的自旋角动量和绕原子核的轨道角动量发生耦合, 形成原子的精细结构劈裂. 自旋轨道耦合的定义还可以进一步推广为一个物理系统的内部自由度和外部自由度之间的耦合. 例如在凝聚态物理中, 电子自旋和 Bloch 波矢之间的关联也被称为自旋轨道耦合. 不同类型、不同强度的 SOC 不仅会显著影响材料中电子的运动, 还能够改变系统的拓扑性质<sup>[1-6]</sup>.

近年来, 利用原子与光之间的相互作用, 人们在冷原子系统中实现了人造的 SOC 效应. 在这类

实验中, 原子通过吸收和放出光子, 从一个内态跃迁到另一个内态, 同时经过与光子的反冲获得动量的改变. 经过这一过程, 原子的内部自由度和平动的外部自由度形成了耦合. 2011年, NIST 的 Lin 等<sup>[7]</sup> 首先通过双光子 Raman 过程在 <sup>87</sup>Rb 原子玻色-爱因斯坦凝聚 (Bose-Einstein condensate, BEC) 中实现了一维的 SOC. 2012年, 山西大学 Wang 等<sup>[8]</sup> 和 MIT 的 Cheuk 等<sup>[9]</sup> 分别在 <sup>40</sup>K 和 <sup>6</sup>Li 简并费米气体中实现了一维 SOC. 2016年, 山西大学 Huang 等<sup>[10]</sup> 通过一个改进的 tripod 打光方案, 在 <sup>40</sup>K 费米气体中实现了二维的 SOC, 即原子的自旋算符和二维动量之间的耦合. 同年, 中国科学技术大学 Wu 等<sup>[11]</sup> 通过二维光晶格驱动 Raman 过程, 在 <sup>87</sup>Rb 原子 BEC 中也实现了二维 SOC. 最近, 台湾中研院 Chen 等<sup>[12]</sup> 和中国科学院武汉物理与数学研究所 Zhang 等<sup>[13]</sup> 先后实现了 <sup>87</sup>Rb 原子内态和轨道角动量的耦合 (spin-orbital-angular-momentum coupling).

\* 国家重点研发计划 (批准号: 2018YFA0306501)、国家自然科学基金 (批准号: 11434011, 11522436, 11774425) 和中国人民大学科研基金 (批准号: 16XNLQ03, 18XNLQ15) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: jkwang@ruc.edu.cn

‡ 通信作者. E-mail: wzhangl@ruc.edu.cn



张威, 中国人民大学物理系教授, 博士生导师, 中国人民大学教务处副处长. 主要从事原子分子物理和量子信息领域的理论研究, 在国际期刊发表学术论文 60 余篇, 出版英文教材和专著 3 部, 翻译出版多部科普作品. 先后入选教育部新世纪优秀人才、北京市科技新星、国家自然科学基金委优秀青年科学基金、教育部长江学者奖励计划青年学者等人才计划, 并获霍英东优秀高校青年教师一等奖、宝钢优秀教师奖、北京市优秀教师和北京市师德先锋等奖励. 此外关注科学普及和科学知识传播工作, 翻译出版多部科普作品, 其中《爱因斯坦的望远镜》获 2011 年度新闻出版总署“大众喜爱的五十种图书”和国家图书馆“天津图书奖推荐书目”.

由于 SOC 会对单粒子的色散关系产生非微妙的影响, 因此在玻色系统中, SOC 会显著改变 BEC 的性质. 在具有一维 SOC 的玻色系统中, 单粒子基态可能在非零动量上发生二重简并. 在发生玻色-爱因斯坦凝聚时, 单粒子基态的简并可能使得除  $U(1)$  对称性之外的其他对称性破缺, 并导致新奇宏观量子态和非平庸超流态的出现<sup>[14]</sup>. 在具有高维 SOC 的玻色系统中, 单粒子基态的简并度可能进一步上升. 例如, Rashba 类型 SOC 的单粒子基态在动量空间形成一个连续的圆<sup>[15]</sup>, 而三维各向同性 SOC 的单粒子基态会构成一个球面<sup>[16]</sup>. 在高维 SOC 的玻色系统中, 物理性质和一维 SOC 的情况有很多相似之处, 但更大的单粒子基态简并空间会导致平衡态和涨落中的一些有趣的物理现象<sup>[17–27]</sup>.

在费米系统中, SOC 和体系的拓扑性质紧密相关. 目前在冷原子中实现的人造 SOC 与凝聚态系统中的形式有很大不同, 但是存在很多如何实现能够诱导拓扑非平庸相的人造 SOC 的理论建议<sup>[28–34]</sup>. 因此, 在高度可控的超冷原子气体中模拟各种拓扑相, 促进了对 SOC 费米气体的深入研究. 由于 SOC 改变了单粒子色散谱, 使得系统中的配对超流态可能出现很多新奇的形式, 包括拓扑超流态<sup>[35,36]</sup>, SOC 诱导 Fulde-Ferrell(FF) 态<sup>[37–40]</sup> 等等. 此外, SOC 也能导致具有少体关联的三聚体态, 并可能出现更有趣的多体相<sup>[41,42]</sup>. 因此, SOC 的出现大大丰富了我们对超冷原子气体的调控手段, 为该体系中的量子模拟开辟了新的思路.

近年来对具有 SOC 的超冷原子气体的研究衍生出了一些新的方向, 包括在非平衡态系统<sup>[43]</sup>、大

自旋体系<sup>[44]</sup>、拥有长程相互作用的体系<sup>[45]</sup>、以及具有轨道自由度和轨道 Feshbach 共振的类碱土金属原子系统<sup>[46]</sup>. 本文首先对超冷原子气体中实现的人造规范势和人造自旋轨道耦合进行介绍. 文章第 3 节将关注光学微腔中的准一维费米气体, 介绍该系统中发生超辐射相变之后所诱导出的新奇拓扑超辐射态. 第 4 节考虑具有轨道 Feshbach 共振的类碱土金属原子, 讨论其中可能出现的费米对称性保护拓扑态. 第 5 节介绍具有 SU(3) 类型自旋轨道耦合的大自旋玻色系统, 以及其中新奇的拓扑缺陷, 即自旋双涡旋. 第 6 节介绍同时具有软核长程相互作用和自旋轨道耦合的二维玻色-爱因斯坦凝聚中的手性对称破缺的超固体相. 本文所涉及内容都是由冷原子系统所特有的物理要素所派生的新问题, 体现了冷原子物理的特色.

## 2 超冷原子气体中的人造规范势和人造自旋轨道耦合

在量子系统中, 规范势和自旋轨道耦合都可以被归为某种形式的几何相位 (geometrical phase), 即波函数在空间中演化时所产生的相位<sup>[47]</sup>. 在冷原子气体中, 可以通过设置合适的激光, 使原子在空间运动时感受到光场对原子的相互作用势. 在绝热条件下, 原子感受到的势场可以产生所需的几何相位, 以及相对应的人造规范势或自旋轨道耦合.

考虑一个一般性的原子哈密顿量<sup>[48]</sup>

$$H = H_0 + V(\mathbf{r}), \quad (1)$$

其中  $H_0 = \mathbf{p}^2/2m$  是动能项,  $V(\mathbf{r})$  代表原子和激光的相互作用, 位置  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  描述了原子在空间中的运动. 在某个确定的时间  $t$  和位置  $\mathbf{r}$ , 可以将  $V(\mathbf{r})$  在原子的内部自由度子空间中对角化, 并得到一系列由指标  $\alpha$  标记的本征模式  $|\phi_\alpha(\mathbf{r})\rangle$ . 值得强调的是,  $|\phi_\alpha(\mathbf{r})\rangle$  是内部自由度的本征态, 而不是坐标空间的波函数. 事实上, 这里位置  $\mathbf{r}$  不是波函数的自变量, 而是一个指标. 在某个确定的时间  $t$ , 原子所处的状态可以由波函数  $|\Psi(\mathbf{r}, t)\rangle$  描述, 并可以被展开为  $\{|\phi_\alpha(\mathbf{r})\rangle\}$  的线性组合

$$|\Psi(\mathbf{r}, t)\rangle = \sum_{\alpha} c_{\alpha}(\mathbf{r}, t) |\phi_{\alpha}(\mathbf{r})\rangle, \quad (2)$$

其中, 展开项系数  $c_{\alpha}(\mathbf{r}, t)$  描述了原子在空间中运动时状态的演化, 并满足如下的含时薛定谔方程

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} c_\alpha(\mathbf{r}, t) = E_\alpha(\mathbf{r})c_\alpha(\mathbf{r}, t) + \sum_{\beta} \langle \phi_\alpha | H_0 c_\beta(\mathbf{r}, t) | \phi_\beta \rangle, \quad (3)$$

这里  $E_\alpha(\mathbf{r})$  是  $|\phi_\alpha(\mathbf{r})\rangle$  所对应的本征能量, 满足  $V(\mathbf{r})|\phi_\alpha(\mathbf{r})\rangle = E_\alpha(\mathbf{r})|\phi_\alpha(\mathbf{r})\rangle$ . 在绝热条件下, 原子内部自由度含时演化的特征时间远远小于其质心自由度在空间运动的特征时间. 或者说, 哈密顿量中的动能项  $H_0$  所对应的能量尺度远远小于本征态  $|\phi_\alpha\rangle$  之间的能量差. 因此, 在大时间尺度下, 可以假设原子的内部自由度始终跟随质心的运动, 保持在单一的  $|\phi_\alpha\rangle$  上. 这样, 就可以只考虑 (3) 式中  $\beta = \alpha$  的项, 并得到如下方程:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} c_\alpha(\mathbf{r}, t) = E_\alpha(\mathbf{r})c_\alpha(\mathbf{r}, t) + \langle \phi_\alpha | H_0 c_\alpha(\mathbf{r}, t) | \phi_\alpha \rangle, \quad (4)$$

上式描述了原子在等效势场  $E_\alpha(\mathbf{r})$  中的运动.

在运动过程中, 原子虽然没有在内部自由度的其他状态上产生布居, 但会由此携带一个几何相位. 为了看出这一点, 我们可以在方程 (4) 的动能项中插入完备基

$$\begin{aligned} \langle \phi_\alpha | H_0 c_\alpha | \phi_\alpha \rangle &= \frac{1}{2m} \langle \phi_\alpha | \mathbf{p} \left\{ \sum_{\beta} |\phi_\beta\rangle \langle \phi_\beta| [\mathbf{p} c_\alpha | \phi_\alpha] \right\} \\ &= \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - \mathbf{A})^2 c_\alpha + W c_\alpha, \end{aligned} \quad (5)$$

式中, 利用了动量算符的定义  $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$ , 并定义矢势

$$\mathbf{A} = i\hbar \langle \phi_\alpha | \nabla | \phi_\alpha \rangle \quad (6)$$

和标势

$$W = \sum_{\beta \neq \alpha} \hbar^2 |\langle \phi_\beta | \nabla | \phi_\alpha \rangle|^2 / 2m. \quad (7)$$

在给定  $\alpha$  的情况下, 标势  $W$  是一个常数, 可以作为能量零点被扣除. 由此, 得到系统的等效哈密顿量

$$H_{\text{eff}} = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - \mathbf{A})^2 + E_\alpha(\mathbf{r}). \quad (8)$$

上述哈密顿量中的矢势  $\mathbf{A}$  描述了原子的内部自由度跟随质心自由度的变化. 如果这一变化体现为内部自由度波函数上单一的相位变化, 具体演化序列的顺序改变不会产生任何影响, 我们称矢势  $\mathbf{A}$  代表一个可交换的几何相位, 或称为阿贝尔几何相 (Abelian geometrical factor). 人造电场和人造磁场都可以归为这一类. 如果  $\mathbf{A}$  引起的变化体现为一个内部自由度希尔伯特空间中的转动, 演化序列的顺序会对结果产生重要影响. 此时称  $\mathbf{A}$  是非交换或

非阿贝尔的 (non-Abelian), 人造自旋轨道耦合即属于此类.

在目前的冷原子实验中, 人造规范势和自旋轨道耦合多通过激光耦合原子的不同内态来实现. 例如在 NIST 的实验中, Lin 等<sup>[49]</sup> 通过两束对射的激光在  $87\text{Rb}$  原子两个超精细能级之间驱动一个双光子 Raman 过程, 使得当原子从一个超精细能级 (或赝自旋  $|\sigma = \uparrow, \downarrow\rangle$ ) 跃迁到另一个时, 原子的质心动量也会发生改变. 通过选择合适的 Raman 过程, 这一方案可以在冷原子气体中产生阿贝尔规范势, 如等效磁场<sup>[49]</sup>、等效电场<sup>[50]</sup>, 也可以产生非阿贝尔规范势和自旋轨道耦合<sup>[7]</sup>. 图 1(a) 展示了这一方案的基本思路.

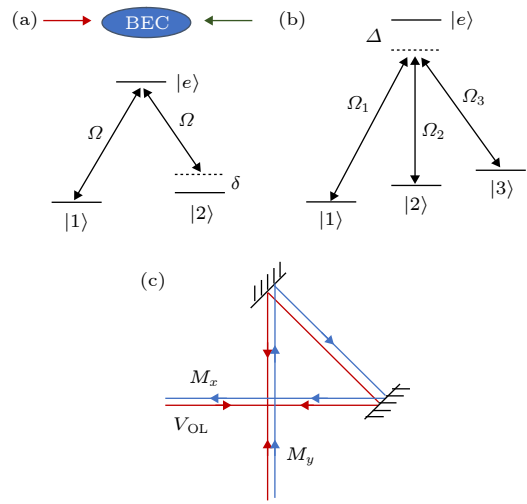


图 1 (a) 一维自旋轨道耦合的实验实现方案; (b) 利用 tripod 方案实现二维人造规范势的方案; (c) 利用 Raman 晶格实现二维人造自旋轨道耦合的实验方案

Fig. 1. (a) The NIST scheme to realize 1D spin-orbit coupling; (b) the tripod scheme to realize 2D synthetic gauge field; (c) the Raman optical lattice scheme to realize 2D spin-orbit coupling.

通过这个方案实现的自旋轨道耦合具有如下的等效哈密顿量

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\hbar^2}{2m} (\mathbf{k}^2 - k_0 \mathbf{x} \sigma_z)^2 - \frac{\delta}{2} \sigma_z + \frac{\Omega}{2} \sigma_x, \quad (9)$$

这里  $\mathbf{x}$  为 Raman 激光的方向,  $\delta$  为 Raman 过程的双光子失谐,  $\Omega$  为 Raman 过程的 Rabi 频率. 通过一个绕  $\sigma_y$  的自旋旋转  $\sigma_z \rightarrow \sigma_x$  和  $\sigma_x \rightarrow -\sigma_z$ , 上式哈密顿量可以进一步改写为

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\hbar^2}{2m} (\mathbf{k}^2 - k_0 \mathbf{x} \sigma_x)^2 - \frac{\delta}{2} \sigma_x + \frac{\Omega}{2} \sigma_z. \quad (10)$$

此时可以看出, 这种一维的自旋轨道耦合 (即只有一个方向的动量和一个方向的自旋耦合) 是 Rashba 类型 ( $k_x\sigma_x + \sigma_y\sigma_y$ ) 和 Dresselhaus 类型 ( $k_x\sigma_x - \sigma_y\sigma_y$ ) 的等权重叠加. 同时, 这一方案会自然地包括沿  $x$  方向的等效磁场  $\delta/2$  和沿  $z$  方向的等效磁场  $\Omega/2$ , 且可以在实验中进行调节.

除了上述通过一个双光子 Raman 过程实现一维 SOC 的方案, 人们也在积极探索二维 SOC 的实验实现. 一种可能的方式是利用原子的三个基态能级和一个激发态能级, 通过三束激光实现三个基态能级分别和激发态耦合的 tripod 构型, 如图 1(b) 所示 [51]. 原子与光耦合的哈密顿量可以写为 [52]

$$H_c = \hbar\Delta|e\rangle\langle e| - \hbar\sum_{i=1}^3(\Omega_i|0\rangle\langle i| + \text{h.c.}), \quad (11)$$

这里  $\Delta$  是从基态  $|i = 1, 2, 3\rangle$  到激发态  $|e\rangle$  跃迁的单光子失谐,  $\Omega_i$  为对应的 Rabi 频率, h.c. 代表厄米共轭项. 通过将三个 Rabi 频率写成如下形式:  $\Omega_1 = \Omega \sin\theta \cos\phi e^{iS_1}$ ,  $\Omega_2 = \Omega \sin\theta \sin\phi e^{iS_2}$ ,  $\Omega_3 = \Omega \cos\theta e^{iS_3}$ ,  $\Omega = \sqrt{|\Omega_1|^2 + |\Omega_2|^2 + |\Omega_3|^2}$ , 并将上述相互作用哈密顿量对角化, 可以得到体系的两个缀饰态 (dressed states):

$$\begin{aligned} |d_1\rangle &= \sin\phi e^{i(S_1-S_3)}|1\rangle - \cos\phi e^{i(S_3-S_2)}|2\rangle, \\ |d_2\rangle &= \cos\theta \cos\phi e^{i(S_3-S_1)}|1\rangle \\ &\quad + \cos\theta \sin\phi e^{i(S_3-S_2)}|2\rangle - \sin\theta|3\rangle. \end{aligned} \quad (12)$$

将这两个缀饰态看作一个赝自旋 1/2 体系, 并通过恰当选择三个相位  $S_i$  在空间中的分布, 上述哈密顿量可以实现一个非阿贝尔的人造规范势  $\mathbf{A}_{i,j} = i\hbar\langle d_i|\nabla|d_j\rangle$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11} &= \hbar(\cos^2\phi\nabla S_{23} + \sin^2\phi\nabla S_{13}), \\ \mathbf{A}_{22} &= \hbar\cos^2\theta(\cos^2\phi\nabla S_{13} + \sin^2\phi\nabla S_{23}), \\ \mathbf{A}_{12} &= \hbar\cos\theta\left(\frac{\sin 2\phi}{2}\nabla S_{12} - i\nabla\phi\right), \end{aligned} \quad (13)$$

式中定义  $S_{ij} = S_i - S_j$ . 例如, 如果选择  $\theta = \phi = \pi/4$ ,  $S_{12} = k_0x$ ,  $S_{23} = k_0x + k_0y$ ,  $S_{13} = -k_0x + k_0y$ , 可以获得如下形式的二维人造规范势

$$\mathbf{A} = \frac{\sqrt{2}\hbar}{4}k_0\sigma_x\hat{x} + \frac{\hbar}{4}k_0\sigma_z\hat{y}. \quad (14)$$

2016 年, Huang 等 [10] 在  $^{40}\text{K}$  费米气体中实现了这一类型的人造规范势. 在适当的动量空间和自旋空间旋转下, 该工作实现的人造规范势对应如下

类型的二维自旋轨道耦合:

$$H_{\text{SOC}} = \lambda_x p_x \sigma_x + \lambda_y p_y \sigma_y. \quad (15)$$

通过自旋注入 (spin injection), 文章测量了该体系中缀饰态的单粒子色散关系, 确认了 Dirac 点的存在.

另一种二维自旋轨道耦合的方案是在光晶格中利用 Raman 晶格实现的 [53]. 如图 1(c) 所示, 在一个由红失谐驻波光  $\Omega_1$  构成的二维立方晶格中, 叠加上一个由蓝失谐行波光  $\Omega_2$  辅助构成的 Raman 晶格, 并保持 Raman 晶格的晶格常数是背景晶格的二倍. 通过  $\Omega_1$  和  $\Omega_2$  的共同作用, 可以在这个体系中驱动两个 Raman 过程, 使原子从不同的内态间实现跃迁. 由于蓝失谐光晶格的节点恰好出现在红失谐光晶格强度最大的地方, 在背景晶格的格点附近, Raman 晶格具有奇宇称. 具体而言, 该体系的哈密顿量可以写为

$$H_{\text{SOC}} = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} + V_{\text{OL}} + M_x \sigma_x + M_y \sigma_y + \frac{\delta}{2} \sigma_z, \quad (16)$$

其中, 背景晶格势  $V_{\text{OL}} = V_0(\cos^2 k_0x + \cos^2 k_0y)$ , Raman 晶格势  $M_x = M_0 \cos k_0x \sin k_0y$ ,  $M_y = M_0 \cos k_0y \sin k_0x$ ,  $\delta$  是 Raman 过程的双光子失谐, 在这里对应一个等效的  $z$  方向磁场. 注意到在背景晶格的格点附近, 该哈密顿量的自旋轨道部分可以化为更加明显的二维 SOC 形式  $\sim (\lambda_{xy}\sigma_x + \lambda_{yx}\sigma_y)$ .

2016 年, Wu 等 [11] 在  $^{87}\text{Rb}$  玻色气体中实现了上述类型的二维自旋轨道耦合, 并通过实验确认了体系的拓扑性质. 随后, Sun 等 [54] 还利用一个改进的 Raman 晶格方案实现了更加稳定的二维拓扑玻色气体.

### 3 光腔中简并费米气体的拓扑超辐射态

对于光腔中的超冷原子气体, 原子运动与光场的相互作用通常会产生丰富的动力学过程和新奇的多体相 [55–60]. 在玻色气体中, 实验上已经在与腔光场耦合的玻色-爱因斯坦凝聚中观察到 Dicke 超辐射 (superradiant, SR) 态, 表现为腔内光场出现宏观布居, 同时原子在空间发生自组织现象 [61–63]. 对于无自旋的简并费米气体, 理论研究表明由于存在费米面嵌套, 腔光子在费米面附近发生的散射可以辅助超辐射相变的发生, 并导致费米面上出现一个体能隙 [64–66].

本节研究光腔中的准一维两分量费米气体, 以及该体系中由超辐射诱导产生的一个稳定的拓扑超辐射 (topological superradiant, TSR) 态. 在 TSR 态中, 原子的拓扑非平庸性质与光腔中 SR 光同时产生<sup>[67,68]</sup>. 这种新奇的拓扑相与系统中的自旋轨道耦合密切相关. 尽管在超冷原子气体中的人造 SOC 已被广泛研究<sup>[69-73]</sup>, 但有光腔诱导的 SOC 将会有更为丰富的物理前景<sup>[74,75]</sup>.

本节所关注的系统如图 2(a) 所示, 一个准一维费米气体被放置在一个 Fabry-Perot 腔中, 光腔的两个本征模式可以分别由沿腔轴向和径向的线性偏振光驱动. 由于两种腔模间的失谐通常要比系统的相关动力学能量尺度大得多, 所以可以对两种腔模分别进行处理. 如图 2(b) 所示, 通过利用原子的激发态  $|\uparrow\rangle_e$  和  $|\downarrow\rangle_e$ , 沿轴向驱动产生的腔模 A 和径向泵浦光可以经过两个不同的拉曼过程将两个超精细基态 (分别标记为  $|\uparrow\rangle$  和  $|\downarrow\rangle$ ) 耦合起来. 原子态的磁量子数满足关系:  $m_{|\sigma=\uparrow,\downarrow\rangle} = m_{|\sigma\rangle_e}$  和  $m_{|\uparrow\rangle} = m_{|\downarrow\rangle} + 1$ . 沿  $z$  轴方向的偏置磁场在  $|\uparrow\rangle$  和  $|\downarrow\rangle$  两个态之间产生了一个等效塞曼场  $m_z$ . 腔模 A 的频率  $\omega_c$  与泵浦激光频率  $\omega_A$  接近, 且二者均为蓝失谐, 同时单光子失谐满足关系  $\Delta \gg \Omega_A, g_A$ . 其中  $\Omega_A$  为径向泵浦激光的拉比频率,  $g_A$  为腔模 A 的单光子拉比频率. 另外, 由于沿腔轴向驱动的腔模 B 的作用, 原子将被束缚在沿  $\hat{x}$  方向的一维背景晶格势中. 当  $m_z$  大于临界值  $m_c$  时, 背景晶格势将会打开一个能隙, 同时在 SR 相变前会产生一个半满的铁磁绝缘 (ferromagnetic insulator, I) 态.

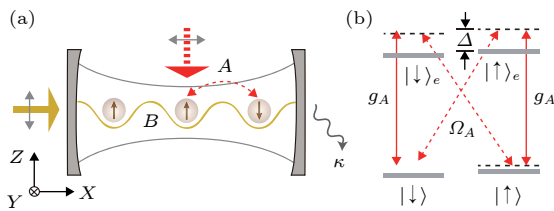


图 2 (a) 准一维费米气体与双模光腔耦合的示意图. 在腔轴向 (沿  $\hat{x}$  轴) 和径向 (沿  $-\hat{z}$  轴) 均有泵浦光; (b) 原子能级和光耦合的示意图<sup>[76]</sup>

Fig. 2. (a) A quasi-one-dimensional Fermi gas, which is coupled to a two-mode optical cavity, is under both transverse (along  $-\hat{z}$ ) and longitudinal (along  $\hat{x}$ ) pumping; (b) the level scheme of atom<sup>[76]</sup>.

### 3.1 哈密顿量

通过对腔场使用平均场近似, 可以得到系统的

稳态解. 同时, 对于准一维费米气体, 通过积分掉紧束缚的径向自由度, 可以得到系统的一维有效哈密顿量:

$$\hat{H} = \sum_{\sigma} \int dx \hat{\psi}_{\sigma}^{\dagger} \left[ \frac{p_x^2}{2m} + (V_0 + \xi_A |\alpha|^2) \cos^2(k_0 x) + \xi_{\sigma} m_z \right] \hat{\psi}_{\sigma} + \eta_A (\alpha^* + \alpha) \times \left[ \int dx \hat{\psi}_{\uparrow}^{\dagger} \cos(k_0 x) \hat{\psi}_{\downarrow} + \text{H.c.} \right], \quad (17)$$

其中  $\hat{\psi}_{\sigma}$  ( $\sigma = \uparrow, \downarrow$ ) 为一维有效费米子算符,  $m$  为原子质量,  $\xi_{\sigma} = \pm 1$ , H.c. 代表厄米共轭项. 原子被束缚在有效光晶格势  $(V_0 + \xi_A |\alpha|^2) \cos^2(k_0 x)$  中, 其中  $\xi_A = g_A^2 / \Delta$ ,  $V_0 \cos^2(k_0 x)$  为腔模 B 产生的背景势. 不同腔模的波矢近似相等, 均标记为  $k_0$ . 体系中的有效泵浦强度为  $\eta_A = s\eta$ , 其中常数  $s$  来自于径向自由度的积分. 在平均场近似下, 腔模 A 的强度  $\alpha$  可以通过稳定条件  $\partial\alpha/\partial t = 0$  计算得到, 且  $\alpha$  与序参量  $\Theta = \int dx \theta(x) = \int dx (\langle \hat{\psi}_{\uparrow}^{\dagger} \hat{\psi}_{\uparrow} \rangle + \text{H.c.}) \times \cos(k_0 x)$  成正比. 在本节的讨论中, 将使用反冲能量  $E_r = \hbar^2 k_0^2 / 2m$  作为能量单位.

### 3.2 拓扑超辐射态

哈密顿量 (17) 式描述的体系中, 一个最显著的特点是随着有效泵浦强度  $\eta_A$  的增大, 系统中会出现超辐射 (SR) 相变. 与 SR 相变对应的临界泵浦强度可以利用二阶微扰理论计算自由能得到<sup>[66]</sup>. 通过积分掉费米场, 并使自由能二阶微扰展开系数为零, 我得到临界泵浦强度:

$$\eta_A^c = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\tilde{\Delta}_A^2 + \kappa^2}{-\tilde{\Delta}_A f}}, \quad (18)$$

其中  $\tilde{\Delta}_A = \Delta_A - \xi_A \sum_{j,\sigma} \int dx |\varphi_{j\sigma}|^2 \cos^2(k_0 x) n_F(\epsilon_j)$ , 光腔失谐  $\Delta_A = \omega_A - \omega_c$ ,  $f = \frac{1}{2} \sum_{j,j'} |M_{jj'}|^2 [n_F(\epsilon_{j'}) - n_F(\epsilon_j)] / (\epsilon_j - \epsilon_{j'})$ ,  $\kappa$  为光腔衰变率. 这里  $M_{jj'} = \sum_{\sigma \neq \sigma'} \int dx \varphi_{j\sigma}^* \cos(k_0 x) \varphi_{j'\sigma'}$ , 费米-狄拉克分布为  $n_F(x) = 1 / (e^{(x-\mu)/k_B T} + 1)$ ,  $\mu$  为化学势,  $T$  为温度,  $k_B$  是玻尔兹曼常数. 此外,  $\{\varphi_{j\uparrow}, \varphi_{j\downarrow}\}^T$  为哈密顿量  $p_x^2 / 2m + V_0 \cos^2 k_0 x + m_z \sigma_z$  在能量为  $\epsilon_j$  时的本征态,  $\sigma_z$  为泡利矩阵.

在 SR 相变前, 光场强度  $\alpha = 0$ , 且原子处于背景晶格势  $V_0 \cos^2(k_0 x)$  中. 在 SR 相变后, 腔模 A 出现大量光子的宏观占据, 从而改变背景晶格势, 并

且在哈密顿量 (17) 式中诱导产生一个随时空变化的 SOC. 这个 SOC 的变化周期为背景晶格势的两倍. 当腔模 A 强度较弱时, 可以忽略不同能带的带间耦合, 并利用单带紧束缚极限下的规范变换  $\{\hat{\psi}_\uparrow \rightarrow \hat{\psi}_\uparrow, \hat{\psi}_\downarrow \rightarrow -ie^{ik_0x}\hat{\psi}_\downarrow\}$ , 将哈密顿量 (17) 式映射为一个手性拓扑绝缘体的哈密顿量. 在能带为半满状态且塞曼场低于一个临界值时, 这个哈密顿量的基态是拓扑非平庸的<sup>[77]</sup>. 当  $\eta_A$  增大时, 带间耦合作用变得不可忽略, 同时单带紧束缚近似不再适用. 尽管如此, 我们发现即使在深 SR 区域, 拓扑性质依然存在.

首先在开边界条件且  $m_z = 0$  的有限尺寸晶格中对角化等效哈密顿量 (17) 式, 同时对腔场进行自洽求解. 计算得到的腔场强度和能谱分别如图 3(a) 和图 3(c) 所示. 从图中可以明显看出, 只要泵浦强

度超过一个临界值, 一对如图 3(d) 所示的拥有局域波函数的零模将会在超辐射诱导的体能隙中出现. 与此同时, 超辐射相变所对应的序参量会由 0 变为有限值, 如图 3(b) 所示. 因此, 在这个系统中伴随腔模的 SR 相变, 原子体系也展现出拓扑性质, 我们定义为拓扑超辐射 (TSR) 相.

### 3.3 系统稳态相图

通过描绘体系在  $\eta_A - m_z$  平面的稳态相图, 可以研究体系中 TSR 相的稳定性. SR 相边界可以通过方程 (18) 计算得到, 而拓扑相边界由体系的拓扑数决定. 通过定义从第一布里渊区到自旋空间的映射, 可以用动量空间中的自旋结构  $\langle \sigma \rangle_k = \langle \sigma_y \rangle_k e_y + \langle \sigma_z \rangle_k e_z$  来定义体系的拓扑数, 其中  $\sigma_y$  和  $\sigma_z$  为泡利矩阵. 上式中的期望值由动量空

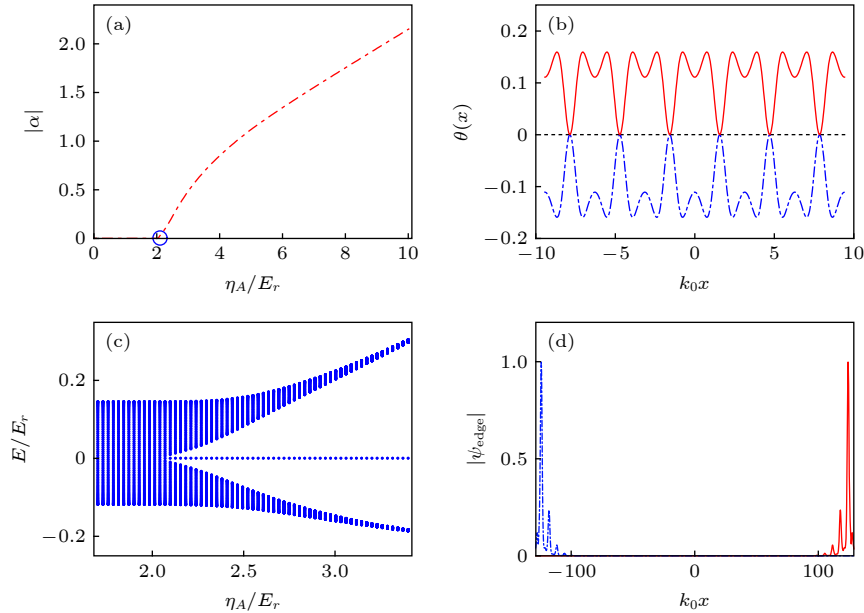


图 3 开边界条件下准一维晶格中 TSR 态的一些特征 (a) 腔场强度  $|\alpha|$  随有效泵浦  $\eta_A$  的变化; (b) 序参量  $\theta(x)$  在 TSR 相变前 (点线表示,  $\eta_A = 1E_r$ ) 和相变后 (实线和点划线表示,  $\eta_A = 3E_r$ ) 在中心六个格点中的变化情况. 临界点位于  $\eta_A^c \sim 2.05E_r$  处. 在 TSR 相中, 由于自发对称性破缺, 腔场  $\alpha$  可以取正值或负值, 对应序参量由实线或点划线表示; (c) 当系统穿过相边界进入 TSR 态后, 系统会由于超辐射相变打开一个体能隙, 同时出现一对零能的边缘态 (d) 当  $\eta_A = 3E_r$  时, 图 (c) 中的边缘态所对应的实空间波函数. 本图中考虑一个拥有 80 个格点的半满晶格体系, 体系参数选取为:  $k_B T = E_r/200$ ,  $m_z = 0$ ,  $V_0 = 5E_r$ ,  $\kappa = 100E_r$ ,  $\Delta_A = -10E_r$ ,  $\xi_A = 5E_r$ . 对于  ${}^6\text{Li}$  原子, 通过选取  $\kappa \approx 7.4 \text{ MHz}$ ,  $g_A \approx 27.1 \text{ MHz}$ ,  $|\Delta| \approx 0.74 \text{ MHz}$ ,  $\Delta \approx 2 \text{ GHz}$  和  $T \approx 17.7 \text{ nK}$  可以满足上述参数条件<sup>[76]</sup>.

Fig. 3. TSR state in a quasi-one-dimensional lattice with open boundary conditions: (a) The cavity field  $|\alpha|$  varies with  $\eta_A$  across the TSR transition; (b)  $\theta(x)$  on the central six sites. The dotted curve corresponds to the  $\theta(x)$  before the TSR phase transition, where  $\eta_A = 1E_r$ . The solid and dash-dotted curves to the  $\theta(x)$  after the TSR phase transition, where  $\eta_A = 3E_r$ . The transition point is around  $\eta_A^c \approx 2.05E_r$ . Because of the spontaneous symmetry breaking, the cavity field of the TSR phase acquires a positive (negative) real part, corresponding to solid (dash-dotted) curve; (c) when the system crosses the phase boundary, a pair of edge states emerge in the superradiance-induced bulk gap. (d) the wave functions of the edge states in (c) with  $\eta_A = 3E_r$ . In our calculation, we consider a half-filled lattice of 80 sites, with the parameters  $k_B T = E_r/200$ ,  $m_z = 0$ ,  $V_0 = 5E_r$ ,  $\kappa = 100E_r$ ,  $\Delta_A = -10E_r$ , and  $\xi_A = 5E_r$ . For  ${}^6\text{Li}$  atoms, these parameters can be satisfied by choosing  $\kappa \approx 7.4 \text{ MHz}$ ,  $g_A \approx 27.1 \text{ MHz}$ ,  $|\Delta| \approx 0.74 \text{ MHz}$ ,  $\Delta \approx 2 \text{ GHz}$ , and  $T \approx 17.7 \text{ nK}$ <sup>[76]</sup>.

间中最低能带的布洛赫态计算得到. 通过上面提到的映射, 每一个布洛赫态会对应一个位于  $y$ - $z$  平面内的自旋, 其单位向量为闭环  $S^1$  的基本组成部分. 因此, 这个体系的环境数可以通过计算闭环  $S^1$  被覆盖的次数得到.

图 4 描绘了系统的稳态相图. 当  $m_z < m_c$  时, 费米气体在超辐射相变前处于一个没有能隙的金属 (metallic, M) 态. SR 相变将会在有限动量处打开一个能隙. 这是由于腔模 A 的光场周期是背景晶格势周期的两倍, 所以拉曼过程可以等效为一个光腔诱导的 SOC, 可以将不同超精细能级和跨越半布里渊区有不同动量的费米子耦合在一起. 更重要的是, 我们发现腔模 A 中 SR 光的产生和体能隙的打开都伴随着费米气体中拓扑性质的改变. 因此

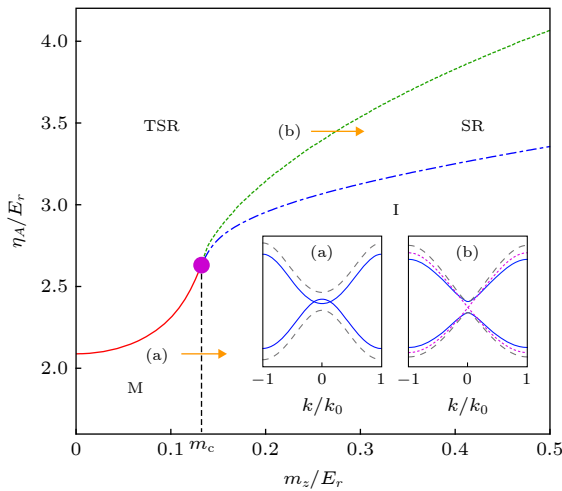


图 4 有限温度  $k_B T = E_r/200$  时系统的稳态相图. 图中实线为 TSR 相边界, 点线为 TSR 态和普通 SR 态间的拓扑相边界. 在  $m_c \approx 0.132E_r$  处的细虚线为金属态 (M) 和绝缘态 (I) 间的边界. 点划线为普通 SR 相与绝缘相的边界. 不同的相边界汇聚于  $\eta_A \approx 2.614E_r$ ,  $m_c \approx 0.132E_r$  处 (如图中四相点所示). 图中其他参数与图 (2) 一致. 内嵌图展示了与大图中箭头对应的相变前后体能隙的变化. 图中实线为相变前的能带, 虚线为相变后的能带, 点线为相边界上的情况<sup>[76]</sup>

Fig. 4. The phase diagram of steady-state with  $k_B T = E_r/200$ . The solid curve corresponds to the TSR phase boundary, and the topological phase boundary between the TSR and the trivial SR states corresponds to dotted curve. The thin dashed curve at  $m_c \approx 0.132E_r$  is the boundary between the M and the I states, and the dash-dotted curve is the conventional SR phase boundary. At the tetracritical point (dot) with  $\eta_A \approx 2.614E_r$  and  $m_c \approx 0.132E_r$ , the various boundaries merge. Other parameters are the same as those used in Fig. 2. Inset: change of bulk gap before (solid), after (dashed), and right (dotted) at the phase boundaries labeled by arrows<sup>[76]</sup>.

系统此时处于一个新奇的 TSR 相, 对边缘态和环绕数计算都可以确认此时的拓扑属性.

当  $m_z > m_c$  时, 在发生超辐射相变之前, 费米气体中不同自旋间的塞曼能大于能带宽度, 因此系统处于一个铁磁绝缘态 (I). 在刚发生 SR 相变时, 铁磁体能隙依然处于打开的状态. 费米气体因此从 I 态变为拓扑平庸的 SR 态. 随着泵浦强度不断增加, 在动量为零处 ( $k = 0$ ) 能隙将经历一个关闭和再次打开的过程, 这是由于体系穿过拓扑相边界变为了 TSR 态. 通过相图可以发现此处的 TSR 态可以绝热地与  $m_z < m_c$  时的 TSR 态连接起来. 通过费米气体自旋分辨的动量分布测量和腔光子占据的变化可以看到 TSR 态和 SR 态间的拓扑相变. 稳态相图中一个重要发现是 TSR-SR 的边界均处于  $m_z > m_c$  区域. 需要强调的是, 拓扑相变是由拉曼诱导的能带耦合所导致的铁磁能带结构变形引起, 且当  $\eta_A$  较大时此现象尤为明显. 具体来讲, 在  $m_z > m_c$  区域当  $\eta_A$  从 I 态开始不断增大, 体系首先穿过一个 I-SR 边界变为普通 SR 态.  $\eta_A$  的进一步增大将使能带耦合增强, 此作用将拉低能量最低的次能带部分, 从而在 TSR-SR 边界处使体能隙闭合. 有趣的是, 由于在能隙闭合点处的能带翻转, 当  $\eta_A$  继续增大到 TSR 区域后, 能带间耦合将使体能隙增大. 这将导致在相图中出现一个四相点, 以及在  $\eta_A$ - $m_z$  平面沿着不同路线将会看到不同类型的相变.

### 3.4 小结

本节介绍了光腔中两分量简并费米气体里的拓扑超辐射态. 在光腔中, 沿轴向驱动产生的超辐射光和沿径向的驱动光将共同形成自旋轨道耦合, 并在半满填充的能带中打开一个体能隙. 此效应将在原子体系中引发拓扑相变, 并由此形成拓扑超辐射态.

实验中可以利用径向紧束缚的二维光晶格来实现准一维费米气体系统. 当光腔中有更多数量的原子时, TSR 相和对应的相变可以在实验中更容易实现的参数下出现, 例如较弱的原子与光腔耦合、更大的单光子失谐和更大的光腔衰变率. 本节最后需要强调的是, 上述准一维系统中出现的性质可以直接扩展到光腔中的准二维费米气体, 其中同样会出现 TSR 相. 在这种情况下, 系统在穿过 SR 相变后的单带紧束缚哈密顿量将对应于量子反



常霍尔效应 (quantum anomalous Hall effect, QAHE) 模型<sup>[77]</sup>.

#### 4 类碱土金属原子中有相互作用的对称性保护拓扑态

对有对称性保护拓扑相 (symmetry-protected topological, SPT) 的研究, 已经在很大程度上提升了人们对拓扑性质的理解<sup>[78,79]</sup>. 与拥有长程纠缠的内禀拓扑序相比<sup>[80–82]</sup>, SPT 相拥有存在体能隙的短程纠缠基态, 同时只要被保护的对称性不发生破缺, SPT 相中就会出现无能隙或简并的边缘激发态. 从有相互作用自旋链中的 Haldane 相<sup>[83]</sup>, 到自由费米子中的拓扑绝缘体<sup>[84–88]</sup>, 都是 SPT 相的典型例子. 近年来, 玻色 SPT 相和无相互作用的费米 SPT 相已被广泛研究<sup>[89–92]</sup>. 而对存在费米边缘态且有相互作用的 SPT 相的研究仍处于发展阶段<sup>[93–96]</sup>, 特别是实验中仍无法实现有相互作用的费米 SPT 相.

本节将讨论利用有相互作用的类碱土金属原子来模拟费米 SPT 相. 由于最外层存在两个价电子, 类碱土金属原子拥有长寿命原子激发态, 以及有核自旋不为零的同位素等特殊性质. 该类原子在基态  $^1S_0$  (这里称为  $|g\rangle$  轨道态) 和亚稳定激发态  $^3P_0$  (称为  $|e\rangle$  轨道态) 时, 核自旋自由度和电子自由度基本不耦合, 利用这个特点可以实现对所谓原子钟态的灵活控制, 以及对具有大自旋  $SU(N)$  对称性系统的模拟. 尽管类碱土金属原子已被应用于量子测量、量子信息和量子模拟等领域<sup>[97–124]</sup>, 但近年来在  $^{173}\text{Yb}$  原子中发现的轨道 Feshbach 共振使研究具有强相互作用的类碱土金属原子体系成为可能<sup>[125–127]</sup>.

本节将利用类碱土金属原子的上述特点, 探讨在这类系统中实现有相互作用的费米 SPT 相的方案. 此拓扑相受  $U(1)$  粒子数守恒和手性对称的保护, 这些对称性来源于反么正群  $U(1) \times Z_2^T$ . 体系中 SPT 相存在费米边缘态和  $Z_4$  拓扑不变性. 这与之前提出的关于实现有玻色边缘态的 SPT 相的理论形成鲜明对比, 后者可以在纯玻色系统中实现并且受  $SU(N)/Z_N$  对称性保护. 有相互作用的费米 SPT 相又与无相互作用的费米 SPT 相在拓扑不变性和分类上有本质上的区别.

#### 4.1 哈密顿量

研究对象是束缚在光晶格势中的准一维超冷类碱土金属原子系统. 如图 5 所示<sup>[128]</sup>, 一对蓝失谐拉曼激光同时将不同轨道上的核自旋态  $\{|g \downarrow\rangle, |g \uparrow\rangle\}$  和  $\{|e \downarrow\rangle, |e \uparrow\rangle\}$  耦合在一起, 形成拉曼过程的两束激光的拉比频率分别为  $\Omega_1(x) = \Omega_1 \cos(k_0x)$  和  $\Omega_2 \exp(ik_0y)$ . 通过这一拉曼过程, 两个不同的核自旋态上将产生 SOC, 同时形成与态  $\{|\alpha \uparrow\rangle, |\alpha \downarrow\rangle\}$  ( $\alpha = g, e$ ) 对应的一维光晶格势. 当拉曼激光具有魔幻波长时, 对于不同轨道态  $|g\rangle$  和  $|e\rangle$  而言, 光晶格势和拉曼过程的有效拉比频率会趋于一致. 对于  $^{173}\text{Yb}$  原子, 魔幻波长约为 550 nm<sup>[129]</sup>. 在这样的体系中, 单粒子哈密顿量可表示为

$$\hat{H}_0 = \int dx \sum_{\alpha\sigma} \hat{\psi}_{\alpha\sigma}^\dagger \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(x) + \delta_{\alpha\sigma} \right] \hat{\psi}_{\alpha\sigma} + \int dx \sum_{\alpha} [M(x) \hat{\psi}_{\alpha\uparrow}^\dagger \hat{\psi}_{\alpha\downarrow} + \text{H.c.}], \quad (19)$$

其中  $\sigma = (\uparrow, \downarrow)$ ,  $\psi_{\alpha\sigma}$  是与轨道  $\alpha$  和自旋  $\sigma$  对应的原子湮灭算符,  $\delta_{\alpha\sigma}$  表示外加磁场下相应的塞曼移动<sup>[130]</sup>. 晶格势为  $V(x) = V_0 \cos^2(k_0x)$ , 拉曼晶格势为  $M(x) = M_0 \cos(k_0x)$ , 其中  $V_0$  和  $M_0$  都与魔幻波长下钟态的交流极化率成正比. 结合近年来在类碱土金属原子中实现人造 SOC 的各项实验进展, 本节研究体系的所有必要参数在实验中均可实现.

尽管高能带通常会对拉曼诱导的 SOC 有重要影响, 但当  $M_0$  不是很大时, 仍然可以应用单带紧

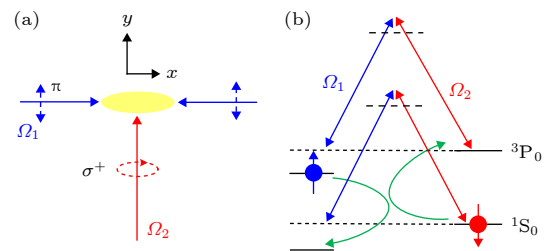


图 5 (a) 处在拉曼光中的准一维超冷原子气体; (b) 通过拉曼过程耦合的原子能级示意图. 图中绿色曲线指示了不同轨道态之间的自旋交换相互作用. 通过利用与自旋相关的激光频移, 可以将图中的四个核自旋态与其他核自旋态分离开来进行操作<sup>[128]</sup>.

Fig. 5. A quasi-1D atomic gas under Raman lasers; (b) Raman level schemes in the clock-states manifold. The green curve corresponds to the interorbital spin-exchange interaction. By using spin-dependent laser shifts, the four nuclear spin states from  $^1S_0$  and  $^3P_0$  manifolds can be separated from the other nuclear spins<sup>[128]</sup>.

束缚模型<sup>[131–133]</sup>. 具体而言, 当  $\Omega_1 \gg \Omega_2$  时, 单粒子紧束缚模型可以被表示为

$$\begin{aligned} \hat{H}_0 = & -t_s \sum_{\langle i,j \rangle \alpha} (\hat{c}_{i\alpha\uparrow}^\dagger \hat{c}_{j\alpha\uparrow} - \hat{c}_{i\alpha\downarrow}^\dagger \hat{c}_{j\alpha\downarrow}) + \sum_{i\alpha} \Gamma_z^\alpha (\hat{n}_{i\alpha\uparrow} - \hat{n}_{i\alpha\downarrow}) \\ & + t_{so} \sum_{i\alpha} (\hat{c}_{i\alpha\uparrow}^\dagger \hat{c}_{i+1\alpha\downarrow} - \hat{c}_{i\alpha\uparrow}^\dagger \hat{c}_{i-1\alpha\downarrow} + \text{H.c.}), \end{aligned} \quad (20)$$

其中  $\hat{c}_{i\alpha\sigma}$  是位于  $i$  格点、处于轨道  $\alpha$  上自旋为  $\sigma$  的原子湮灭算符,

$$\begin{aligned} t_s &= \left| \int dx \phi^{(i)} [-(\hbar^2/2m)\nabla^2 + V(x)] \phi^{(i+1)} \right|, \\ t_{so} &= \left| \int dx \phi^{(i)} M(x) \phi^{(i+1)} \right|, \\ \Gamma_z^\alpha &= \hbar(\delta_{\alpha\uparrow} - \delta_{\alpha\downarrow})/2 \end{aligned}$$

此处  $\phi^{(i)}$  为晶格势  $V(x)$  中  $i$  格点处最低能带的 Wannier 函数.

在类碱土金属原子中, 由于电子自由度 ( $|g\rangle, |e\rangle$ ) 和核自旋自由度 ( $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ ) 在钟态 ( $^1S_0, ^3P_0$ ) 中不会相互耦合, 所以两个原子的短程相互作用会发生在电子自旋单态和核自旋三态通道

$$|-\rangle \equiv \frac{1}{2}(|ge\rangle - |eg\rangle) \otimes (|\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle),$$

或电子自旋三态和核自旋单态通道

$$|+\rangle \equiv \frac{1}{2}(|ge\rangle + |eg\rangle) \otimes (|\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle)$$

中. 在准一维束缚势阱和外加磁场下, 上述不同散射通道相互耦合, 体系在紧束缚近似下的相互作用可以写为<sup>[134]</sup>

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{int}} &= V_{\text{ex}} \sum_i (\hat{c}_{ig\uparrow}^\dagger \hat{c}_{ie\downarrow}^\dagger \hat{c}_{ie\uparrow} \hat{c}_{ig\downarrow} + \text{H.c.}) \\ &+ U \sum_i (\hat{n}_{ig\uparrow} \hat{n}_{ie\downarrow} + \hat{n}_{ig\downarrow} \hat{n}_{ie\uparrow}) \\ &+ U_0 \sum_{i\sigma} \hat{n}_{ig\sigma} \hat{n}_{ie\sigma}, \end{aligned} \quad (21)$$

其中  $\hat{n}_{i\alpha\sigma} = \hat{c}_{i\alpha\sigma}^\dagger \hat{c}_{i\alpha\sigma}$ ,  $U$  和  $U_0$  是在位相互作用强度,  $V_{\text{ex}}$  是在位轨道间自旋交换相互作用. 所有晶格内相互作用参数  $\{V_{\text{ex}}, U, U_0\}$  都可以利用轨道 Feshbach 共振技术 通过改变外加磁场来调节<sup>[134]</sup>. 值得注意的是当外加磁场为零时, 有  $U_0 = V_{\text{ex}} + U$ <sup>[134]</sup>. 更重要的是, 哈密顿量 (20) 式和 (21) 式具有上文提到的  $U(1) \times Z_2^2$  对称性.

在没有相互作用时, 系统在参数  $\Gamma_z^\alpha < 2t_s$  下的基态可以用两个属于 AIII 类的独立手性拓扑绝缘体来描述<sup>[135]</sup>. 此时体系属于  $\mathbb{Z}$  分类拓扑数等于 2, 且与零能的边缘态数目相对应. 当对称性受到破坏时, 例如存在方程 (21) 所示的相互作用, 体系边缘态将不再是没有相互作用的费米子, 而变为集体模式. 此时得到的 SPT 相将变为  $\mathbb{Z}_4$  分类. 在之前的研究中, 已经有工作讨论了一维 AIII 拓扑体系中的  $\mathbb{Z}_4$  约化问题<sup>[136,137]</sup>. 可以将这些  $\mathbb{Z}_4$  相分别标记为  $K = 0, 1, 2, 3$ , 其中  $K = 0$  对应拓扑平庸相,  $K = 1$  为生成元相 (root phase), 对应相互作用下的单链 AIII 拓扑绝缘体, 有相互作用的 SPT 相属于  $K = 2$  相. 当相互作用较强时, 体系将经过连续相变变为平庸相或有序相, 同时伴随着边缘态的消失. 为了理解这些相和相变的性质, 我们利用密度矩阵重整化群 (density matrix renormalization group, DMRG) 方法进行了数值模拟. 在计算中, 在每个 DMRG 单元中选取 300 个截断态, 并且进行最大截断误差约为  $10^{-7}$  的 20 次扫描.

## 4.2 相互作用诱导的拓扑相变和体系相图

鉴别一维非平庸拓扑相的通常做法是检测基态纠缠谱中的简并度. 纠缠谱可以定义为  $\xi_i = -\ln(\rho_i)$ <sup>[138–144]</sup>, 其中  $\rho_i$  是约化密度矩阵  $\hat{\rho}_L = \text{Tr}_R|\psi\rangle\langle\psi|$  的本征值,  $|\psi\rangle$  为体系基态, 脚标 L 和 R 与一维链的左半部分和右半部分相对应. 由于纠缠谱  $\xi_i$  与边缘激发态能谱相似, 所以只要  $\xi_i$  的本征值是简并的, 就意味着系统会出现拓扑非平庸性质<sup>[144]</sup>. 我们首先介绍固定参数  $U$ ,  $\Gamma_z^\alpha$  和  $t_{so}$  条件下, 不断增大自旋交换相互作用  $V_{\text{ex}}$  的情况. 图 6(a) 描绘了约化密度矩阵四个最小本征值的纠缠谱随  $V_{\text{ex}}/t_s$  的变化情况. 从图中可以看出尽管在  $V_{\text{ex}} = 0$  时纠缠谱中本征态是四重简并的, 但当  $V_{\text{ex}}$  较弱时部分简并消失. 由于纠缠谱的简并性通常等于对称群中不可约投影表示的维度, 所以简并度破缺可以理解为此投影表示被约化为了不同的不可约表示. 对于排斥相互作用 ( $V_{\text{ex}} > 0$ ), 当相互作用强度超过临界点  $V_{\text{ex}}^c/t_s \approx 1.69$  时纠缠谱将不再简并. 由于在临界点两侧不存在局域对称性破缺, 所以穿过临界点就标志着发生从有相互作用 SPT 相到平庸相的拓扑相变. 对于吸引相互作用区域 ( $V_{\text{ex}} < 0$ ), 即使在  $|V_{\text{ex}}|$  很大时, 非平庸 SPT 相依然存在.

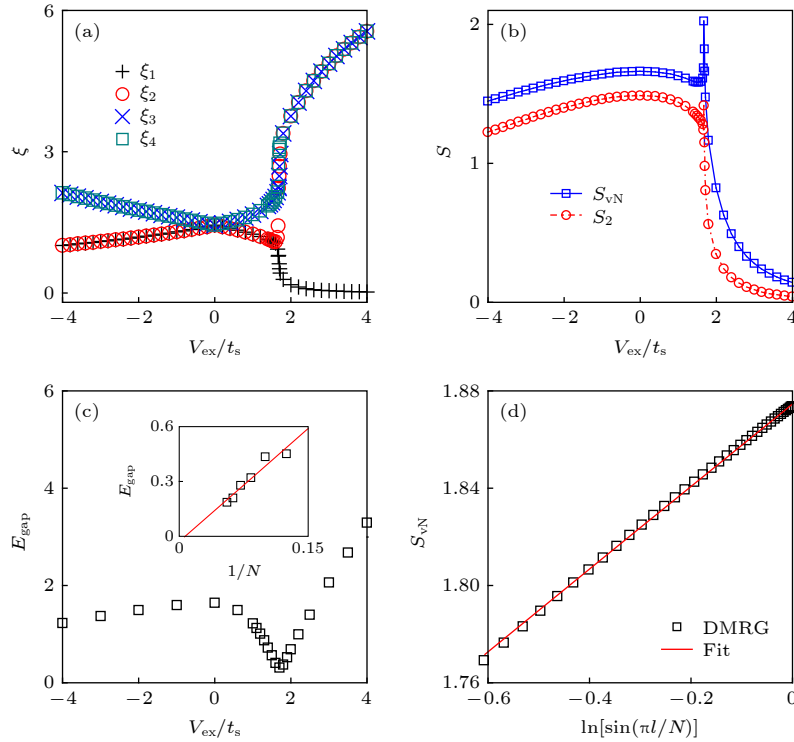


图 6 (a) 本征值最小的四个纠缠谱  $\xi_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) 随自旋交换相互作用的变化; (b) 开边界条件下, 在格点数  $N = 60$  的光晶格链中, 二阶 Rényi 熵  $S_2$  和 von Neumann 熵  $S_{vN}$  随  $V_{ex}/t_s$  的变化情况; (c) 周期边界条件下, 在格点数  $N = 12$  的光晶格链中, 体能隙  $E_{gap}$  的变化情况. 内嵌图为体能隙在临界点处随  $1/N$  的变化情况. 图中线性拟合的红色实线给出大  $N$  极限下  $E_{gap}/t_s \approx -0.02 \pm 0.05$ ; (d) 临界点  $V_{ex}/t_s = 1.694$  处, 长度为  $l$  且格点数  $N = 120$  的子链中 von Neumann 熵随  $\ln[\sin(\pi l/N)]$  的变化. 通过线性拟合  $S_{vN} = (C/6) \ln[\sin(\pi l/N)] + 1.87$ , 可以得到中心荷 (central charge)  $C = 1.018$ . 图中所有计算均在半满状态下进行, 且固定参数  $\Gamma_z^{g/e} = 0$ ,  $U = 0$ ,  $t_{so}/t_s = 0.4$  [128]

Fig. 6. (a) The entanglement spectrum  $\xi_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ); (b) in a chain with  $N = 60$  lattice sites and under open boundary conditions, the second-order Rényi entropy  $S_2$  and the von Neumann entropy  $S_{vN}$  vary with  $V_{ex}/t_s$ ; (c) in a chain with  $N = 12$  lattice sites and under the periodic boundary condition, the bulk energy gap  $E_{gap}$  varies with  $V_{ex}/t_s$ . Inset: The bulk gap as a function of  $1/N$  at the critical point, and the red solid line is a linear fit with  $E_{gap}/t_s \approx -0.02 \pm 0.05$  in the large- $N$  limit. (d) in a chain with  $N = 120$  lattice sites and at the critical point  $V_{ex}/t_s = 1.694$ , the von Neumann entropy of a subchain of length  $l$  varied with  $\ln[\sin(\pi l/N)]$ . The solid line is the linear fit with  $S_{vN} = (C/6) \ln[\sin(\pi l/N)] + 1.87$  and  $C = 1.018$ . The central charge is 6 times the slope of the linear fit. All calculations are performed at half filling and with the fixed parameters  $\Gamma_z^{g/2} = 0$ ,  $U = 0$ , and  $t_{so}/t_s = 0.4$  [128].

通过对熵和体能隙的计算, 可以进一步确定由相互作用驱动的拓扑相变发生的位置. 如图 6(b) 所示, 二阶 Rényi 熵  $S_2 = -\log \text{Tr}(\hat{\rho}_L^2)$  [145–149] 和 von Neumann 熵  $S_{vN} = -\text{Tr}_L[\hat{\rho}_L \log \hat{\rho}_L]$  在临界点处都会出现突变. 图 6(c) 描绘了在周期边界条件下格点数  $N = 12$  的晶格中半满状态下体能隙的变化情况. 当系统穿过临界点时, 体能隙会在热力学极限下闭合 (如内嵌图所示) 然后再次打开, 这是一个典型的连续拓扑相变过程. von Neumann 熵在临界点处的突变指示了连续相变的发生, 而由此产生的中心荷可以反映相变的种类. 图 6(d) 描绘了长度为  $l$  的子链的 von Neumann 熵随  $\ln[\sin(\pi l/N)]$  的变化. 从图中曲线的斜率可以计算出中心荷  $C$  [150,151] 约为  $C \approx 1.018$ , 与 Luttinger 液体中的  $C$

值接近 (Luttinger 液体中  $C = 1$ ). 此外, 自旋关联  $\langle \hat{S}_{i\alpha x} \hat{S}_{j\alpha x} \rangle$  ( $\hat{S}_{i\alpha x}$  为  $i$  格点处并处于  $\alpha$  轨道的原子沿  $x$  轴方向的自旋算符) 在临界点处将呈现出系数约为 1.38 的指数衰减. 此外, 原子在两个轨道间的在位密度差也会在临界点附近出现相似的指数衰减行为, 其衰减系数约为 2.1, 可以被看作在轨道自由度中的自旋关联. 这些结果表明, 体系在临界点处为 Luttinger 液体.

图 7 展示了由纠缠谱和熵的数值结果给出的体系相图. 通过计算相应的局域量, 可以进一步确定相图中的拓扑平庸态, 例如轨道或自旋梯级单态 (orbital or spin rung-singlet, ORS or SRS)、电荷密度波 (charge-density wave, CDW) 态和轨道密度波 (orbital-density wave, ODW) 态. 正如前

文讨论过的, 当  $U = 0$  时, 体系的多体基态将经历从拓扑 (topological, T) 非平庸态到平庸态的转变. 在图 7 中, 选择的 SOC 强度为  $t_{so}/t_s = 0.4$ . 如果从 T 态开始减小  $t_{so}$  值, 在临界值  $t_{so}^c$  处将发生拓扑相变, 体系在  $t_{so} < t_{so}^c$  时转变为拓扑平庸的. 此发现进一步强调了 SOC 在稳定拓扑相方面起到的重要作用. 另外, 我们也发现在有限塞曼场  $\Gamma_z^\alpha$  中可以得到类似的相图.

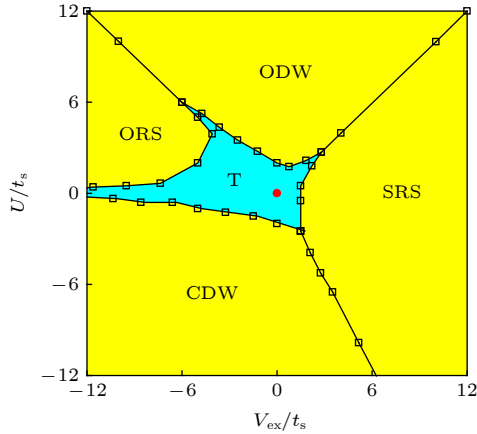


图 7 格点数  $N = 60$  且处于半满状态下的体系相图, 其中  $\Gamma_z^\alpha = 0$  [128]

Fig. 7. The phase diagram of a lattice with  $N = 60$  sites at half filling with  $\Gamma_z^\alpha = 0$  [128].

### 4.3 小结

本节中提出在有相互作用的准一维类碱土金属原子气体中, 可以通过利用电子轨道自由度和核自旋自由度, 以及拉曼过程诱导的 SOC 和轨道 Feshbach 共振提供的自旋交换相互作用, 实现有相互作用的费米对称性保护拓扑态. 通过数值计算, 给出了体系的相图, 并刻画了在不同参数区间存在的物质相和相变.

## 5 $SU(3)$ 自旋轨道耦合玻色气体中的自旋双涡旋

在接下来的两节中, 将讨论 SOC 在玻色系统中的一些新发现. 在以往的研究中, 人们更多地关注自旋 1/2 系统中 SOC 所衍生的新奇性质. 在数学上表现为  $SU(2)$  的泡利矩阵代表的自旋算符与动量算符耦合. 然而, 如果自旋自由度中包含两个以上的态,  $SU(2)$  自旋矩阵将无法完整地描述内态中的所有耦合. 例如, 在一个三分量系统中, 态  $|1\rangle$

和  $|-1\rangle$  间的直接跃迁将被遗漏 [152]. 此时, 需要利用  $SU(3)$  矩阵来完整描述三分量体系中的自旋轨道耦合 [153]. 在传统的凝聚态物理研究中, 人们多关注自旋 1/2 的电子, 而对  $SU(3)$  自旋轨道耦合及其可能诱导产生的新奇量子态和拓扑缺陷研究较少.

本节关注具有  $SU(3)$  自旋轨道耦合的玻色-爱因斯坦凝聚, 并介绍其中可能出现的一类新型拓扑缺陷——自旋双涡旋. 在这个系统中, 根据自旋相互作用是铁磁或反铁磁的不同情况,  $SU(3)$  自旋轨道耦合可能会产生两种不同的基态: 磁化相或晶格相. 在磁化相中,  $SU(3)$  自旋轨道耦合将诱导产生三重简并的基态, 这与  $SU(2)$  自旋轨道耦合的情况形成鲜明对比. 在晶格相中,  $SU(3)$  自旋轨道耦合破坏了普通旋量 BEC 中的相位约束条件:  $2w_0 = w_1 + w_{-1}$ , 并且会诱导产生三种在中心有不同磁化填充的新奇涡旋. 其中  $w_i$  为第  $i$  个自旋分量的环绕数 [154–156]. 这些涡旋的交错排列将导致环绕数为 2 的多重自旋涡旋的自发形成. 在实验中, 可以利用对磁场敏感的相位成像技术来观测此类拓扑缺陷.

### 5.1 $SU(3)$ 自旋轨道耦合

我们研究的系统是  $F = 1$  且具有  $SU(3)$  自旋轨道耦合的旋量 BEC. 在平均场近似下, 体系哈密顿量可以写为 Gross-Pitaevskii (GP) 方程的形式:

$$H = \int dr \left[ \Psi^\dagger \left( -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{so} \right) \Psi + \frac{c_0}{2} n^2 + \frac{c_2}{2} |\mathbf{F}|^2 \right], \quad (22)$$

这里可以利用总粒子数  $N = \int dr \Psi^\dagger \Psi$  对序参量  $\Psi = [\Psi_1(\mathbf{r}), \Psi_0(\mathbf{r}), \Psi_{-1}(\mathbf{r})]^T$  进行归一化. 粒子数密度为  $n = \sum_{m=1,0,-1} \Psi_m^*(\mathbf{r}) \Psi_m(\mathbf{r})$ , 自旋密度矢量  $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$  被定义为  $F_v(\mathbf{r}) = \Psi^\dagger f_v \Psi$ , 其中  $\mathbf{f} = (f_x, f_y, f_z)$  是自旋为 1 的不可约表示矩阵中的矢量 [157–159]. 哈密顿量中 SOC 项为  $V_{so} = \kappa \lambda \cdot \mathbf{p}$ , 其中  $\kappa$  是 SOC 强度,  $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$  代表二维动量,  $\lambda = (\lambda_x, \lambda_y)$  是二维等效自旋. 利用 Gell-Mann 矩阵  $\lambda^{(i)} (i = 1, \dots, 8)$ , 自旋算符的分量可以表示为  $\lambda_x = \lambda^{(1)} + \lambda^{(4)} + \lambda^{(6)}$  和  $\lambda_y = \lambda^{(2)} - \lambda^{(5)} + \lambda^{(7)}$ . 值得注意的是, 哈密顿量中的  $SU(3)$  自旋轨道耦合项包含三个态中所有的两两耦合. 而在具有  $SU(2)$  自旋轨道耦合的旋量 BEC 中,  $\Psi_1(\mathbf{r})$  态和  $\Psi_{-1}(\mathbf{r})$  态只是间接耦合在一起的 [160,161]. 此外, 在上述哈密

顿量中, 参数  $c_0$  和  $c_2$  分别代表密度-密度相互作用强度和自旋相互作用强度.

有  $SU(3)$  自旋轨道耦合的哈密顿量可以通过与  $SU(2)$  自旋轨道耦合相似的方法来实现<sup>[162, 163]</sup>. 如图 8 所示, 三束有不同偏振和频率且以  $2\pi/3$  角度相交的激光被用于拉曼耦合中. 每束激光分别缀饰一个  $F = 1$  的超精细自旋态到  $|e\rangle$  激发态上. 当使用标准旋波近似, 并将激发态绝热消除后, 可以得到如方程 (22) 所示的有效哈密顿量.

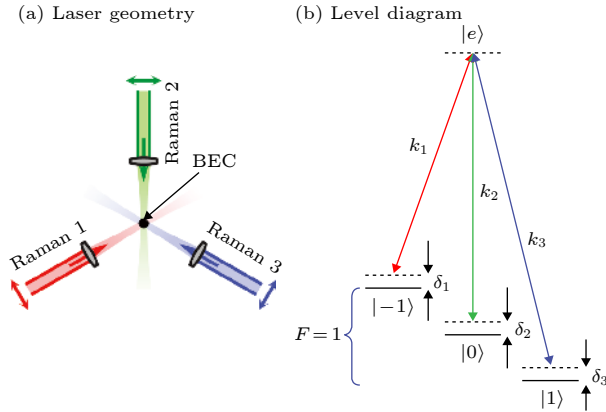


图 8 旋量 BEC 中产生  $SU(3)$  自旋轨道耦合的原理图 (a) 激光作用. 三束有不同频率和偏振的激光, 以  $2\pi/3$  的角度作用于原子气体; (b) 能级图. 三个拉曼过程分别缀饰  $^{87}\text{Rb}$  中  $^{87}\text{Rb}$  中  $5S_{1/2}, F = 1$  基态的超精细塞曼能级  $|F = 1, m_F = 1\rangle$ ,  $|F = 1, m_F = 0\rangle$  和  $|F = 1, m_F = -1\rangle$  的  $^{87}\text{Rb}$   $5S_{1/2}, F = 1$ .  $\delta_1, \delta_2$  和  $\delta_3$  与拉曼过程的失谐对应<sup>[162]</sup>

Fig. 8. Scheme for creating  $SU(3)$  spin-orbit coupling in spinor BECs: (a) Laser geometry. The cloud of atoms is illuminated by three laser beams with different frequencies and polarizations, intersecting at an angle of  $2\pi/3$  (b) Each of the three Raman lasers dresses one hyperfine Zeeman level from eman level from  $|F = 1, m_F = 1\rangle$ ,  $|F = 1, m_F = 0\rangle$  and  $|F = 1, m_F = -1\rangle$  of the  $^{87}\text{Rb}$   $5S_{1/2}, F = 1$ .  $\delta_1, \delta_2$ , and  $\delta_3$  are the detuning in the Raman transitions<sup>[162]</sup>.

## 5.2 体系相图

接下来讨论体系的多体基态相图. 对于  $SU(2)$  自旋轨道耦合的情况, 已有研究表明体系两个多体基态 (磁化态和条纹态) 可以在均匀系统中稳定存在<sup>[152]</sup>. 尽管 Rashba 类型的 SOC 使单粒子谱中存在无穷多简并的最小值, 但由于存在自旋相互作用, 多体基态在动量空间中将会凝聚于一个或两个点处<sup>[152]</sup>. 这导致对于  $SU(2)$  的自旋轨道耦合, 除非引入一个强束缚简谐势阱, 在动量空间中存在三点或更多处凝聚的晶格态是不稳定的<sup>[160]</sup>.

对于本节考虑的  $SU(3)$  自旋轨道耦合的情况,

首先选择  $\Psi = \alpha_1\Psi_1 + \alpha_2\Psi_2 + \alpha_3\Psi_3$  作为试探波函数, 通过变分方法来研究系统可能存在的基态, 其中

$$\Psi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i2\kappa x}, \quad (23)$$

$$\Psi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\pi}{3}} \\ e^{i\frac{\pi}{3}} \\ e^{i\pi} \end{pmatrix} e^{i\kappa(x-\sqrt{3}y)}, \quad (24)$$

$$\Psi_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\pi}{3}} \\ e^{-i\frac{\pi}{3}} \\ e^{i\pi} \end{pmatrix} e^{i\kappa(x+\sqrt{3}y)}, \quad (25)$$

对应于所有粒子处于单粒子谱三个简并基态中的某一个多体凝聚态,  $\alpha_{i=1,2,3}$  为对应的展开系数. 将 (23) 式—(25) 式代入相互作用能量泛函

$$E = \int dr \left( \frac{c_0}{2} n^2 + \frac{c_2}{2} |\mathbf{F}|^2 \right), \quad (26)$$

可以得到

$$\frac{E}{N} = \left( \frac{c_0}{2} + \frac{4c_2}{9} \right) \bar{n} - \frac{7c_2}{9\bar{n}} \sum_{i \neq j} |\alpha_i|^2 |\alpha_j|^2, \quad (27)$$

其中  $\bar{n} = |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + |\alpha_3|^2$  为平均粒子数密度. 通过最小化与  $|\alpha_i|^2$  有关的相互作用能量, 可以发现自旋相互作用会显著影响体系的相图.

当  $c_2 > 0$  时, 通过最小化能量可得  $|\alpha_1|^2 = |\alpha_2|^2 = |\alpha_3|^2 = \bar{n}/3$ , 这意味着系统基态是一个由三个单粒子最小值等权叠加的三角晶格相. 另一方面, 当  $c_2 < 0$  时, 系统更倾向于成为一个满足参数  $|\alpha_1|^2 = \bar{n}, |\alpha_2|^2 = |\alpha_3|^2 = 0$  或  $|\alpha_2|^2 = \bar{n}, |\alpha_1|^2 = |\alpha_3|^2 = 0$  或  $|\alpha_3|^2 = \bar{n}, |\alpha_1|^2 = |\alpha_2|^2 = 0$  的态, 这意味着基态占据在动量空间的某一个最小值处, 形成一个三重简并的磁化相.

在 SOC 比较强的情况下, 体系的化学势主要由 SOC 决定, 上面介绍的变分波函数 (23) 式—(25) 式可以比较好地描述体系的性质. 而对于 SOC 强度较弱, 相互作用相对较强的情况, 则必须依赖于数值模拟来得到体系的多体基态. 在这种情况下, 我们发现在  $c_2 \gg \kappa^2$  条件下将会出现在动量空间中两个最小值布局的条纹相.

通过虚时演化方法最小化与哈密顿量 (22) 式对应的能量泛函, 可以数值得到体系的多体基态. 研究表明, 数值计算的结果与上文讨论的变分结果

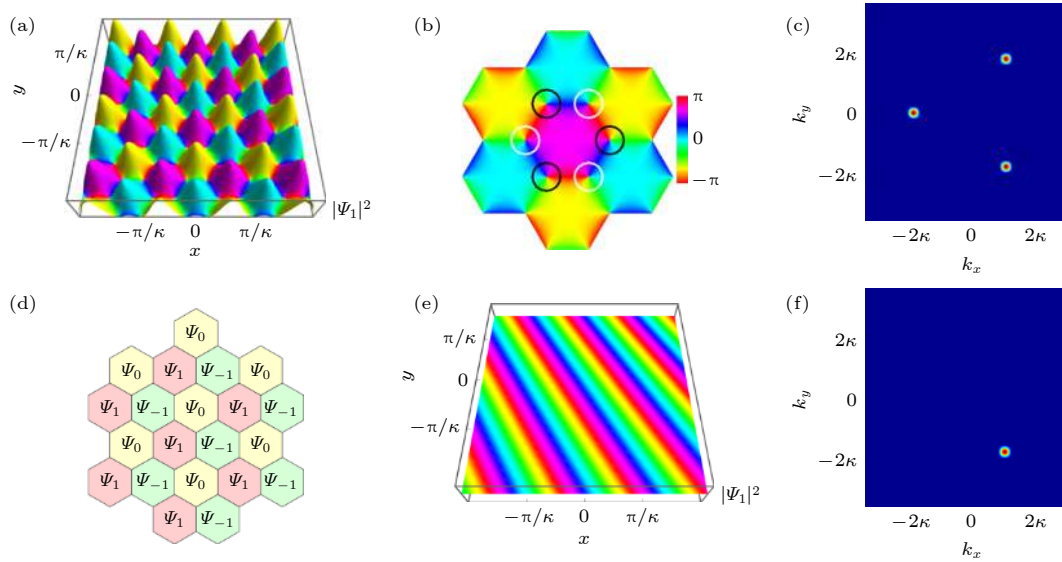


图 9 有  $SU(3)$  自旋轨道耦合的 BEC 中的两种不同相 (a)–(d) 存在反铁磁自旋相互作用时 ( $c_2 > 0$ ) 的拓扑非平庸晶格相. 图 (a) 中的高度和颜色分别代表  $\Psi_1$  的密度和相位. 在图 (b) 中, 一个单胞中呈现出涡旋 (白色圆圈) 和反涡旋 (黑色圆圈) 的位置. 图 (c) 和图 (d) 分别展示了晶格相的动量分布和相分离结构的示意图; (e), (f) 存在铁磁自旋相互作用时 ( $c_2 < 0$ ) 的三重简并磁化相. 图 (e) 和图 (f) 分别展示了  $\Psi_1$  在实空间和动量空间的分布<sup>[162]</sup>

Fig. 9. Two distinct phases of  $SU(3)$  spin-orbit-coupled BECs: (a)–(d) The topologically nontrivial lattice phase with antiferromagnetic spin interaction ( $c_2 > 0$ ). (a) The heights and colors correspond to the density and phase of  $\Psi_1$  respectively, (b) the positions of vortices (white circles) and antivortices (black circles) in the phase within one unit cell, (c) the corresponding momentum distributions, (d) the structural schematic drawing of the phase separation; (e), (f) the threefold-degenerate magnetized phase for ferromagnetic spin interaction ( $c_2 < 0$ ). (e) the density and phase distributions of  $\Psi_1$ , (f) the corresponding momentum distributions<sup>[162]</sup>.

在弱相互作用区间  $c_2 \lesssim \kappa^2$  内基本一致. 图 9 描绘了有  $SU(3)$  自旋轨道耦合的旋量 BEC 中两种可能存在的基态. 当  $c_2 > 0$  时, 如图 9(a)–图 9(d) 所示, 体系中三种成分互不相融, 并且排列成一个相互交错, 且有空间平移对称性自发破缺的三角晶格. 如图 9(d) 所示, 此晶格为拓扑非平庸且在其中镶嵌有涡旋和反涡旋. 因此, 晶格相可以在有  $SU(3)$  自旋轨道耦合的均匀 BEC 中稳定存在. 与之形成鲜明对比的是, 在  $SU(2)$  的系统中一般需要外加一个强简谐束缚势阱<sup>[160]</sup>. 关于涡旋的性质将在下文讨论. 另一方面, 如图 9(e) 和图 9(f) 所示, 当  $c_2 < 0$  时, 体系三种成分混合在一起, 同时体系将形成一个具有空间平移对称性, 但时间反演对称性破缺的磁化相. 由于存在自发对称性破缺, 磁化相将占据在单粒子谱三个简并基态中的一个. 因此磁化相是三重简并的, 而在  $SU(2)$  情况中为二重简并<sup>[164]</sup>.

然而, 对于参数为  $c_2 \gg \kappa^2$  的强反铁磁自旋相互作用, 系统可能会出现动量空间中三个最小值中的两处被占据的条纹相. 通过将动量空间中两点或三点最小值处被占据的态作为试探波函数, 同时结合虚时演化, 可以找到相对应的最优基态能量.

图 10(a) 描绘了原子间相互作用强度为不同值时晶格相和条纹相的能量对比情况. 从图中可以明显发现当原子间相互作用强度超过一个临界值时, 条纹相的能量将低于晶格相中能量. 如图 10(d) 所示, 由于垂直于条纹方向存在有限值动量, 空间平移和时间反演对称性都会发生破缺 (如图 10(b) 和图 10(c) 所示). 这一点也显著区别于  $SU(2)$  自旋轨道耦合诱导产生的条纹相<sup>[152]</sup>.

### 5.3 相位条件

旋量 BEC 中的涡旋结构取决于体系三个自旋分量间的相位关系. 接下来将讨论 SOC 对晶格结构相位条件的影响. 首先假设在极坐标系  $(r, \theta)$  中自旋序参量可以写为

$$\psi_j(r, \theta) = \phi_j e^{iw_j \theta + \alpha_j}, \quad (28)$$

其中  $j = 0, \pm 1$ ,  $\phi_j \geq 0$ .

#### 5.3.1 不存在自旋轨道耦合

当体系中不存在 SOC 时, 哈密顿量中与相位有关的部分是

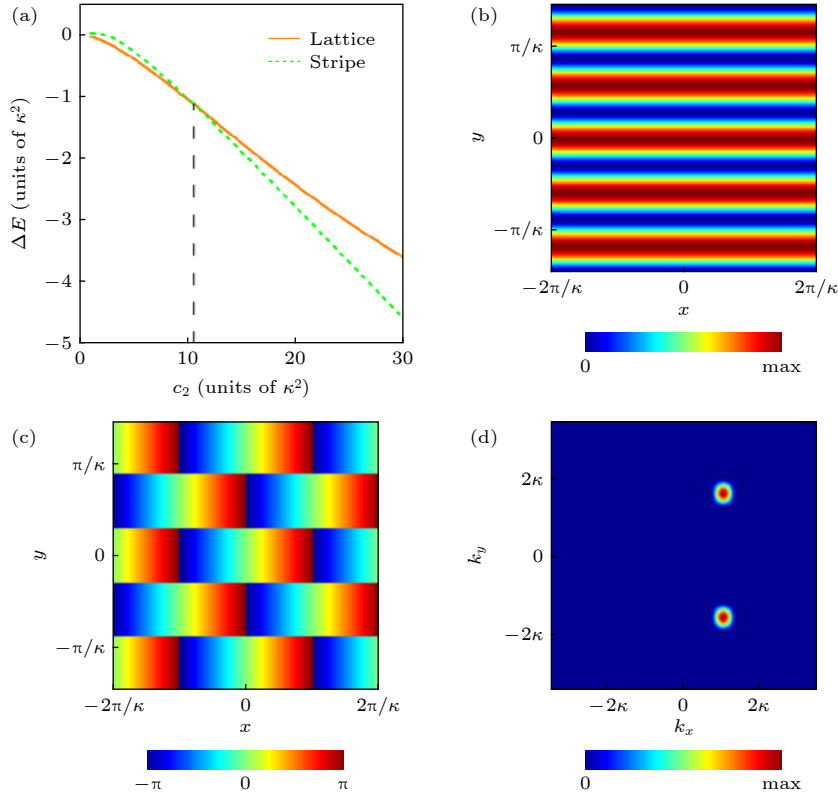


图 10 (a) 晶格相和条纹相的能量对比; (b)—(d) 参数  $c_2 = 20\kappa^2$  和  $c_0 = 10c_2$  时, 条纹相基态的密度、相位和动量的分布<sup>[162]</sup>  
 Fig. 10. (a) Energy comparison between the lattice and stripe phases. The solid (lattice state) and dashed (stripe state) lines correspond to the energy difference  $\Delta E$  between the numerical simulation and the variational calculation; (b)–(d) the ground-state density, phase and momentum distributions of the stripe phase with the parameters  $c_2 = 20\kappa^2$  and  $c_0 = 10c_2$ <sup>[162]</sup>.

$$\begin{aligned}
 H^{\text{phase}} &= E_{\text{kin}}^{\text{phase}} + E_{\text{int}}^{\text{phase}} \\
 &= -\frac{1}{2} \int \Psi^* \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \Psi \, \text{d}r \\
 &\quad + 2c_2 \int \text{Re}(\psi_1^* \psi_{-1}^* \psi_0^2) \, \text{d}r, \quad (29)
 \end{aligned}$$

其中第一项由动能产生, 第二项来自于自旋相互作用. 将方程 (28) 代入 (29) 式可以得到

$$E_{\text{kin}}^{\text{phase}} = \sum_{j=1,0,-1} w_j^2 \int \frac{\pi \phi_j^2}{r} \, \text{d}r, \quad (30)$$

$$\begin{aligned}
 E_{\text{int}}^{\text{phase}} &= 2c_2 \int \phi_1 \phi_{-1} \phi_0^2 \, \text{d}r \\
 &\quad \times \int \cos[(w_1 - 2w_0 + w_{-1})\theta \\
 &\quad + (\alpha_1 - 2\alpha_0 + \alpha_{-1})] \, \text{d}\theta. \quad (31)
 \end{aligned}$$

从 (30) 式中可以很容易发现体系在能量上更倾向于处在小环绕数的状态. 从 (31) 式中进一步看出能量最小化需要环绕数和相位满足下面的关系:

$$w_1 - 2w_0 + w_{-1} = 0, \quad (32)$$

$$\alpha_1 - 2\alpha_0 + \alpha_{-1} = n\pi, \quad (33)$$

其中当  $c_2 > 0$  时  $n$  为奇数, 当  $c_2 < 0$  时  $n$  为偶数. 方程 (32) 所示的相位条件表明下面这些不同自旋分量的环绕数可以存在于旋量 BEC 系统中:  $\langle \pm 1, \times, 0 \rangle$ ,  $\langle 0, \times, \pm 1 \rangle$ ,  $\langle \pm 1, 0, \mp 1 \rangle$ ,  $\langle \pm 1, \pm 1, \pm 1 \rangle$ ,  $\langle \pm 2, \pm 1, 0 \rangle$  和  $\langle 0, \pm 1, \pm 2 \rangle$ . 在这里, 符号  $\times$  代表体系中  $\Psi_0$  成分没有占据.

### 5.3.2 $SU(2)$ 自旋轨道耦合

对于存在  $SU(2)$  自旋轨道耦合的情况, 我们以 Rashba 类型 SOC 为例, 对应的哈密顿量可以写为

$$E_{\text{soc}} = \int \kappa \psi^\dagger \begin{pmatrix} 0 & -i\partial_x - \partial_y & 0 \\ -i\partial_x + \partial_y & 0 & -i\partial_x - \partial_y \\ 0 & -i\partial_x + \partial_y & 0 \end{pmatrix} \psi \, \text{d}r, \quad (34)$$

这里  $\psi = [\psi_1, \psi_0, \psi_{-1}]^T$ . 将 (28) 式代入 (34) 式中可以得到

$$E_{\text{soc}} = \int \text{drd}\theta \left[ (\phi_0 r \partial_r \phi_1 - w \phi_0 \phi_1) e^{i[(w_1 - w_0 + 1)\theta + (\alpha_1 - \alpha_0 - \frac{\pi}{2})]} - (\phi_1 r \partial_r \phi_0 + w_0 \phi_1 \phi_0) e^{-i[(w_1 - w_0 + 1)\theta + (\alpha_1 - \alpha_0 - \frac{\pi}{2})]} \right. \\ \left. + (\phi_0 r \partial_r \phi_{-1} + w_{-1} \phi_0 \phi_{-1}) e^{i[(w_{-1} - w_0 - 1)\theta + (\alpha_{-1} - \alpha_0 - \frac{\pi}{2})]} - (\phi_{-1} r \partial_r \phi_0 - w_0 \phi_{-1} \phi_0) e^{-i[(w_{-1} - w_0 - 1)\theta + (\alpha_{-1} - \alpha_0 - \frac{\pi}{2})]} \right]. \quad (35)$$

为了最小化 SOC 能量, 参数倾向于满足下面关系:

$$w_1 - w_0 + 1 = 0, \quad (36)$$

$$w_{-1} - w_0 - 1 = 0, \quad (37)$$

$$\alpha_1 - \alpha_0 - \pi/2 = m\pi, \quad (38)$$

$$\alpha_{-1} - \alpha_0 - \pi/2 = n\pi. \quad (39)$$

此时 SOC 能量可以改写为

$$E_{\text{soc}} = 2\pi \int [\phi_0 r \partial_r \phi_1 - \phi_1 r \partial_r \phi_0 - (w_1 + w_0) \phi_0 \phi_1] \text{dr} \cos m\pi \\ + 2\pi \int [\phi_0 r \partial_r \phi_{-1} - \phi_{-1} r \partial_r \phi_0 + (w_{-1} + w_0) \phi_0 \phi_{-1}] \text{dr} \cos n\pi, \quad (40)$$

通过最小化能量方程 (40), 可以确定参数  $m$  和  $n$  的奇偶性. 可以发现  $SU(2)$  自旋轨道耦合不违反 (32) 式所示的一般环绕数条件, 但会另外出现如方

程 (36) 和方程 (37) 所示的条件. 由此产生的影响是: 尽管环绕数组合  $\langle -1, 0, 1 \rangle$ ,  $\langle -2, -1, 0 \rangle$  和  $\langle 0, 1, 2 \rangle$  仍被体系接受, 但  $\langle \pm 1, \pm 1, \pm 1 \rangle$ ,  $\langle \pm 1, \times, 0 \rangle$ ,  $\langle 0, \times, \pm 1 \rangle$ ,  $\langle 1, 0, -1 \rangle$ ,  $\langle 2, 1, 0 \rangle$  和  $\langle 0, -1, -2 \rangle$  将不被允许. 可以明显看出, SOC 破坏了体系的手性对称, 进而诱导产生手性自旋结构.

### 5.3.3 $SU(3)$ 自旋轨道耦合

对于  $SU(3)$  自旋轨道耦合, 有效哈密顿量可写为

$$E_{\text{soc}} = \int \kappa \psi^\dagger \begin{pmatrix} 0 & -i\partial_x - \partial_y & -i\partial_x + \partial_y \\ -i\partial_x + \partial_y & 0 & -i\partial_x - \partial_y \\ -i\partial_x - \partial_y & -i\partial_x + \partial_y & 0 \end{pmatrix} \psi \text{dr}, \quad (41)$$

将方程 (28) 代入 (41) 式, 可得

$$E_{\text{soc}} = \int \text{drd}\theta \left[ (\phi_0 r \partial_r \phi_1 - w_1 \phi_0 \phi_1) e^{i[(w_1 - w_0 + 1)\theta + (\alpha_1 - \alpha_0 - \frac{\pi}{2})]} \right. \\ \left. - (\phi_1 r \partial_r \phi_0 + w_0 \phi_1 \phi_0) e^{-i[(w_1 - w_0 + 1)\theta + (\alpha_1 - \alpha_0 - \frac{\pi}{2})]} \right. \\ \left. + (\phi_0 r \partial_r \phi_{-1} + w_{-1} \phi_0 \phi_{-1}) e^{i[(w_{-1} - w_0 - 1)\theta + (\alpha_{-1} - \alpha_0 - \frac{\pi}{2})]} \right. \\ \left. - (\phi_{-1} r \partial_r \phi_0 - w_0 \phi_{-1} \phi_0) e^{-i[(w_{-1} - w_0 - 1)\theta + (\alpha_{-1} - \alpha_0 - \frac{\pi}{2})]} \right. \\ \left. + (\phi_{-1} r \partial_r \phi_1 + w_1 \phi_{-1} \phi_1) e^{i[(w_1 - w_{-1} - 1)\theta + (\alpha_1 - \alpha_{-1} - \frac{\pi}{2})]} \right. \\ \left. - (\phi_1 r \partial_r \phi_{-1} - w_{-1} \phi_1 \phi_{-1}) e^{-i[(w_1 - w_{-1} - 1)\theta + (\alpha_1 - \alpha_{-1} - \frac{\pi}{2})]} \right]. \quad (42)$$

通过最小化 SOC 能量, 可以得到下面的关系:

$$w_1 - w_0 + 1 = 0, \quad (43)$$

$$w_{-1} - w_0 - 1 = 0, \quad (44)$$

$$w_1 - w_{-1} - 1 = 0, \quad (45)$$

$$\alpha_1 - \alpha_0 - \pi/2 = m\pi, \quad (46)$$

$$\alpha_{-1} - \alpha_0 - \pi/2 = n\pi, \quad (47)$$

$$\alpha_1 - \alpha_{-1} - \pi/2 = l\pi. \quad (48)$$

进而 SOC 能量可以写为

$$E_{\text{soc}} = 2\pi \int [\phi_0 r \partial_r \phi_1 - \phi_1 r \partial_r \phi_0 - (w_1 + w_0) \phi_0 \phi_1] \text{dr} \cos m\pi \\ + 2\pi \int [\phi_0 r \partial_r \phi_{-1} - \phi_{-1} r \partial_r \phi_0 + (w_{-1} + w_0) \phi_0 \phi_{-1}] \text{dr} \cos n\pi \\ + 2\pi \int [\phi_{-1} r \partial_r \phi_1 - \phi_1 r \partial_r \phi_{-1} + (w_1 + w_{-1}) \phi_{-1} \phi_1] \text{dr} \cos l\pi, \quad (49)$$



其中参数  $m, n, l$  的奇偶性由方程 (49) 决定. 然而, 方程 (43)–(45) 无法同时满足. 因此  $SU(3)$  自旋轨道耦合的相位条件将出现以下几种情况:

情况一:

$$w_1 - w_0 + 1 = 0, \quad (50)$$

$$w_{-1} - w_0 - 1 = 0, \quad (51)$$

$$\alpha_1 - \alpha_0 - \frac{\pi}{2} = m\pi, \quad (52)$$

$$\alpha_{-1} - \alpha_0 - \frac{\pi}{2} = n\pi. \quad (53)$$

情况二:

$$w_1 - w_0 + 1 = 0, \quad (54)$$

$$w_1 - w_{-1} - 1 = 0, \quad (55)$$

$$\alpha_1 - \alpha_0 - \frac{\pi}{2} = m\pi, \quad (56)$$

$$\alpha_1 - \alpha_{-1} - \frac{\pi}{2} = l\pi. \quad (57)$$

情况三:

$$w_{-1} - w_0 - 1 = 0, \quad (58)$$

$$w_1 - w_{-1} - 1 = 0, \quad (59)$$

$$\alpha_{-1} - \alpha_0 - \frac{\pi}{2} = n\pi, \quad (60)$$

$$\alpha_1 - \alpha_{-1} - \frac{\pi}{2} = l\pi. \quad (61)$$

对于情况一, 体系可能出现  $\langle -1, 0, 1 \rangle$  的环绕数组合, 而  $\langle 1, 0, -1 \rangle$  则不被允许, 这意味着体系手性对称发生破缺. 对于情况二和情况三, 可以发现  $SU(3)$  自旋轨道耦合破坏了方程 (32) 所示的环绕数满足的一般条件, 因此可能出现新的形如  $\langle 0, 1, -1 \rangle$  和  $\langle 1, -1, 0 \rangle$  的环绕数组合.

### 5.4 涡旋结构

根据环绕数组合和涡旋中心磁化特征, 可以对旋量 BEC 中的涡旋结构进行分类 [154–156]. 举例来说, Mermin-Ho 涡旋具有铁磁涡旋中心, 且不同自旋分量的环绕数为  $\langle \pm 2, \pm 1, 0 \rangle$ , 其中  $\pm$  代表涡旋的不同手性 [165],  $\langle w_1, w_0, w_{-1} \rangle$  表示在波函数中  $\Psi_1, \Psi_0, \Psi_{-1}$  部分分别有环绕数  $w_1, w_0, w_{-1}$ . 使用这种标记方式, 极化核心 (polar core) 涡旋对应环绕数组合  $\langle \pm 1, 0, \mp 1 \rangle$  和一个反铁磁涡旋核心, 半量子 (half-quantum) 涡旋则对应环绕数组合  $\langle \pm 1, \times, 0 \rangle$  和一个铁磁涡旋核心.

在由反铁磁自旋相互作用和  $SU(3)$  自旋轨道耦合共同诱导产生的晶格相中, 存在如图 11 所示的三种类型的涡旋: 一种是对应环绕数组合  $\langle -1, 0, 1 \rangle$  的极化核心涡旋, 另外两种是分别对应环绕数组合  $\langle 1, -1, 0 \rangle$  和  $\langle 0, 1, -1 \rangle$  的铁磁核心涡旋. 此外, 由于在有  $SU(3)$  自旋轨道耦合的系统中手性对称将发生破缺, 所有具有反手性的涡旋结构, 例如  $\langle 1, 0, -1 \rangle$ ,  $\langle -1, 1, 0 \rangle$  和  $\langle 0, -1, 1 \rangle$ , 将不被允许.

有趣的是, 我们发现这两种铁磁中心涡旋的环绕数组合  $\langle 1, -1, 0 \rangle$  和  $\langle 0, 1, -1 \rangle$  将违反普通旋量 BEC 中的相位条件  $2w_0 = w_1 + w_{-1}$  [154–156]. 这是因为不同自旋分量间的相对相位此时不再仅由自旋相互作用决定, 同时也会受到  $SU(3)$  自旋轨道耦合的影响. 因此, 如图 11 所示交织排列的三种类型涡旋将形成一个在没有 SOC 体系中无法实现的涡旋晶格.

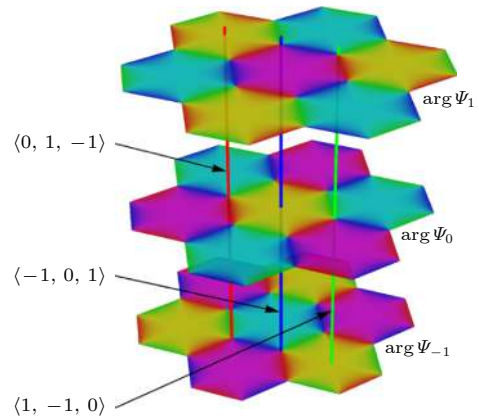


图 11 有  $SU(3)$  自旋轨道耦合的反铁磁旋量 BEC 中的涡旋结构. 图中描绘了三个自旋分量中的涡旋排列. 三种类型的涡旋包括: 一个不同自旋分量的环绕数组合为  $\langle -1, 0, 1 \rangle$  的极化核心涡旋 (蓝线所示), 两个环绕数组合分别为  $\langle 1, -1, 0 \rangle$  (绿线所示) 和  $\langle 0, 1, -1 \rangle$  的铁磁核心涡旋 [162].

Fig. 11. Vortex arrangement among the three components in antiferromagnetic spinor BECs with  $SU(3)$  spin-orbit coupling. There are three types of vortices, including a polar-core vortex with winding combination  $\langle -1, 0, 1 \rangle$  (blue line) and two ferromagnetic-core vortices with winding number combinations  $\langle 1, -1, 0 \rangle$  (green line) and  $\langle 0, 1, -1 \rangle$  (red line) [162].

### 5.5 自旋双涡旋结构

自旋涡旋是由对称性破缺诱导产生的一种复杂拓扑缺陷, 其特点是环绕无磁化核心的质量流为零、而量子化的自旋流不为零 [166–169]. 自旋涡旋不

仅与在磁性薄膜中发现的磁性涡旋不同<sup>[170,171]</sup>, 而且由于存在自旋结构中的奇点<sup>[172]</sup>, 自旋涡旋也有别于二维 Skyrmion<sup>[173]</sup>. 实验中已经在铁磁自旋 BEC 中观测到环绕数  $l = 1$  的量子自旋环流<sup>[174]</sup>. 然

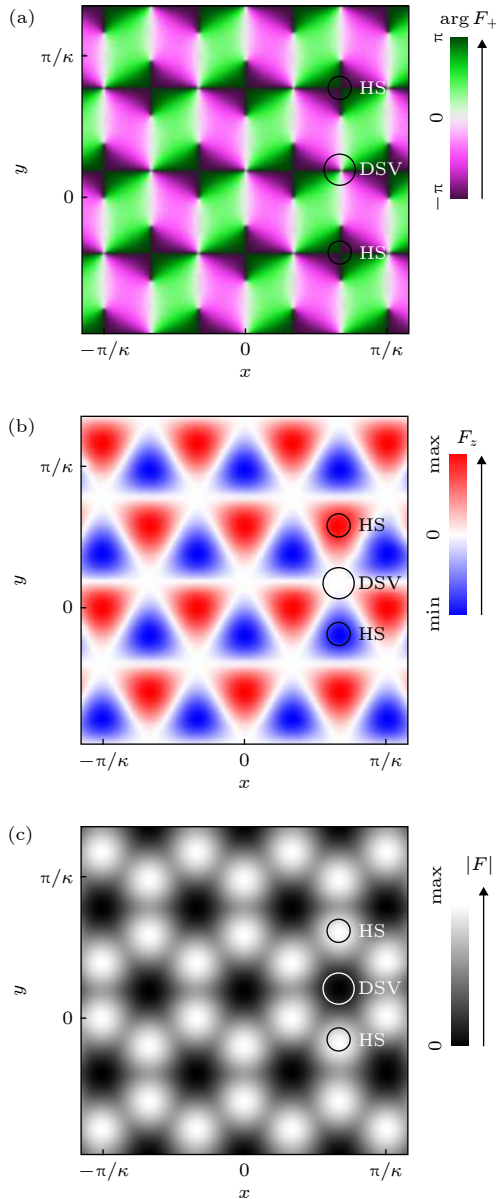


图 12 有  $SU(3)$  自旋轨道耦合的反铁磁自旋 BEC 中的自旋双涡旋 (a) 横向磁化的空间分布, 其中颜色表示磁化方向; (b), (c) 分别描绘了纵向磁化和总磁化幅度的分布. 图中分别用大圆圈和小圆圈标记了自旋双涡旋和 half-Skyrmion 这两种类型的拓扑缺陷<sup>[162]</sup>

Fig. 12. The double-quantum spin vortex in antiferromagnetic spinor BECs with  $SU(3)$  spin-orbit coupling: (a) Spatial maps of the transverse magnetization. The colors correspond to the magnetization orientation; (b) longitudinal magnetization; (c) amplitude of the total magnetization  $|\mathbf{F}|$ . The big and small circles represents the two kinds of topological defects: double-quantum spin vortex and half-Skyrmion.<sup>[162]</sup>

而,  $l(l \geq 2)$  的多量子自旋涡旋被认为是拓扑不稳定的, 至今还没有在实验中观测到.

在本节考虑的具有  $SU(3)$  自旋轨道耦合的旋量 BEC 中, 我们发现晶格相中的极化核心涡旋拥有两个围绕无磁化核心的自旋流, 因此可以被定义为自旋双涡旋. 图 12 描绘了自旋双涡旋的横向磁化  $F_+ = F_x + iF_y$ , 纵向磁化  $F_z$  和总磁化  $|\mathbf{F}|$  的幅度, 这些量在实验中可以通过对磁场敏感的相位成像技术来观测. 从图中可以发现两种不同类型的拓扑缺陷: 自旋双涡旋和 half-Skyrmion(HS)<sup>[175]</sup>, 分别对应环绕数组合为  $(-1, 0, 1)$  的极化核心涡旋, 以及  $(1, -1, 0)$  或  $(0, 1, -1)$  的铁磁核心涡旋. 值得注意的是, 自旋双涡旋的核心是非磁化的, 且磁化方向沿着围绕核心的一条封闭路径会发生  $4\pi$  角度的旋转. 因此在有  $SU(3)$  自旋轨道耦合的反铁磁旋量 BEC 中会自发出现一个由多重自旋涡旋组成的常规晶格. 通过考虑有限温度的影响, 可以进一步确定自旋双涡旋在低温下不会被热涨落破坏, 因此在实验中可以被实现.

## 5.6 小结

本节介绍了具有  $SU(3)$  自旋轨道耦合的旋量玻色气体中的基态. 发现  $SU(3)$  自旋轨道耦合和自旋相互作用将共同决定体系的基态相图. 当存在有效铁磁自旋相互作用时,  $SU(3)$  自旋轨道耦合会引入三重简并, 而在存在反铁磁自旋相互作用时, SOC 将破坏旋量玻色气体中的一般相位规则, 并在体系中诱导产生自旋双涡旋.

## 6 存在软核长程相互作用和自旋轨道耦合的玻色气体中的手性超固相

手性是自然界中普遍存在的现象<sup>[176,177]</sup>. 研究手性物质中的新奇态, 是物理学的一个重要课题, 同时也为设计特殊功能材料提供了一些思路和线索. 最近发现的新奇手性物态, 如手性超导<sup>[178]</sup>、手性电子<sup>[179]</sup>、手性畴壁<sup>[180–182]</sup> 和手性 Skyrmons<sup>[183]</sup>, 都吸引了科研工作者的广泛兴趣. 在上述的很多体系中, SOC 都是手性对称性破缺的重要因素.

之前关于 SOC 的大量研究都仅针对硬核系统. 这些系统中原子间相互作用通常取为零距离接触作用<sup>[184,185]</sup> 或长程偶极势<sup>[186,187]</sup>. 然而, 通过使用 Rydberg 缀饰技术, 可以在玻色气体中实现软

核相互作用<sup>[188–190]</sup>. 硬核相互作用和软核相互作用的本质区别在于当两个原子距离较近时, 相互作用势表现出的行为有显著的不同. 对于硬核情况, 相互作用将趋于无穷大, 而对于软核系统, 相互作用势将趋于一个有限值. 之前已有研究表明, 软核长程相互作用可以诱导产生自发超固体<sup>[191,192]</sup>. 作为一种人们长期寻找的新奇物质相, 自发超固体可以同时表现出固体性质和无摩擦超流性质<sup>[193–197]</sup>. 因

$$H = \int d\mathbf{r} \Psi^\dagger \left( -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2M} + V_{\text{so}} \right) \Psi + \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \sum_{i,j=\uparrow,\downarrow} g_{ij} \Psi_i^*(\mathbf{r}) \Psi_j^*(\mathbf{r}) \Psi_j(\mathbf{r}) \Psi_i(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \sum_{i,j=\uparrow,\downarrow} \Psi_i^*(\mathbf{r}) \Psi_j^*(\mathbf{r}') U_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \Psi_j(\mathbf{r}') \Psi_i(\mathbf{r}), \quad (62)$$

其中旋量 BEC 的序参量定义为  $\Psi = [\Psi_\uparrow(\mathbf{r}), \Psi_\downarrow(\mathbf{r})]^T$ , 且满足归一化条件  $\int d\mathbf{r} \Psi^\dagger \Psi = N$ . 这里  $\mathbf{r} = (x, y)$ . SOC 项可以写为:  $V_{\text{so}} = -i\hbar\kappa(\sigma_x \partial_x \pm \sigma_y \partial_y)$ , 其中  $\sigma_{x,y}$  为泡利矩阵,  $\kappa$  为 SOC 强度. SOC 项中  $\pm$  代表了 SOC 的种类,  $+$  为 Rashba 类型,  $-$  为 Dresselhaus 类型. 本节关注具有  $SU(2)$  对称性的玻色气体, 因此接触相互作用强度  $g_{ij}$  满足  $g = g_{\uparrow\uparrow} = g_{\downarrow\downarrow} = g_{\uparrow\downarrow}$ . 描述软核长程相互作用的有效势可以写为  $U_{ij}(\mathbf{r}) = \tilde{C}_6^{(ij)} / (R_c^6 + |\mathbf{r}|^6)$ , 其中  $\tilde{C}_6^{(ij)}$  表示相互作用强度,  $R_c$  表示阻塞半径<sup>[189]</sup>.

实验中在  $^{87}\text{Rb}$  原子的 ( $5S_{1/2}, F=1$ ) 基态中可以实现哈密顿量 (62) 式, 其中两个超精细态  $|F=1, m_F=-1\rangle$  和  $|F=1, m_F=0\rangle$  可以被用来模拟体系中自旋向上 ( $|\uparrow\rangle$ ) 和向下 ( $|\downarrow\rangle$ ) 的分量. 尽管体系中自然存在着接触相互作用, 但利用 Rydberg 缀饰技术可以人为创造软核长程相互作用, 此过程是利用一个非共振双光子过程将基态原子与一个高激发 Rydberg 态弱耦合在一起<sup>[188–190]</sup>. 软核长程相互作用强度  $\tilde{C}_6^{(ij)}$  和阻塞半径  $R_c$  取决于双光子拉比频率和失谐, 在实验中可以在较宽的范围内调节. Rashba 和 Dresselhaus 类型的 SOC 可以通过调节梯度磁场<sup>[198]</sup> 或拉曼激光缀饰来实现<sup>[28]</sup>. 二维体系可以通过在轴向加一个强简谐势阱  $V(z) = M\omega_z^2 z^2 / 2$  来实现, 势阱的特征长度为  $a_{h_z} = \sqrt{\hbar / M\omega_z} \ll R_c$ . 假设体系所有的能量尺度都远小于该简谐势阱的束缚能, 二维有效接触相互作用可以写为  $g_{ij} = \sqrt{8\pi}(\hbar^2 / M)(a_{ij} / a_{h_z})$ , 其中  $a_{ij}$

此, 对于同时具有 SOC 和软核相互作用的体系, 人们自然会提出一个问题: 能否实现一个手性对称性破缺的超固体相?

## 6.1 哈密顿量

考虑一个有软核长程相互作用和 SOC 的二维均匀 BEC. 体系在平均场近似下的哈密顿量可以写为 Gross-Pitaevskii 的形式:

为对应的三维 s 波散射长度<sup>[199]</sup>.

## 6.2 手性超固体

通过数值最小化哈密顿量 (62) 式, 可以得到体系的多体基态. 在没有 SOC 的体系中, 已有研究表明软核长程相互作用可以诱导产生具有类旋子模式软化的超固体相<sup>[188,189]</sup>. 在这种情况下, 哈密顿量关于手性算符  $\hat{O} = \hat{K}$  具有对称性, 这里  $\hat{K}$  代表复共轭. 而 Rashba 类型或 Dresselhaus 类型的 SOC 可以使这种手性对称发生破缺, 并且诱导产生一个新奇手性超固体相. 如图 13 所示, 在这个相中每个单胞都存在顺时针或逆时针的环流. 同时, 在每个单胞中两种自旋分量沿着径向分开, 分量内相互作用较弱的自旋位于中心位置, 并被相互作用较强的自旋分量环绕. 尽管处于单胞中心的自旋分量的相位是平庸的, 但环绕在外的自旋分量沿着围绕中心的闭合路径存在一个  $2\pi$  的相位梯度, 因此在每个单胞中都存在涡旋. 特别值得注意的是, 在这里所有涡旋的环绕方向都相同. 与之形成鲜明对比的是, 在有 SOC 的硬核系统中涡旋和反涡旋总是成对出现的<sup>[200–203]</sup>.

为了得到这些整齐排布的涡旋物理图像, 我们可以将 Rashba 类型 SOC 项

$$H_{\text{so}} = -i\hbar\kappa \int d\mathbf{r} \Psi^\dagger (\sigma_x \partial_x + \sigma_y \partial_y) \Psi$$

在极坐标系  $(r, \varphi)$  下改写为

$$H_{\text{so}} = -2\kappa \int_{\Lambda_0} d\mathbf{r} \text{Re} \left[ \Psi_\uparrow^* \exp(-i\varphi) \left( i \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{r \partial \varphi} \right) \Psi_\downarrow \right], \quad (63)$$

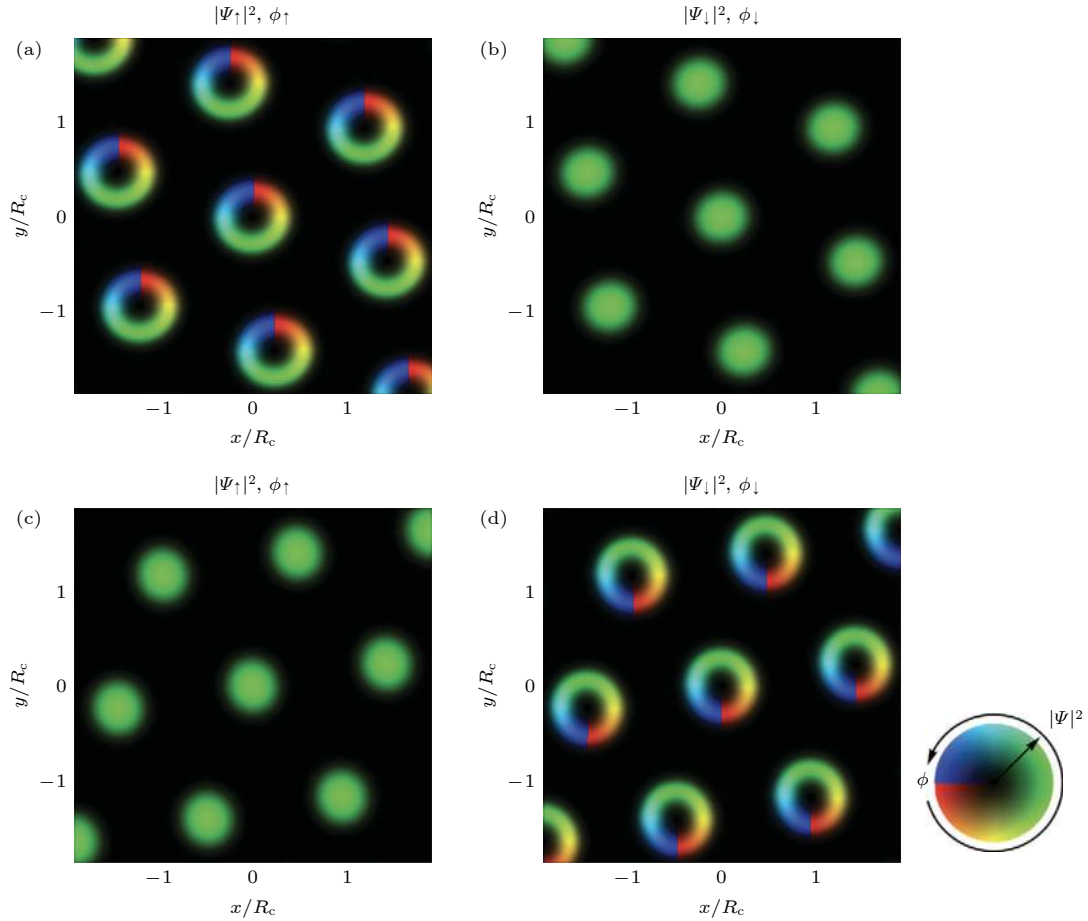


图 13 由 Rashba 类型 SOC 和软核长程相互作用诱导产生的手性超固体. 图中的亮度和颜色分别表示密度和相位分布. 软核长程相互作用在图 (a) 和图 (b) 中为  $\tilde{C}_6^{(\uparrow\uparrow)}N = 2\tilde{C}_6^{(\downarrow\downarrow)}N = 2500\hbar^2 R_c^4/M$ , 在图 (c) 和图 (d) 中为  $\tilde{C}_6^{(\downarrow\downarrow)}N = 2\tilde{C}_6^{(\uparrow\uparrow)}N = 2500\hbar^2 R_c^4/M$ . 色标圆盘中的箭头方向表示相应物理量增加的方向. 其他固定参数分别为  $\tilde{C}_6^{(\uparrow\downarrow)}N = 1250\hbar^2 R_c^4/M$ ,  $\kappa = 4\hbar/MR_c$  和  $gN = 1000\hbar^2/M$ . 这里使用的软核长程相互作用强度  $\tilde{C}_6^{(ij)}$  在实验中可以实现<sup>[200]</sup>

Fig. 13. Chiral supersolid induced by Rashba spin-orbit coupling and soft-core long-range interactions. The brightness and color represent the density and phase distributions respectively. The soft-core long-range interactions in (a) and (b) is  $\tilde{C}_6^{(\uparrow\uparrow)}N = 2\tilde{C}_6^{(\downarrow\downarrow)}N = 2500\hbar^2 R_c^4/M$ , and in (c) and (d) is  $\tilde{C}_6^{(\downarrow\downarrow)}N = 2\tilde{C}_6^{(\uparrow\uparrow)}N = 2500\hbar^2 R_c^4/M$ . The directions of the arrows in the color wheel indicate the elevation of the respective quantities. Other parameters are fixed at  $\tilde{C}_6^{(\uparrow\downarrow)}N = 1250\hbar^2 R_c^4/M$ ,  $\kappa = 4\hbar/MR_c$  and  $gN = 1000\hbar^2/M$ <sup>[200]</sup>.

其中  $\Lambda_0$  表示超固体晶体结构中一个单胞所对应的积分域, 波函数可以表示为密度和相位的形式:  $\Psi_j = \sqrt{n_j} \exp(i\theta_j)$ . 对于核心部分 (用下标 “ $\bullet$ ” 表示), 为避免降低能量, 相位必须满足条件:  $\partial\theta_\bullet/\partial\varphi = 0$ . 另外, 通过考虑旋转对称并忽略径向扩散, 可以自然地假设  $\partial n_j/\partial\varphi = 0$  和  $\partial\theta_j/\partial r = 0$ . 因此, 可以得到

$$H_{\text{so}} = -2\kappa \int_{\Lambda_0} dr [\sin(\theta_\bullet - \theta_\circ \pm \varphi) \sqrt{n_\circ} \partial_r \sqrt{n_\bullet}], \quad (64)$$

这里下标  $\circ$  表示环绕核心的部分. 当核心部分为自旋向上 (向下) 时, 符号  $\pm$  取  $+(-)$ . 为了使 SOC 能量最小化, 参数倾向于满足条件

$$\theta_\bullet - \theta_\circ \pm \varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi l \quad (l \in Z), \quad (65)$$

其中  $\theta_\bullet$  为常数. 上述结果意味着如果核心部分为自旋向上 (向下), 环绕部分倾向于有一个  $+2\pi$  ( $-2\pi$ ) 的相位梯度, 这同时与图 12 所示的数值计算结果一致.

单胞内的径向相位分离和非平庸的环流共同组成了一种拓扑自旋结构. 通过定义布洛赫矢量  $\mathbf{s} = \Psi^\dagger \sigma \Psi / |\Psi|^2$ , 可以从方程 (65) 中得到  $s_x = \pm \sqrt{1-s_z^2} \sin \varphi$ ,  $s_y = \mp \sqrt{1-s_z^2} \cos \varphi$  和  $s_z = (n_\uparrow - n_\downarrow) / (n_\uparrow + n_\downarrow)$ , 其中布洛赫矢量  $\mathbf{s}$  将态  $\Psi$  投影到了一个单位布洛赫球面上. 很显然, 在遍历一个单胞的过程中, 布洛赫矢量仅覆盖布洛赫球面一次. 因此, 图 13 所示的手性超固相与磁性材料中的 Skyrmion

晶体有相似的性质<sup>[204–207]</sup>.

在手性超固相中, 每个单胞都具有一个自发粒子环流. 在流体动力学理论中<sup>[208,209]</sup>, 质量守恒要求在规范势下的实际粒子流有如下形式:

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2Mi} [\Psi^\dagger \nabla \Psi - (\nabla \Psi^\dagger) \Psi] - \frac{1}{M} \Psi^\dagger \mathbf{A} \Psi, \quad (66)$$

其中, 对于 Rashba 类型 SOC 的规范势为  $\mathbf{A} = -\kappa M(\sigma_x, \sigma_y)$ , 对于 Dresselhaus 类型 SOC 的规范势为  $\mathbf{A} = -\kappa M(\sigma_x, -\sigma_y)$ . 粒子流表达式中的第一项 (正则部分) 依赖于相位梯度  $\nabla \theta_j$ , 而第二项 (规范部分) 与相位差  $\theta_j - \theta_0$  相关. 对于 Rashba 类型 SOC 的情况, 依据相位关系 (65) 式, 粒子流可以表示为

$$\mathbf{j}_R = \frac{\hbar}{M} \frac{n_o}{r} \hat{\mathbf{e}}_{\pm\varphi} - 2\kappa \sqrt{n_\uparrow n_\downarrow} \hat{\mathbf{e}}_{\pm\varphi}, \quad (67)$$

其中, 当核心部分为自旋向上 (自旋向下) 时, 方向  $\hat{\mathbf{e}}_{+\varphi}$  ( $\hat{\mathbf{e}}_{-\varphi}$ ) 为逆时针方向 (顺时针方向). 可以发现, 粒子流中正则部分和规范部分通常会有相反的环境方向, 以此来保证能量最小化. 特别是对于强 SOC 的情况, 规范部分将扮演很重要的角色. 同时如图 14(a) 和图 14(b) 中的数值计算结果所示, 粒子环绕方向和涡旋中心自旋取向满足左手定则. 对于 Dresselhaus 类型的 SOC, 利用类似的分析可以得到粒子流表达式:

$$\mathbf{j}_D = -\frac{\hbar}{M} \frac{n_o}{r} \hat{\mathbf{e}}_{\pm\varphi} + 2\kappa \sqrt{n_\uparrow n_\downarrow} \hat{\mathbf{e}}_{\pm\varphi}. \quad (68)$$

因此, 如图 14(c) 和图 14(d) 所示, Dresselhaus 类型 SOC 可以诱导产生一个与 Rashba 类型手性相反的粒子流.

手性粒子环流的存在意味着在超固体相的基态中存在一个有限角动量. 根据方程 (67), 在每个单胞中由 Rashba 类型 SOC 诱导产生的角动量可以表示为

$$l_z = \pm \int_{\Lambda_0} d\mathbf{r} [\hbar n_o - 2\kappa M \sqrt{n_\uparrow n_\downarrow} r]. \quad (69)$$

由于所有涡旋的环绕方向相同, 所以系统总角动量不为零. 需要强调的是, 此有限角动量的出现是由手性对称性破缺直接导致的, 这与利用外加旋转<sup>[210,211]</sup>或人造磁场<sup>[49]</sup>产生角动量的传统方法形成鲜明对比. 另外, 角动量的方向由涡旋中心的自旋取向决定, 因此可以通过改变同种自旋分量内的相互作用强度  $\tilde{C}_6^{(\uparrow\uparrow)}$  和  $\tilde{C}_6^{(\downarrow\downarrow)}$  来调节角动量的方向.

手性超固相中的总自旋角动量  $S_z$  同样不为零.

通过数值计算可以发现, 系统中大部分粒子位于涡旋核心处, 同时存在较弱的分量内相互作用, 只有很少的粒子位于外围环流中, 在图 13 和图 14 中此部分所占比例大约为 9.3%. 因此, 总自旋角动量大约为  $S_z = (\hbar \langle \sigma_z \rangle) / 2 \approx \pm 0.4N\hbar$ . 从图 14 中也可以发现, 对于 Rashba 类型 SOC, 总自旋角动量和轨道角动量的方向相反, 而对于 Dresselhaus 类型 SOC, 二者方向一致.

### 6.3 系统相图

图 15 描绘了体系在不同参数下的相图. 除了上文讨论的手性超固相 (chiral supersolid, CSS) 以外, 图 15 中还讨论了另外两种超固体相: 平面波超固相 (plane-wave supersolid, PWSS) 和驻波超固相 (standing-wave supersolid, SWSS). 在 PWSS 相和 SWSS 相中, 系统均会出现平移对称性破缺, 从而形成晶体结构. 对于 PWSS 相, 在每个单胞中的局域凝聚波函数均会沿一个给定方向出现相位变化. 对于 SWSS 相, 凝聚波函数会出现密度调制并形成条纹. 值得注意的是, PWSS 相和 SWSS 相的局域结构与硬核玻色系统中发现的平面波和条纹相十分类似<sup>[212–214]</sup>, 这同样可以归因于成分内和成分间相互作用的竞争.

从图 15(a) 中也可以看出, 沿着对角线 ( $\tilde{C}_6^{(\uparrow\uparrow)} = \tilde{C}_6^{(\downarrow\downarrow)}$ ) 方向, 哈密顿量 (62) 式具有时间反演对称性  $\hat{T} = i\sigma_y \hat{K}$ . 此对称性在手性超固相中将自发破缺, 并且随机变为图 13 中两个简并结构中的一种. 同时在相图图 15(b) 中, 可以发现另一种反常手性超固相 (anomalous chiral supersolid, ACSS). 此相与上文讨论的 CSS 相相同, 也具有有限的自旋和轨道角动量. 唯一不同的是, 同种自旋内相互作用较弱的分量更倾向于停留在周围的环形圈内, 而不是涡旋核心处. 对于没有 SOC 的传统 BEC, 从能量角度来看系统通常不支持此种形式的相分离<sup>[215]</sup>. 然而当系统中存在 SOC 时, 强度较强的 SOC 需要一个较大的角动量, 这可以通过一个高粒子数密度的圆环来实现. 需要注意的是, 通过调节 SOC 强度和原子间相互作用强度使系统从 CSS 相变为 ACSS 相时, 角动量的方向将如方程 (69) 所示发生改变. 在相图图 15(a) 和图 15(b) 中, 如果同种自旋内相互作用  $\tilde{C}_6^{(\uparrow\uparrow)}$  和  $\tilde{C}_6^{(\downarrow\downarrow)}$  中有一个较弱时, 体系中也会出现一个自旋极化超流相. 在此相中, 所

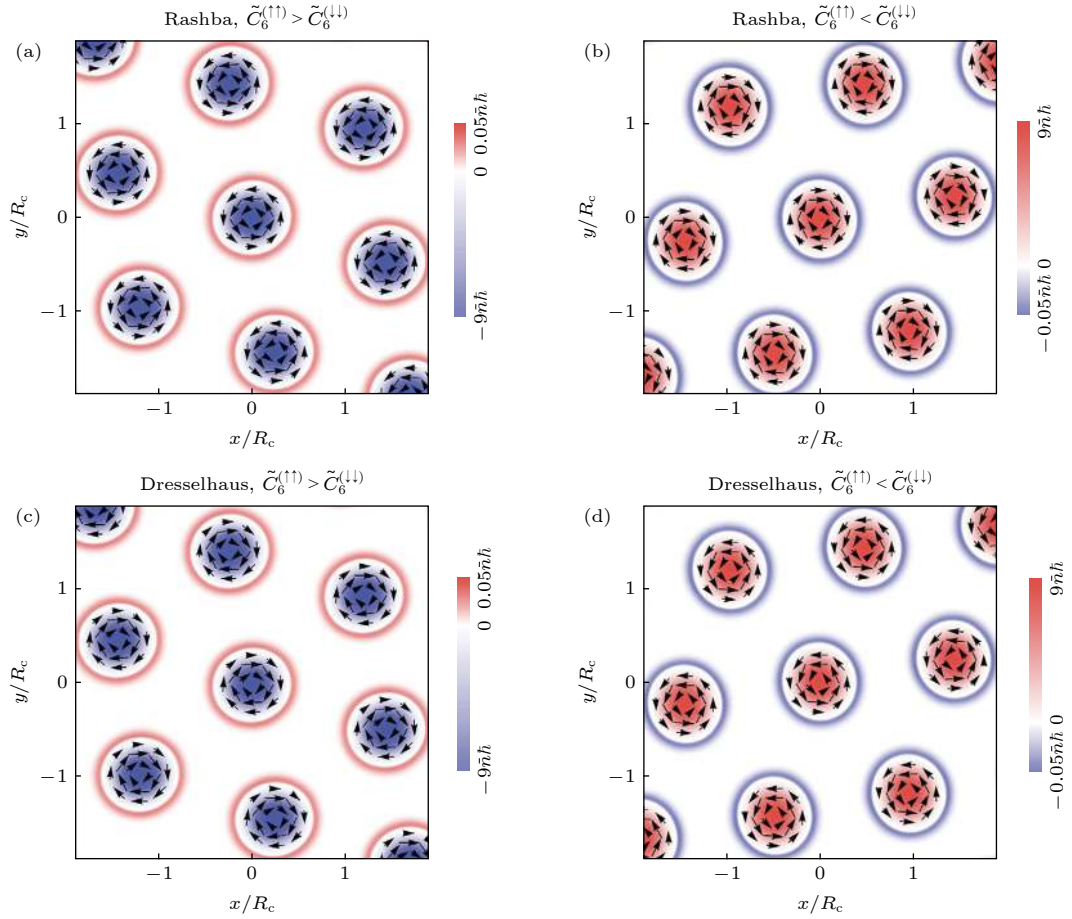


图 14 由 Rashba 类型 SOC((a), (b)) 和 Dresselhaus 类型 SOC((c), (d)) 诱导产生的粒子流  $\mathbf{j}$  和自旋的径向磁化  $S_z$ . 其中颜色从蓝到红代表  $S_z$  从小到大, 黑色箭头代表环流方向  $\mathbf{j}$ . 本图中参数与图 12 相同<sup>[200]</sup>

Fig. 14. Particle currents  $\mathbf{j}$  and longitudinal magnetizations  $S_z$  of the spin induced by Rashba spin-orbit coupling ((a), (b)) and Dresselhaus spin-orbit coupling ((c), (d)).  $S_z$  and  $\mathbf{j}$  are represented by the color map and black arrows, respectively. The colors ranging from blue to red represent the values from the minimum to the maximum. The parameters used here are same as those in Fig. 12<sup>[200]</sup>.

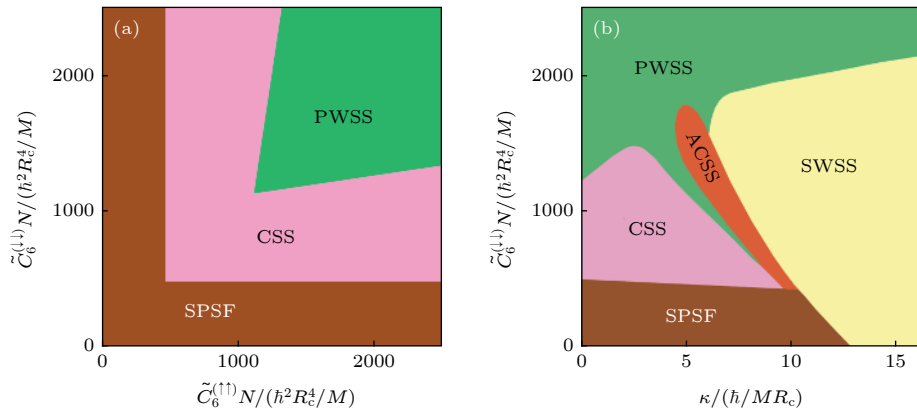


图 15 (a) 通过改变软核长程相互作用强度  $\tilde{C}_6^{(\uparrow\uparrow)}$  和  $\tilde{C}_6^{(\downarrow\downarrow)}$  的体系相图; (b) 通过改变 SOC 强度  $\kappa$  和软核长程相互作用强度  $\tilde{C}_6^{(\downarrow\downarrow)}$  的体系相图. 图 (a) 中 SOC 强度固定为  $\kappa = 4\hbar / MR_c$ , 图 (b) 中软核长程相互作用强度固定为  $\tilde{C}_6^{(\uparrow\uparrow)} = 2500\hbar^2 R_c^4 / M$ . 其他参数为  $\tilde{C}_6^{(\uparrow\downarrow)} N = 1250\hbar^2 R_c^4 / M$  和  $gN = 1000\hbar^2 / M$ <sup>[200]</sup>

Fig. 15. (a) The phase diagram by varying the soft-core long-range interaction strengths  $\tilde{C}_6^{(\uparrow\uparrow)}$  and  $\tilde{C}_6^{(\downarrow\downarrow)}$ ; (b) the phase diagram by varying the Rashba spin-orbit-coupling strength  $\kappa$  and the soft-core long-range interaction strength  $\tilde{C}_6^{(\downarrow\downarrow)}$ . The spin-orbit-coupling strength in (a) is fixed at  $\kappa = 4\hbar / MR_c$ , and the soft-core long-range interaction strength in (b) is fixed at  $\tilde{C}_6^{(\uparrow\uparrow)} = 2500\hbar^2 R_c^4 / M$ . Other parameters are taken as  $\tilde{C}_6^{(\uparrow\downarrow)} N = 1250\hbar^2 R_c^4 / M$  and  $gN = 1000\hbar^2 / M$ <sup>[200]</sup>.

有的粒子凝聚在有较弱软核长程相互作用的分量上,同时密度和相位在空间中均匀分布.

## 6.4 小结

本节介绍了同时具有 SOC 和软核长程相互作用的玻色气体中可能出现的新奇超固体相. 在此相中,伴随着粒子环流的出现,手性对称性将发生破缺. 这意味着可以不通过旋转或有效磁场,就可以产生一个宏观大小的有限角动量. 可以通过调节 SOC 强度或原子间相互作用强度改变角动量的方向. 此理论预测的手性超固体相可以在有 SOC 和 Rydberg 缀饰的 BEC 中实现并观测到.

## 7 结论

本文介绍了在有自旋轨道耦合的超冷原子系统中的一些新研究进展. 文章首先介绍了光腔里无相互作用的准一维费米气体系统中存在的拓扑超辐射态. 通过超辐射相变,腔中光场将和驱动光共同诱导产生自旋轨道耦合效应,并在能带半满处打开一个体能隙,同时引发拓扑相变. 通过计算可以得到体系在有效塞曼场中的稳态相图和相图中的精确临界点. 当光腔中有更多数量的原子时,可以在实验中更容易地观测到此拓扑超辐射态和对应发生的相变.

然后讨论了在有相互作用的准一维碱土金属原子气体中存在的对称性保护拓扑态. 通过分离此类原子中的轨道自由度和核自旋自由度,并利用轨道 Feshbach 共振,可以构造不同状态之间的 SOC,并实现自旋交换的相互作用. 文章讨论了这些参数对有相互作用的费米对称性保护拓扑态的影响,通过数值计算绘制出体系的相图,并刻画了体系中存在的拓扑相变.

接下来研究了在有  $SU(3)$  自旋轨道耦合的玻色气体中存在的自旋双涡旋结构. 研究发现  $SU(3)$  自旋轨道耦合和自旋相互作用对体系相图有重要的影响. 当存在有效铁磁自旋相互作用时,  $SU(3)$  自旋轨道耦合将会在系统基态中引入三重简并,而当存在反铁磁自旋相互作用时,  $SU(3)$  自旋轨道耦合将会破坏自旋玻色气体中的一般相位规则,同时将在体系中诱导产生自旋双涡旋.

最后介绍了通过将 SOC 和软核长程相互作用相结合,诱导产生新奇超固相的理论研究. 在此超

固体相中,伴随着粒子环流的出现,手性对称性将发生破缺. 这意味着可以不通过旋转或有效磁场,就可以产生一个宏观大小的有限角动量. 通过调节 SOC 强度或原子间相互作用强度可以改变这个角动量的方向.

通过对上述问题的综述,我们展示了在冷原子系统中对人造自旋轨道耦合研究的一些新进展. 和传统凝聚态系统中的工作相比,这些研究关注了具有耗散、轨道自由度、大自旋、或软核长程相互作用的新颖系统,体现了冷原子系统的特色,并为理解自选轨道耦合效应开拓了新的思路.

最后,尝试对冷原子气体中自旋轨道耦合的未来发展进行一定展望. 首先,一个十分有意义的研究方向是在实验中实现各种其他新奇形式的 SOC. 其中特别值得关注的是各种类型的高维 SOC,以及可能由其诱导产生的各种拓扑物质态,如二维和三维的拓扑绝缘体、Weyl 半金属、拓扑超导或超流相等等. 第二,将原子内态与其他自由度结合的 SOC 是另一个有趣的方向. 无论是类碱土金属原子(如 Sr 和 Yb)中的电子轨道自由度,还是外部运动的角动量自由度,其与原子内态的相互耦合都会衍生出新的物理,或有助于发展新的测量操控手段. 第三,研究同时具有 SOC 和相互作用的强关联拓扑系统是一个非常重要,同时也充满挑战的方向. 在冷原子系统中,通过结合人造 SOC 和 Feshbach 共振等调控技术,我们有望进行在其他体系中难以实现的量子模拟实验,并尝试寻找由相互作用诱导的新奇量子态,如拓扑超流、分数拓扑绝缘体等. 最后,一个同样重要且有趣的方向,是对量子非平衡系统中丰富的拓扑现象的研究. 和固体物理材料相比,冷原子气体是一个天然的非平衡实验系统. 在极低的温度下,冷原子气体本身就是一个同时具有加热和各类耗散的非平衡体系. 另外,实验中还可以通过激光耦合不同能级的方式实现对驱动和耗散的精细调节. 这些特点既体现了冷原子系统的特色,也为我们提供了研究非平衡动力学的重要平台.

## 参考文献

- [1] Gong M, Tewari S, Zhang C 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 195303
- [2] Hu H, Jiang L, Liu X J, Pu H 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 195304
- [3] Han L, Melo C A R S' a de 2012 *Phys. Rev. A* **85** 011606(R)

- [4] Yu Z Q, Zhai H 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 195305
- [5] Iskin M, Subasi A L 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 050402
- [6] Yi W, Guo G C 2011 *Phys. Rev. A* **84** 031608(R)
- [7] Lin Y J, Jiménez-García K, Spielman I B 2011 *Nature (London)* **471** 83
- [8] Wang P J, Yu Z Q, Fu Z K, Miao J, Huang L H, Chai S J, Zhai H, Zhang J 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 095301
- [9] Cheuk L W, Sommer A T, Hadzibabic Z, Yefsah T, Bakr W S, Zwierlein M W 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 095302
- [10] Huang L H, Meng Z M, Wang P J, Peng P, Zhang S L, Chen L C, Li D H, Zhou Q, Zhang J 2016 *Nat. Phys.* **12** 540
- [11] Wu Z, Zhang L, Sun W, Xu X T, Wang B Z, Ji S C, Deng Y, Chen S, Liu X J, Pan J W 2016 *Science* **354** 83
- [12] Chen H R, Lin K Y, Chen P K, Chiu N C, Wang J B, Chen C A, Huang P P, Yip S K, Kawaguchi Y, Lin Y J 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 113204
- [13] Zhang D F, Gao T Y, Zou P, Kong L R, Li R Z, Shen X, Chen X L, Peng S G, Zhan M S, Pu H, Jiang K J 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 110402
- [14] Zhai H 2015 *Rep. Prog. Phys.* **78** 026001
- [15] Vyasnakere J P, Shenoy V B 2011 *Phys. Rev. B* **83** 094515
- [16] Vyasnakere J P, Zhang S Z, Shenoy V B 2011 *Phys. Rev. B* **84** 014512
- [17] Xu Z F, Lü R, You L 2011 *Phys. Rev. A* **83** 053602
- [18] Kawakami T, Mizushima T, Machida K 2011 *Phys. Rev. A* **84** 011607
- [19] Wu C J, Mondragon-Shem I, Zhou X F 2011 *Chin. Phys. Lett.* **28** 097102
- [20] Stanescu T D, Anderson B, Galitski V 2008 *Phys. Rev. A* **78** 023616
- [21] Deng Y, Cheng J, Jing H, Sun C P, Yi S 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 125301
- [22] Kawakami T, Mizushima T, Nitta M, Machida K 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 015301
- [23] Li Y, Zhou X F, Wu C J 2016 *Phys. Rev. A* **93** 033628
- [24] Sinha S, Nath R, Santos L 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 270401
- [25] Hu H, Ramachandhran B, Pu H, Liu X J 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 010402
- [26] Ramachandhran B, Hu H, Pu H 2013 *Phys. Rev. A* **87** 033627
- [27] Li Y, Zhou X F, Wu C J 2012 *Phys. Rev. B* **85** 125122
- [28] Campbell D L, Juzeliūnas G, Spielman I B 2011 *Phys. Rev. A* **84** 025602
- [29] Sau J D, Sensarma R, Powell S, Spielman I B, Sarma S D 2011 *Phys. Rev. B* **83** 140510(R)
- [30] Xu Z F, You L 2012 *Phys. Rev. A* **85** 043605
- [31] Liu X J, Law K T, Ng T K 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 086401
- [32] Anderson B M, Spielman I B, Juzeliūnas 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 125301
- [33] Xu Z F, You L, Ueda M 2013 *Phys. Rev. A* **87** 063634
- [34] Anderson B M, Juzeliūnas G, Galitski V M, Spielman I B 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 235301
- [35] Zhou J, Zhang W, Yi W 2011 *Phys. Rev. A* **84** 063603
- [36] Chen J, Hu H, Gao X L 2014 *Phys. Rev. A* **90** 023619
- [37] Chen C 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 235302
- [38] Qu C L, Zheng Z, Gong M, Xu Y, Mao L, Zou X B, Guo G C, Zhang C W 2013 *Nat. Commun.* **4** 2710
- [39] Liu X J, Hu H 2013 *Phys. Rev. A* **88** 023622
- [40] Zhang W, Yi W 2013 *Nat. Commun.* **4** 2711
- [41] Cui X L, Yi W 2014 *Phys. Rev. X* **4** 031026
- [42] Shi Z Y, Cui X L, Zhai H 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 013201
- [43] Pan J S, Liu X J, Zhang W, Yi W, Guo G C 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 045303
- [44] Han W, Zhang X F, Song S W, Saito H, Zhang W, Liu W M, Zhang S G 2016 *Phys. Rev. A* **94** 033629
- [45] Han W, Zhang X F, Wang D S, Jiang K J, Zhang W, Zhang S G 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 030404
- [46] Zhou X F, Pan J S, Liu Z X, Zhang W, Yi W, Chen G, Jia S T 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 185701
- [47] Dalibard J, Gerbier F, Juzeliūnas G, Öberg P 2011 *Rev. Mod. Phys.* **83** 1523
- [48] Yi W, Zhang W, Cui X 2015 *Sci. China Phys. Mech. Astron.* **58** 1-11
- [49] Lin Y J, Compton R L, Jiménez-García K, Porto J V, Spielman I B 2009 *Nature (London)* **462** 628
- [50] Lin Y J, Compton R L, Jiménez-García K, Porto J V, Spielman I B 2011 *Nat. Phys.* **7** 531
- [51] Ruseckas J, Juzeliūnas G, Öhberg P, Fleischhauer M 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 010404
- [52] Zhang L, Liu X J 2018 *arXiv* **1806** 05628
- [53] Liu X J, Liu Z X, Cheng M 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 076401
- [54] Sun W, Wang B Z, Xu X T, Yi C R, Zhang L, Wu Z, Deng Y, Liu X J, Chen S, Pan J W 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 150401
- [55] Baumann K, Guerlin C, Brennecke F, Esslinger T 2010 *Nature (London)* **464** 1301
- [56] Ritsch H, Domokos P, Brennecke F, Esslinger T 2013 *Rev. Mod. Phys.* **85** 553
- [57] Dalla Torre E G, Diehl S, Lukin M D, Sachdev S, Strack P 2013 *Phys. Rev. A* **87** 023831
- [58] Gopalakrishnan S, Lev B L, Goldbart P M 2009 *Nat. Phys.* **5** 845
- [59] Strack P, Sachdev S 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 277202
- [60] Müller M, Strack P, Sachdev S 2012 *Phys. Rev. A* **86** 023604
- [61] Domokos P, Ritsch H 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 253003
- [62] Dimer F, Estienne B, Parkins A S, Carmichael H J 2007 *Phys. Rev. A* **75** 013804
- [63] Nagy D, Konya G, Szirmai G, Domokos P 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 130401
- [64] Keeling J, Bhaseen M J, Simons B D 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 143002
- [65] Piazza F, Strack P 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 143003
- [66] Chen Y, Yu Z, Zhai H 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 143004
- [67] Hasan M Z, Kane C L 2010 *Rev. Mod. Phys.* **82** 3045
- [68] Qi X L, Zhang S C 2011 *Rev. Mod. Phys.* **83** 1057
- [69] Lin Y J, Jiménez-García K, Spielman I B 2011 *Nature* **471** 83
- [70] Wang P J, Yu Z Q, Fu Z K, Miao J, Huang L H, Chai S J, Zhai H, Zhang J 2012 *Phys. Rev. Letter* **109** 095301
- [71] Galitski V, Spielman I B 2013 *Nature (London)* **494** 49
- [72] Goldman N, Juzeliūnas G, Öberg P, Spielman I B 2014 *Rep. Prog. Phys.* **77** 126401
- [73] Zhou X, Li Y, Cai Z, Wu C 2013 *J. Phys. B* **46** 134001
- [74] Deng Y, Cheng J, Jing H, Yi S 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 143007
- [75] Dong L, Zhou L, Wu B, Ramachandhran B, Pu H 2014 *Phys. Rev. A* **89** 011602(R)
- [76] Pan J S, Liu X J, Zhang W, Yi W, Guo G C 2015 *Phys. Rev. Letter* **115** 045303
- [77] Liu X J, Law K T, Ng T K 2014 *Phys. Rev. Letter* **112** 086401
- [78] Gu Z C, Wen X G 2009 *Phys. Rev. B* **80** 155131
- [79] Pollmann F, Berg E, Turner A M, Oshikawa M 2012 *Phys. Rev. B* **85** 075125



- [80] Wen X G 1989 *Phys. Rev. B* **40** 7387
- [81] Wen X G, Niu Q 1990 *Phys. Rev. B* **41** 9377
- [82] Wen X G 1990 *Int. J. Mod. Phys. B* **4** 239
- [83] Haldane F D M 1983 *Phys. Rev. Lett.* **50** 1153
- [84] Kane C L, Mele E J 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 146802
- [85] Bernevig B A, Zhang S C 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 106802
- [86] Moore J E, Balents L 2007 *Phys. Rev. B* **75** 121306(R)
- [87] Fu L, Kane C L, Mele E J 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 106803
- [88] Qi X L, Hughes T L, Zhang S C 2008 *Phys. Rev. B* **78** 195424
- [89] Chen X, Gu Z C, Wen X G 2011 *Phys. Rev. B* **83** 035107
- [90] Chen X, Gu Z C, Liu Z X, Wen X G 2013 *Phys. Rev. B* **87** 155114
- [91] Kitaev A 2009 *AIP Conf. Proc.* **1134** 22
- [92] Ryu S, Schnyder A, Furusaki A, Ludwig A 2010 *New J. Phys.* **12** 065010
- [93] Fidkowski L, Kitaev A 2010 *Phys. Rev. B* **81** 134509
- [94] Gu Z C, Wen X G 2014 *Phys. Rev. B* **90** 115141
- [95] Wang C, Potter A C, Senthil T 2014 *Science* **343** 629
- [96] Wu H Q, He Y Y, You Y Z, Yoshida T, Kawakami N, Xu C, Meng Z Y, Lu Z Y 2016 *Phys. Rev. B* **94** 165121
- [97] Takamoto M, Hong F L, Higashi R, Katori H 2005 *Nature (London)* **435** 321
- [98] Ludlow A D, Boyd M M, Zelevinsky T, Foreman S M, Blatt S, Notcutt M, Ido T, Ye J 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 033003
- [99] Swallows M D, Bishof M, Lin Y, Blatt S, Martin M J, Rey A M, Ye J 2011 *Science* **331** 1043
- [100] Bloom B J, Nicholson T L, Williams J R, Campbell S L, Bishof M, Zhang X, Zhang W, Bromley S L, Ye J 2014 *Nature (London)* **506** 71
- [101] Cazalilla M A, Rey A M 2014 *Rep. Prog. Phys.* **77** 124401
- [102] Gorshkov A V, Rey A M, Daley A J, Boyd M M, Ye J, Zoller P, Lukin M D 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 110503
- [103] Wu C, Hu J P, Zhang S C 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 186402
- [104] Fukuhara T, Takasu Y, Kumakura M, Takahashi Y 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 030401
- [105] Cazalilla M A, Ho A F, Ueda M 2009 *New J. Phys.* **11** 103033
- [106] Stellmer S, Tey M K, Huang B, Grimm R, Schreck F 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 200401
- [107] DeSalvo B J, Yan M, Mickelson P G, Martinez de Escobar Y N, Killian T C 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 030402
- [108] Gorshkov A V, Hermele M, Gurarie V, Xu C, Julienne P S, Ye J, Zoller P, Demler E, Lukin M D, Rey A M 2010 *Nat. Phys.* **6** 289
- [109] Kobayashi K, Okumura M, Ota Y, Yamada S, Machida M 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 235302
- [110] Nonne H, Moliner M, Capponi S, Lecheminant P, Totsuka K 2013 *Europhys. Lett.* **102** 37008
- [111] Duivenvoorden K, Quella T 2013 *Phys. Rev. B* **87** 125145
- [112] Zhang X, Bishof M, Bromley S L, Kraus C V, Safronova M S, Zoller P, Rey A M, Ye J 2014 *Science* **345** 1467
- [113] Scazza F, Hofrichter C, Höfer M, De Groot P C, Bloch I, Fölling S 2014 *Nat. Phys.* **10** 779
- [114] Cappellini G, Mancini M, Pagano G, Lombardi P, Livi L, Siciliani de Cumis M, Cancio P, Pizzocaro M, Calonico D, Levi F, Sias C, Catani J, Inguscio M, Fallani L 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 120402
- [115] Mancini M, Pagano G, Cappellini G, Livi L, Rider M, Catani J, Sias C, Zoller P, Inguscio M, Dalmonte M, Fallani L 2015 *Science* **349** 1510
- [116] Bois V, Capponi S, Lecheminant P, Moliner M, Totsuka K 2015 *Phys. Rev. B* **91** 075121
- [117] Roy A, Quella T *arXiv*: 1512.05229
- [118] Hofrichter C, Riegger L, Scazza F, Höfer M, Fernandes D R, Bloch I, Fölling S 2016 *Phys. Rev. X* **6** 021030
- [119] Bois V, Fromholz P, Lecheminant P 2016 *Phys. Rev. B* **93** 134415
- [120] Capponi S, Lecheminant P, Totsuka K 2016 *Ann. Phys. (Amsterdam)* **367** 50
- [121] Wall M L, Koller A P, Li S, Zhang X, Cooper N R, Ye J, Rey A M 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 035301
- [122] Kolkowitz S, Bromley S L, Bothwell T, Wall M L, Marti G E, Koller A P, Zhang X, Rey A M, Ye J 2017 *Nature (London)* **542** 66
- [123] Livi L F, Cappellini G, Diem M, Franchi L, Clivati C, Frittelli M, Levi F, Calonico D, Catani J, Inguscio M, Fallani L 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 220401
- [124] Song B, He C, Zhang S, Hajiyev E, Huang W, Liu X J, Jo G B 2016 *Phys. Rev. A* **94** 061604
- [125] Zhang R, Cheng Y, Zhai H, Zhang Z 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 135301
- [126] Pagano G, Mancini M, Cappellini G, Livi L, Sias C, Catani J, Inguscio M, Fallani L 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 265301
- [127] Höfer M, Riegger L, Scazza F, Hofrichter C, Fernandes D R, Parish M M, Levinsen J, Bloch I, Fölling S 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 265302
- [128] Zhou X F, Pan J S, Liu Z X, Zhang W, Yi W, Chen G, Jia S T 2017 *Phys. Rev. Letter* **119** 185701
- [129] Dzuba V A, Derevianko A 2010 *J. Phys. B* **43** 074011
- [130] Porsev S G, Derevianko A, Fortson E N 2004 *Phys. Rev. A* **69** 021403
- [131] Zhou L, Cui X 2015 *Phys. Rev. B* **92** 140502(R)
- [132] Yu D, Pan J S, Liu X J, Zhang W, Yi W 2017 *Front. Phys.* **13** 136701
- [133] Pan J S, Zhang W, Yi W, Guo G C 2016 *Phys. Rev. A* **94** 043619
- [134] Zhang R, Zhang D, Cheng Y, Chen W, Zhang P, Zhai H 2016 *Phys. Rev. A* **93** 043601
- [135] Liu X J, Liu Z X, Cheng M 2013 *Phys. Rev. Letter* **110** 076401
- [136] Tang E, Wen X G 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 096403
- [137] Morimoto T, Furusaki A, Mudry C 2015 *Phys. Rev. B* **92** 125104
- [138] Zhao J Z, Hu S J, Zhang P 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 195302
- [139] Yoshida T, Peters R, Fujimoto S, Kawakami N 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 196404
- [140] Pollmann F, Turner A M, Berg E, Oshikawa M 2010 *Phys. Rev. B* **81** 064439
- [141] Turner A M, Pollmann F, Berg E 2011 *Phys. Rev. B* **83** 075102
- [142] Fidkowski L 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 130502
- [143] Flammia S T, Hama A, Hughes T L, Wen X G 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 261601
- [144] Li H, Haldane F D M 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 010504
- [145] Hastings M B, González I, Kallin A B, Melko R G 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 157201
- [146] Daley A J, Pichler H, Schachenmayer J, Zoller P 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 020505
- [147] Abanin D A, Demler E 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 020504
- [148] Jiang H C, Wang Z H, Balents L 2012 *Nat. Phys.* **8** 902
- [149] Islam R, Ma R, Preiss P M, Tai M E, Lukin A, Rispoli M, Greiner M 2015 *Nature (London)* **528** 77
- [150] Calabrese P, Cardy J 2004 *J. Stat. Mech: Theory Exp.* **06** P06002
- [151] Nielsen A E B, Sierra G, Cirac J I 2011 *Phys. Rev. A* **83**

- 053807
- [152] Wang C, Gao C, Jian C M, Zhai H 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 160403
- [153] Barnett R, Boyd G R, Galitski V 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 235308
- [154] Kawaguchi Y, Ueda M 2012 *Phys. Rep.* **520** 253
- [155] Isoshima T, Machida K, Ohmi T 2001 *J. Phys. Soc. Jpn.* **70** 1604
- [156] Mizushima T, Kobayashi N, Machida K 2004 *Phys. Rev. A* **70** 043613
- [157] Stamper-Kurn D M, Ueda M 2013 *Rev. Mod. Phys.* **85** 1191
- [158] Wang D S, Shi Y R, Chow K W, Yu Z X, Li X G 2013 *Eur. Phys. J. D* **67** 242
- [159] Wang D S, Ma Y Q, Li X G 2014 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **19** 3556
- [160] Xu Z F, Kawaguchi Y, You L, Ueda M 2012 *Phys. Rev. A* **86** 033628
- [161] Lan Z, Ohberg P 2014 *Phys. Rev. A* **89** 023630
- [162] Han W, Zhang X F, Song S W, Saito H, Zhang W, Liu W M, Zhang S C 2016 *Physics Review A* **94** 033629
- [163] Zhang Y, Mao L, Zhang C 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 035302
- [164] Li Y, Pitaevskii L P, Stringari S 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 225301
- [165] Saito H, Kawaguchi Y, Ueda M 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 065302
- [166] Saito H, Kawaguchi Y, Ueda M 2007 *Phys. Rev. A* **75** 013621
- [167] Kawaguchi Y, Saito H, Kudo K, Ueda M 2010 *Phys. Rev. A* **82** 043627
- [168] Lovegrove J, Borgh M O, Ruostekoski J 2012 *Phys. Rev. A* **86** 013613
- [169] Su S W, Liu I K, Tsai Y C, Liu W M, Gou S C 2012 *Phys. Rev. A* **86** 023601
- [170] Shinjo T, Okuno T, Hassdorf R, Shigeto K, Ono T 2000 *Science* **289** 930
- [171] Wachowiak A, Wiebe J, Bode M, Pietzsch O, Morgenstern M, Wiesendanger R 2002 *Science* **298** 577
- [172] Yi S, Pu H 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 020401
- [173] Leslie L S, Hansen A, Wright K C, Deutsch B M, Bigelow N P 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 250401
- [174] Sadler L E, Higbie J M, Leslie S R, Vengalattore M, Stamper-Kurn D M 2006 *Nature (London)* **443** 312
- [175] Savard T A, Granade S R, O'Hara K M, Gehm M E, Thomas J E 1999 *Phys. Rev. A* **60** 4788
- [176] McGuire B A, Carroll P B, Loomis R A, Finneran I A, Jewell P R, Remijan A J, Blake G A 2016 *Science* **352** 1449
- [177] Yoon M, Srirambalaji R, Kim K 2012 *Chem. Rev.* **112** 1196
- [178] Kallin C, Berlinsky J 2016 *Rep. Prog. Phys.* **79** 054502
- [179] Weng H, Fang C, Fang Z, Bernevig B A, Dai X 2015 *Phys. Rev. X* **5** 011029
- [180] Ryu K S, Thomas L, Yang S H, Parkin S 2013 *Nat. Nanotechnol.* **8** 527
- [181] Emori S, Bauer U, Ahn S M, Martinez E, Beach G S D 2013 *Nat. Mater.* **12** 611
- [182] Chen G, Ma T, N'Diaye A T, Kwon H, Won C, Wu Y, Schmid A K 2013 *Nat. Commun.* **4** 2671
- [183] Shibata K, Yu X Z, Hara T, Morikawa D, Kanazawa N, Kimoto K, Ishiwata S, Matsui Y, Tokura Y 2013 *Nat. Nanotechnol.* **8** 723
- [184] Zhai H 2012 *Int. J. Mod. Phys. B* **26** 1230001
- [185] Wu C 2009 *Mod. Phys. Lett. B* **23** 1
- [186] Wilson R M, Anderson B M, Clark C W 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 185303
- [187] Gopalakrishnan S, Martin I, Demler E A 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 185304
- [188] Henkel N, Nath R, Pohl T 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 195302
- [189] Hsueh C H, Tsai Y C, Wu K S, Chang M S, Wu W C 2013 *Phys. Rev. A* **88** 043646
- [190] Heidemann R, Raitzsch U, Bendkowsky V, Butscher B, Löw R, Pfau T 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 033601
- [191] Boninsegni M, Prokofev N V 2012 *Rev. Mod. Phys.* **84** 759
- [192] Boninsegni M 2012 *J. Low Temp. Phys.* **168** 137
- [193] Balibar S 2010 *Nature (London)* **464** 176
- [194] Andreev A F, Lifshitz I M 1969 *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **56** 2057
- [195] Chester G V 1970 *Phys. Rev. A* **2** 256
- [196] Leggett A J 1970 *Phys. Rev. Lett.* **25** 1543
- [197] Kim E, Chan M H W 2004 *Nature (London)* **427** 225
- [198] Luo X, Wu L, Chen J, Guan Q, Gao K, Xu Z F, You L, Wang R 2016 *Sci. Rep.* **6** 18983
- [199] Yefsah T, Desbuquois R, Chomaz L, Günter K J, Dalibard J 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 130401
- [200] Han W, Zhang X F, Wang D S, Jiang H F, Zhang W, Zhang S G 2018 *Phys. Rev. Letter* **121** 030404
- [201] Ruokokoski E, Huhtamäki, Möttönen M 2012 *Phys. Rev. A* **86** 051607(R)
- [202] Xu Z F, Kobayashi S, Ueda M 2013 *Phys. Rev. A* **88** 013621
- [203] Su S W, Gou S C, Sun Q, Wen L, Liu W M, Ji A C, Ruseckas J, Juzeliūnas G 2016 *Phys. Rev. A* **93** 053630
- [204] Nagaosa N, Tokura Y 2013 *Nat. Nanotechnol.* **8** 899
- [205] Mühlbauer S, Binz B, Jonietz F, Pfleiderer C, Rosch A, Neubauer A, Georgii R, Böni P 2009 *Science* **323** 915
- [206] Yu X Z, Onose Y, Kanazawa N, Park J H, Han J H, Matsui Y, Nagaosa N, Tokura Y 2010 *Nature (London)* **465** 901
- [207] Seki S, Yu X Z, Ishiwata S, Tokura Y 2012 *Science* **336** 198
- [208] Ozawa T, Baym G 2012 *Phys. Rev. A* **85** 063623
- [209] Fetter A L 2014 *Phys. Rev. A* **89** 023629
- [210] Madison K W, Chevy F, Wohlleben W, Dalibard J 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 806
- [211] Abo-Shaer J R, Raman C, Vogels J M, Ketterle W 2001 *Science* **292** 476
- [212] Li J R, Lee J, Huang W, Burchesky S, Shteynas B, Top F C, Jamison A O, Ketterle W 2017 *Nature (London)* **543** 91
- [213] Ho T L, Zhang S 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 150403
- [214] Ji S C, Zhang J Y, Zhang L, Du Z D, Zheng W, Deng Y J, Zhai H, Chen S, Pan J W 2014 *Nat. Phys.* **10** 314
- [215] Hall D S, Matthews M R, Ensher J R, Wieman C E, Cornell E A 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 1539

## YOUNG SCIENTISTS' FORUM

**Some recent progresses on the study of ultracold quantum gases with spin-orbit coupling\***Shi Ting-Ting<sup>1)</sup> Wang Liu-Jiu<sup>1)2)</sup> Wang Jing-Kun<sup>1)2)†</sup> Zhang Wei<sup>1)2)‡</sup>1) (*Department of Physics, Renmin University of China, Beijing 100872, China*)2) (*Beijing Key Laboratory of Opto-electronic Functional Materials and Micro-nano Devices, Renmin University of China, Beijing 100872, China*)

( Received 19 August 2019; revised manuscript received 26 November 2019 )

**Abstract**

Artificial synthetic gauge field and spin-orbit coupling has been extensively studied following their experimental realization in ultracold atomic systems. Thanks for the versatile controllability, such systems not only provide possibilities to simulate and study important models in multidisciplinary fields of physics, but also work as an excellent platform to engineer novel states of matter and quantum phenomena. This paper reviews some recent progresses on the study of ultracold atomic systems with spin-orbit coupling, focusing on the effects induced by dissipation, novel interaction forms, large symmetry of spins, and long-range interactions. The investigation in these aspects is closely related to the characteristics of ultracold atomic systems, hence can bring new inspirations and perspectives on the understanding of spin-orbit coupling. In this review, we firstly investigate the appearance of a topological superradiant state in a quasi-one-dimensional Fermi gas with cavity-assisted Raman process. A cavity-assisted spin-orbit coupling and a bulk gap opening at half filling will be induced by the superradiant light generated in the transversely driven cavity mode. The topological superradiant state and the corresponding topological phase transition in the system can be driven by this mechanism. Then, symmetry-protected topological states of interacting fermions will be introduced in a quasi-one-dimensional cold gas of alkaline-earth-like atoms. Raman-assisted spin-orbit couplings in the clock states, together with the spin-exchange interactions in the clock-state manifolds will give rise to symmetry-protected topological states for interacting fermions, by taking advantage of the separation of orbital and nuclear-spin degrees of freedom in these alkaline-earth-like atoms. Furthermore, we show that an exotic topological defect, double-quantum spin vortices, which are characterized by doubly quantized circulating spin currents and unmagnetized filled cores, can exist in the ground states of SU(3) spin-orbit-coupled Bose-Einstein condensates. It is found that the combined effects of SU(3) spin-orbit coupling and spin-exchange interaction determine the ground-state phase diagram. Finally, we demonstrate that spin-orbit coupling and soft-core long-range interaction can induce an exotic supersolid phase of Bose gas, with the emergence of spontaneous circulating particle current. This implies that a finite angular momentum can be generated with neither external rotation nor synthetic magnetic field, and the direction of the angular momentum can be altered by adjusting the strength of spin-orbit coupling or interatomic interaction.

**Keywords:** spin-orbit coupling, superradiance, topological state, supersolid, large spin systems**PACS:** 67.85.-d, 03.75.Ss, 05.30.Fk, 67.85.Hj**DOI:** 10.7498/aps.69.20191241

\* Project supported by the National Key R&D Program of China (Grant No. 2018YFA0306501), the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11434011, 11522436, 11774425), and the Research Funds of Renmin University of China (Grant Nos. 16XNLQ03, 18XNLQ15).

† Corresponding author. E-mail: [jkwang@ruc.edu.cn](mailto:jkwang@ruc.edu.cn)

‡ Corresponding author. E-mail: [wzhangl@ruc.edu.cn](mailto:wzhangl@ruc.edu.cn)