

水中颗粒孔洞流的最大休止倾角和流量公式

谢文韬 李若如 彭政 蒋亦民

Maximum ceasing angle of inclination and flux formula for granular orifice flow in water

Xie Wen-Tao Li Ruo-Ru Peng Zheng Jiang Yi-Min

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 69, 104501 (2020) DOI: 10.7498/aps.69.20200217

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200217>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

颗粒物质内自旋小球运动行为的数值模拟研究

Numerical simulation of a spinning sphere moving in granular matter

物理学报. 2018, 67(1): 014702 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20171459>

颗粒-颗粒接触力的热力学模型

A thermodynamic model of grain-grain contact force

物理学报. 2018, 67(4): 044502 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20171441>

二维圆盘颗粒体系声学行为的数值研究

Numerical study on acoustic behavior of two-dimensional granular system

物理学报. 2017, 66(23): 234501 <https://doi.org/10.7498/aps.66.234501>

基于连续数值模拟的筒仓卸载过程中颗粒物压强及其速度场分析

Analysis of the granular pressure and velocity field of hourglass flow based on the local constitutive law

物理学报. 2019, 68(13): 134701 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20182205>

三维漏斗中颗粒物质堵塞问题的数值实验研究

Numerical experiment studies of clogging during the discharge of granular matter in a three-dimensional hopper

物理学报. 2018, 67(4): 044501 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20171813>

## 水中颗粒孔洞流的最大休止倾角和流量公式\*

谢文韬<sup>1)2)</sup> 李若如<sup>1)</sup> 彭政<sup>1)†</sup> 蒋亦民<sup>1)</sup>

1) (中南大学物理与电子学院, 长沙 410083)

2) (中南大学粉末冶金研究院, 长沙 410083)

(2020年2月13日收到; 2020年3月9日收到修改稿)

实验测量了完全浸泡在水中的玻璃珠颗粒样品在重力驱动下通过不同倾角和孔径的圆形孔洞的流量。发现与空气中的情形类似, 不同孔径时的流量均与倾角余弦呈良好的线性关系; 线性外推得到的零流量角, 即流量休止临界角, 随颗粒粒径与孔洞直径之比  $d/D$  的减小而线性增加; 在无穷大孔径极限下, 此临界角在实验误差范围内与样品的休止角一致。此外, 所有测量都可用 Beverloo 公式  $Q = C_0 \rho g^{1/2} (D - kd)^{5/2}$  很好地拟合; 其中参数  $C_0$  和  $k$  仅与倾角余弦有关, 分别呈线性和平方反比关系。与文献报道的空气孔洞流测量结果对比, 发现差别主要来自浮力和流体拖曳力对参数  $C_0$  的影响。这些结果表明用倾斜孔洞流测量颗粒材料休止角的方法和 Beverloo 公式具有一定的普适性。无论颗粒间隙中填充的是水还是空气, 孔洞流的行为在定性上是一样的。

**关键词:** 颗粒物质, 倾斜孔洞流, 休止角, Beverloo 公式**PACS:** 45.70.-n, 45.70.Mg, 47.57.Gc**DOI:** 10.7498/aps.69.20200217

## 1 引言

人们早就知道, 颗粒孔洞流 (granular orifice flow, GOF) 的流量非常稳定, 用沙漏计时比用水漏计时更加精确<sup>[1,2]</sup>。最有名的三维颗粒孔洞流量的经验公式由 Beverloo 在 1961 年给出<sup>[1,3]</sup>, 对于底部开口尺寸为  $D$  的料仓, 只要满足颗粒高度  $H > 2D$  和料仓直径  $\Phi > 2D$ , 那么孔洞的流量就几乎只是孔洞尺寸  $D$  的函数, 而与料仓中剩余的颗粒高度和施加于顶部的荷载压力无关。Beverloo 流量表达式为

$$Q = C_0 \rho g^{1/2} (D - kd)^{5/2}, \quad (1)$$

其中,  $\rho$  为颗粒材料的体密度,  $g$  为重力加速度,  $d$  是颗粒的平均粒径,  $C_0$  和  $k$  是取决于颗粒材料的常数。该经验公式有一个基于“自由下落拱”(free fall

arch, FFA) 假说给出的解释<sup>[1,4-7]</sup>, 这个假说认为在出口附近存在一个由出口尺寸  $D$  决定的“拱”(arch), 承受住了上方的所有压力, 从而保证了在“拱”的下方, 颗粒是自由下落 (free fall) 的, 即认为料仓内的应力分布在“拱”的地方出现了较大的跃变甚至不连续的间断。对于直径为  $D$  的孔洞, 颗粒从“拱”上掉落至出口的典型速度  $v \propto \sqrt{gD}$ , 而孔洞的面积  $S \propto D^2$ , 有三维孔洞流的流量  $Q = \rho v S \propto D^{5/2}$ 。至于 (1) 式中的  $kd$  则来自于颗粒尺寸  $d$  对孔大小  $D$  的修正。这个图像听上去有一定道理, 所以孔洞附近的颗粒速度场和应力场的分布开始受到关注<sup>[7,8]</sup>, 但对 FFA 在 GOF 中是否真实存在仍然有争议<sup>[7,9]</sup>。最近的计算机模拟工作显示, FFA 即使存在也不会是传统意义上的应力不连续的拱<sup>[7]</sup>。

为了从更多侧面理解 GOF 的流量为什么这么

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11274390) 资助的课题。

† 通信作者。E-mail: zpeng@csu.edu.cn

稳定,一些新的实验方法和几何装置开始出现,例如有研究人员实验和模拟研究了外加压力对 GOF 流量的影响<sup>[10–12]</sup>,以及孔洞平面的倾斜角  $\theta$  对 GOF 流量的影响<sup>[13–17]</sup>.文献[13]发现,对于大孔洞 GOF 来说,流量与  $\cos \theta$  呈线性关系,并认为可以保留 Beverloo 公式(1)对倾斜孔洞情况的适用性,只是将其中的系数  $C_0$  和  $k$  理解为下面的倾角余弦函数:

$$\begin{aligned} C_0 &= a_1 + a_2 \cos \theta, \\ k &= (a_3 + a_4 \cos \theta)^{-1/2}, \end{aligned} \quad (2)$$

其中  $a_1, a_2, a_3, a_4$  是常数.文献[16]基于此进一步发现,将流量对  $\cos \theta$  的线性关系外推得到的零流量休止角  $\theta_c$  与粒径-孔径比  $d/D$  也呈很好的线性关系,并且在趋向零(即  $D$  趋向无穷)的极限下,给出了颗粒材料的休止角  $\theta_r$ .这显示动态的颗粒流动和静态的颗粒休止角之间存在联系.由于 GOF 的流量很稳定,上述倾斜 GOF 的线性外推提供了一个精确测量颗粒材料休止角  $\theta_r$  的新方法.文献[17]在更宽广的孔径范围验证了这一结论,并证实了 GOF 测得的颗粒休止角与颗粒自由堆积角以及由库伦屈服测得的颗粒材料内摩擦角三者的确具有一致性.

文献[13–17]考虑的都是空气中的颗粒样品,近来水中的 GOF 开始受到关注.文献[18,19]测量了没有倾斜( $\theta = 0$ )情况的水中 GOF 流量,发现流量会在料仓接近流完时加大(即流得更快),并认为这是间隙流体的影响.同时还认为对于水中的 GOF, Beverloo 公式(1)不再正确,式中流量  $Q$  随  $D$  的变化关系不再是  $5/2$  次方,而是变为  $D^2$  关系.这是由于水的粘性较大,与空气中自由下落的颗粒不同,水中颗粒很容易达到一个与  $D$  无关的饱和速度  $v_t$ ,从而使得 GOF 的流量  $Q = \rho v_t s \propto D^2$ .为了考察利用 GOF 测量休止角  $\theta_r$  的方法对间隙流体为水的情况是否依然有效,本文通过将文献[16]的装置完全浸入水中,测量了完全饱和水情况下的 GOF 流量随  $D$  和  $\theta$  的变化关系.结果显示,水与空气的行为在定性上是一样的,水中的倾斜颗粒孔洞流仍然能在  $D$  趋向无穷时逼近颗粒体的休止角.特别是与文献[18,19]不同,测量认为 Beverloo 公式(1)及其  $5/2$  幂率仍然适用.

近年来,对微重力环境下颗粒材料的力学行为的研究越来越受到关注<sup>[20–22]</sup>.因水的浮力可以等

效为抵消部分甚至全部重力,所以水中实验常被用来模拟费用昂贵的太空实验.有工作报道,与休止角关系密切的颗粒材料内摩擦角在微重力极限下有增大的趋势<sup>[21,22]</sup>.本文的水中 GOF 休止角测量方法对此有一定的参考价值.这里没有看到微重力实验报道的休止角增大现象,应该是使用的颗粒材料体密度与水相差较大,对重力的抵消不足所致.不排除利用与水密度接近的颗粒,可观察到休止角增大现象.但注意随着流量的减小,测量装置的精度需要大幅度提升.

## 2 实验装置与实验结果

如图 1(a) 所示,实验的主要结构是一个部分浸泡在水中的铝合金方形料仓,料仓横截面为  $100 \text{ mm} \times 100 \text{ mm}$ ,高  $700 \text{ mm}$ ,壁厚  $3 \text{ mm}$ .颗粒样品采用直径  $d = 0.9 \pm 0.1 \text{ mm}$  的球形玻璃珠,在实验过程中颗粒样品始终位于水面以下,处于饱和水状态.悬挂着料仓的刚性悬臂由两个调节过水平的电子秤支撑(精度为  $0.5 \text{ g}$ ,量程为  $30 \text{ kg}$ ,采样频率为  $10 \text{ Hz}$ ).电子秤固定在刚性支架上,示数之和就是料仓的总质量  $M(t)$ (包含了不随时间变化的仓壁自重和随时间变化的颗粒质量).实验中随着颗粒的流出,电子秤示数  $M(t)$  随时间减少,减少率即为 GOF 的流量  $Q$ .

当颗粒从料仓中流出时,料仓内部减少的颗粒体积需要及时由水填补,以维持料仓内外水面高度不变和样品的水饱和状态,从而防止内外的液压差对颗粒孔洞流量的影响.为此料仓的四个侧壁均镶嵌了密排冲孔(孔径为  $0.8 \text{ mm}$ )的不锈钢板(图 1(b))用以透水,以保证实验过程中料仓内外液面保持高度一致(也保证了料仓壁在实验过程中受到水的浮力不变).

与文献[16]类似,实验测量了不同倾角  $\theta$  下,7 个孔径  $D=4, 6, 8, 10, 14, 18, 20 \text{ mm}$  的  $M(t)$  结果.倾角  $\theta$  定义为圆孔所在平面与外水平面的夹角,如图 1(c) 和图 1(d) 所示.倾角大小由精度为  $0.1$  度的倾角仪 (bevel box) 测出.利用底部开孔的装置(图 1(c)) 可测量  $\theta \in [0^\circ, 45^\circ]$  的颗粒流量.对于  $\theta > 45^\circ$  的情形,需要采用图 1(d) 所示的料仓侧壁开孔装置.在距离底部约  $100 \text{ mm}$  的高度开一个  $100 \text{ mm} \times 100 \text{ mm}$  的方孔,用以嵌入圆孔  $D$  所在的硬铝板.为尽量减小板厚度对流量的影响,孔洞外侧加工成了如图 1(e) 所示的楔形.

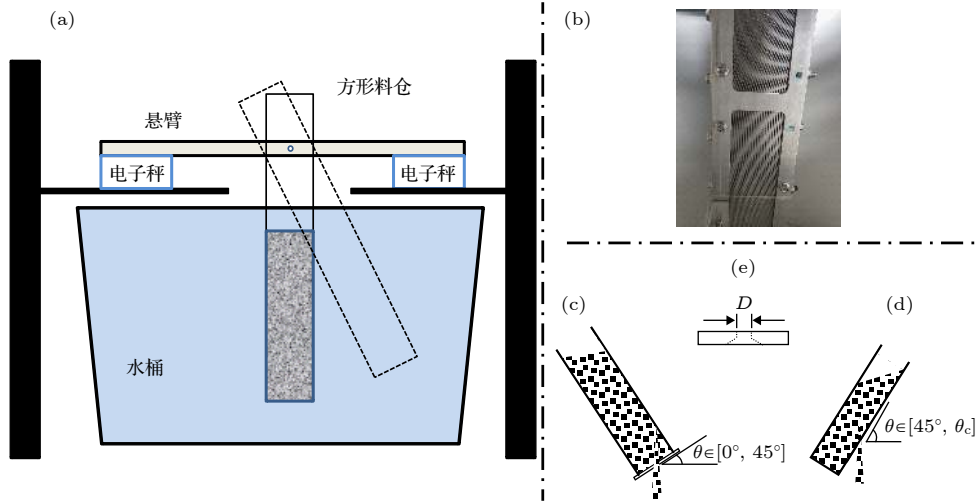


图 1 (a) 实验装置示意图; (b) 料仓透水侧壁照片; (c) 倾角小于 45 度时采用的实验装置; (d) 倾角大于 45 度时采用的实验装置; (e) 楔形孔洞示意图

Fig. 1. (a) Schematic of the setup; (b) photograph of the permeable side wall of the silo; (c) the experimental devices used when the inclination is less than 45 degrees; (d) the experimental devices used when the inclination is greater than 45 degrees; (e) schematic of the wedge-shaped orifice  $D$ .

实验中发现, 如果将颗粒直接从空气置入水中的料仓, 颗粒表面会裹挟大量空气泡, 这些气泡在流动时会逐渐释出, 对孔洞流量带来显著影响. 在孔洞较小时气泡甚至会直接阻塞颗粒流. 因此在开始实验之前, 需要提前将颗粒放入水桶中, 让其在水中反复多次流动, 使气泡充分释出直至肉眼不可见. 之后再将去气泡后的颗粒通过开口的侧壁在液面以下加入料仓, 并且在加料的过程中始终保证颗粒不再暴露到空气中. 通过去气泡处理后的颗粒流量将十分稳定和可重复.

实验开始前先将孔  $D$  塞住, 在料仓中加入去气泡处理过的颗粒直至接近水面, 然后开放孔  $D$ , 同时采集电子秤随时间变化的  $M(t)$ . 典型的  $M(t)$  数据如图 2 所示. 由图 2 可以看出, 在初期 GOF 有一段短暂的不稳定流动期 (包括开放孔  $D$  带来水面波动的影响), 但之后  $M(t)$  呈现出良好的直线关系, 其斜率的负值就是 GOF 的流量  $Q$  (由于测量的是料仓中颗粒的减少量, 故  $M(t)$  斜率为负). 这个流量在很长一段时间内是稳定不变的, 如图 2 插图所示, 40—80 s 和 80—120 s 计算出来的流量  $Q$  均为 6.53 g/s. 在流动的尾声 (140 s 左右),  $M(t)$  曲线只有非常微弱 (小于 2%) 的变陡趋势. 没有明显地观察到文献 [19] 中提到的在料仓快流完时流量变大的现象. 这个分歧的原因目前不详. 但快流完的情况不是关注的重点, 本文仅研究中间段的稳定流量  $Q$  随  $D$  和  $\theta$  的变化关系.

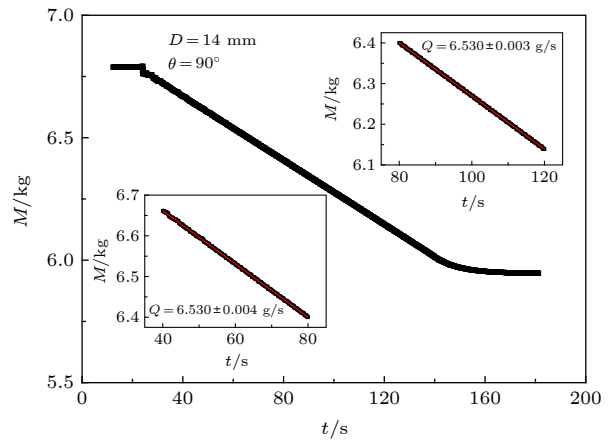


图 2  $D = 14\text{ mm}$ ,  $\theta = 90^\circ$  时典型的  $M(t)$  数据; 左下和右上插图分别为从主图中摘出的 40—80 s 及 80—120 s 的  $M(t)$  数据, 均呈良好的线性关系. 由这两段数据计算得到的流量  $Q$  没有差别, 均为 6.53 g/s, 表明流量非常稳定

Fig. 2. Typical data of  $M(t)$  at  $D = 14\text{ mm}$ ,  $\theta = 90^\circ$ ; the lower left and upper right insets are the data of 40—80 s and 80—120 s extracted from the main graph, both of which show good linearity. Both flow rates  $Q$  calculated from these two insets are 6.53 g/s, indicating that the flow is very stable.

对于每一给定的  $D$  和  $\theta$  重复三次实验, 平均值记为对应的流量  $Q(D, \theta)$ , 结果见图 3(a) 所示. 虽然水中操作的扰动比空气中的实验略大, 但在去除气泡后水中的 GOF 流量仍然非常稳定, 实验重复性好, 三次测量的偏差均小于数据点图标的大小, 因此图 3a 的实验数据点没有标出误差棒.

与文献 [16] 的空气实验结论一样, 对不同孔径

$D$ , 流量  $Q$  均随着角度  $\theta$  的增大而逐渐减小, 并与  $\cos\theta$  呈良好的线性关系 (图 3(a)). 注意对较小的  $D$  (如  $D = 4$  mm) 而言, 因 GOF 在倾角较小时流动就停止了, 所以测量时  $\cos\theta$  的取值范围也相应变小.

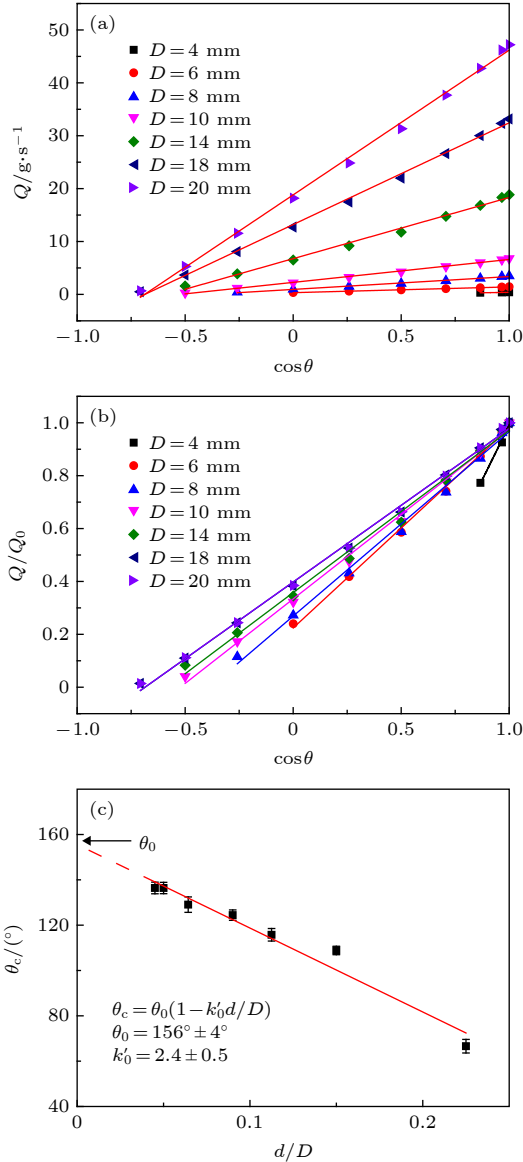


图 3 (a) 不同孔径  $D$  下流量  $Q$  随倾角余弦  $\cos\theta$  的变化, 实线为直线拟合; (b) 用水平 ( $\theta = 0^\circ$ ) 流量  $Q_0$  归一化的流量  $Q/Q_0$  随倾角余弦  $\cos\theta$  的变化关系, 实线为公式 (3) 的拟合结果; (c) 临界流量休止角  $\theta_c$  随粒径-孔径比  $d/D$  的变化关系, 实线和  $\theta_0$  为直线拟合结果

Fig. 3. (a) The variation of flow rate  $Q$  with the inclination cosine  $\cos\theta$  at different orifices  $D$ , where the solid line is a linear fit; (b) variation of the normalized flow rate  $Q/Q_0$  with  $\cos\theta$ , where  $Q_0$  is the rate at  $\theta = 0^\circ$ , and the solid line is the fitted result of equation (3); (c) the relationship between the critical angle of flow ceasing  $\theta_c$  and the ratio  $d/D$ , where the solid line and  $\theta_0$  are results of linear fitting.

### 3 流量与休止角

按照与文献 [16] 类似的分析和处理方式, 用  $\theta = 0^\circ$  的水平 GOF 流量  $Q_0$  对  $Q$  进行归一化, 得到图 3(b) 所示的  $Q/Q_0$  与  $\cos\theta$  的线性关系. 这时所有的直线均过坐标点 (1, 1), 只有斜率一个参量, 所以有

$$Q/Q_0 = 1 - (\cos\theta - 1)/(\cos\theta_c - 1), \quad (3)$$

其中,  $\theta_c$  表示不同  $D$  下流量  $Q = 0$  时的倾角, 是孔径  $D$  的函数. 与文献 [16] 的结论类似,  $\theta_c$  与  $d/D$  的函数关系仍然是线性的 (图 3(c)). 用下面公式:

$$\theta_c = \theta_0 \left(1 - k'_0 \frac{d}{D}\right) \quad (4)$$

拟合, 得到  $D \rightarrow \infty$  时的零流量倾角  $\theta_0 = 156^\circ \pm 4^\circ$  和  $k'_0 = 2.4 \pm 0.5$ .  $\theta_0$  的补角  $\theta_r = 180^\circ - \theta_0 = 24^\circ \pm 4^\circ$  对应无限大颗粒自由平面极限下的休止角 [16,17]. 用同样颗粒材料在水中堆积锥形沙堆, 测得水中沙堆休止角约在  $23^\circ$  至  $25^\circ$  之间, 与 (4) 式外推得到的结论相符. 这些结果表明, 无论在空气中还是水中, 都可以用倾斜 GOF 的方法测量颗粒材料休止角. 注意由于 GOF 在水中流动时受间隙流体的影响比空气中要大, 所以测量值的涨落要略大于空气中的实验.

在文献 [16] 中用同样颗粒材料测得的空气中的休止角为  $27^\circ \pm 3^\circ$ . 虽然略高于本文的水中结果, 但在误差范围内还是吻合的. 水中与空气中的休止角是否存在微弱差别, 还有待仔细测量. 定性上看, 空气中的休止角多少会受湿度导致的颗粒间湿粘力 (cohesive force) 影响而变大. 这个现象在文献 [18] 中也被观察和提到. 另外如引言所述, 由于水中的浮力远大于空气中的, 水中颗粒样品的应力明显小于空气中的应力, 图 1 装置可用于研究航天领域关心的微重力下颗粒休止角变大的现象. 本文未观测到休止角变大现象, 原因很可能是采用的玻璃珠和水的密度比 (约为 5:2) 不够接近 1 导致的. 今后值得考虑用更接近水密度的颗粒材料来研究和逼近这个微重力现象.

### 4 Beverloo 公式

图 3 的实验数据可以用公式 (1) 和 (2) 很好地拟合. 如图 4(a) 所示, 对所有不同的倾角  $\theta$ , 流量

$Q$  随  $D$  的变化关系都能很好地满足  $5/2$  次幂, 实验结果并不支持文献 [18,19] 提到的  $Q$  与  $D^2$  成比例的结论. 这还可以在图 4(a) 的插图中, 从  $Q^{2/5}$  和  $D$  的直线关系中得到验证.

由于幂次  $2/5$  和  $1/2$  的差别不大, 如果尝试拟合  $Q^{1/2}$  与  $D$  的直线关系, 结果也显得不错 (这可能也是文献 [18,19] 认为其合理的原因). 尽管两种幂次公式对本文数据的拟合相关系数 (Adj. R-Square)

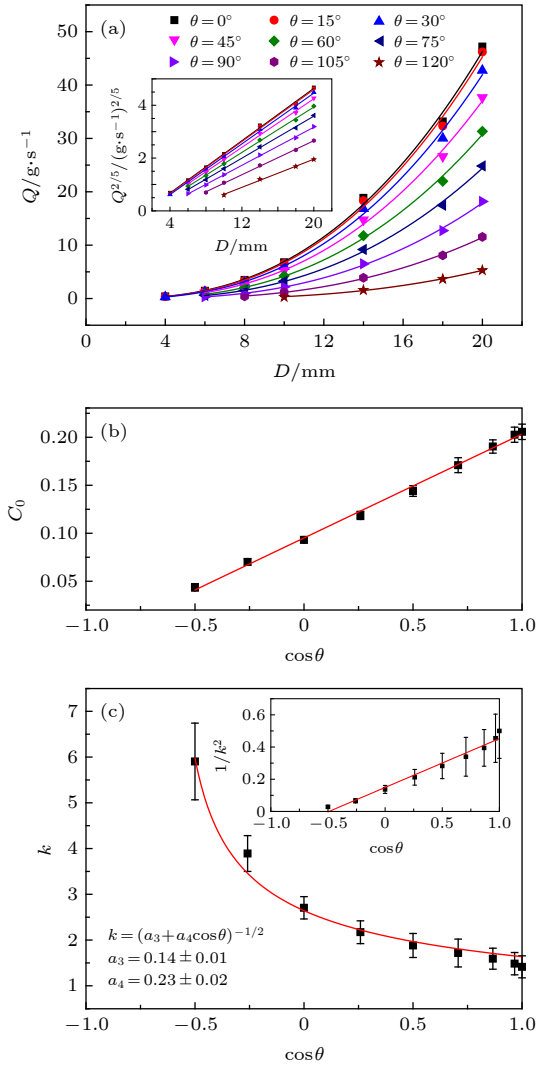


图 4 (a) 用 Beverloo 公式 (1) 和 (2) 拟合图 3 数据的结果, 插图为不同倾角时  $Q^{2/5}$  随  $D$  的变化关系, 实线为线性拟合; (b), (c) Beverloo 参数  $C_0$  和  $k$  随  $\cos \theta$  的变化关系, 及其用公式 (2) 的拟合情况. 图 (c) 中的插图是  $k^{-2}$  随  $\cos \theta$  的变化关系

Fig. 4. (a) Results of fitting the data in Figure 3 using the Beverloo formula (1) and (2), the inset is the change of  $Q^{2/5}$  with  $D$  at different inclination, and the solid line is a linear fit; (b) and (c) variations of the parameters  $C_0$  and  $k$  with  $\cos \theta$ , and solid lines are results of fits by using equation (2). The inset in (c) is the change of  $k^{-2}$  with  $\cos \theta$ .

均大于 0.99 (相关系数越接近 1 代表拟合程度越好),  $2/5$  次幂的公式在拟合度上仍然要略高一点. 因此更倾向支持 Beverloo 公式 (1) 对于各种倾角的水中 GOF 均成立, 其中参数  $C_0$  和  $k$  随倾角余弦  $\cos \theta$  的变化关系满足公式 (2) (图 4(b) 和图 4(c)).

虽然公式 (2) 对于水中和空气中的 GOF 都有效, 但在同样条件下水中的 GOF 流量明显小于空气中的流量 (图 5(c)–(f)). 这个流量差别, 主要由参数  $C_0$  来描述 (图 5(a)). 参数  $k$  随  $\cos \theta$  的变化情况对水和空气不敏感 (图 5(b)). 另外从图 5(c)–(f) 的插图也可以看到,  $k$  对流量的影响也基本与水还是空气无关, 只在较大倾角时才出现一点差别. 在 Beverloo 公式中,  $k$  与孔径变小导致的流量阻塞停止 (clogging) 有关. 同样倾角下, 水中 GOF 与空气中 GOF 有着几乎同样的  $k$ , 显示这个阻塞机制与间隙流体的种类关系不大.

从图 6(a) 可以看到, 水和空气的 Beverloo 系数  $C_0$  的比值基本上是一个与倾角无关的常数 0.37. 另外流量比值与 0.37 的偏差会随着孔径  $D$  的减小和倾角的增加而变大 (图 6(b)). 显然这个偏差反映的是 Beverloo 公式中系数  $k$  的效果. 值得指出的是, 间隙流体对颗粒的作用有浮力和粘滞拖曳力. 前者的效果可通过将重力加速度乘以密度变化比  $(\rho - \rho_{\text{流体}}) / \rho$  来描述 ( $\rho = \rho_{\text{颗粒}}$  是颗粒材料体密度). 对 Beverloo 公式 (1) 中的  $g$  做此处理, 得出水中与空气中 GOF 的  $C_0$  比值为 0.78 (忽略空气密度), 明显大于图 6(b) 的 0.37. 这意味着水的拖曳力 (即粘滞力) 对 GOF 流量有显著影响.

因实验数据很少, 水的粘滞系数  $\eta$  对  $C_0$  的影响还不能给出可靠的经验公式. 受流体中匀速下落的单个颗粒的末速度反比于  $\eta$  的启发, 本文建议采用下面的三参数模型

$$C_0 = \frac{C_{0\text{vac}}}{1 + (\eta/\eta_0)^a}$$

来拟合  $C_0$  与  $\eta$  的关系. 其中  $C_{0\text{vac}}$  为真空的  $C_0$  值,  $\eta_0$  和幂率  $a$  可理解为反映密集多颗粒效应的参数. 当  $a$  趋向 1,  $\eta_0$  趋向 0 时, 它退化为单个颗粒的情况. 由于目前只有水和空气的两个  $C_0$  数据 0.37 和 0.78, 还不能确定模型的参数及其适用性. 如果取幂率  $a = 1$ , 水和空气的粘滞系数分别为  $1.0 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$  与  $1.8 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ , 得到参数为  $C_{0\text{vac}} = 0.796$ ,  $\eta_0 = 0.868 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ .

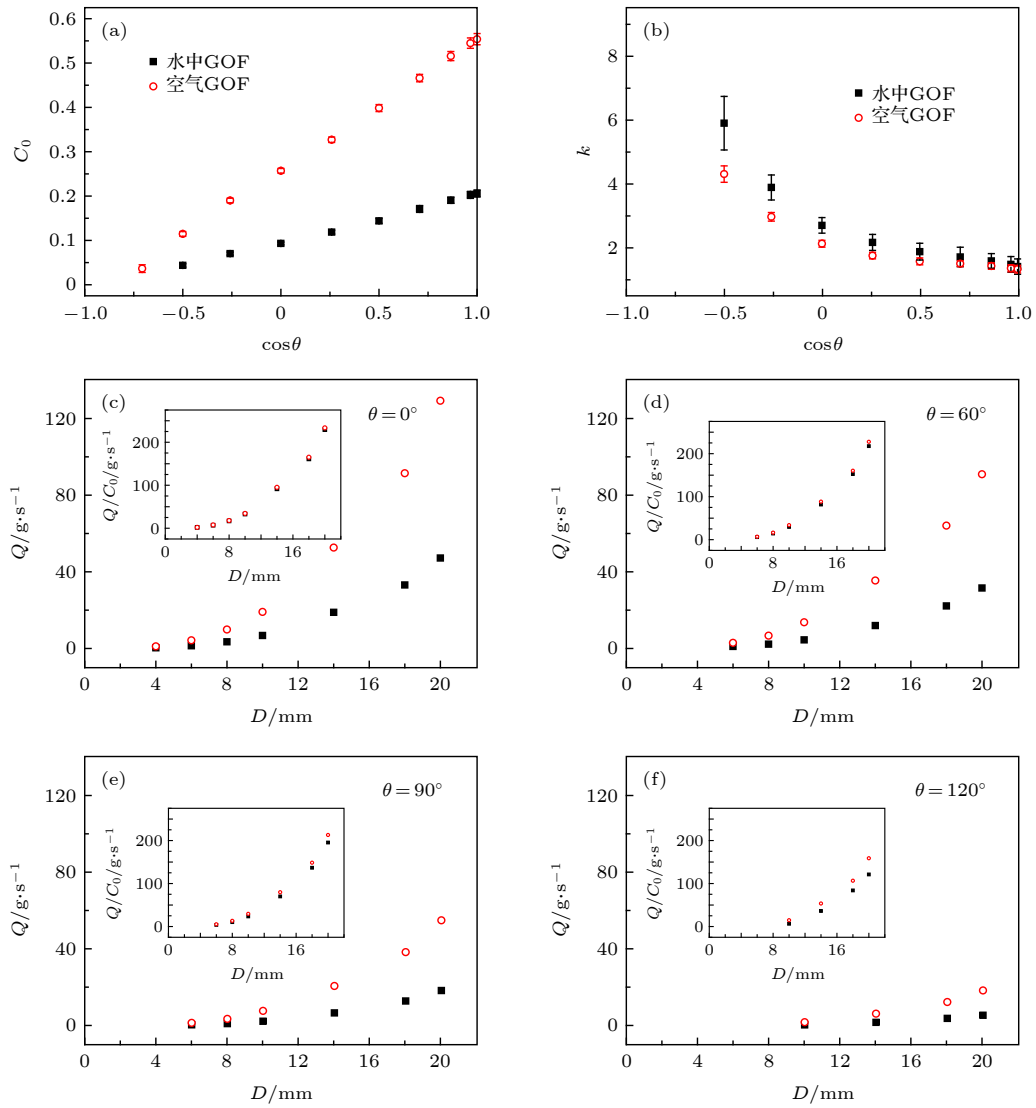


图 5 (a) 和 (b) 是水中 (实心方点) 和空气中 (空心圆点) GOF 的 Beverloo 参数  $C_0$  和  $k$  随  $\cos\theta$  的变化; (c) — (f) 分别为  $\theta = 0^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$  时, 水和空气中 GOF 流量  $Q$  随  $D$  的变化, 插图是  $Q/C_0$  随  $D$  的变化. 空气中的实验数据来自文献 [16]  
 Fig. 5. (a) and (b): Beverloo parameters  $C_0$  and  $k$  of GOF in water (solid squares) and in air (hollow circles) as a function of  $\cos\theta$ ; (c) — (f): the changes of GOF flow rate  $Q$  with  $D$  in water and in air when  $\theta = 0^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$ , respectively, and the inset is the change of  $Q/C_0$  with  $D$ . The experimental data in air comes from ref. [16].

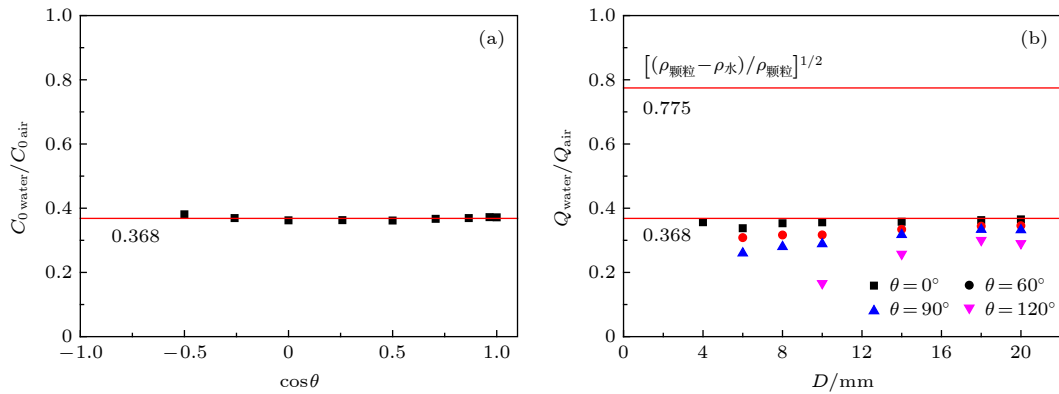


图 6 水和文献 [16] 空气的 (a) Beverloo 系数  $C_0$  和 (b) GOF 流量  $Q$  的比值  
 Fig. 6. Ratio of (a) Beverloo coefficient  $C_0$  and (b) GOF flow rate  $Q$  in water and in air (from Ref. [16]).

## 5 结 论

本文测量了不同倾角  $\theta$  和孔径  $D$  下, 完全浸泡于水中的颗粒物质 (玻璃珠) 在重力驱动下从圆形孔洞卸载时的 GOF 流量. 得到的结论如下:

1) 与文献 [16,17] 报道的空气情形类似, 对所有孔径值, 流量  $Q$  都与倾角余弦  $\cos\theta$  呈良好的线性关系. 由此线性外推给出的流量休止临界角  $\theta_c$  随粒径-孔径比  $d/D$  的减小也呈良好的线性增加关系, 并且在无穷大孔径极限  $d/D \rightarrow 0$  下的线性外推值  $\theta_0$  与颗粒材料休止角相符. 这表明用倾斜孔洞流的方法同样可以测量材料在水中的休止角.

2) 得到的水中休止角略微小于文献 [16] 报道的同样方法测量的空气休止角. 这可能是因空气湿度导致的颗粒间粘力所致.

3) 所有测量数据都可以用  $5/2$  幂率的 Beverloo 公式很好地拟合, 并且与空气情况一样, 系数  $C_0$  和  $k$  随孔洞倾角余弦  $\cos\theta$  的变化分别符合线性和平方反比关系.

4) 通过与空气 GOF 的测量结果 [16] 比较, 发现间隙流体种类 (水或空气) 对 Beverloo 公式系数  $k$  的影响不大, 但对系数  $C_0$  有大约 0.37 的固定比例影响. 后者不能完全用浮力导致的重力加速度  $g$  减小来解释, 意味着水施加于颗粒的拖曳力对 GOF 有显著影响.

5) 鉴于水和空气都属于牛顿流体, 二者的 GOF 行为在定性上应该保持一致, 例如 Beverloo 公式的有效性和给出的休止角. 故不倾向 [18,19] 中提出的水中 GOF 的流量与  $D^2$  成比例的提议. 从本文的测量结果看不出有修改 Beverloo 公式幂率的必要.

## 参考文献

- [1] Nedderman R M 1992 *Statics and Kinematics of Granular Materials* (Cambridge: Cambridge University Press) pp292–294
- [2] Lu K Q, Liu J X 2004 *Physics* **33** 713 (in Chinese) [陆坤权, 刘寄星 2004 *物理* **33** 713]
- [3] Beverloo W A, Lenginger H A, van de Velde J 1961 *Chem. Eng. Sci.* **15** 260
- [4] Tian Y, Lin P, Zhang S, Wang C L, Wan J F, Yang L 2015 *Adv. Powder Technol.* **26** 1191
- [5] Lin P, Zhang S, Qi J, Xing Y M, Yang L 2015 *Physica A* **417** 29
- [6] Zhang S, Lin P, Yang G, Wan J F, Tian Y, Yang L 2019 *Chin. Phys. B* **28** 018101
- [7] Rubio-Largo S M, Janda A, Maza D, Zuriguel I, Hidalgo R C 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 238002
- [8] Janda A, Zuriguel I, Maza D 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 248001
- [9] van Zuidichem D J, van Egmond N D, DeSwart J G 1974 *Powder Technol.* **10** 161
- [10] Peng Z, Zheng H P, Jiang Y M 2009 arXiv: 0908.0258 v3 [cond-mat.soft]
- [11] Madrid M A, Darias J R, Pugnali L A 2018 *EPL* **123** 14004
- [12] Ji S Y, Wang S Q, Peng Z 2019 *Powder Technol.* **356** 702
- [13] Sheldon H G, Durian D J 2010 *Granul. Matter* **12** 579
- [14] Thomas C C, Durian D J 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 178001
- [15] Thomas C C, Durian D J 2013 *Phys. Rev. E* **87** 052201
- [16] Peng Z, Jiang Y M 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 054501 (in Chinese) [彭政, 蒋亦民 2011 *物理学报* **60** 054501]
- [17] Zhang Y, Wei Y F, Peng Z, Jiang Y M, Duan W S, Hou M Y 2016 *Acta Phys. Sin.* **65** 084502 (in Chinese) [张昱, 韦艳芳, 彭政, 蒋亦民, 段文山, 厚美瑛 2016 *物理学报* **65** 084502]
- [18] Wilson T J, Pfeifer C R, Mesyngier N, Durian D J 2014 *Pap. Phys.* **6** 060009
- [19] Koivisto J, Durian D J 2017 *Nature Comm.* **8** 15551
- [20] Hu W R, Zhao J F, Long M, Zhang X W, Liu Q S, Hou M Y, Kang Q, Wang Y R, Xu S H, Kong W J, Zhang H, Wang S F, Sun Y Q, Hang H Y, Huang Y P, Cai W M, Zhao Y, Dai J W, Zheng H Q, Duan E K, Wang J F 2014 *Microgravity Sci. Technol.* **26** 159
- [21] Cheng X H, Xiao S Z, Cao A S, Hou M Y 2019 *Granul. Matter* **21** 104
- [22] Kobayashi T, Ochiai H, Suyama Y, Aoki S, Yasufuku N, Omine K 2009 *Soils Found.* **49** 115



# Maximum ceasing angle of inclination and flux formula for granular orifice flow in water\*

Xie Wen-Tao<sup>1)2)</sup> Li Ruo-Ru<sup>1)</sup> Peng Zheng<sup>1)†</sup> Jiang Yi-Min<sup>1)</sup>

1) (*School of Physics and Electronics, Central South University, Changsha 410083, China*)

2) (*Powder Metallurgy Research Institute, Central South University, Changsha 410083, China*)

( Received 13 February 2020; revised manuscript received 9 March 2020 )

## Abstract

In previous work [*Acta Phys. Sin.* **60** 054501 (2011)], we found that for inclined Granular Orifice Flow (GOF) in air, regardless of the orifice size, the flow rate  $Q$  had a good linear relationship with the cosine of the inclination  $\cos \theta$ , i.e.  $\frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{\cos \theta - 1}{\cos \theta_c - 1}$ , where  $Q_0$  is flow rate at  $\theta = 0^\circ$ , and  $\theta_c$  is the critical angle of flow ceasing obtained by linear extrapolation. Moreover,  $\theta_c$  increased linearly with ratio between grain and orifice diameter  $d/D$ , and at the limit of  $d/D$  going to zero (that is,  $D$  going to infinity), the angle of repose of the sample  $\theta_r (= 180^\circ - \theta_{c\infty})$  was obtained. Since the flow of GOF is very stable, we believe that the linear extrapolation of the above-mentioned inclined GOF provides a novel method for accurately measuring the angle of repose of granular materials. This method has been proved to be effective in a wider orifice size range by another work [*Acta Phys. Sin.* **65** 084502 (2016)]; and three angles, namely the repose angle measured by GOF, the free accumulation angle of a sandpile and the internal friction angle of the granular material measured by Coulomb yielding, are confirmed to be consistent. In this work, we extend this method to underwater, measuring the mass flow rate of a granular sample (glass beads) which completely immersed in water and driven by gravity, discharged from an inclined orifice for various inclination angles and orifice diameters. It is found that similar to the case in air, regardless of the orifice size, the flow rate increase linearly with the cosine of the inclination; the critical angle of flow ceasing increases linearly with ratio between grain and orifice diameter; at the limit of infinite orifice, this critical angle is consistent with the repose angle of the underwater sample within the experimental error range. In addition, all measurements can be well fitted by using the Beverloo formula  $Q = C_0 \rho g^{1/2} (D - kd)^{5/2}$ , where the parameters  $C_0$  and  $k$  are only related to the cosine of the inclination, and are linear and inversely squared, respectively. Compared with the results of GOF in air reported by previous work, it is found that the difference mainly comes from the influence of buoyancy and fluid drag forces on the parameter  $C_0$ . These results show that both the method of measuring angle of repose with the inclined GOF and the Beverloo formula have certain universality. The behavior of GOF is qualitatively the same whether the interstitial fluid is water or air.

**Keywords:** granular matter, inclined orifice flow, angle of repose, Beverloo formula

**PACS:** 45.70.-n, 45.70.Mg, 47.57.Gc

**DOI:** 10.7498/aps.69.20200217

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11274390).

† Corresponding author. E-mail: [zpeng@csu.edu.cn](mailto:zpeng@csu.edu.cn)