

非规则形状介质内辐射-导热耦合传热的间断有限元求解

王存海 郑树 张欣欣

Discontinuous finite element solutions for coupled radiation-conduction heat transfer in irregular media

Wang Cun-Hai Zheng Shu Zhang Xin-Xin

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 69, 034401 (2020) DOI: 10.7498/aps.69.20191185

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191185>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

三维浅海下弹性结构声辐射预报的有限元-抛物方程法

Acoustic radiation from a cylinder in shallow water by finite element-parabolic equation method

物理学报. 2019, 68(2): 024301 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181452>

基于有限元法的光子并矢格林函数重整化及其在自发辐射率和能级移动研究中的应用

Renormalization of photon dyadic Green function by finite element method and its applications in the study of spontaneous emission rate and energy level shift

物理学报. 2018, 67(19): 193102 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180898>

毫秒脉冲激光致硅光电二极管电学损伤的有限元分析及实验研究

Finite element analysis and experimental study on electrical damage of silicon photodiode induced by millisecond pulse laser

物理学报. 2017, 66(10): 104203 <https://doi.org/10.7498/aps.66.104203>

底部局部加热多孔介质自然对流传热的格子Boltzmann模拟

Simulation of effect of bottom heat source on natural convective heat transfer characteristics in a porous cavity by lattice Boltzmann method

物理学报. 2017, 66(20): 204402 <https://doi.org/10.7498/aps.66.204402>

基于拓展分离变量法的层合材料瞬态传热分析

Transient heat transfer analysis of laminated materials based on extended separation of variables

物理学报. 2018, 67(21): 214401 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180743>

基于分裂格式有限点集法对孤立波二维非线性问题的模拟

Simulation of two-dimensional nonlinear problem with solitary wave based on split-step finite pointset method

物理学报. 2019, 68(14): 140203 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190340>

非规则形状介质内辐射-导热耦合传热的间断有限元求解*

王存海^{1)2)†} 郑树^{3)‡} 张欣欣¹⁾²⁾

1) (北京科技大学能源与环境工程学院, 北京 100083)

2) (冶金工业节能减排北京市重点实验室, 北京 100083)

3) (华北电力大学能源动力与机械工程学院, 北京 102206)

(2019年8月3日收到; 2019年10月25日收到修改稿)

采用间断有限元法 (discontinuous finite element method, DFEM) 求解非规则形状介质内的辐射导热耦合传热问题, 得到了典型非规则形状介质内辐射导热耦合传热问题的高精度数值结果. 和传统连续型有限元方法不同, DFEM 将计算区域划分成相互独立的离散单元, 形函数的构造、未知量的加权近似以及控制方程的求解均在每一个离散单元上进行. 通过在单元之间施加迎风格式的数值通量, DFEM 保证了整个计算区域的连续性, 因此这种方法兼具良好的几何灵活性和局部守恒性. 推导了辐射传输方程和能量扩散方程的 DFEM 离散格式, 验证了 DFEM 求解辐射导热耦合传热问题的正确性; 同时研究了不同几何形状介质内辐射导热耦合传热问题, 得到了典型非规则形状介质内辐射导热耦合传热的高精度数值结果.

关键词: 辐射导热, 耦合传热, 数值模拟, 间断有限元

PACS: 44.40.+a, 44.10.+i, 44.05.+e, 47.11.Fg

DOI: 10.7498/aps.69.20191185

1 引言

参与性介质内辐射导热耦合传热过程广泛存在于众多工程实际应用中^[1-3], 如高温熔岩融化、材料加工等, 因此辐射导热耦合问题的研究对相关传热分析和工程设计具有重要的意义. 辐射传输方程是积分-微分型方程, 这类方程多通过数值解法进行求解, 如蒙特卡罗法^[4-8]和修正的欧拉算法^[9,10]. 由于辐射传输问题常常涉及复杂边界条件和非规则计算区域^[11,12], 国内外学者发展了多种数值方法^[13-27]用以研究辐射传热问题. Mishra 等^[28,29]采用不同数值方法分别求解辐射传输方程和能量扩

散方程, 发展了求解辐射导热耦合问题的混合方法.

虽然目前多种数值方法被成功应用于辐射导热耦合问题的求解, 然而非规则形状介质内辐射导热耦合传热的高精度数值求解仍旧面临较大的挑战^[30]. 对于含有弯曲壁面的非规则形状介质而言, 辐射强度在界面附近等局部区域的变化率较大, 而传统连续型数值方法则是基于全局形函数对未知量进行加权近似, 没有考虑局部区域的大梯度辐射强度分布, 计算结果往往存在较大误差. 如文献^[31]中即使采用较为细密的网格划分, 采用有限体积法所得辐射热流和温度分布曲线仍旧存在非常明显的振荡, 因此, 扩展高精度数值算法求解辐射导热耦合传热方程, 获得非规则形状介质内辐射导热耦

* 国家自然科学基金 (批准号: 51906014, 51976057, 51890891)、中国博士后科学基金 (批准号: 2018M641196) 和中央高校基本科研业务费专项资金 (批准号: FRF-TP-18-072A1) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: wangcunhai@ustb.edu.cn

‡ 通信作者. E-mail: shuzheng@ncepu.edu.cn

合问题的高精度数值解具有重要意义.

间断有限元法 (discontinuous finite element method, DFEM)^[32] 是在传统连续型有限元法 (finite element method, FEM) 基础上发展起来的一种高精度数值方法. 利用传统 FEM 的空间网格划分, DFEM 利用相邻单元边界的数值通量从而释放了 FEM 强加的内部单元连续性. 由于 DFEM 形函数构造和控制方程求解均在每个离散单元上进行, 因此该方法兼具较好的几何灵活性和局部守恒性, 并被逐渐应用于辐射传输问题的求解^[33–38]. 本文采用 DFEM 求解辐射传输方程和能量扩散方程, 将其扩展应用于辐射导热耦合传热问题的求解, 验证了数值结果的精确性并给出了典型非规则形状介质内辐射导热耦合传热问题的高精度数值解.

2 控制方程及 DFEM 离散

辐射导热耦合传热过程的控制方程包括辐射传输方程和能量扩散方程, 本文的求解思路是先求解辐射传输方程得到辐射强度信息, 然后再把辐射源项代入到能量扩散方程以得到温度场分布.

首先分析辐射传输方程. 参与性介质内辐射传输方程的离散坐标形式可写为

$$\Omega^m \cdot \nabla I(\mathbf{r}, \Omega^m) + \beta I(\mathbf{r}, \Omega^m) = S(\mathbf{r}, \Omega^m), \quad (1)$$

式中, I 表示辐射强度, $\mathbf{r}$ 表示坐标, Ω 表示离散方向, β 为衰减系数, 上标 m 表示离散方向. 为了书写简洁, $I(\mathbf{r}, \Omega^m)$ 在以下表达中缩写成 I^m . 考虑介质发射和散射, (1) 式中的源项 $S(\mathbf{r}, \Omega^m)$ 表示为

$$S^m = \kappa_a I_b + \frac{\kappa_s}{4\pi} \sum_{m'=1, m' \neq m}^M I^{m'} \Phi^{m', m} \nu^{m'}, \quad (2)$$

式中, I_b 表示黑体辐射强度, κ_a 表示发射系数, κ_s 表示散射系数, $M = N_\theta \times N_\varphi$ 表示角度离散个数, $\nu^{m'}$ 表示 $\Omega^{m'}$ 方向的权重, $\Phi^{m', m}$ 表示从方向 $\Omega^{m'}$ 到方向 Ω^m 的散射相函数.

在 DFEM 应用过程中, 计算区域首先被划分为紧密相邻的离散单元, 如图 1(a) 所示. 待求解的目标量 (如辐射强度) 在相邻单元边界上被认为是非连续的, 每个单元上的数值解是相互独立的, 如图 1(b) 所示. DFEM 在每个离散单元上求解控制方程, 相邻单元之间通过数值通量相互连接, 从而保证了计算区域的连续性.

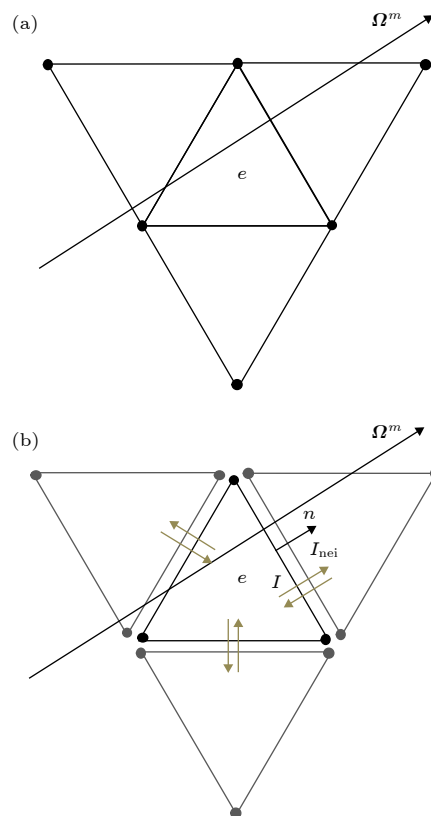


图 1 (a) 空间网格; (b) 相邻单元间数值通量示意图

Fig. 1. (a) Spatial mesh; (b) sketch of numerical flux across the adjacent elements.

以图 1(b) 中的单元 e 作为研究对象进行分析, 在该单元上对 (1) 式使用权函数 $w(\mathbf{r})$ 进行加权积分可得

$$\int_{A_e} w(\mathbf{r}) \Omega^m \cdot \nabla I^m dA = \int_{A_e} w(\mathbf{r}) (-\beta I^m + S^m) dA. \quad (3)$$

考虑辐射强度在相邻边界上的非连续性, 将高斯散度定理应用于 (3) 式可得

$$\begin{aligned} \int_{A_e} w(\mathbf{r}) \Omega^m \cdot \nabla I^m dA + \int_{\Gamma_e} w(\mathbf{r}) I_{\Gamma_e}^m \mathbf{n}_{\Gamma_e} \cdot \Omega^m d\Gamma \\ = \int_{A_e} (-\beta I^m + S^m) w(\mathbf{r}) dA, \end{aligned} \quad (4)$$

式中, $\mathbf{n}_{\Gamma_e}$ 表示图 1(b) 所示的离散单元边界外法向单位向量, Γ_e 表示离散单元边界, $I_{\Gamma_e}^m$ 表示相邻边界上的数值通量, 定义为

$$I_{\Gamma_e}^m = I_{\Gamma_e, nei}^m - I_{\Gamma_e}^m, \quad (5)$$

式中 $I_{\Gamma_e, nei}^m$ 表示图 1(b) 所示的与单元 e 相邻单元边界上的辐射强度, 定义为

$$I_{\Gamma_e, nei}^m = \lim_{\delta \rightarrow 0} I_{\Gamma_e}^m(\mathbf{r} + \delta \mathbf{n}_{\Gamma_e}). \quad (6)$$

本文数值通量的格式选取为迎风格式

$$I_{\Gamma_k}^m = \begin{cases} I_{\Gamma_k}^m = I_{\Gamma_k, \text{nei}}^m - I_{\Gamma_k}^m, & \mathbf{n}_{\Gamma_k} \cdot \boldsymbol{\Omega}^m < 0, \\ 0, & \mathbf{n}_{\Gamma_k} \cdot \boldsymbol{\Omega}^m > 0, \end{cases} \quad k = 1, 2, 3, \quad (7)$$

因此 (4) 式中的 $I^m \mathbf{n}_{\Gamma_e} \cdot \boldsymbol{\Omega}^m$ 可以写为

$$I_{\Gamma_k}^m \mathbf{n}_{\Gamma_k} \cdot \boldsymbol{\Omega}^m = \max(0, -\mathbf{n}_{\Gamma_k} \cdot \boldsymbol{\Omega}^m) (I_{\Gamma_k, \text{nei}}^m - I_{\Gamma_k}^m), \quad k = 1, 2, 3. \quad (8)$$

在每一个单元上对未知量采用形函数近似, 单元 e 上的辐射强度分布可表示为

$$I^m(\mathbf{r}) \cong \sum_{i=1}^{N_n=3} \phi_i(\mathbf{r}) I_i^m, \quad (9)$$

式中, $\phi_i(\mathbf{r})$ 表示定义在单元 e 上的形函数, I_i^m 表示第 i 个节点在第 m 个离散方向上的辐射强度, $N_n = 3$ 表示单元 e 的 3 个节点. 将 (9) 式代入 (4) 式中, 并采用形函数 $\phi_i(\mathbf{r})$ 作为权重函数 $w(\mathbf{r})$, 可得单元 e 上辐射传输方程的 DFEM 离散格式为

$$\mathbf{K}^m \mathbf{I}^m = \mathbf{H}^m, \quad (10)$$

式中 $\mathbf{I}^m = [I_1, I_2, I_3]^T$ 表示离散节点上的辐射强度; 矩阵 $\mathbf{K}^m$ 和 $\mathbf{H}^m$ 的元素表示为

$$\begin{aligned} K_{ji}^m &= \boldsymbol{\Omega}^m \cdot \int_{A_e} \nabla \phi_i \phi_j dA + \int_{A_e} \beta \phi_i \phi_j dA \\ &+ \sum_{k=1}^{N_b=3} \max(0, -\mathbf{n}_{\Gamma_k} \cdot \boldsymbol{\Omega}^m) \int_{\Gamma_k} \phi_i \phi_j d\Gamma, \end{aligned} \quad (11a)$$

$$\begin{aligned} H_j^m &= \boldsymbol{\Omega}^m \cdot \int_{A_e} \phi_j \phi_j S_i^m dA \\ &+ \sum_{k=1}^{N_b=3} \max(0, -\mathbf{n}_{\Gamma_k} \cdot \boldsymbol{\Omega}^m) \int_{\Gamma_k} \phi_j \phi_j I_{i, \text{nei}}^m d\Gamma, \end{aligned} \quad (11b)$$

其中 $N_b = 3$ 表示单元 e 的 3 个边界.

然后分析能量扩散方程. 能量扩散方程表示为

$$\nabla \cdot [k \nabla T(\mathbf{r})] = \nabla \cdot \mathbf{q}(\mathbf{r}), \quad (12)$$

式中, k 表示热导率; $\nabla \cdot \mathbf{q}(\mathbf{r})$ 为热辐射源项, 表示为

$$\nabla \cdot \mathbf{q}(\mathbf{r}) = \kappa_a \left[4\pi I_b(\mathbf{r}) - \int_{4\pi} I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) d\boldsymbol{\Omega} \right]. \quad (13)$$

与辐射强度类似, 单元 e 上温度的形函数近似表示为

$$T(\mathbf{r}) \cong \sum_{i=1}^{N_n=3} T_i \phi_i(\mathbf{r}). \quad (14)$$

温度的数值通量表示为

$$T_{\Gamma_k} = \begin{cases} T_{\Gamma_k, \text{nei}} - T_{\Gamma_k} & \nabla \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_k} < 0, \quad k = 1, 2, 3, \\ 0 & \nabla \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_k} > 0, \quad k = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (15)$$

最后可得能量扩散方程的 DFEM 离散格式为

$$\mathbf{M} \mathbf{T} = \mathbf{N}, \quad (16)$$

式中, $\mathbf{T} = [T_1, T_2, T_3]^T$ 包含离散节点上的温度; 矩阵 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{N}$ 的元素表示为

$$\begin{aligned} M_{ji} &= k \int_{A_e} \nabla \phi_i \nabla \phi_j dA \\ &+ k \sum_{k=1}^{N_b=3} \max(0, -\nabla \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_k}) \int_{\Gamma_k} \phi_i \nabla \phi_j d\Gamma, \end{aligned} \quad (17a)$$

$$\begin{aligned} N_j &= \int_{A_e} \left\{ \kappa_a \left[4\pi I_b - \int_{4\pi} I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) d\boldsymbol{\Omega} \right] \phi_j \right\} dA \\ &+ \sum_{k=1}^{N_b=3} \max(0, -\nabla \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_k}) \int_{\Gamma_k} \phi_j \nabla \phi_j T_{i, \text{nei}} d\Gamma. \end{aligned} \quad (17b)$$

至此, 辐射导热耦合传热控制方程的 DFEM 离散已经完成. 依次求解 (10) 式所示的辐射传输方程和 (16) 式所示的能量扩散方程即可得到离散节点的温度值.

3 模型验证

基于上述 DFEM 离散格式, 发展了 MATLAB 数值计算程序以求解 (11) 和 (17) 式中的各项元素, 进而通过求解方程 (10) 和 (16) 得到辐射强度和温度分布. 本节将 DFEM 应用于求解二维方形介质内的辐射导热耦合传热以验证数值模型的正确性. 方形介质边长为 L , 衰减系数为 β , 光学厚度为 $\tau = \beta L = 1.0$. 所有壁面均为发射率 $\varepsilon = 1.0$ 的黑壁面, 底边温度为 $T_b = 1000$ K, 其他壁面温度为 500 K, 普朗克数为 $N_{\text{pl}} = k\beta/(4\sigma T_b^3)$, 其中 k 表示热导率, σ 表示 Stefan-Boltzmann 常数, $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}$.

首先进行网格无关性检验. 分别将方形区域的边界均匀划分为 5, 10 和 15 个单元, 二维计算区域离散为 $N_e = 62, 226$ 和 504 个三角形单元. 图 2(a) 所示为角度划分为 $N_\theta \times N_\varphi = 10 \times 20$, 不同离散单元条件下介质对称线 $x/L = 0.5$ 上的无量纲温度 T/T_b 的分布规律. 图 2(b) 所示为离散单元数

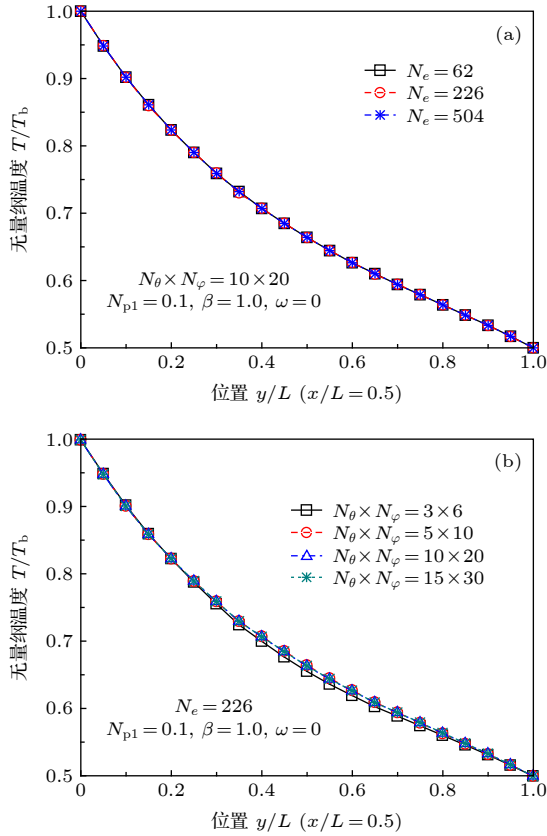


图2 方形介质对称线 $x/L = 0.5$ 上无量纲温度 T/T_b 分布 (a) 不同空间网格划分; (b) 不同角度划分

Fig. 2. Dimensionless temperature T/T_b along the symmetry line $x/L = 0.5$ for the cases: (a) Different spatial discretization schemes; (b) different angular discretization schemes.

$N_e = 226$, 不同角度划分 $N_\theta \times N_\varphi = 3 \times 6, 5 \times 10, 10 \times 20$ 和 15×30 条件下对称线上的无量纲温度分布. 由图2所示的结果可知, 离散单元 $N_e = 226$, 离散角度 $N_\theta \times N_\varphi = 10 \times 20$ 条件下所得的结果满足网格无关性要求, 在该网格划分条件下采用 DFEM 求解本算例所需时间为 25.38 s.

针对不同普朗克数 N_{pl} , DFEM 所得无量纲温度分布如图3(a)所示, 并和文献[39]采用离散传递法 (discrete transfer method, DTM) 所得结果进行了比较. 针对不同的介质散射反照率 $\omega = \kappa_a/\beta$, DFEM 和 DTM 所得无量纲温度的对比结果如图3(b)所示. 由图3(b)结果可知 DFEM 结果和文献 DTM 结果符合得很好, 验证了 DFEM 求解辐射导热耦合问题的正确性.

图4所示为在 $N_{pl} = 0.01, \beta = 1.0$ 以及 $\omega = 0.0$ 条件下, 不同数值方法所得对称线 $x/L = 0.5$ 上无量纲温度分布的对比结果. DTM 是一种基于光线

跟踪的数值方法[39], 避免了控制方程近似处理引起的误差, 因此采用该方法所得结果可视作该问题的基准解. 以 DTM 结果作为基准, 采用有限体积

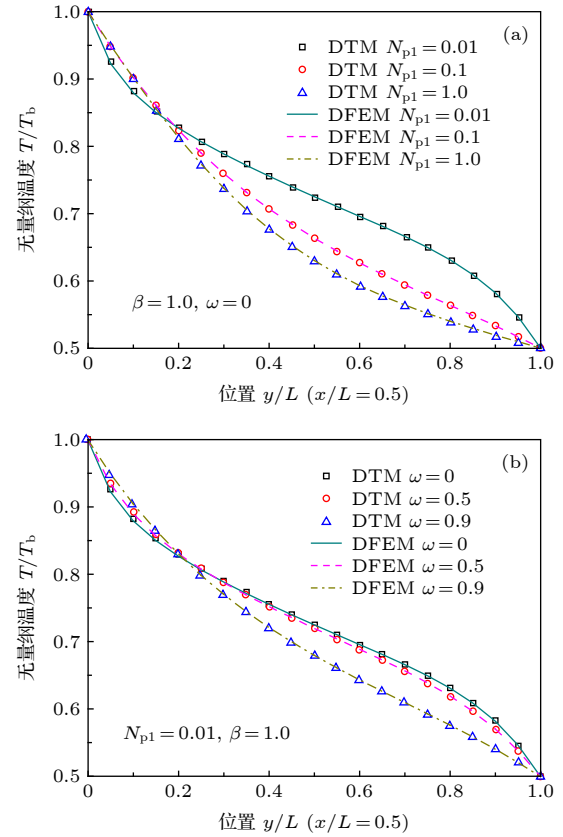


图3 方形介质对称线 $x/L = 0.5$ 上无量纲温度的 DFEM 结果和 DTM 结果对比 (a) 不同普朗克数; (b) 不同散射反照率

Fig. 3. Comparison of dimensionless temperature along the square medium symmetry line $x/L = 0.5$ obtained by DFEM and DTM for the cases: (a) Different Planck numbers; (b) different scattering albedos.

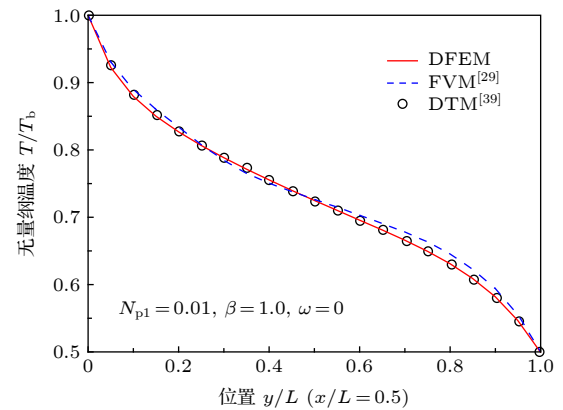


图4 不同数值方法得到的方形介质对称线上的无量纲温度对比

Fig. 4. Comparison of dimensionless temperature along the square medium symmetry line $x/L = 0.5$ obtained by different numerical methods.

法 (finite volume method, FVM)^[29] 所得结果最大误差为 2.21%, 而本文 DFEM 结果的最大误差仅为 0.68%, 说明 DFEM 结果更加精确.

4 结果和讨论

首先考虑如图 5(a) 所示的内含圆形壁面 (半径 $R_c = 0.2$ m) 的半圆形 (半径 $R_s = 1.0$ m) 介质内的辐射导热耦合问题. 介质衰减系数 $\beta = 1.0 \text{ m}^{-1}$, 内部圆形壁面温度 $T_c = 400 \text{ K}$, 外部半圆形壁面和底边温度 $T_s = 300 \text{ K}$, 壁面均为黑壁面且发射率 $\varepsilon = 1.0$. 采用 DFEM 方法求解沿着半径方向的无量纲温度分布. 方向离散为 $N_\theta \times N_\varphi = 20 \times 40$, 空间离散为如图 5(b) 所示的 1768 个三角形单元, 所得结果满足网格无关性要求, 采用 DFEM 求解本算例所需时间为 182.69 s.

在普朗克数 $N_{pl} = k\beta/(4\sigma T_s^3) = 0.1$ 条件下, 图 6 所示为采用不同方法 (Fluent^[31], 不同网格处理方式的 FVM^[31], 混合格子 Boltzmann-有限体积法 (LBM-FVM)^[40] 以及本文 DFEM) 所得的半圆

形介质对称线 $x = 0$ 上的温度分布. 由图 6 可知采用 Fluent 和 LBM-FVM 以及本文 DFEM 所得结果符合得较好; 而文献 [31] 采用 FVM 所得结果则具有较大的偏差, 这是文献 [21] 采用四边形网格处理弯曲壁面引起的计算误差所致. 图 6 所示结果表明, 和 FVM 相比, 本文发展的 DFEM 求解非规则形状介质内的辐射导热耦合问题更加精确.

图 7 所示为普朗克数 $N_{pl} = 0.1$ 和 1.0 条件下半圆形介质底边 $y = 0$ 上的总热流密度 $q_{\text{total}}(\mathbf{r}_w) = -\left(k \frac{\partial T(\mathbf{r}_w)}{\partial n} + \int_{\mathbf{n}_w \cdot \boldsymbol{\Omega} > 0} I(\mathbf{r}_w, \boldsymbol{\Omega})(\mathbf{n}_w \cdot \boldsymbol{\Omega}) d\Omega\right)$ (负号表示方向) 的分布规律. 由图 7 可知底边中点位置处的热流密度最强, 这是由于内部圆环温度较高, 底边中点距离高温圆环最近, 在辐射和导热共同作用下, 该位置处的换热强度达到最大. 由图 7(a) 结果可知, 当 $N_{pl} = 0.1$ 时, DFEM 结果和 Fluent 结果吻合良好, 而 LBM-FVM 结果存在明显误差. 当普朗克数增大到 $N_{pl} = 1.0$ 时, 采用不同方法所得结果符合得比较好, 如图 7(b) 所示. 图 7 所示结果表明, 对于普朗克数较小即辐射占优的辐射导热耦合传热问题, DFEM 所得结果更加精确.

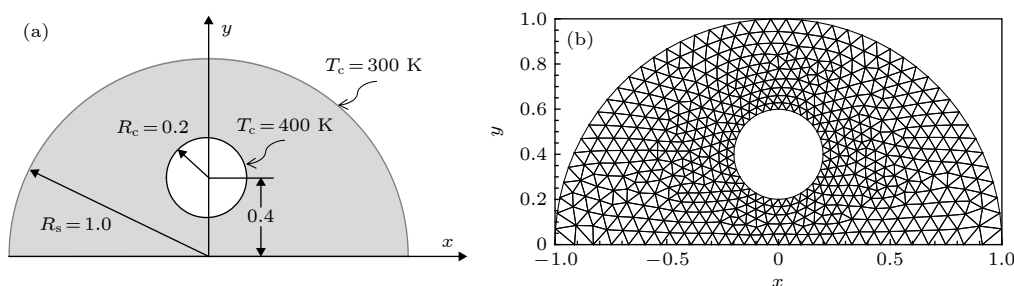


图 5 内含圆形热壁面的半圆形介质 (a) 结构示意图; (b) 网格划分

Fig. 5. Semicircle medium with an inner circle hot boundary: (a) Geometry sketch; (b) spatial discretization.

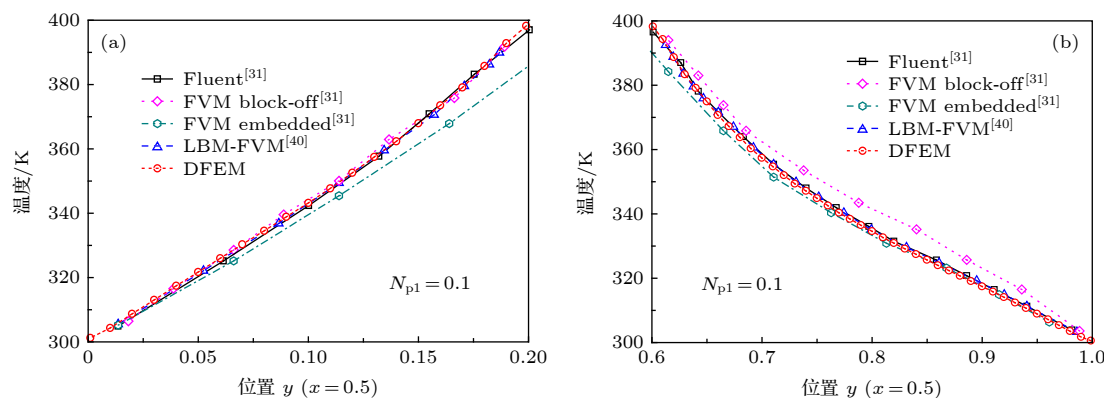


图 6 不同数值方法得到的半圆介质对称线上温度分布 (a) $y = [0.0, 0.2]$; (b) $y = [0.6, 1.0]$

Fig. 6. Temperature distributions along the symmetric line of the semicircle medium obtained by different numerical algorithms: (a) $y = [0.0, 0.2]$; (b) $y = [0.6, 1.0]$.

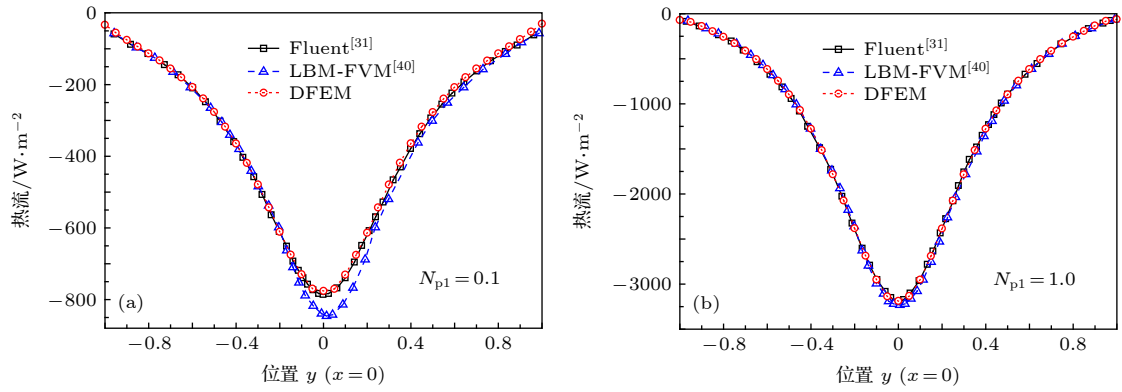


图 7 不同普朗克数条件下半圆介质底边上总热流密度分布 (a) $N_{pl} = 0.1$, (b) $N_{pl} = 1.0$

Fig. 7. Total flux distributions along the bottom boundary of the semicircle medium under the situations with different Plank numbers: (a) $N_{pl} = 0.1$; (b) $N_{pl} = 1.0$.

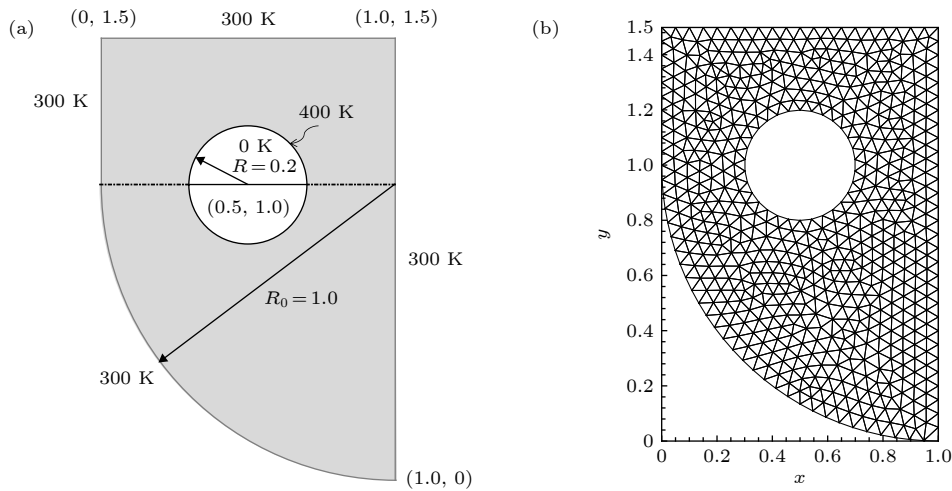


图 8 内含圆形热边界的非规则形状介质 (a) 结构示意图; (b) 网格划分

Fig. 8. Irregular medium with an inner hot boundary: (a) Geometry sketch; (b) spatial discretization.

接下来考虑如图 8(a) 所示的内含圆形热边界的非规则形状介质, 该模型可用来研究圆形热管和环境之间的辐射导热耦合换热. 介质尺寸 (单位为 m) 在图 8(a) 中给出, 介质衰减系数为 $\beta = 1.0 \text{ m}^{-1}$, 内部圆形边界温度为 400 K, 其他边界温度为自然环境温度 300 K, 所有壁面均为黑壁面且发射率为 $\varepsilon = 1.0$. 计算区域离散为图 8(b) 所示的 1142 个三角形单元、方向离散为 $N_\theta \times N_\varphi = 20 \times 40$ 条件下所得结果达到网格无关性要求, 采用 DFEM 求解本算例所需时间为 118.38 s.

图 9(a) 所示为不同普朗克数 $N_{pl} = 0.1$ 和 1.0 条件下非规则介质中线 $x = 0.5$ 上的温度分布. 由图 9(a) 可知, 对于 $N_{pl} = 0.1$ 的辐射占优问题, 从壁面到圆环之间的温度梯度先减小后增加, 说明靠近圆环和弯曲壁面处的介质温度变化较为剧烈, 而中间区域介质的温度变化较为平缓; 对于 $N_{pl} = 1.0$

的导热占优问题, 该区域内的温度梯度逐渐增加, 说明弯曲壁面附近处的介质温度变化较为平缓, 高温圆环附近处的介质温度变化剧烈; 圆环上方的介质温度变化剧烈程度也有所区别, 但由于该区间垂直高度较小, 因此该区间范围的介质温度沿 y 方向接近于线性减小.

在中心线上的同一位置处, 普朗克数 $N_{pl} = 0.1$ 对应的介质温度总是高于 $N_{pl} = 1.0$ 对应的介质温度. 这是由于当 $N_{pl} = 0.1$ 时, 辐射传热作用显著, 相同位置的辐射源项较强, 因此介质温度更高. 图 9(b) 和图 9(c) 所示分别为同普朗克数 $N_{pl} = 0.1$ 和 1.0 条件下的介质温度分布的等值线图, 图 9 中相邻两条等值线之间的温度差为 10 K. 由图 9(b) 和图 9(c) 的对比结果可知, 当普朗克数 $N_{pl} = 0.1$ 时, 强烈的辐射效应能够使高温圆环能量传播得更远, 因此介质内的能量分布更加均匀; 当普朗克数

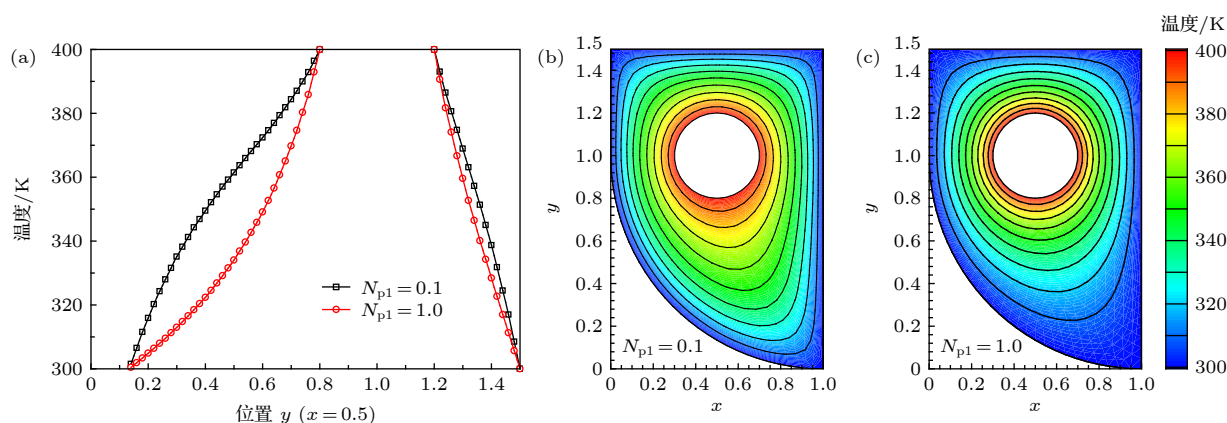


图 9 (a) 普朗克数 $N_{pl} = 0.1$ 和 1.0 时内含圆形热边界的非规则形状介质中线上温度分布; (b) $N_{pl} = 0.1$ 时介质温度分布; (c) $N_{pl} = 1.0$ 时介质温度分布

Fig. 9. (a) Temperature distributions along the centerline of the irregular medium with an inner hot boundary; (b) temperature distribution within the computation domain for the case of $N_{pl} = 0.1$; (c) temperature distribution within the computation domain for the case of $N_{pl} = 1.0$.

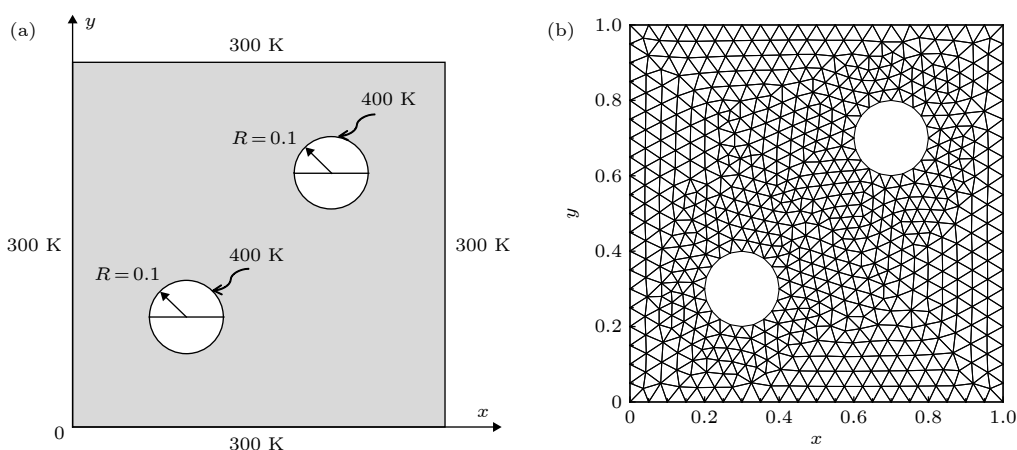


图 10 内含两个圆形热边界的矩形介质 (a) 结构示意图; (b) 网格划分

Fig. 10. The medium the square medium with two circular hot boundaries: (a) Geometry sketch; (b) spatial discretization.

$N_{pl} = 1.0$ 时, 显著的导热效应导致温度从高温圆环向外迅速降低, 因此外部边界附近较大范围内的介质温度处于较低水平。

进一步考虑如图 10(a) 所示的内含两个高温圆环的矩形介质, 该模型可用于研究两个高温管道及其所处环境之间的辐射导热耦合换热。矩形介质边长为 $L_x \times L_y = 1.0 \text{ m} \times 1.0 \text{ m}$, 内部圆环半径为 $R = 0.1 \text{ m}$, 圆心位置分别为 $(x, y) = (0.3 \text{ m}, 0.3 \text{ m})$ 和 $(x, y) = (0.7 \text{ m}, 0.7 \text{ m})$ 。矩形介质边界和圆环边界之间充满衰减系数为 $\beta = 1.0 \text{ m}^{-1}$ 的参与性介质, 内部两个圆形边界温度均为 400 K , 其他边界温度为 300 K , 所有壁面均为黑壁面且发射率为 $\varepsilon = 1.0$ 。计算区域离散为图 10(b) 所示的 1262 个三角形单元、方向离散为 $N_\theta \times N_\varphi = 20 \times$

40 条件下所得到的结果达到了网格无关性的要求, 采用 DFEM 求解本算例所需时间为 131.75 s 。

在不同普朗克数 $N_{pl} = 0.1$ 和 1.0 条件下, 中线 $x = 0.5$ 上的温度分布如图 11(a) 所示, 可知介质中线温度在 $y = [0, 0.3]$ 逐渐升高且温度变化剧烈程度逐渐降低, 再 $y = [0.3, 0.7]$ 的介质保持较高的温度, 在 $y = [0.7, 1.0]$ 逐渐降低。在同一位置处, $N_{pl} = 0.1$ 对应的介质温度高于 $N_{pl} = 1.0$ 对应的介质温度, 说明辐射效应作用对该模型中线上的介质温度具有显著的提升作用。图 11(b) 和图 11(c) 所示分别为同普朗克数 $N_{pl} = 0.1$ 和 1.0 条件下计算区域内温度分布的等值线图, 相邻两条等值线之间的温度差为 5 K 。由图 11(b) 和图 11(c) 所示结果可知, 介质中心点位置 $(x, y) = (0.5 \text{ m}, 0.5 \text{ m})$

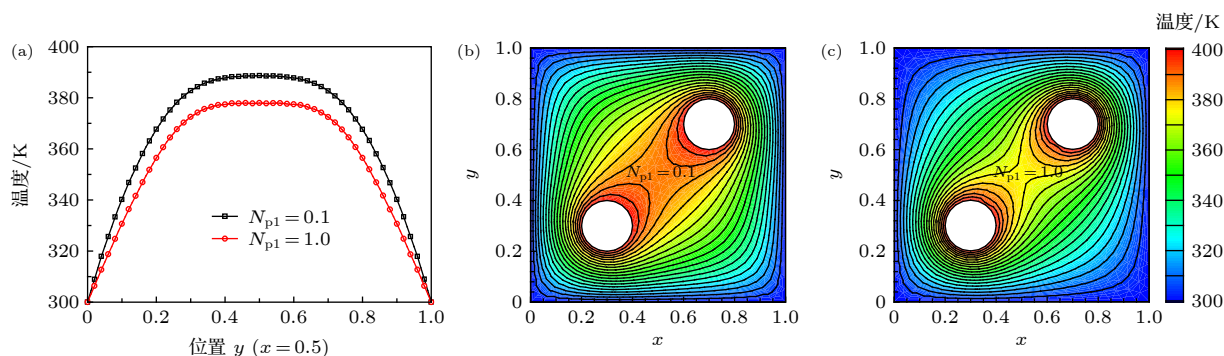


图 11 (a) 普朗克数 $N_{pl} = 0.1$ 和 1.0 时内含两个圆形热边界的矩形介质中线上温度分布; (b) $N_{pl} = 0.1$ 时介质温度分布; (c) $N_{pl} = 1.0$ 时介质温度分布

Fig. 11. (a) Temperature distributions along the centerline of the square medium with two circular hot boundaries; (b) temperature distribution within the computation domain for the case of $N_{pl} = 0.1$; (c) temperature distribution within the computation domain for the case of $N_{pl} = 1.0$.

周围存在一个温度梯度较小的区域, 且普朗克数越小, 该区域的面积越大. 以上结果表明辐射效应会弱化中心点位置处的温度梯度, 而导热效应则会强化该位置处的温度梯度.

5 结 论

本文将 DFEM 扩展应用于求解辐射导热耦合传热问题, 采用非结构化三角形单元划分计算区域, 给出了辐射传输方程和能量扩散方程的 DFEM 离散格式, 验证了数值算法的正确性并研究了非规则形状介质内的辐射导热耦合传热问题. 研究结果表明: 本文发展的 DFEM 能够得到非规则形状介质内辐射导热耦合传热问题的高精度数值结果, 尤其是对于普朗克数较小的辐射占优问题; 非规则形状介质内的温度分布规律表明辐射效应会弱化热边界附近的温度梯度, 而导热效应则会强化热边界附近的温度梯度.

参考文献

- [1] Viskanta R 1965 *J. Heat Transf.* **87** 143
- [2] Viskanta R, Incropera F P 1985 *J. Sol. Energy Eng.* **107** 29
- [3] Wang P Y, Tan H P, Liu L H, Tong T W 2000 *J. Thermophys. Heat Transf.* **14** 512
- [4] Zhang J Q, Nie L R, Chen C Y, Zhang X Y 2016 *AIP Adv.* **6** 075212
- [5] Chen R Y, Pan W L, Zhang J Q, Nie L R 2016 *Chaos* **26** 093113
- [6] Chen R Y, Tong L M, Nie L R, Wang C J, Pan W L 2017 *Physica A* **468** 532
- [7] Li S, Li G, Tian D F, Deng L 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 249501 (in Chinese) [李树, 李刚, 田东风, 邓力 2013 物理学报 **62** 249501]
- [8] Sun B, Wang H, Sun X B, Hong J, Zhang Y J 2012 *Chin. Phys. B* **21** 129501
- [9] Chen R Y, Nie L R, Chen C Y, Wang C J 2017 *J. Stat. Mech.- Theory Exp.* 013201
- [10] Chen R Y, Nie L R, Chen C Y 2018 *Chaos* **28** 053115
- [11] Liang Z C, Jin Y Q 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1319 (in Chinese) [梁子长, 金亚秋 2003 物理学报 **52** 1319]
- [12] Ben X, Yi H L, Tan H P 2014 *Chin. Phys. B* **23** 099501
- [13] Zhao J M 2007 *Ph. D. Dissertation* (Harbin: Harbin Institute of Technology) (in Chinese) [赵军明 2007 博士学位论文 (哈尔滨: 哈尔滨工业大学)]
- [14] Zhao J M, Liu L H 2007 *J. Chem. Ind. Eng.* **58** 1110 (in Chinese) [赵军明, 刘林华 2007 化工学报 **58** 1110]
- [15] Hu S, Gao T C, Liu L, Yi H L, Ben X 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 094201 (in Chinese) [胡帅, 高太长, 刘磊, 易红亮, 贲勋 2015 物理学报 **64** 094201]
- [16] Wang C H, Yi H L, Tan H P 2017 *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf.* **189** 383
- [17] Gao X W, Wang J, Cui M 2011 *Sci. Sin. Phys. Mech. Astron.* **41** 302 (in Chinese) [高效伟, 王静, 崔苗 2011 中国科学: 物理学 力学 天文学 **41** 302]
- [18] Sun J 2016 *Ph. D. Dissertation* (Harbin: Harbin Institute of Technology) (in Chinese) [孙杰 2016 博士学位论文 (哈尔滨: 哈尔滨工业大学)]
- [19] Wang C H, Feng Y Y, Yue K, Zhang X X 2019 *Int. Commun. Heat Mass Transf.* **108** 104287
- [20] Sun Y J, Zheng S, Jiang B, Tang J C, Liu F S 2019 *Int. J. Heat Mass Transf.* **145** 118777
- [21] Tan J Y, Liu L H, Li B X 2006 *Numer. Heat Transf. Part B-Fundam.* **49** 179
- [22] Wang C H, Qu L, Zhang Y, Yi H L 2018 *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf.* **208** 108
- [23] Liu L H, Tan J Y, Li B X 2006 *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf.* **101** 237
- [24] Wang C H, Feng Y Y, Ben X, Yue K, Zhang X X 2019 *Opt. Express* **27** A981
- [25] Sun S C, Wang G J, Chen H, Zhang D Q 2019 *Int. J. Heat Mass Transf.* **134** 574
- [26] Zheng S, Yang Y, Zhou H 2019 *Int. J. Heat Mass Transf.* **129** 1232
- [27] Zhang K J, Liu L, Zeng Q W, Gao T C, Hu S, Chen M 2019 *Acta Phys. Sin.* **68** 194207 (in Chinese) [张克瑾, 刘磊, 曾庆伟, 高太长, 胡帅, 陈鸣 2019 物理学报 **68** 194207]

- [28] Mishra S C, Krishna C H, Kim M Y 2011 *Numer. Heat Transf. Part A-Appl.* **60** 254
- [29] Mishra S C, Roy H K 2007 *J. Comput. Phys.* **223** 89
- [30] Howell J R, Menguc M P 2018 *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf.* **221** 253
- [31] Zabihi M, Lari K, Amiri H 2017 *J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.* **39** 2847
- [32] Hesthaven J S, Warburton T 2007 *Nodal Discontinuous Galerkin Methods: Algorithms, Analysis, and Applications* (New York: Springer Science & Business Media)
- [33] Cui X, Li B Q 2005 *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf.* **96** 383
- [34] Liu L H, Liu L J 2007 *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf.* **105** 377
- [35] Wang C H, Yi H L, Tan H P 2017 *J. Eng. Thermophys.* **38** 833 (in Chinese) [王存海, 易红亮, 谈和平 2017 工程热物理学报 **38** 833]
- [36] Wang C H, Yi H L, Tan H P 2017 *Appl. Opt.* **56** 1861
- [37] Wang C H, Yi H L, Tan H P 2017 *Opt. Express* **25** 14621
- [38] Feng Y Y, Wang C H 2018 *Int. J. Heat Mass Transf.* **126** 783
- [39] Mishra S C, Talukdar P, Trimis D, Durst F 2003 *Int. J. Heat Mass Transf.* **46** 3083
- [40] Sun Y, Zhang X 2018 *Int. J. Heat Mass Transf.* **121** 1039

Discontinuous finite element solutions for coupled radiation-conduction heat transfer in irregular media^{*}

Wang Cun-Hai^{1)2)†} Zheng Shu^{3)‡} Zhang Xin-Xin¹⁾²⁾

1) (School of Energy and Environmental Engineering, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China)

2) (Beijing Key Laboratory of Energy Conservation and Emission Reduction for Metallurgical Industry, Beijing 100083, China)

3) (School of Energy, Power and Mechanical Engineering, North China Electric Power University, Beijing 102206, China)

(Received 3 August 2019; revised manuscript received 25 October 2019)

Abstract

The discontinuous finite element method (DFEM) is used to investigate the coupled radiation-conduction heat transfer in an irregular medium, and the highly accurate solutions for several typical media are numerically obtained. Comparing with the traditional continuous finite element method, the computational domain in the DFEM application is discretized into unstructured meshes that are assumed to be separated from each other. The shape function construction, field variable approximation, and numerical solutions are obtained for every single element. The continuity of the computational domain is maintained by modeling a numerical flux with the up-winding scheme. Thus the DFEM has the salient feature of geometry flexibility and simultaneously supports locally conservative solutions. The DFEM discretization for the radiative transfer equation and the energy diffusion equation are first presented, and the accuracies of the DFEM for coupled radiation-conduction heat transfer problems are verified. Combined radiation-conduction heat transfer problems in several irregular media are afterward solved, and the highly accurate DFEM solutions are presented.

Keywords: radiation-conduction, coupled heat transfer, numerical simulation, discontinuous finite element method

PACS: 44.40.+a, 44.10.+i, 44.05.+e, 47.11.Fg

DOI: 10.7498/aps.69.20191185

^{*} the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 51906014, 51976057, 51890891), the China Postdoctoral Science Foundation (Grant No. 2018M641196), and the Fundamental Research Funds for the Central Universities (Grant No. FRF-TP-18-072A1).

[†] Corresponding author. E-mail: wangcunhai@ustb.edu.cn

[‡] Corresponding author. E-mail: shuzheng@ncepu.edu.cn