



## 放疗绝对剂量的数学算法模型

谢天赐 张彬 贺泊 李昊鹏 秦壮 钱金钱 石锲铭 Lewis Elfed 孙伟民

### Mathematical algorithm model of absolute dose in radiotherapy

Xie Tian-Ci Zhang Bin He Bo Li Hao-Peng Qin Zhuang Qian Jin-Qian Shi Qie-Ming Lewis Elfed Sun Wei-Min

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 70, 018701 (2021) DOI: 10.7498/aps.70.20200986

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.70.20200986>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

AlGa<sub>N</sub>/Ga<sub>N</sub>高电子迁移率器件外部边缘电容的物理模型

The physics-based model of AlGa<sub>N</sub>/Ga<sub>N</sub> high electron mobility transistor outer fringing capacitances

物理学报. 2020, 69(7): 077302 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191931>

激光模拟瞬态剂量率闩锁效应电流特征机制研究

Characteristics of latch-up current of dose rate effect by laser simulation

物理学报. 2019, 68(12): 124202 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190237>

铁电存储器60Co  $\gamma$ 射线及电子总剂量效应研究

Total ionizing dose effect of ferroelectric random access memory under Co-60 gamma rays and electrons

物理学报. 2018, 67(16): 166101 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180829>

射线总剂量辐照对单轴应变Si纳米n型金属氧化物半导体场效应晶体管栅隧穿电流的影响

Influence of  $\gamma$ -ray total dose radiation effect on the tunneling gate current of the uniaxial strained Si nanometer n-channel metal-oxide-semiconductor field-effect transistor

物理学报. 2017, 66(7): 076101 <https://doi.org/10.7498/aps.66.076101>

典型模拟电路低剂量率辐照损伤增强效应的研究与评估

Estimation of low-dose-rate degradation on bipolar linear circuits using different accelerated evaluation methods

物理学报. 2018, 67(9): 096101 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180027>

具有感觉记忆的忆阻器模型

Mathematical model of memristor with sensory memory

物理学报. 2019, 68(1): 018501 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181577>

## 放疗绝对剂量的数学算法模型\*

谢天赐<sup>1)</sup> 张彬<sup>1)</sup> 贺泊<sup>1)</sup> 李昊鹏<sup>1)</sup> 秦壮<sup>2)</sup> 钱金钱<sup>1)</sup>  
石锲铭<sup>1)</sup> Lewis Elfed<sup>3)</sup> 孙伟民<sup>1)†</sup>

1) (哈尔滨工程大学物理与光电工程学院, 中国教育部纤维集成光学重点实验室, 哈尔滨 150001)

2) (黑龙江大学电子工程学院, 哈尔滨 150001)

3) (利莫瑞克大学, 光纤传感器研究中心, 利莫瑞克, 爱尔兰)

(2020年6月26日收到; 2020年8月30日收到修改稿)

本文提出一种通过物理模型计算放疗过程中每一个组织深度处绝对剂量的算法, 它可代替蒙特卡罗仿真的部分工作且耗费时间更少. 这个算法是基于对照射野内 X 射线产生电子的能量注量的积分运算, 并考虑了射线的能谱及二次散射线, 得到了后向散射对表面剂量的贡献比例, 同时得到前向散射、后向散射及原射线剂量贡献的关系. 比较了二次光子和二次电子的三维能谱, 得出该能谱是粒子注量关于粒子能量和粒子运动方向的函数. 为了得到每一深度处的光子注量, 计算了有连续能谱的 X 射线的期望质量衰减系数. 上述算法计算得到的绝对剂量与蒙特卡罗方式仿真的结果趋势一致, 两者的差异在于算法未考虑高于二次的散射线. 最后将算法应用到非均匀模体剂量计算, 能准确反映其中剂量分布特点且具有较小的误差.

关键词: 放疗, 模型, 绝对剂量, 康普顿效应

PACS: 87.55.Qr, 87.55.Gh, 87.55.kd, 87.64.Bx

DOI: 10.7498/aps.70.20200986

## 1 引言

在放射治疗领域, 蒙特卡罗 (Monte Carlo) 仿真是目前公认的最精确的剂量计算方法, 它可以精确地模拟加速器和患者组织的各种结构的真实辐射传输<sup>[1]</sup>. 蒙特卡罗仿真基于粒子运输计算和概率统计的原理, 可以在计算机上进行癌症风险评估<sup>[2]</sup>、合理制定放疗计划<sup>[3]</sup>、直线加速器调试<sup>[4]</sup>等工作, 但要想得到较高的仿真精度会耗费大量的时间.

为了更直观地反映辐射和组织之间的相互作用, 减少计算时间, 研究人员尝试提出一些理论模型和计算方法来代替蒙特卡罗仿真<sup>[5-7]</sup>. Jette<sup>[8]</sup> 计算了不同能量光子束从一个相互作用点产生的所

有康普顿电子的剂量分布, 但只计算了单能射线, 且没有考虑射野中心轴以外其他地方对剂量分布的影响. Tillikainen 等<sup>[9]</sup> 给出了窄射线束条件下各深度辐射剂量的计算方法并考虑能谱和散射等相关因素, 但其计算仍依赖于蒙特卡罗仿真的射线束. 同时对于笔形束卷积法、各向异性解析法、筒串卷积叠加法在计算非均匀模体时存在较大误差<sup>[10-13]</sup>, 特别是对于笔形束卷积法, 由于并未考虑电子的横向平衡条件, 在低密度的肺模体中计算剂量明显偏高<sup>[12]</sup>.

本文以康普顿电子的特性及其产生的能量沉积为基础来解决放疗中的剂量计算问题, 主要工作是计算原射线和散射线在各个深度上产生的电子能量注量, 并通过积分能量注量得到射野中心轴线

\* 黑龙江省自然科学基金 (批准号: ZD2019H003)、国家自然科学基金与中国科学院合作设立的天文联合研究基金 (批准号: U1631239, U1931206) 和高等学校学科创新引智计划 (批准号: B13015) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: sunweimin@hrbeu.edu.cn

上的绝对剂量与水模体深度的关系. 这些研究都是基于康普顿效应, 康普顿效应在高能 X 射线 (如加速电压为 6 MV 的 X 射线) 与物质相互作用中起着重要作用. 本文以医用加速器的非单能射线为射线源, 考虑了射线的二次散射影响, 将其分为前向散射和后向散射, 计算出前向、后向散射对表面剂量的贡献比例. 比较了二次散射光子和二次反冲电子的三维能谱, 该能谱表示粒子通量与能量和粒子方向的关系. 通过对非均匀模体的剂量计算发现, 本研究的算法能真实反映模体内轴向剂量和横向剂量分布.

## 2 理论模型与分析方法

### 2.1 绝对剂量表达式

在医用 X 射线照射水模体的物理模型中 (如图 1 所示), 为了计算射野中心轴 ( $z$  轴) 计算点  $P$  的剂量, 建立了以水模体表面的射野中心点为坐标原点的三维坐标系, 其中  $z$  轴的方向向下,  $2l$  为射野的边长,  $h\nu$  为入射光子的能量,  $O'$  为射野平面  $C$  的中心点, 微元  $K$  的长、宽、高分别为  $dx$ ,  $dy$ ,  $\Delta z$ ,  $P$  点所在深度为  $z$ . 为了建立剂量形成的物理模型, 水模体被分成了  $z_{\max}/\Delta z$  个厚度为  $\Delta z$  的薄层, 其中  $z_{\max}$  为水模体最大深度,  $\Delta z$  为薄层水模体厚度.

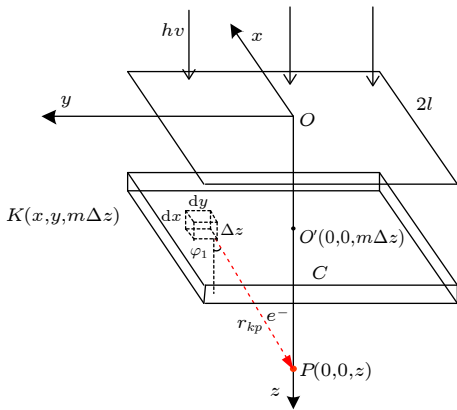


图 1 绝对剂量的算法模型示意图

Fig. 1. Schematic diagram of absolute dose algorithm model.

射野中心轴线上  $P$  点的剂量  $D$  可以通过累加计算得到, 该累加来自于对每一个深度处薄层内的射线与物质作用产生的电子到达  $P$  点时沉积的能量. 在考虑射线在组织中的衰减后,  $P$  点处的剂量表示为

$$D(z) = \sum_{m=1}^{z_{\max}/\Delta z} D'(m, z), \quad (1)$$

其中  $D'(m, z)$  表示在深度为  $m\Delta z$  处的薄层  $C$  产生电子到达  $P$  点所造成的剂量,  $m$  为正整数.

根据吸收剂量的定义 [14], 某一点的吸收剂量在数值上等于能量注量. 水模体某一深度处  $D'$  可以近似由原射线和二次散射线产生的能量注量表示:

$$D' = D'_p + D'_s, \quad (2)$$

其中  $D'_p$  表示由原射线和物质作用产生的二级电子的能量注量,  $D'_s$  表示由二次散射线和物质作用产生的三级电子的能量注量.

### 2.2 原射线产生的剂量 $D'_p$

在  $K$  点产生的电子的经过距离  $r_{kp}$  (图 1 中的红色虚线) 后到达计算点  $P$ ,  $\varphi_1$  为电子运动方向与  $z$  轴的夹角, 吸收剂量  $D'_p$  是薄层  $C$  内所有微元对  $P$  点的电子能量注量贡献的积分, 由下列函数表示:

$$D'_p(m, z) = \iint_C n_e \cdot k(r_{kp}) \Psi(m, \varphi_1) \Delta z dx dy, \quad (3)$$

其中  $\Psi(m, \varphi_1)$  表示电子的能量注量,  $k(r_{kp})$  表示电子的能量注量随距离的衰减规律,  $n_e$  表示物质的每克电子数, 单位为  $g^{-1}$ , 对于水模体取值为  $3.343 \times 10^{23} g^{-1}$ .  $\Psi(m, \varphi_1)$  的表达式 [15] 为

$$\Psi(m, \varphi_1) = \int_0^{E_{\max}} \Phi(\varphi_1, h\nu) e^{-\tau m \Delta z} dE(\varphi_1, h\nu), \quad (4)$$

其中  $e^{-\tau m \Delta z}$  表示非单能射线光子注量的衰减规律,  $\tau$  表示期望质量衰减系数,  $\Phi(\varphi_1, h\nu)$  表示水模体表面  $z = 0$  处光子与物质相互作用产生的电子注量,  $e^{-\tau m \Delta z}$  与  $\Phi(\varphi_1, h\nu)$  的乘积表示深度为  $m\Delta z$  的薄层  $C$  内的光子与物质相互作用产生的电子注量.  $E(\varphi_1, h\nu)$  表示电子的能量, 积分的上下限为电子的最大能量和最小能量.  $\varphi_1$  的表达式为

$$\varphi_1 = \text{atan} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z - m\Delta z}, \quad (5)$$

其中  $x$  和  $y$  是微元  $K$  的坐标.  $\Phi(\varphi_1, h\nu)$  表达式为

$$\Phi(\varphi_1, h\nu) = n(h\nu) \rho(\varphi_1, h\nu), \quad (6)$$

其中  $\rho(\varphi_1, h\nu)$  表示二次电子的微分截面 (光子与物质相互作用的概率相对方向角的微分).  $n(h\nu)$  表示入射光子的注量, 表达式为

$$n(h\nu) = A_2 e^{-t_2 \cdot h\nu} - A_1 e^{-t_1 \cdot h\nu}, \quad (7)$$

其中  $A_1, A_2, t_1$  和  $t_2$  为一般参数, 没有物理含义. 电子的微分截面  $\rho(\varphi_1, hv)$  是一个重要的参数, 决定了电子在不同方向的运动特性.  $\rho(\varphi_1, hv)$  的表达式为<sup>[16]</sup>

$$\rho(\varphi_1, hv) = \frac{r_e^2}{2} \left( \frac{1}{\beta} + \beta - \sin^2 \theta_1 \right) \beta^2 \frac{\sin \theta_1}{\sin \varphi_1} \frac{d\theta_1}{d\varphi_1}, \quad (8)$$

其中  $r_e$  表示电子的经典半径,  $\beta = hv'/hv$ <sup>[16]</sup> 表示二次光子的能量  $hv'$  与入射光子能量  $hv$  的比值,  $\theta_1$  表示二次光子运动方向与入射光子方向的夹角.  $\beta$  是关于  $\theta_1$  的函数:

$$\beta = \frac{1}{1 + \alpha(1 - \cos \theta_1)}, \quad (9)$$

而  $\theta_1$  为关于  $\varphi_1$  的函数:

$$\theta_1 = 2 \arctan \frac{1}{(1 + \alpha) \tan \varphi_1}, \quad (10)$$

其中  $\alpha$  的表达式为

$$\alpha = \frac{hv}{m_e c^2}, \quad (11)$$

其中  $m_e c^2$  为单个电子的静止能量.

$E(\varphi_1, hv)$  是基于康普顿效应的能量守恒原则的函数, 其表达的电子能量可以通过入射光子能量与散射光子能量做差得到, 函数表达式为

$$E(\varphi_1, hv) = hv - hv', \quad (12)$$

其中  $hv'$  表示二次光子的能量.

在 (3) 式中的  $k(r_{kp})$  可通过研究窄电子束条件下能量注量在单一方向的变化规律得到. 从电子束的百分深度剂量 (percent depth dose, PDD) 曲线随射野的变化规律可以得出, 当射野足够小 (窄电子束) 时, 电子的能量注量将遵循下列指数衰减规律<sup>[17]</sup>:

$$k(r_{kp}) = e^{-\mu_2 r_{kp}}, \quad (13)$$

根据图 1 中的几何关系, 其中的  $r_{kp}$  的表达式为

$$r_{kp} = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - m\Delta z)^2}, \quad (14)$$

而  $\mu_2$  表示单能电子的衰减系数, 可以通过射线产生的二次电子的最大穿透深度推导, 该深度在数值上与最大剂量点对应的深度相等<sup>[17]</sup>, 电子的能量随着反冲角  $\varphi_1$  增大而减小 (见第 3.3 节分析), 因此  $\mu_2$  是关于反冲角  $\varphi_1$  的函数. 不妨设两者关系为线性:

$$\mu_2 = k_\rho \cdot \varphi_1 + \mu_0, \quad (15)$$

其中  $\mu_0$  表示反冲角  $\varphi_1$  为 0 时电子的衰减系数. 根据不同能量的电子对应不同射程, 这里  $\mu_0$  取值 4,

$k_\rho$  取值 3.

根据 (5) 式和 (14) 式, (3) 式中的  $D'_p(m, z)$  可写作

$$D'_p(m, z) = \int_{-l}^l \int_{-l}^l n_e \cdot k(x, y, z, m) \Psi(x, y, m) dx dy. \quad (16)$$

### 2.3 二次射线产生的剂量 $D'_s$

表达式  $D'_s$  的推导过程与  $D'_p$  相似, 只是能量注量来自二次光子产生的三级电子. 由于二次光子的散射角  $\theta_1$  的范围是  $0-\pi$ , 将  $D'_s$  分为前向散射和后向散射, 如图 2 所示. 在下列计算中, 微元  $K$  到二次射线作用点之间的距离 (图 2 带箭头的黑色实线长度) 被忽略. 二次射线产生的剂量表示为

$$D'_s = D'_{sf} + D'_{sb}, \quad (17)$$

其中  $D'_{sb}$  表示散射光子方向向上 ( $\pi/2 < \theta_1 \leq \pi$ ) 带来的能量注量,  $D'_{sf}$  表示散射光子方向向下 ( $0 \leq \theta_1 \leq \pi/2$ ) 带来的能量注量.

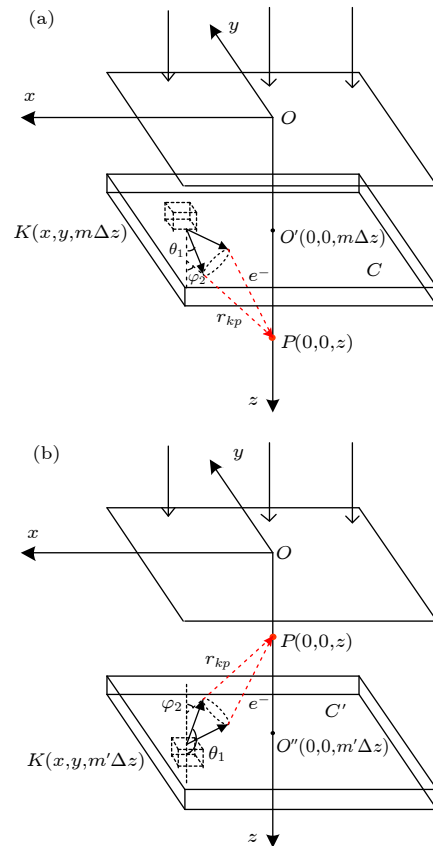


图 2  $D'_{sf}$  (a) 和  $D'_{sb}$  (b) 算法模型示意图

Fig. 2. Schematic diagram of  $D'_{sf}$  (a) and  $D'_{sb}$  (b) algorithm model.

根据首次散射角、二次反冲角及二次散射角之间的关系, 在  $D'_{sf}$  的计算中参考 (8) 式可得到前向散射的三级电子的微分截面为

$$\begin{aligned} \rho_f(\varphi_2, hv, \theta_1) &= \frac{r_e^2}{2} \left( \frac{hv'}{hv''} + \frac{hv''}{hv'} - \sin^2(\theta_2 - \theta_1) \right) \\ &\times \left( \frac{hv''}{hv'} \right)^2 \frac{\sin(\theta_2 - \theta_1)}{\sin(\varphi_2 - \theta_1)} \frac{d(\theta_2 - \theta_1)}{(\varphi_2 - \theta_1)}, \end{aligned} \quad (18)$$

其中  $hv''$  表示三级光子的能量,  $\theta_2$  表示二次光子散射角,  $\varphi_2$  表示二次电子反冲角.

三级光子的能量与二次光子的能量比例  $\beta'_f$  为

$$\beta'_f = 1/[1 + \alpha(1 - \cos(\theta_2 - \theta_1))], \quad (19)$$

其中二次散射角  $\theta_2$  是一个关于  $\varphi_1$  和  $\theta_1$  的函数:

$$\theta_2 = 2\text{atan} \frac{1}{(1 + \alpha)\tan(\varphi_2 - \theta_1)} + \theta_1, \quad (20)$$

在  $D'_{sb}$  的计算中, 三级电子的微分截面写成如下式子

$$\begin{aligned} \rho_b(\varphi_2, hv, \theta_1) &= \frac{r_e^2}{2} \left( \frac{hv'}{hv''} + \frac{hv''}{hv'} - \sin^2(\theta_2 + \theta_1 - \pi) \right) \\ &\times \left( \frac{hv''}{hv'} \right)^2 \frac{\sin(\theta_2 + \theta_1 - \pi)}{\sin(\varphi_2 + \theta_1 - \pi)} \frac{d(\theta_2 + \theta_1 - \pi)}{d(\varphi_2 + \theta_1 - \pi)}. \end{aligned} \quad (21)$$

三级光子与二次光子的能量比例  $\beta'_b$  为

$$\beta'_b = \frac{1}{1 + \alpha(1 - \cos(\theta_2 + \theta_1 - \pi))}, \quad (22)$$

二次散射角  $\theta_2$  是关于  $\varphi_1$  和  $\theta_1$  的函数:

$$\theta_2 = 2\text{atan} \frac{1}{(1 + \alpha)\tan(\varphi_2 + \theta_1 - \pi)} - \theta_1 + \pi. \quad (23)$$

来自所有方向的二次光子所产生的电子到达点  $P$ , 所有电子在此过程中的运动轨迹形成“圆锥”(图 2 红色线和黑色虚线组成). 由该“圆锥”造成的能量注量需要针对其体积作积分运算, 但是根据 (16) 式的运算, 需要对该能量注量计算“圆锥”体积积分的均值以得到前向散射  $D'_{sf}$  的式子

$$\begin{aligned} D'_{sf}(z) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \int_{-s}^s \int_{-s}^s n_e \cdot k(x, y, z) \\ &\times \Psi(x, y, z, \theta_1) dx dy d\theta_1, \end{aligned} \quad (24)$$

同理后向散射  $D'_{sb}$  的式子为

$$\begin{aligned} D'_{sb}(z) &= \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \int_{-s}^s \int_{-s}^s n_e \cdot k(x, y, z) \\ &\times \Psi(x, y, z, \theta_1) dx dy d\theta_1. \end{aligned} \quad (25)$$

(24) 式与 (25) 式计算的是二维积分的均值, 但在数值上与“圆锥”积分的均值相等.

## 2.4 射线的期望线性衰减系数 $\tau$

任意单能的线性衰减系数  $\mu$  为 [16]

$$\mu = n_e \cdot \rho \cdot \sigma_e, \quad (26)$$

其中  $\rho$  表示物质的密度, 单位为  $\text{g}/\text{cm}^3$ ,  $n_e$  表示物质的每克电子数,  $\sigma_e$  表示康普顿效应截面.  $\sigma_e$  是一个关于光子能量的表达式 [16].

$$\begin{aligned} \sigma_e &= 2\pi r_e^2 \left\{ \frac{1 + \alpha}{\alpha^2} \left[ \frac{2(1 + \alpha)}{1 + 2\alpha} - \frac{\ln(1 + 2\alpha)}{\alpha} \right] \right. \\ &\left. + \frac{\ln(1 + 2\alpha)}{2\alpha} - \frac{1 + 3\alpha}{(1 + 2\alpha)^2} \right\}, \end{aligned} \quad (27)$$

因此线性衰减系数  $\mu$  是一个关于光子能量  $hv$  的函数  $\mu(hv)$ , 在深度为  $z$  处的非单能射线强度表示为

$$I(z) = \int_0^{hv_{\max}} n(hv) e^{-\mu(hv)z} d(hv), \quad (28)$$

其中  $hv_{\max}$  表示能谱函数  $n(hv)$  里射线能量的最大值.

将 (7) 式代入 (28) 式, 得出光子强度关于深度的函数关系, 发现其仍然遵循指数衰减规律. 期望质量衰减系数  $\tau$  用 (29) 式拟合  $I(z)$  的函数曲线得到

$$y = y_0 e^{-\tau x}, \quad (29)$$

其中  $y_0$  表示组织深度为 0 时的光子强度. 这个指数衰减表示了原射线的光强的变化规律.

## 3 结果与分析

### 3.1 蒙特卡罗对绝对剂量的仿真与计算

图 3 所示为真实加速器 (型号为 Varian IX 3937) 测量 PDD 实验数据 (experiment data) 与基于蒙特卡罗仿真出来 PDD 数据 (Monte Carlo simulation) 的对比, 纵坐标为以最大剂量值为单位的归一化剂量 (normalized dose), 横坐标为水模体深度 (depth). 实验条件为 6 MV 的 X 射线、照射野面积为  $10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$ , 源皮距为 100 cm. 在每个深度处两组数据的差异小于  $\pm 3.6\%$ .

图 4 为上述仿真的加速器结构下 6 MV 的 X 射线能谱 (6 MV X-ray spectrum) 及来自 (7) 式的仿真函数  $n(hv)$  (fitting function  $n(hv)$ ), 纵坐标为光子通量 (photon flux), 横坐标为光子能量 (energy  $hv$ ). 两者的相关系数  $R^2$  大于 0.993, 能谱数据采集于射野中心轴距射线源 100 cm 处.

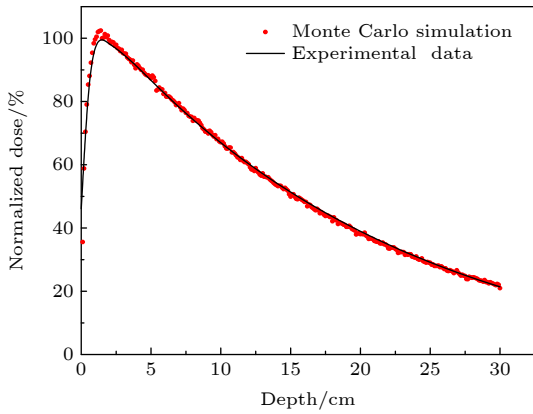


图3 蒙特卡罗 PDD 与真实测量数据的对比

Fig. 3. Comparison of PDD between Monte Carlo simulation and experimental data.

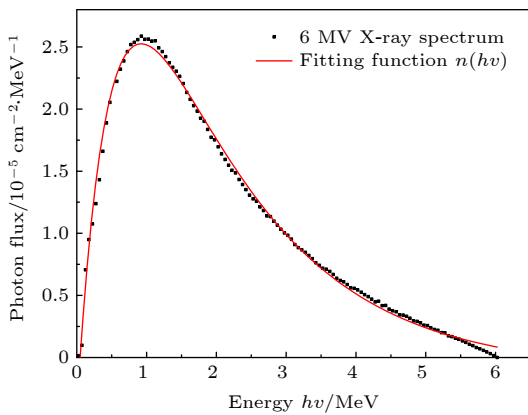


图4 6 MV 射线能谱及其仿真函数

Fig. 4. 6 MV X-ray spectrum and its fitting function.

将该蒙特卡罗仿真出的加速器的射线能谱、期望质量衰减系数  $\tau = 0.701$  以及  $\mu_0 = 4$  和  $k_p = 3$  分别代入 (6) 式、(4) 式与 (15) 式, 计算得到原射线和二次射线产生的绝对剂量, 并将其与蒙特卡罗仿真剂量做对比来验证算法的正确性, 图 5 为经过上述算法得到的绝对剂量  $D(z)$  (calculation of  $D(z)$ ) 与仿真的绝对剂量 (simulated by Monte Carlo, MC) 的对比, 其中算法耗时约为 5 min, 蒙特卡罗软件 Egsnrc 耗时约为 30 min, 本方法的计算效率明显高于蒙特卡罗仿真方法.  $D(z)$  的计算没有考虑以下因素: 1) 原射线入射前的各种散射 X 光子和污染电子; 2) 由原射线在水模体中产生的多次 (大于二次) 散射 X 光子. 这两个因素是仿真与计算数据在剂量建成区和指数衰减区存在差异的原因, 两者的差异曲线如图 5 中黑色虚线所示. 由于原射线中含有的散射 X 光子和电子的能量低、数目少, 因素 1 造成的剂量差异在建成区中快速衰

减<sup>[18]</sup>. 随着深度  $z$  增大, 射线被水模体的散射程度增加, 由此造成的剂量差异在指数衰减区缓慢增加, 此外, 因素 2 造成的剂量差异还与散射校正因子  $(S_{cp})$ <sup>[19]</sup> 相关. 对差异曲线利用补偿函数  $f_d$  进行拟合, 其表达式如下

$$f_d = A_4 e^{-t_4 \cdot z} - A_3 e^{-t_3 \cdot z} + y_0, \quad (30)$$

拟合线性度 ( $R^2$ ) 好于 0.95, 通过该函数补偿保证了上述算法计算的剂量与仿真的一致性.

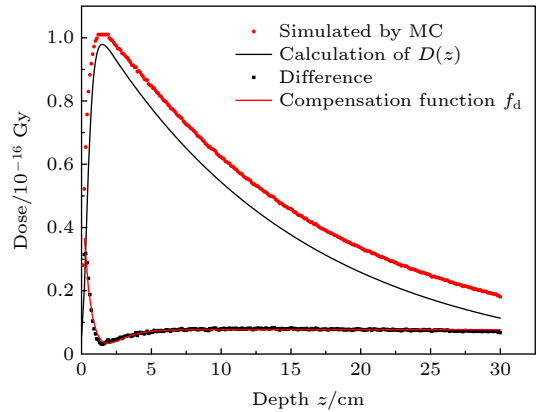


图5 蒙特卡罗仿真的绝对剂量和计算绝对剂量  $D(z)$  的比较

Fig. 5. Comparison of absolute dose between Monte Carlo simulation and calculation of  $D(z)$ .

### 3.2 原射线与二次射线

在上述实验条件下计算射野薄层  $m = 1$  的能量注量, 得到该射野层原射线剂量贡献  $D'_p$  (primary ray)、前向散射剂量贡献  $D'_{sf}$  (forward ray) 和后向散射剂量贡献  $D'_{sb}$  (backward ray) 三者随深度  $z$  的关系, 如图 6 所示.  $D'_p$  是由原射线与水模体表面作用产生的电子造成的, 可类比成以深度为 0 处的零射野为电子源的电子束造成的吸收剂量, 所以  $D'_p$  不存在表面剂量, 剂量建成区从剂量为 0 开始.  $D'_{sf}$  也可以类比成电子束造成的剂量, 它与  $D'_p$  的不同在于电子是由来自任意散射角的二次光子产生的, 这意味着一定数量的电子可以到达深度为 0 处的位置, 因此其存在表面剂量.  $D'_{sb}$  代表的电子运动方向与  $D'_p$  和  $D'_{sf}$  的相反, 为了方便比较, 将  $D'_{sb}$  的图像也放在  $z$  轴的位置.

对深度从 0—10 cm 的剂量积分可知,  $D'_{sb}$  约占  $D'_{sf}$  的 34%,  $D'_{sf}$  和  $D'_{sb}$  分别占  $D'_p$  的 16% 和 5%, 这主要是因为只有部分原射线参与康普顿效应并产生散射线, 而由散射线产生的电子能量注量小于

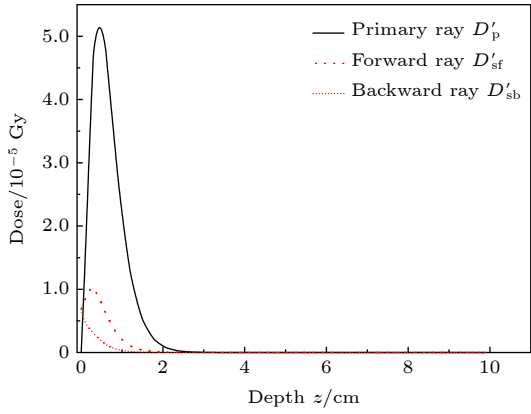


图 6 比较由原射线产生的剂量  $D'_p$ 、前向散射产生的剂量  $D'_{sf}$ 、后向散射产生的剂量  $D'_{sb}$  随深度的变化  
Fig. 6. Comparison of dose caused by primary ray  $D'_p$ , forward scatter  $D'_{sf}$  and backscatter  $D'_{sb}$  with depth.

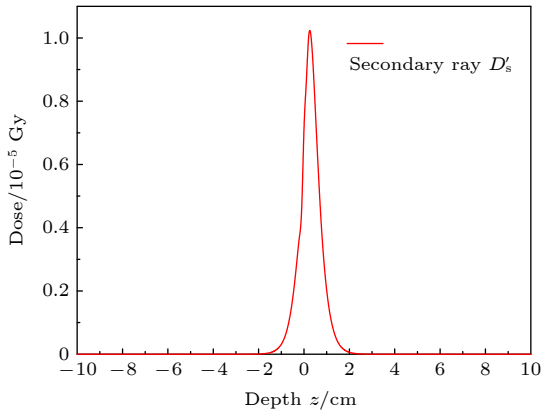


图 7 向前和向后的二次射线产生的剂量随深度的变化  
Fig. 7. Dose caused by scattered ray in forward and back directions with depth.

原射线产生的. 从图 6 也可以看出, 原射线的电子的最大穿透深度大于散射线电子的最大穿透深度.

利用前向散射与后向散射的关系, 将图 6 中曲线  $D'_{sb}$  以纵坐标轴为对称轴进行翻折, 得到一条如图 7 所示的连续曲线  $D'_s$  (scattered ray). 在深度为 0.4 cm 处存在一个剂量峰, 值约为  $1 \times 10^{-5}$  Gy, 这主要由能量注量在该处聚集造成. 从图 7 中可以看出该剂量分布的半高宽约为 1 cm.

### 3.3 二次电子与二次光子的能谱

利用 (9) 式—(12) 式之间的转换可得到  $h\nu$  关于  $\varphi_1$  和  $E$  的函数关系  $h\nu(\varphi_1, E)$ , 并将其代入 (6) 式中, 得到图 4 所示的 6 MV X 射线产生的二次电子的能谱  $\Phi(\varphi_1, E)$ , 如图 8 所示.

图 8 中横坐标为电子反冲角 (recoil angle,  $Ra$ )  $\varphi_1$ , 其范围为  $0 < \varphi_1 < \pi/2$ , 纵坐标为电子的能量  $E$ , 竖坐标为粒子注量 (particle flux,  $Pf$ ), 图中的二维图为三维能谱图的三视图. 当反冲角接近 0 时, 电子的数目达到最大值, 此时, 电子的能量为 0.44 MeV. 从图 8 中还可以看出二次电子分布在  $\varphi_1$  与  $E$  的数量乘积小于 1 的范围内.

二次射线的能谱不同于原射线的能谱, 且其不同散射角 (scattered angle)  $\theta_1$  上也不尽相同. 根据 (7) 式以及二次光子的微分截面, 可以得到二次光子关于每个散射角下的能谱  $n'(h\nu', \theta_1)$ , 其表达式如下

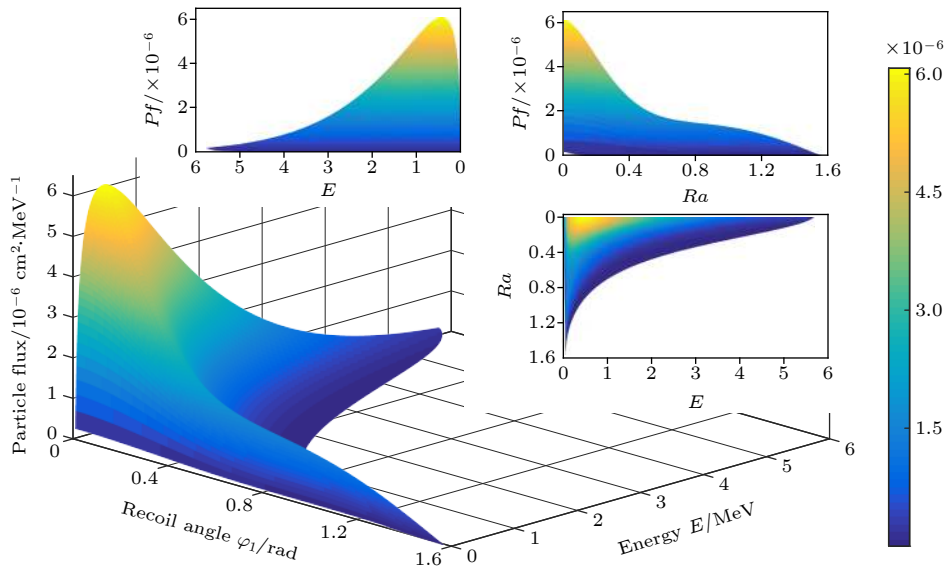


图 8 二次电子的粒子注量随能量  $E$  和反冲角  $\varphi_1$  的变化  
Fig. 8. Particle flux of secondary electron with energy  $E$  and recoil angle  $\varphi_1$ .

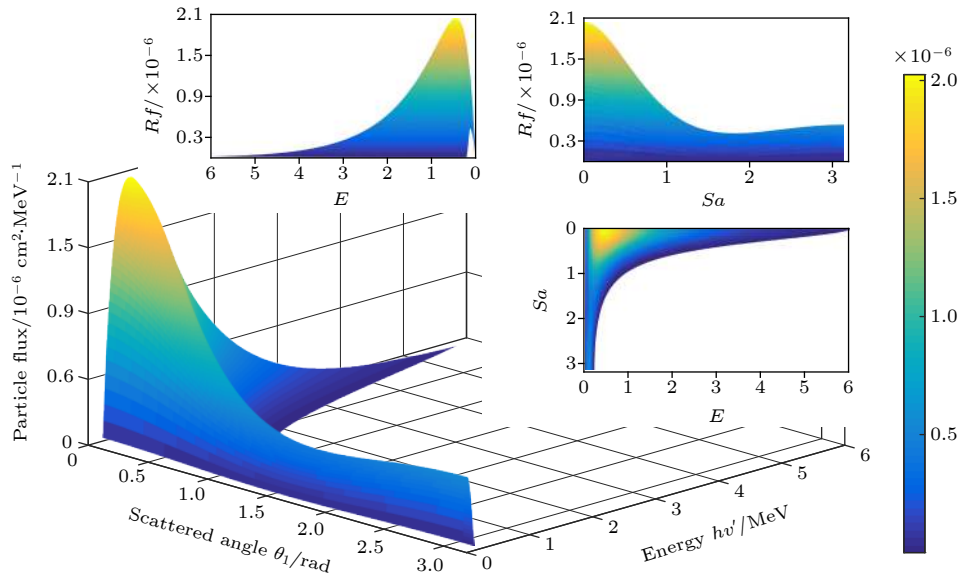


图 9 二次光子的粒子注量随能量  $h\nu'$  和散射角  $\theta_1$  的变化

Fig. 9. Particle flux of secondary photon with energy  $h\nu'$  and scattered angle  $\theta_1$ .

$$n'(h\nu', \theta_1) = n(h\nu) \sigma(h\nu', \theta_1), \quad (31)$$

其中  $\sigma(h\nu', \theta_1)$  表示的是二次光子的微分截面, 其表达式<sup>[16]</sup>为

$$\sigma(h\nu', \theta_1) = \frac{r_e^2}{2} \left( \frac{h\nu}{h\nu'} + \frac{h\nu'}{h\nu} - \sin^2\theta_1 \right) \left( \frac{h\nu'}{h\nu} \right)^2, \quad (32)$$

根据 (9) 式, (32) 式中的  $h\nu$  是关于  $h\nu'$  的函数.

图 9 为图 4 所示的 6 MV X 射线产生的二次光子的三维能谱  $n'(h\nu', \theta_1)$ , 横坐标为光子的散射角 (scattered angle,  $Sa$ )  $\theta_1$ , 其范围为  $0 < \theta_1 < \pi$ , 图中二维图为三维能谱的三视图. 当散射角为 0 时, 光子的数目达到最大值, 此时光子的能量为 0.46 MeV. 二次光子分布在  $\theta_1$  与  $h\nu'$  的乘积小于 1.1 的范围内.

对比两种粒子的能谱可以发现, 当电子的反冲角  $\varphi_1 = 0$  时, 光子的散射角  $\theta_1 = \pi$ , 此时, 入射的光子与电子发生对心碰撞, 光子的能量范围在 0—0.25 MeV, 光子注量峰值约为  $0.55 \times 10^{-6} \text{ cm}^2 \cdot \text{MeV}^{-1}$ , 电子的能量范围在 0—5.75 MeV, 电子注量峰值约为  $6 \times 10^{-6} \text{ cm}^2 \cdot \text{MeV}^{-1}$ . 当电子的反冲角  $\varphi_1 = \pi/2$  时, 光子的散射角  $\theta_1 = 0$ , 此时, 入射的光子从电子旁边掠过, 光子没有能量损失, 电子注量为 0. 当散射角  $\theta_1 = \pi/2$  时, 光子三维能谱图中“山脊”中有一个最低点, 其代表的粒子注量为  $0.5 \times 10^{-6} \text{ cm}^2 \cdot \text{MeV}^{-1}$ , 该点对应的光子能量为 0.17 MeV, 而此时的电子反冲角  $\varphi_1 = 0.75$ , 对应电子三维能谱图“山脊”曲线斜率绝对值的最小值.

### 3.4 PDD 的计算与仿真

图 10 为通过蒙特卡罗仿真得到的不同射野 PDD 与算法计算得到 PDD  $D(z)\%$  (以  $D(z)$  最大剂量为单位的对比, 其中源皮距为 100 cm, 射线源为图 4 所示的 6 MV X 射线. 在射野  $3 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}$  范围内, 计算与仿真 PDD 最大误差剂量约为 2% (表面剂量例外). 两者在剂量建成区及指数衰减区的差异原因在第 3.1 节中已指出. 在大多数文献中<sup>[20–22]</sup>, 都认为表面剂量来自原射线中的散射射线及污染电子, 部分来自于组织中的后向散射<sup>[21]</sup>.

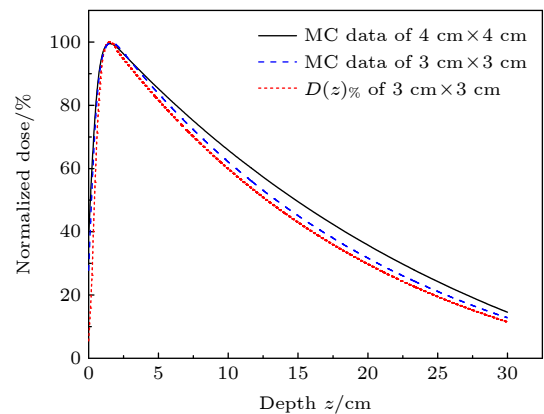


图 10 比较随不同射野 (射野大小  $3 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}$  和  $4 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}$ ) 变化的蒙特卡罗仿真数据  $D_{MC}$  与计算的  $D(z)\%$  (射野大小  $3 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}$ )

Fig. 10. Comparison of Monte Carlo simulation PDD with different fields (field size  $3 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}$  and  $4 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}$ ) and calculation PDD  $D(z)\%$  (field size  $3 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}$ ).



而后向散射贡献的这一部分可由 (25) 式计算得到, 为相对最大剂量的 5%, 如图 10 中  $D(z)_0$  与  $y$  轴的交点. 在指数衰减区, 射野  $3\text{ cm} \times 3\text{ cm}$  下的蒙特卡罗仿真数据与  $D(z)$  的计算数据的差异和  $4\text{ cm} \times 4\text{ cm}$  射野与  $3\text{ cm} \times 3\text{ cm}$  射野蒙特卡罗仿真数据差异相似, 后者主要是因为当射野面积增加时, 散射体积的增加导致了更多的散射线, 这从侧面验证了计算与仿真的差异在于仿真的剂量会有更多来自散射线的贡献. 不难得出, 当照射野接近  $0 \times 0$  时,  $D(z)_0$  的计算值将和真实的 PDD 非常接近.

### 3.5 非均匀模体剂量计算

非均匀模体由三层物质组成, 分别为水、肺、水, 厚度均为  $5\text{ cm}$ . 利用图 4 所示的  $6\text{ MV}$  射线, 射野为  $3\text{ cm} \times 3\text{ cm}$ , 模体中的肺密度  $\rho$  设置为  $0.1, 0.2, 0.4$  和  $1\text{ g/cm}^3$ . 不同密度物质的剂量  $D(z)$  的计算差异在于光子注量的衰减和电子能量注量的衰减的不同, 对应参数分别为  $\tau$  和  $\mu_2$ , 其中  $\tau$  可以根据 2.4 节计算.  $\mu_2$  的取值过程则取决于横向电子平衡.

如果射野的尺寸不能满足横向电子平衡, 电子会将部分能量带到射野外, 同时物质的密度变化会改变电子的射程, 也会导致横向电子不平衡.  $6\text{ MV}$  射线在射野为  $3\text{ cm} \times 3\text{ cm}$  刚好达到横向电子平衡时的肺密度为  $\rho_T$ , 当  $\rho \geq \rho_T$  时, 肺模体内达到横向电子平衡, (15) 式 ( $\mu_2 = k_\rho \cdot \varphi_1 + \mu_0$ ) 中  $k_\rho$  与  $\mu_0$  仍保持不变, 此时肺密度的改变只改变光子强度的衰减程度. 当肺模体的密度  $\rho < \rho_T$  时, 不满足横向电子平衡, 在  $\varphi_1$  接近  $\pi/2$  时, 肺模体密度越低, 从射野边缘逃逸的电子射程越大, 此时  $\mu_2$  越小; 在  $\varphi_1$  接近  $0$  时, 电子的能量注量都在模体内沉积, 当模体密度变小时, 能量注量的沉积变少, 此时的  $\mu_2$  越大. 不同肺模体密度  $\rho$  对应的参数  $k_\rho$  与  $\mu_0$  关系如表 1 所列,  $k_\rho$  与  $\mu_0$  均关于  $\rho$  呈等差变化, 公差数与射野大小和射线能量相关.

表 1 不同肺模体密度  $\rho$  对应参数  $k_\rho$  和  $\mu_0$   
Table 1. Parameters  $k_\rho$  and  $\mu_0$  of lung phantom densities  $\rho$ .

$\rho/\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$	0.1	0.2	0.4	$\geq \rho_T$
$k_\rho$	-6	-3.75	0.75	3
$\mu_0$	6.8	6.1	4.7	4

图 11 所示为 4 种不同肺密度的 PDD 曲线, 对比肺模体密度为  $0.1, 0.2$  与  $1\text{ g/cm}^3$  时的结果发现, 横向电子不平衡带来的剂量跌落随着密度的降低而增大. 肺模体密度  $0.1\text{ g/cm}^3$  的 PDD 在第一个水肺交界处 (如图 11 中深度为  $5\text{ cm}$  处曲线所示) 相对深度为  $10\text{ cm}$  的剂量跌幅约为  $17\%$ , 密度  $0.2\text{ g/cm}^3$  的剂量跌幅约为  $5\%$ , 肺模体密度  $0.4\text{ g/cm}^3$  的 PDD 曲线在  $10\text{ cm}$  后剂量增长约为  $4.5\%$ , 这一结果与文献 [23] 一致. 但在深度  $6\text{—}10\text{ cm}$  处的计算剂量偏低, 与文献 [23] 差别最大为  $3\%$ , 这主要是因为算法未考虑到从第一层水模体中进入肺模体的多次散射带来的剂量贡献, 而更小射野散射带来的剂量贡献会更小, 因此图 11 的计算结果与更小射野的非均匀模体 PDD 更加接近 [24].

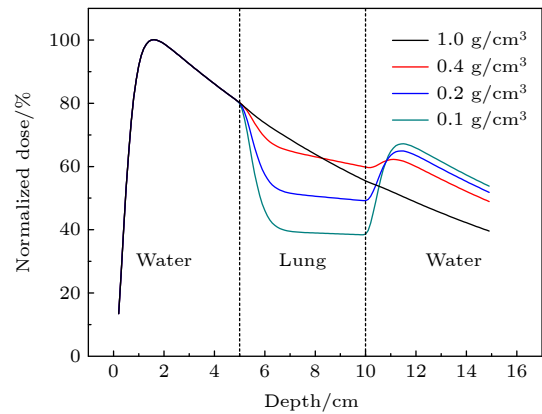


图 11 不同肺密度的水肺水模体的射野中心轴百分深度剂量  
Fig. 11. Percentage depth dose of the central axis of the field of radiation in water-lung-water phantom with different lung densities.

在第二个肺水的交界面 (如图 11 中深度为  $10\text{ cm}$  处曲线所示), 低密度肺模体 PDD 相对于  $1\text{ g/cm}^3$  肺模体 PDD 出现明显的剂量增长, 这主要是因为光子强度在低密度肺模体中衰减较少, 在达到第二个肺水交界面后光子强度相对较高. 此处与射线从空气入射到水模体中类似, 会在水下出现第二个最大剂量点, 而这个最大剂量点相对深度低于第一层水模体的最大剂量点深度  $1.5\text{ cm}$ , 这是由于  $6\text{ MV}$  射线在第二个最大剂量点处由于射线的衰减能谱发生变化, 低能射线的成分增加, 次级电子的射程变短.

图 12 所示为在深度为  $7$  和  $11\text{ cm}$  处采集的离轴比曲线, 所有离轴比剂量均以肺密度为  $1\text{ g/cm}^3$  的水肺水模体在离轴  $0\text{ cm}$  处剂量为单位的. 在深度

7 cm 处, 密度为  $1 \text{ g/cm}^3$  肺模体对应的离轴比曲线在射野边缘剂量跌落幅度最大, 跌落幅度随着密度的减小而减小, 与高密度的离轴剂量相比, 较低密度的离轴剂量在射野边缘会更快进入剂量跌落状态, 因为较低密度模体的射野内电子会因为横向电子不平衡将部分能量带离射野. 同时还可以发现, 在射野外, 低密度的肺模体剂量明显高于  $1 \text{ g/cm}^3$  肺模体对应的剂量, 这是由于低密度肺模体的电子能量注量流失到射野外, 流失的这部分能量注量随着密度的降低而增加. 在深度为 11 cm 水模体处, 来自较低密度肺模体的剂量因为光子强度衰减较少明显高于较高密度的剂量, 此时电子横向平衡被恢复, 来自各个密度肺模体的射野外剂量变化规律保持一致.

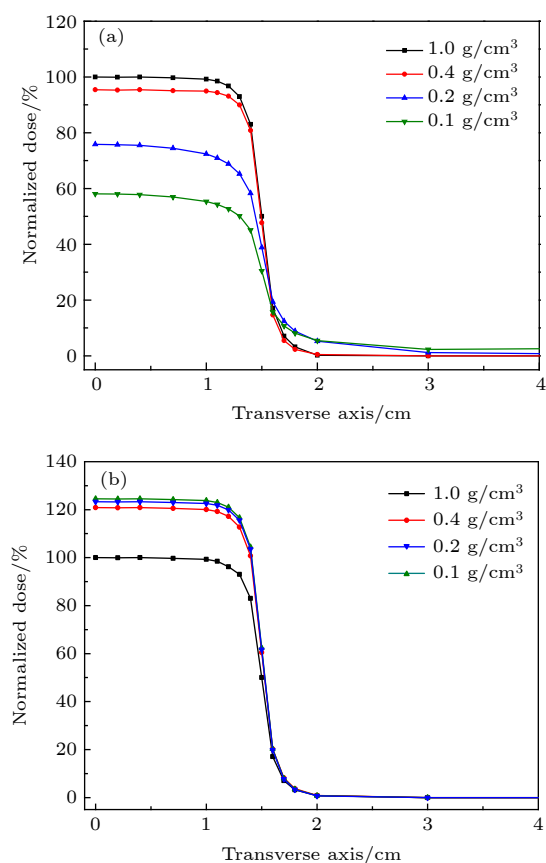


图 12 不同模体深度处的离轴比曲线 (a) 7 cm; (b) 11 cm  
Fig. 12. Off-axis ratio curves at different phantom depths: (a) 7 cm; (b) 11 cm.

## 4 结 论

本文通过构建放疗过程中剂量形成的物理模型来得到吸收剂量的数学算法. 加入补偿函数后,

该算法计算得到的吸收剂量与蒙特卡罗仿真的结果相符, 利用该算法计算了在一定射野范围内不同组织深度处的吸收剂量, 在计算中考虑了非单能射线的能谱及二次散射线. 其中补偿函数在剂量建成区呈现快速衰减, 在指数衰减区呈缓慢上升趋势, 前者是一个与原射线中的散射线和电子相关的变量, 后者是一个与康普顿效应产生多次 (大于二次) 散射线相关的变量. 因此该算法能保证与仿真结果的一致性, 且相比蒙特卡罗仿真耗时更短.

讨论了每一深度处由原射线及二次散射线对射野中心轴产生的剂量贡献, 并分别讨论了前向散射和后向散射. 其中后向散射的剂量贡献呈指数衰减规律, 前向散射的剂量贡献是一个先上升后下降的函数, 发现模体表面剂量部分来自组织中的后向散射, 并计算出这部分所占比例. 发现了二次散射线的剂量贡献在偏离作用点处存在峰值. 在此研究中, 得到了医用 6 MV X 射线产生的二次光子和二次电子的三维能谱, 该能谱是粒子注量与粒子能量和方向相关的函数. 对比两种粒子的能谱, 发现两者的粒子注量的分布在较小方向角和较小的能量范围内更为集中, 并分析了三种散射角或反冲角下光子与电子的特征差异.

对非均匀模体的剂量计算中发现, 电子在低密度肺模体有更大的射程, 因此电子的能量注量衰减系数相比密度较高的更小, 本研究在计算中考虑到了该系数随着密度和电子运动方向角变化, 同时调整不同密度模体中光子强度衰减系数, 准确计算了由于不同密度肺模体带来横向电子不平衡的 PDD 曲线和离轴比曲线. 通过对比 MC 仿真 PDD 数据和对比他人研究非均匀模体剂量分布发现, 本算法在小射野 PDD 的计算上有更小的误差.

## 参考文献

- [1] Yamamoto T, Mizowaki T, Miyabe Y, Takegawa H, Narita Y, Yano S, Nagata Y, Teshima T, Hiraoka M 2007 *Phys. Med. Biol.* **52** 1991
- [2] Einstein A J, Henzlola M J, Rajagopalan S 2007 *JAMA* **298** 317
- [3] Delaney G, Jacob S, Featherstone C, Barton M 2005 *Cancers* **104** 1129
- [4] Das I J, Cheng C W, Watts R J, Ahmesjo A, Gibbons J, Li X A, Lowenstein J, Mitra R K, Simon W E, Zhu T C 2008 *Med. Phys.* **35** 4186
- [5] van't Veld A A, van Luijk P, Praamstra F, van der Hulst P C 2001 *Med. Phys.* **28** 738
- [6] van't Veld A A, van Luijk P, Praamstra F, van der Hulst P C

- 2000 *Med. Phys.* **27** 923
- [7] Jette D 2000 *Med. Phys.* **27** 1705
- [8] Jette D 1999 *Med. Phys.* **26** 924
- [9] Tillikainen L, Helminen H, Torsti T, Siljamaki S, Alakuijala J, Pyyry J, Ulmer W 2008 *Phys. Med. Biol.* **53** 3821
- [10] Jones A O, Das I J 2005 *Med. Phys.* **32** 766
- [11] Aarup L R, Nahum A E, Zacharatou C, Juhler-Nottrup T, Knoos T, Nystrom H, Specht L, Wieslander E, Korreman S S 2009 *Radiother. Oncol.* **91** 405
- [12] Krieger T, Sauer O A 2005 *Phys. Med. Biol.* **50** 859
- [13] Beilla S, Younes T, Vieilleveigne L, Bardies M, Franceries X, Simon L 2017 *Phys. Medica* **41** 46
- [14] Jansen A A 1980 *Icru Report 33: Radiation Quantities and Units* (Washington)
- [15] Hu Y M 1999 *Radiation Oncology Physics* (Beijing: Atomic Energy Press) pp38–44(in Chinese) [胡逸民 1999 肿瘤放射物理学 (北京: 原子能出版社) 第38—44页]
- [16] Attix F H 1986 *Gamma- and X-Ray Interactions in Matter* (Vol.1) (Weinheim: Wiley-VCH Verlag GmbH & Co.KgaA) pp125–38
- [17] Price M J, Hogstrom K R, Antolak J A, White R A, Bloch C D, Boyd R A 2007 *J. Appl. Clin. Med. Phys* **8** 61
- [18] Malataras G, Kappas C, Lovelock D M J 2001 *Phys. Med. Biol.* **46** 2435
- [19] Cheng C W, Cho S H, Taylor M, Das I J 2007 *Med. Phys.* **34** 3149
- [20] Carlone M, Tadic T, Keller H, Rezaee M, Jaffray D 2016 *Med. Phys.* **43** 2927
- [21] KINHILIKAR R A 2008 *Technol. Cancer Res. Treat.* **7** 381
- [22] Chow J C L, Grigorov G N, Barnett R B 2006 *Med. Dosim.* **31** 249
- [23] Disher B, Hajdok G, Gaede S, Battista J J 2012 *Phys. Med. Biol.* **57** 1543
- [24] Mesbahi A, Dadgar H, Ghareh-Aghaji N, Mohammadzadeh M 2014 *J. Cancer Res. Ther.* **10** 896

# Mathematical algorithm model of absolute dose in radiotherapy\*

Xie Tian-Ci<sup>1)</sup> Zhang Bin<sup>1)</sup> He Bo<sup>1)</sup> Li Hao-Peng<sup>1)</sup> Qin Zhuang<sup>2)</sup>  
Qian Jin-Qian<sup>1)</sup> Shi Qie-Ming<sup>1)</sup> Lewis Elfed<sup>3)</sup> Sun Wei-Min<sup>1)†</sup>

1) (*Key Laboratory of In-fiber Integrated Optics, Ministry Education of China, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China*)

2) (*Electronic Engineering College, Ministry Education of China, Heilongjiang University, Harbin 150001, China*)

3) (*Optical Fiber Sensors Research Centre, University of Limerick, Limerick, Ireland*)

( Received 26 June 2020; revised manuscript received 30 August 2020 )

## Abstract

A algorithm of obtaining absolute dose at each tissue depth only by the mathematical calculation of formula is reported. The algorithm is based on integrating the energy flux of the electron generated by X-ray in the range of irradiation field, and the energy spectrum of ray and the secondary scattered ray are considered in this process. In this algorithm, the water phantom in the irradiation field is divided into several thin layers, and the energy flux of the electrons generated by interaction between the ray and thin layer reaching the calculation point is calculated. Finally, the absolute dose of the calculation point can be obtained by accumulating the energy flux contribution of all thin layers. For the X-ray with continuous energy spectrum, the expected mass attenuation coefficient is calculated for obtaining the photon flux at each depth in this process. The absolute dose calculated by this algorithm is verified by Monte Carlo simulation, and the difference between the algorithm and simulation is compensated for by a dose function about multiple scattering photons, and the function shows fast descent and then slow ascent. It is found that the ratio of the dose caused by backscatter to the surface dose, and the relationship among forward scatter, backward scatter and primary ray, and the relationship between the dose and the depth of the secondary scattered rays show a trend of first rising and then declining, and the depth of the peak value deviates from the position of the thin layer. Three-dimensional energy spectra of the secondary photon and the secondary electron are also compared with each other, and the spectrum is a function of particle flux about particle energy and particle direction. From the perspective of Compton effect, the physical meanings of different positions in the three-dimensional energy spectrum of the two particles are explained. It is found that the difference between algorithm percentage depth dose and simulation percentage depth dose is similar to the difference between small irradiation field percentage depth dose and big irradiation field percentage depth dose from simulation, and it is verified that the difference between algorithm and simulation comes from the increase of scattered rays. Finally, the algorithm is applied to the dose calculation of non-uniform phantom, which can accurately reflect the dose distribution characteristics and have less error.

**Keywords:** radiotherapy, model, absolute dose, Compton effect

**PACS:** 87.55.Qr, 87.55.Gh, 87.55.kd, 87.64.Bx

**DOI:** 10.7498/aps.70.20200986

\* Project supported by the Natural Science Foundation of Heilongjiang Province, China (Grant No. ZD2019H003), the Joint Research Fund in Astronomy of the National Natural Science Foundation of China and the Chinese Academy of Sciences, China (Grant Nos. U1631239, U1931206), and the Programme of Introducing Talents of Discipline to Universities (Grant No. B13015).

† Corresponding author. E-mail: [sunweimin@hrbeu.edu.cn](mailto:sunweimin@hrbeu.edu.cn)