



表象变换和久期微扰理论在耦合杜芬方程中的应用

李朝刚 汪茂胜 方泉 彭雪城 黄万霞

Applications of representation transformation and secular perturbation theory to coupled Duffing equations

Li Chao-Gang Wang Mao-Sheng Fang Quan Peng Xue-Cheng Huang Wan-Xia

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 70, 024601 (2021) DOI: 10.7498/aps.70.20201057

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.70.20201057>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

用久期微扰理论将弹簧振子模型退化为耦合模理论

The spring oscillator model degenerated into the coupled-mode theory by using secular perturbation theory

物理学报. 2020, 69(7): 074501 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191505>

互易波导模式耦合理论

Reciprocal waveguide coupled mode theory

物理学报. 2020, 69(15): 154206 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200194>

耦合相振子系统同步的序参量理论

Synchronization of coupled phase oscillators: Order parameter theory

物理学报. 2020, 69(8): 080502 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191968>

线性吸收介质非局域线性电光效应的耦合波理论

Wave coupling theory of nonlocal linear electro-optic effect in a linear absorbent medium

物理学报. 2017, 66(6): 064202 <https://doi.org/10.7498/aps.66.064202>

非线性两模玻色子系统的Majorana表象

Majorana representation for the nonlinear two-mode boson system

物理学报. 2017, 66(16): 160302 <https://doi.org/10.7498/aps.66.160302>

窄线宽脉冲光纤激光的自相位调制预补偿研究

Self-phase modulation pre-compensation of narrowlinewidth pulsed fiber lasers

物理学报. 2018, 67(16): 164201 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180486>

表象变换和久期微扰理论在耦合杜芬方程中的应用*

李朝刚 汪茂胜 方泉 彭雪城 黄万霞†

(安徽师范大学物理与电子信息学院, 安徽省光电材料科学和技术重点实验室, 芜湖 241002)

(2020年7月3日收到; 2020年8月31日收到修改稿)

本文通过对耦合杜芬方程线性项的表象变换及非线性项的久期微扰理论的应用, 将耦合杜芬方程转化为简正表象下的退耦合形式, 由此可以很方便地得出耦合杜芬方程的解. 为了验证该方法的正确性, 设计了音叉耦合实验, 观测到了振幅谱谱峰的劈裂以及“振滞回线”现象, 这些实验结果都可以和之前所得的理论结果符合得很好. 本文求解耦合非线性方程的方法, 为灵活运用非线性理论提供一种方案, 同时可以推广到光、电等耦合体系, 对理解耦合体系的动力学行为具有一定的指导意义.

关键词: 耦合杜芬方程, 耦合模理论, 表象变换, 久期微扰理论, 非线性效应

PACS: 46.40.Ff, 46.40.-f, 05.45.-a

DOI: 10.7498/aps.70.20201057

1 引言

在物理学中, 模式间的非线性耦合是调节振子体系属性的一个重要手段. 与单模非线性体系相比, 两模或多模非线性耦合的复杂体系展现出了更多的迷人属性^[1-4], 特别是模间耦合可以在这些体系中产生出“杂化”模 (“dressed” mode), 而它们可以有效修改整个体系的属性, 导致各种各样的有趣现象和应用. 2004年 Cross等^[5]对非线性频率牵引引起的无功耦合系统的同步进行了解析建模, 证明耦合非线性纳米机械谐振器系统可以通过其频率与振荡振幅的关系自同步到一个公共频率. 2010年 Westra等^[6]研究微谐振器中多模耦合的详细实验特征. 非线性耦合允许使用任意弯曲模态作为另一模态振幅的自探测器, 提出了一种测量存储在特定谐振模态中的能量的方法. 2014年

Peng等^[7]研究了耦合光学谐振腔中的PT对称破缺, 研究结果可能导致新一代合成光学系统的出现, 使芯片上的操作和控制光的传播成为可能. 2016年 Zhou和 Chong^[8]对基于耦合微腔的非线性光隔离器的非线性动力学进行了理论研究, 研究表明, 存在增益饱和的非线性系统的渐近稳定性边界与潜在线性系统的PT对称破缺跃迁之间的对应关系, 利用这一对应关系可以实现一种主动控制的非线性光隔离器, 在这种隔离器中, 强光隔离器可以通过谐振腔间隔的微小变化来开启和关闭. 2017年 Abdollahi^[9]研究在存在瞬态和非瞬态非线性情况下, 单个及耦合微环谐振器的非线性动力学, 建立了基于微环谐振器能量耦合和功率耦合的方法来分析和研究微环谐振器系统中各种类型的不稳定性, 包括双稳定性、自脉动和倍周期振荡, 这一研究结果为实现实际集成光学器件奠定了基础. 同年, Bernard等^[10]报告了在芯片集成微谐振腔内的Fano谐振腔的完全模式交叉的建模、仿真

* 复旦大学应用表面物理国家重点实验室(批准号: KF2018_01)和安徽省高等学校省级质量工程项目(批准号: 2019mooc066)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: kate@mail.ahnu.edu.cn

和实验演示, 当腔耦合光泵被材料部分吸收时, 通过非线性热光学调谐实现共振线形状的连续重塑, 利用这种可调性来不断探索表现出非对称 Fano 相互作用的非对称 Fano 相互作用的不同族准简并模之间的耦合. 同年, Assaworrorarit 等^[11] 提出理论并进行了实验证明, PT 对称电路包含一个非线性增益饱和元件提供鲁棒的无线功率传输. 2018 年 Sarma 和 Sarma^[12] 证明了在由库仑相互作用耦合的两个弱非线性机械谐振器系统中可以实现声子封锁. 2019 年 Yao 等^[13] 通过感应线圈耦合实现了两个非线性电路之间的同步, 电感耦合有利于实现两个混沌 Chua 系统的同步. 同年 Ding 等^[14] 在尘埃等离子体中观察到非线性模态耦合和内部共振, 在内部共振开始时激发水平运动. 2020 年 Zheng 等^[15] 介绍了一种基于非线性频移的高真空光悬浮纳米颗粒位置、质量和密度测量方法. 能够以微小的偏差来控制悬浮振荡器的振幅, 并利用精确的非线性频移测量来进行高精度校准. 与此同时, 对于几种可以近似解析求解的非线性方程的研究也陆续出现, 如非线性杜芬耦合方程^[16–19]、非线性马修耦合方程^[20–23]等. 尤其是经常遇到的杜芬耦合方程, 更是一度被人们关注. 对于杜芬耦合方程, 一般是采用先求解线性方程的本征模, 耦合方程的试探解是本征模的线性叠加, 利用久期微扰理论, 在某些近似条件下, 杜芬耦合方程退化为两个解耦的方程, 但是这种求解过程过于繁杂. 本文基于二阶微分方程的弹簧振子模型可以退化为一阶微分方程的耦合模理论 (coupled mode theory, CMT) 的工作^[24], 首先将二阶耦合杜芬方程化为一阶微分方程, 然后对线性部分做表象变换, 同时结合非线性部分的久期微扰理论, 得到一阶解耦的方程. 最后为了验证理论的正确性, 实施了弹簧连接的音叉耦合实验, 研究结果表明理论模型和实验结果符合得很好. 该研究对非线性理论推广到光、电耦合体系及不同领域的交叉耦合体系有一定的指导意义.

2 从耦合的杜芬方程到两个解耦的 CMT

2.1 二阶耦合方程化为一阶耦合方程

从两个音叉耦合体系入手建立体系的动力学方程. 设 m_1 和 m_2 分别为两个音叉的等效质量, 为了方便, 研究的两个音叉近似相同, 故质量可以统一设为 m , x_1 和 x_2 分别为两音叉的横向位移, α_1 和 α_2 为立方非线性系数, 即著名的杜芬非线性系数, ω_1, ω_2 分别是两个音叉的固有频率, $g_{D_1}(t)$ 和 $g_{D_2}(t)$ 分别表示为驱动力驱动振子 1 和振子 2, 其中 $D = \xi/m, \xi$ 为弹簧的硬度系数, Q_1, Q_2 分别是两个音叉的品质因子, 如图 1(a) 所示.

杜芬非线性效应的理论研究可以使用久期微扰理论来研究, 该系统的动力学方程^[25] 为:

$$\ddot{x}_1 + \frac{\omega_1}{Q_1} \dot{x}_1 + \alpha_1 x_1^3 + (\omega_1^2 + D)x_1 - Dx_2 = g_{D_1}(t), \quad (1)$$

$$\ddot{x}_2 + \frac{\omega_2}{Q_2} \dot{x}_2 + \alpha_2 x_2^3 + (\omega_2^2 + D)x_2 - Dx_1 = g_{D_2}(t). \quad (2)$$

设 $T = \varepsilon t, g_{D_j} = \varepsilon^2 g_j, \gamma_j = \varepsilon \Gamma_j \frac{\omega_j}{Q_j} \quad (j = 1, 2)$, 其中 ε 表示小量, $T = \varepsilon t$ 是时间慢变量, 复共轭项缩写为“c.c.”. 设方程 (1) 和 (2) 的解为

$$x_j(t) = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} (A_j(T) e^{i\omega_0 t} + \text{c.c.}) + \varepsilon^{\frac{3}{2}} x_j^{(1)}(t) + \dots, \quad (3)$$

其中 $i^2 = -1, \omega_0$ 为频率参考点, $A_j(T)$ 为随时间慢变的复振幅, $x_j^{(1)}$ 是高阶小量, 考虑到 $\dot{A} = \frac{dA}{dt} = \varepsilon \frac{dA}{dT} = \varepsilon A'$, 有

$$\dot{x}_j = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \left[(\varepsilon A_j' + i\omega_0 A_j) e^{i\omega_0 t} + \text{c.c.} \right] + \varepsilon^{\frac{3}{2}} \dot{x}_j^{(1)}(t) + \dots, \quad (4)$$

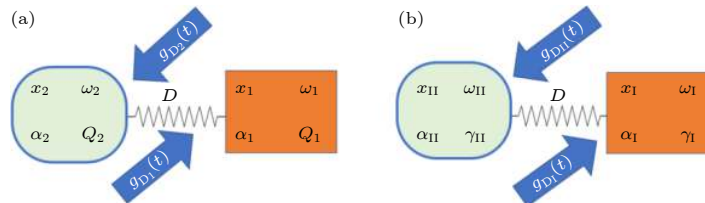


图 1 双模耦合体系的相关参数示意图 (a) 非线性振子模型; (b) 解耦的 CMT

Fig. 1. Parameters' schematic diagram of two-mode coupled system: (a) Nonlinear oscillator model; (b) decoupled CMT.

$$\ddot{x}_j = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} [(\varepsilon^2 A_j'' + 2i\omega_0 \varepsilon A_j' - \omega_0^2 A_j) e^{i\omega_0 t} + \text{c.c.}] + \varepsilon^{\frac{3}{2}} \ddot{x}_j^{(1)}(t) + \dots, \quad (5)$$

其中为了讨论方便, 取 $\omega_0 = \omega_1$. 方程 (1) 和 (2) 可改写为^[24]:

$$\dot{x}_1 = \left(i\omega_1 - \frac{\gamma_1}{2}\right) x_1 + i\frac{3\alpha_1}{8\omega_1} |x_1|^2 x_1 + i\frac{D}{2\omega_1} x_1 - i\frac{D}{2\omega_1} x_2 - i\frac{g_{D1}}{2\omega_1}(t), \quad (6)$$

$$\dot{x}_2 = \left(i\omega_2 - \frac{\gamma_2}{2}\right) x_2 + i\frac{3\alpha_2}{8\omega_1} |x_2|^2 x_2 + i\frac{D}{2\omega_1} x_2 - i\frac{D}{2\omega_1} x_1 - i\frac{g_{D2}}{2\omega_1}(t). \quad (7)$$

方程 (6) 和 (7) 可以写成矩阵形式:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} \omega_1 + \frac{D}{2\omega_1} & -\frac{D}{2\omega_1} \\ -\frac{D}{2\omega_1} & \omega_2 + \frac{D}{2\omega_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \frac{3i}{8\omega_1} \begin{pmatrix} \alpha_1 |x_1|^2 & 0 \\ 0 & \alpha_2 |x_2|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\gamma_1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \frac{g_{D1}}{\omega_1}(t) \\ \frac{g_{D2}}{\omega_1}(t) \end{pmatrix}. \quad (8)$$

方程组 (8) 是耦合的一阶微分方程组, 将输入信号用输入端口和传输损耗来替代, 方程组 (8) 就退化为 CMT 的动力学方程^[26]. 在此, 为了便于与文献^[25]的结论进行比较, 输入信号表达形式保持不变, 不失普遍性, 仍称方程组 (8) 为 CMT.

2.2 相似矩阵的计算

将方程组 (8) 右边第一项做对角化:

$$\begin{pmatrix} \omega_1 + \frac{D}{2\omega_1} - \omega & -\frac{D}{2\omega_1} \\ -\frac{D}{2\omega_1} & \omega_2 + \frac{D}{2\omega_1} - \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0, \quad (9)$$

求得本征值为

$$\omega_{I,II} = \bar{\omega} \left(1 + \frac{D}{2\omega_1^2}\right) \mp \tilde{\delta}, \quad (10)$$

其中 $\omega_{[I]}$ ($[I] = I, II$) 是对耦合方程中线性部分的矩阵方程进行对角化得到的“杂化”模 $[I]$ 本征圆频率, 其中 $\bar{\omega} = (\omega_1 + \omega_2)/2$, $\delta = (\omega_2 - \omega_1)/2$, $\tilde{\delta} = \sqrt{\delta^2 \left(1 - \frac{D}{2\omega_1^2}\right)^2 + \frac{D^2}{4\omega_1^2}}$. 其本征矢为:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_I &= \begin{pmatrix} e_{1,I} \\ e_{2,I} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \delta \left(1 - \frac{D}{2\omega_1^2}\right) + \tilde{\delta} \\ \sqrt{\frac{D^2}{4\omega_1^2} + \left(\delta \left(1 - \frac{D}{2\omega_1^2}\right) + \tilde{\delta}\right)^2} \\ \frac{D}{2\omega_1} \\ \sqrt{\frac{D^2}{4\omega_1^2} + \left(\delta \left(1 - \frac{D}{2\omega_1^2}\right) + \tilde{\delta}\right)^2} \end{pmatrix} \\ &\approx \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\tilde{\delta} + \delta}}{\sqrt{2\tilde{\delta}}} \\ \frac{\sqrt{\tilde{\delta} - \delta}}{\sqrt{2\tilde{\delta}}} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{II} &= \begin{pmatrix} e_{1,II} \\ e_{2,II} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \delta \left(1 - \frac{D}{2\omega_1^2}\right) - \tilde{\delta} \\ \sqrt{\frac{D^2}{4\omega_1^2} + \left(\delta \left(1 - \frac{D}{2\omega_1^2}\right) - \tilde{\delta}\right)^2} \\ \frac{D}{2\omega_1} \\ \sqrt{\frac{D^2}{4\omega_1^2} + \left(\delta \left(1 - \frac{D}{2\omega_1^2}\right) - \tilde{\delta}\right)^2} \end{pmatrix} \\ &\approx \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{\tilde{\delta} - \delta}}{\sqrt{2\tilde{\delta}}} \\ \frac{\sqrt{\tilde{\delta} + \delta}}{\sqrt{2\tilde{\delta}}} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (12)$$

其中“约等于”成立的条件是 $\frac{D}{2\omega_1^2} \ll 1$, 一般情况下这个条件很容易满足. 单位矢量 \mathbf{e}_I 和 \mathbf{e}_{II} 称为“杂化”基矢. 在“杂化”基矢下, 其他相关参数, 如图 1(b) 所示, $x_{[I]}$, $\gamma_{[I]}$, $\alpha_{[I]}$, $g_{D[I]}(t)$ 分别为“杂化”模的横向偏移、阻尼损耗、立方杜芬系数以及外界的输入. 根据线性代数的知识, 相似变换矩阵和逆变换矩阵分别为:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \begin{pmatrix} e_{1I} & e_{1II} \\ e_{2I} & e_{2II} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{M}^{-1} &= \begin{pmatrix} e_{1I} & -e_{1II} \\ -e_{2I} & e_{2II} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (13)$$

2.3 线性项的相似变换

联立 (13) 式, 很容易得到基矢、回复力和相互作用项、外界输入项以及阻尼项在“杂化”表象中的表示:

$$\begin{pmatrix} x_I \\ x_{II} \end{pmatrix} = \mathbf{M}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{I1}x_1 - e_{II1}x_2 \\ -e_{2I}x_1 + e_{1II}x_2 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

$$\begin{pmatrix} \omega_I & 0 \\ 0 & \omega_{II} \end{pmatrix} = \mathbf{M}^{-1} \begin{pmatrix} \omega_1 + \frac{D}{2\omega_1} & -\frac{D}{2\omega_1} \\ -\frac{D}{2\omega_1} & \omega_2 + \frac{D}{2\omega_1} \end{pmatrix} \mathbf{M} \\ = \begin{pmatrix} \bar{\omega} - \tilde{\delta} & 0 \\ 0 & \bar{\omega} + \tilde{\delta} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$\begin{pmatrix} g_{D_I}(t) \\ g_{D_{II}}(t) \end{pmatrix} = \mathbf{M}^{-1} \begin{pmatrix} g_{D_1}(t) \\ g_{D_2}(t) \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \frac{g_{D_1}(t)}{2}e_{I1} + \frac{g_{D_2}(t)}{2}e_{2I} \\ \frac{g_{D_1}(t)}{2}e_{I1} + \frac{g_{D_2}(t)}{2}e_{2II} \end{pmatrix}, \quad (16)$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_I & 0 \\ 0 & \gamma_{II} \end{pmatrix} = \mathbf{M}^{-1} \begin{pmatrix} \gamma_1/2 & 0 \\ 0 & \gamma_2/2 \end{pmatrix} \mathbf{M} \\ = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_1}{2}(e_{I1})^2 + \frac{\gamma_2}{2}(e_{2I})^2 & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_1}{2}(e_{I1})^2 + \frac{\gamma_2}{2}(e_{2II})^2 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

其中对于两个很接近的共振子体系, 有 $\gamma_1 \approx \gamma_2$, 经过计算, 非对角元项趋近 0. 因此以 (e_I, e_{II}) 为基矢的表象称为简正模表象.

2.4 非线性项的变换

由于非线性项不满足相似变换, 为了实现非线性项的变换, 设

$$\mathbf{x}(t) = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} (A_I(T) e^{i\omega_I t} \mathbf{e}_I + A_{II}(T) e^{i\omega_{II} t} \mathbf{e}_{II} + \text{c.c.}) \\ + \varepsilon^{\frac{3}{2}} \mathbf{x}^{(1)}(t) + \dots, \quad (18)$$

其中粗体部分表示的是矢量, A_I 和 A_{II} 表示振动模等效位移, 它是随时间慢变的. 因子 1/2 的引入是因为实部是物理偏移. 将 (18) 式代入 (1) 式和 (2) 式非线性项, 计算可得

$$x_j^3 = \frac{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}{8} \left\{ e^{i\omega_I t} \left[3(e_{I,j})^3 |A_I|^2 A_I + 6e_{I,j}(e_{II,j})^2 |A_{II}|^2 A_I \right] \right. \\ \left. + e^{i\omega_{II} t} \left[3(e_{II,j})^3 |A_{II}|^2 A_{II} + 6e_{I,j}(e_{I,j})^2 |A_I|^2 A_{II} \right] \right. \\ \left. + \text{c.c.} \right\} + \text{c.c.} + \text{nonresonant terms} + \dots \quad (19)$$

根据文献 [25], 考虑到线性项是取小量 $\varepsilon^{\frac{3}{2}}$ 前的系

数, 故直接比较非线性项 $\varepsilon^{\frac{3}{2}}$ 前的系数, 同时考虑 $e^{i\omega_I t}$, 非线性项改写为:

$$\begin{pmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \end{pmatrix} \sim \left(\frac{3}{8} |A_I|^2 A_I \begin{pmatrix} \alpha_1 (e_{I,1})^3 \\ \alpha_2 (e_{I,2})^3 \end{pmatrix} \right. \\ \left. + \frac{3}{4} |A_{II}|^2 A_I \begin{pmatrix} \alpha_1 e_{I,1} (e_{II,1})^2 \\ \alpha_2 e_{I,2} (e_{II,2})^2 \end{pmatrix} \right) e^{i\omega_I t}. \quad (20)$$

根据量子力学中矢量向基矢投影, 就可以得到标量方程, 用 $(e_{I,1} \ e_{I,2})$ 乘以 (20) 式两边, 可以得到非线性项对第 I 个本征矢的贡献:

$$\frac{3}{8} |A_I|^2 A_I (e_{I,1} \ e_{I,2}) \begin{pmatrix} \alpha_1 (e_{I,1})^3 \\ \alpha_2 (e_{I,2})^3 \end{pmatrix} \\ + \frac{3}{4} |A_{II}|^2 A_I (e_{I,1} \ e_{I,2}) \begin{pmatrix} \alpha_1 e_{I,1} (e_{II,1})^2 \\ \alpha_2 e_{I,2} (e_{II,2})^2 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

同理非线性项中 $e^{i\omega_{II} t}$ 前的系数向第 II 个本征矢投影, 就可以得到非线性项对第 II 个本征矢的贡献.

2.5 两个独立的一阶微分方程

联立 (14) 式—(17) 式和 (21) 式可得

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_I \\ x_{II} \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} \omega_I & 0 \\ 0 & \omega_{II} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_I \\ x_{II} \end{pmatrix} \\ + i \begin{pmatrix} \frac{\alpha_I}{\omega_I} |x_I|^2 + \frac{\beta_I}{\omega_I} |x_{II}|^2 & 0 \\ 0 & \frac{\beta_{II}}{\omega_I} |x_I|^2 + \frac{\alpha_{II}}{\omega_I} |x_{II}|^2 \end{pmatrix} \\ \times \begin{pmatrix} x_I \\ x_{II} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \gamma_I & 0 \\ 0 & \gamma_{II} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_I \\ x_{II} \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} g_{D_I}(t) \\ g_{D_{II}}(t) \\ \omega_I \\ \omega_I \end{pmatrix}, \quad (22)$$

其中,

$$\omega_{I,II} = \bar{\omega} \left(1 + \frac{D}{2\omega_{1,2}^2} \right) \mp \tilde{\delta}, \quad (22a)$$

$$\gamma_{[I]} = \left(\frac{\omega_1}{Q_1} (e_{[I,1]})^2 + \frac{\omega_2}{Q_2} (e_{[I,2]})^2 \right) / 2, \quad (22b)$$

$$\alpha_{[I]} = 3 \left(\alpha_1 (e_{[I,1]})^4 + \alpha_2 (e_{[I,2]})^4 \right) / 8, \quad (22c)$$

$$\beta_{[I]} = 3 \left(\alpha_1 (e_{II,1})^2 (e_{I,1})^2 + \alpha_2 (e_{II,2})^2 (e_{I,2})^2 \right) / 4, \quad (22d)$$

$$g_{D_{[I]}} = (g_{D_1} (e_{[I,1]}) + g_{D_2} (e_{[I,2]})) / 2, \quad (22e)$$

方程组 (22) 与文献 [25] 给出的结果完全相同.

设方程 (22) 的解为

$$x_I(t) = x_I(0) e^{i\omega_I t}, \quad (23)$$

将 (23) 式代入方程 (22), 解得

$$x_I = \frac{-i}{i\left(\omega - \omega_I - \frac{\alpha_I}{\omega_I}|x_I|^2 - \frac{\beta_I}{\omega_I}|x_{II}|^2\right) + \gamma_I} \frac{g_{D_I}(t)}{\omega_I}, \quad (24)$$

$$x_{II} = \frac{-i}{i\left(\omega - \omega_{II} - \frac{\alpha_{II}}{\omega_{II}}|x_{II}|^2 - \frac{\beta_{II}}{\omega_{II}}|x_I|^2\right) + \gamma_{II}} \frac{g_{D_{II}}(t)}{\omega_{II}}. \quad (25)$$

由 (24) 式和 (25) 式可得:

$$|x_I|^2 = \left| \frac{\frac{g_{D_I}(t)}{\omega_I}}{i\left(\omega - \omega_I - \frac{\alpha_I}{\omega_I}|x_I|^2 - \frac{\beta_I}{\omega_I}|x_{II}|^2\right) + \gamma_I} \right|^2, \quad (26)$$

$$|x_{II}|^2 = \left| \frac{\frac{g_{D_{II}}(t)}{\omega_{II}}}{i\left(\omega - \omega_{II} - \frac{\alpha_{II}}{\omega_{II}}|x_{II}|^2 - \frac{\beta_{II}}{\omega_{II}}|x_I|^2\right) + \gamma_{II}} \right|^2, \quad (27)$$

若 $\beta_I \approx \beta_{II} \sim 0$, 上面两个模式是完全独立的, (26) 式和 (27) 式可以分别拟合实验测量的两个振动峰.

3 实验设计、实验测量及理论解释

为了验证理论的正确性, 做了音叉耦合实验, 两个共振频率接近的型号为 DH4615 的音叉 1 和 2 (简称 F1 和 F2) 通过两根劲度系数为 k 的弹簧连接起来, 两个型号 FD-VR-A 的受迫振动与共振实验仪, 简称为 R1 和 R2. 用一根导线将 F2 的驱动线圈与 R2 的信号源连接起来, 用另一根导线将 F2 的探测线圈与 R2 的电路输入端连接起来, 因此 R2 即充当驱动源又充当接受器. 用一根导线将音叉 1 (F1) 的探测线圈的输出端与 R1 的电路输入端连接起来, 因此 R1 只充当接受器, 如图 2(a) 所示. 图 2(b) 为两根音叉耦合的局部放大图. 尺寸为 $0.8 \text{ mm} \times 8.0 \text{ mm} \times 100.0 \text{ mm}$ 的两个弹簧将两根音叉连接起来, 两根弹簧的两端用吸铁石将其固定在音叉臂的对称位置. 为了使两个臂的质量接近相等, 分别在两个音叉的另一个臂的相应位置, 加上一个配重的等质量的吸铁石. 调节低频信号发生器上的输出信号频率, 将输出频率从小往大处调节, 找到此时的共振振幅最大值, 也即交流电压表示数的最大值, 调节驱动信号强度, 使谱线具有一个最

佳的信噪比. 记录每一步的输出频率以及对应的交流电压表的示数值. 此为耦合情况下音叉系统振幅谱的实验数据. 随后, 去掉弹簧和 R1, 分别用 R2 测量 F1 和 F2 单独存在的振幅谱.

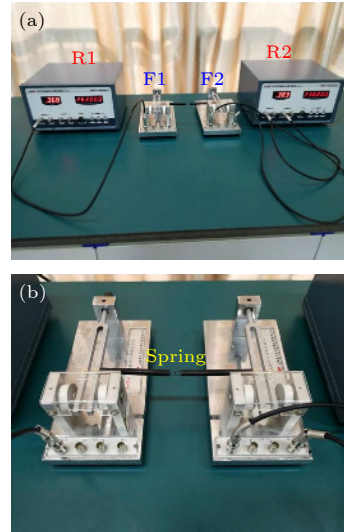


图 2 (a) 音叉耦合实验测量系统; (b) 耦合音叉的放大图
Fig. 2. (a) Tuning fork coupling experimental measurement system; (b) enlarged view of coupled tuning fork.

图 3(a) 中蓝色方形代表 F1 的实验测量振幅谱, 红色圆圈代表 F2 的实验测量振幅谱, 从图中可以看出, F1 的固有频率为 243.5 Hz, F2 的固有频率为 245 Hz, 两个模式的频率差为 1.5 Hz. 图 3(b) 中蓝色圆圈代表 R2 的频率由低到高测量的振幅谱 (简称为升频谱), 而红色方框代表 R2 的频率由高到低测量的振幅谱 (简称为降频谱). 从图中可以看出: 1) 无论是升频谱还是降频谱, 都是两个明显的峰, 升频谱一个位于 230 Hz, 另一个位于 240.6 Hz, 而降频谱一个位于 230 Hz, 另一个位于 239.1 Hz; 2) 在 236 和 243 Hz 频率区间内升频谱和降频谱明显不同, 并且高频模式对应的升频峰和降频峰相差 1.5 Hz, 即在该波段升频谱和降频谱形成了明显的回线, 称为振滞回线.

众所周知, 一个受迫振动的音叉就是一个被激发的模式, 可以用单模 CMT 研究 [24,27,28], 其中传输效率为

$$\eta_j = \left| \frac{2\gamma_{ej}}{i(\omega - \omega_j) + \gamma_{ej} + \gamma_{oj}} \right|^2, \quad (28)$$

其中 $\gamma_{ej}, \gamma_{oj}, \omega_j$ ($j = 1, 2$) 分别表示第 j 个模式的传输损耗、内部欧姆损耗以及固有圆频率. 图 3(a) 中蓝色实线表示用 (28) 式对 F1 的实验谱拟合的结果, 红色虚线代表 F2 的拟合谱, 相应的拟合参数

分别为 $\gamma_{e1} = 0.2, \gamma_{o1} = 0.2, \omega_1 = 243.4, \gamma_{e2} = 0.18, \gamma_{o2} = 0.2, \omega_2 = 244.95$, 单位为 2π Hz. 因此无耦合理论中的圆频率与音叉共振圆频率相对应. 为了研究振滞回线的来源机制, 用 (26) 式和 (27) 式对实验谱进行拟合, 如图 3(b) 所示. 图 3(b) 中的墨绿色实线是理论拟合谱, 相关拟合参数为 $\omega_1 = 230, \gamma_1 = 0.7, \omega_{II} = 242.2, \gamma_{II} = 0.6$, 单位都是 2π Hz. 与入射源相关的拟合参数为 $|g_{D_1}(t)/\omega_1| = 0.17, |g_{D_{II}}(t)/\omega_1| = 0.12$, 它们的单位都是 m/s. 与立方杜芬系数相关的拟合系数为 $\alpha_1 = -1300, \beta_1 = 0, \alpha_{II} = -2000, \beta_{II} = 0$, 单位是 N/m^3 . 图 3(b) 中黑色垂直虚线为分别过升频谱的最高点和降频谱的最高点向下做的垂线, 根据杜芬非线性理论, 在两条黑色虚线之间是非线性不稳定区域, 从图 3(b) 中可以看出理论和实验相符. 在远离共振位置的理论和实验的差异, 一方面来源于理论研究近共振情况, 即解析表达式来源于共振处的近似, 另一方面来源于忽略了 β 的作用. 通过拟合参数可以看出, 立方杜芬系数越大, 振滞回线越明显.

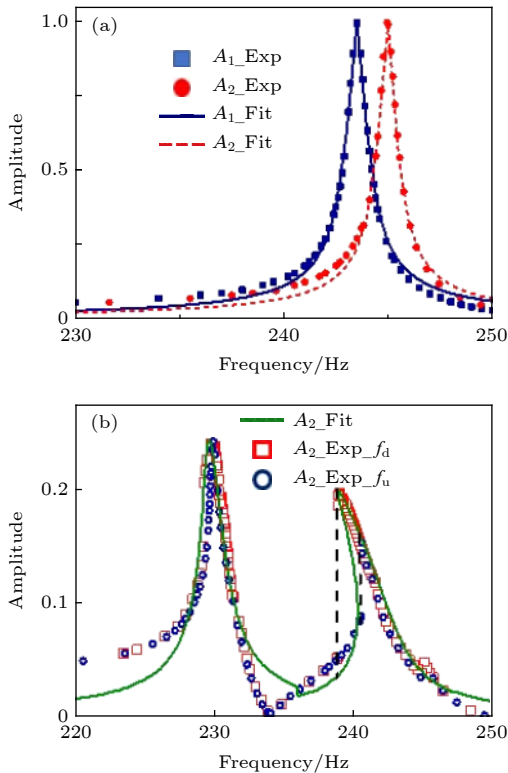


图 3 (a) 单个音叉振动时的实验振幅谱和拟合谱; (b) 两个音叉耦合时的实验振幅谱和拟合谱

Fig. 3. (a) Experimental amplitude spectrum and fitting spectrum of single tuning fork vibration; (b) experimental amplitude spectrum and fitting spectrum of two tuning fork coupling.

4 结 论

理论上用久期微扰理论和表象变换, 将二阶耦合杜芬方程组退化为两个退耦合一阶微分方程组, 得到了模式振幅谱的表达式. 随后, 为了验证理论的正确性, 设计了弹簧连接的两个音叉耦合实验, 研究表明理论很好地解释了实验现象. 该研究对理论探究杜芬非线性现象有一定的指导意义, 也便于理论推广到光电非线性耦合体系.

感谢王勤谋、石风华以及张季谦等老师给予的有益讨论.

参考文献

- [1] Jing H, Özdemir S K, Lü X Y, Zhang J, Yang L, Nori F 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 053604
- [2] Cao B F, Li P, Li X Q, Zhang X Q, Ning W S, Liang R, Li X, Hu M, Zheng Y 2019 *Acta Phys. Sin.* **68** 080501 (in Chinese) [曹保锋, 李鹏, 李小强, 张雪芹, 宁王师, 梁睿, 李欣, 胡森, 郑毅 2019 *物理学报* **68** 080501]
- [3] Shu L, Guo L, Wu G C, Chen W 2019 *Appl. Therm. Eng.* **153** 85
- [4] Antonio D, Czaplowski D A, Guest J R, López D, Arroyo S I, Zanette D H 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 034103
- [5] Cross M C, Zundieck A, Lifshitz R, Rogers 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 224101
- [6] Westra H J R, Poot M, van der Zant H S J, Venstra W J 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 117205
- [7] Peng B, Ozdemir S K, Lei F, Monifi F, Gianfreda M, Long G, Fan S, Nori F, Bender C M, Yang L 2014 *Nat. Phys.* **10** 394
- [8] Zhou X, Chong Y 2016 *Opt. Express* **24** 6916
- [9] Abdollahi S 2017 *Ph. D. Dissertation* (Edmonton: University of Alberta)
- [10] Bernard M, Manzano F R, Pavesi L, Pucker G, Carusotto I, Ghulinyan M 2017 *Photonics Res.* **5** 168
- [11] Assaworrorarit S, Yu X, Fan S 2017 *Nature* **546** 387
- [12] Sarma B, Sarma A K 2018 *Sci. Rep.* **8** 14583
- [13] Yao Z, Ma J, Yao Y, Wang C 2019 *Nonlinear Dyn.* **96** 205
- [14] Ding Z, Qiao K, Ernst N, Kong J, Chen M, Matthews L, Hyde T 2019 *New J. Phys.* **21** 103051
- [15] Zheng Y, Zhou L, Dong Y, Qiu C, Chen X, Guo G, Sun F 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 223603
- [16] Kuang Y, Zhu M 2019 *Appl. Phys. Lett.* **114** 203903
- [17] Sabarathinam S, Volos C, Thamilmaran K 2017 *Nonlinear Dyn.* **87** 37
- [18] Ramos D, Frank I W, Deotare P B, Bulu I, Loncar M 2014 *Appl. Phys. Lett.* **105** 181121
- [19] Liu H B, Wu D W, Jin W, Wang Y Q 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 050501 (in Chinese) [刘海波, 吴德伟, 金伟, 王永庆 2013 *物理学报* **62** 050501]
- [20] Bernstein A, Rand R H, Meller R 2018 *Open Mech. Eng. J.* **12** 108
- [21] Hou D X, Zhao H X, Liu B 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 234501 (in Chinese) [侯东晓, 赵红旭, 刘彬 2013 *物理学报* **62** 234501]

- [22] Kovacic I, Rand R H, Sah S M 2018 *Appl. Mech. Rev.* **70** 020802
- [23] Daniel D J 2020 *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2020** 043A01
- [24] Zhu C Y, Li C G, Fang Q, Wang M S, Peng X C, Huang W X 2020 *Acta Phys. Sin.* **69** 074501 (in Chinese) [朱存远, 李朝刚, 方泉, 汪茂胜, 彭雪城, 黄万霞 2020 物理学报 **69** 074501]
- [25] Karabalin R B, Cross M C, Roukes M L 2009 *Phys. Rev. B* **79** 165309
- [26] Haus H A 1984 *Waves and fields in optoelectronics* (New Jersey: Prentice-Hall) pp197–217
- [27] Huang W, Lin J, Qiu M, Liu T, He Q, Xiao S, Zhou L 2020 *Nanophotonics* <https://doi.org/10.1515/nanoph-2020-0007>
- [28] Fan S, Suh W, Joannopoulos J D 2003 *J. Opt. Soc. Am. A* **20** 569

Applications of representation transformation and secular perturbation theory to coupled Duffing equations*

Li Chao-Gang Wang Mao-Sheng Fang Quan
Peng Xue-Cheng Huang Wan-Xia[†]

(Anhui Province Key Laboratory of Optoelectronic Materials Science and Technology, School of Physics and Electronic Information, Anhui Normal University, Wuhu 241002, China)

(Received 3 July 2020; revised manuscript received 31 August 2020)

Abstract

In physics, the non-linear mode coupling is an important strategy to manipulate the mechanical properties of a vibrational system. Compared with the single-mode nonlinear system, the complex systems with two- or multi-mode nonlinear coupling have garnered considerable attention, among which the analytical solutions to the coupled Duffing equations are widely studied to solve nonlinear coupling. The fact is that the solving of the Duffing coupling equations generally starts with the eigenmodes solution of the linear equations. The trial solution of the coupled equations is the linear superposition of the eigenmodes. Under the secular perturbation theory and similar conditions, the Duffing coupling equation degenerates into two decoupled equations. However, thus far most of the solution methodologies are too complicated to unravel the underlying physical essence clearly. In this paper, first, by applying the representational transformation to the linear terms of the first-order coupled Duffing equations and the secular perturbation theory for the nonlinear terms, a decoupled expression of the first-order Duffing equations is derived, which can be solved more straightforwardly. Subsequently, in order to verify the correctness of the method, we design a coupled tuning fork mechanical vibration system, which consists of two experimental instruments to provide driving force and receive signals, two tuning forks and springs. The amplitude spectra are measured by an experimental instrument of forced vibration and resonance (HZDH4615), which provides a periodic driving signal for the tuning fork. The numerical fitting by software is employed to clarify the mechanism of the spectrum. Theoretically, the obtained fitting parameters can also evaluate some important attributes of the system. Most strikingly, due to the nonlinear coupling the splitting of the resonant peak and the phenomenon of “hysteresis loop” are clearly observed in the experiment. The research shows that the experimental results perfectly match the theoretical results obtained before. The method of solving coupled nonlinear equations in this article provides a solution and improvement of flexible adoption of nonlinear theory. On the other hand, it can be extended to coupled light and electricity systems, offer certain guidance for understanding the dynamic behavior of coupled systems, and will be conducive to the quantitative examination of numerous nonlinear coupling devices.

Keywords: coupled Duffing equations, coupled-mode theory, representational transformation, secular perturbation theory, nonlinear effect

PACS: 46.40.Ff, 46.40.-f, 05.45.-a

DOI: 10.7498/aps.70.20201057

* Project supported by the State Key Laboratory of Surface Physics, Fudan University, China (Grant No. KF2018_01) and the Quality Project for Higher Education Institutions of Anhui Province, China (Grant No. 2019mooc066).

[†] Corresponding author. E-mail: kate@mail.ahnu.edu.cn