

一维准周期晶格的性质及应用

王玉成 刘雄军 陈澍

Properties and applications of one dimensional quasiperiodic lattices

Wang Yu-Cheng Liu Xiong-Jun Chen Shu

引用信息 Citation: [Acta Physica Sinica](#), 68, 040301 (2019) DOI: 10.7498/aps.68.20181927

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181927>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

新型Fibonacci准周期结构一维等离子体光子晶体的全方位带隙特性研究

Omnidirectional photonic bandgap of the one-dimensional plasma photonic crystal based on a novel Fibonacci quasiperiodic structure
物理学报. 2016, 65(24): 244204 <https://doi.org/10.7498/aps.65.244204>

多模1064nm光纤激光器实现一维远失谐光晶格

One-dimensional far-detuned optical lattice realized with a multimode 1064 nm laser
物理学报. 2016, 65(4): 043701 <https://doi.org/10.7498/aps.65.043701>

无序效应对1T-TaS₂材料中Mott绝缘相的影响

Anderson localization effect on Mott phase in 1T-TaS₂
物理学报. 2017, 66(5): 057101 <https://doi.org/10.7498/aps.66.057101>

表层厚度渐变一维耦合腔光子晶体的反射相位特性及其应用

Reflection phase characteristics and their applications based on one-dimensional coupled-cavity photonic crystals with gradually changed thickness of surface layer
物理学报. 2016, 65(7): 074201 <https://doi.org/10.7498/aps.65.074201>

高压下准一维纳米结构的研究

Studies of quasi one-dimensional nanostructures at high pressures
物理学报. 2017, 66(3): 039101 <https://doi.org/10.7498/aps.66.039101>

专题：冷原子-分子物理

编者按 20世纪八十年代,激光冷却中性原子技术的发展开创了冷原子分子物理研究领域;1995年玻色-爱因斯坦凝聚体在冷原子气体中的实验实现吸引了凝聚态和统计物理等多学科研究人员的广泛关注,这两项开创性研究分别获得了1997年和2001年的诺贝尔物理学奖。随后,研究者在该领域迅速取得了若干其他重要突破,并逐渐和物理学的各分支学科,如凝聚态物理、光物理、精密测量物理、理论物理和量子信息等交叉融合,从而形成了一个全新的研究领域。近几十年来,冷原子-分子物理始终是物理学国际前沿热点研究领域之一。由于冷原子或冷分子都是高度可控并近乎完美的量子体系,描写它的哈密顿量的每一项参数,如动能、势能、相互作用、无序度、等效规范场等都是实验可控的,因此它可以用来模拟强关联体系以及研究一些极端条件的物理现象,同时它是量子计算物理实现的有力候选体系。另外,它可用于精密测量各种物理量,如实现最高时间测量精度的原子钟、精密测量电磁场等,从而在军民两用领域都有重大应用价值。本专题邀请了若干活跃在该领域前沿的专家撰稿,介绍冷原子和冷分子领域部分国际前沿课题和最新研究进展。专题以短篇综述为主,从研究内容上可大致分为三类:一是基于冷原子分子的量子模拟(大部分文章属于此类);二是冷原子分子的实现和精确操控;三是基于冷原子分子的精密测量。

希望这个专题能够为青年学者选择科学方向、研究课题以及从事相关领域的研究人员提供帮助,并进而促进我国原子分子和量子物理学的发展。

(客座编辑:南京大学物理学院 朱诗亮)

一维准周期晶格的性质及应用^{*}

王玉成^{1)2)3)†} 刘雄军²⁾⁶⁾ 陈澍^{4)5)6)‡}

1) (南方科技大学物理系, 深圳量子科学与工程研究院, 深圳 518055)

2) (北京大学物理学院, 国际量子材料中心, 北京 100871)

3) (中国科学技术大学, 量子信息与量子物理协同创新中心, 合肥 230026)

4) (中国科学院物理研究所, 北京凝聚态物理国家研究中心, 北京 100190)

5) (中国科学院大学物理科学学院, 北京 100049)

6) (量子物质科学协同创新中心, 北京 100084)

(2018年10月30日收到; 2018年12月25日收到修改稿)

准周期晶格在冷原子领域被广泛研究, 它使得人们可以在一维或者二维系统里研究扩展到安德森局域的转变。2008年, Inguscio研究组在冷原子系统里制备了一维准周期晶格, 并观测到了安德森局域化现象, 这极大地推动了准周期系统的理论和实验研究。后来, Bloch研究组在制备的一维和二维准周期晶格中都观测到了多体局域的现象。最近, 他们还在准周期晶格中成功观测到迁移率边以及存在迁移率边的系统的多体局域现象。这些冷原子实验推动了多体局域以及迁移率边等方向的研究。准周期晶格已经成为一个平台, 它对很多物理现象的影响正在被广泛研究, 并可以尝试在冷原子实验中观测到这种影响。本文结合作者的一些相关工作, 对一维准周期晶格一些近期的研究进行了简要综述, 介绍了一些相关的重要的冷原子实验, 讨论了准周期晶格的一些重要性质, 以及它对一些物理现象(比如拓扑态)的影响。

关键词: 光晶格, 安德森局域化, 多体局域, 拓扑态

PACS: 03.65.Vf, 04.60.Kz, 71.10.Fd, 72.15.Rn

DOI: 10.7498/aps.68.20181927

* 国家重点研发计划(批准号: 2016YFA0301604, 2016YFA0300600, 2016YFA0302104)、国家自然科学基金(批准号: 11674301, 11574008, 11761161003, 11425419)、中国青年千人计划和中国科学院战略优先研究计划(批准号: XDB07020000)资助的课题。

† 通信作者。E-mail: wangyc3@sustc.edu.cn

‡ 通信作者。E-mail: schen@iphy.ac.cn

1 引言

近三十年来, 随着一系列原子的激光冷却与陷阱技术的实现和进步^[1], 人们能够研究超冷原子气体中新奇的量子现象。一些关键性的技术, 比如菲斯巴赫 (Feshbach) 共振技术^[2], 应用到冷原子系统上, 人们可以调节原子间的有效相互作用。由于超冷原子气具有高度纯净和容易操控的优点, 成为了理想的量子模拟的平台, 比如人们已经成功模拟了费米和玻色哈伯德 (Hubbard) 模型^[3], 自旋轨道耦合^[4,5], 拓扑模型及相变^[6,7], 科斯特利茨-索利斯 (Kosterlitz-Thouless) 相变^[8], 甚至霍金辐射^[9]等。所以现在的理论物理学家提出一个新的现象时, 往往会考虑怎么在冷原子中模拟这种现象。另外, 这些量子模拟不仅仅是验证凝聚态里的一些已知的结果, 而且通过引入一些参数和新的环境, 可以得到一些新的物理现象, 这些新的物理现象又推动了理论物理的发展。

在 1980 年, Aubry 和 André 研究了一维准周期系统^[10](以下简称 AA 模型)。尽管该系统不是随机无序的, 但是它仍然没有平移对称性, 它具有扩展到局域的转变的性质。此后, 对于该模型以及该模型的一些推广^[11–14]被广泛研究。2008 年, Roati 等^[15]在冷原子系统里成功模拟了 AA 模型, 并且观测到了安德森局域化的现象。这开启了人们在冷原子系统里研究局域化问题的新篇章, 一系列理论与实验的成果被发现。同时 AA 模型成为了研究其他物理现象的重要平台, 比如在 AA 模型上加上 p 波配对项^[16–19], 可以用来研究拓扑超导到安德森局域相的转变, 在 AA 模型上加上相互作用^[20–22], 可以研究热化相到多体局域相的转变。2015 年, Schreiber 等^[23]在冷原子里制备出了带有相互作用的 AA 模型, 从而第一次观测到多体局域相, 这在一定程度上引发了多体局域研究的热潮。

本文详细介绍一些一维准周期系统及其应用, 先介绍 AA 模型以及它的实验实现和在其基础上的一些推广模型, 接着在 AA 模型上加上相互作用, 讨论热化到多体局域的转变, 并介绍如何在冷原子实验中观测多体局域现象, 然后介绍 AA 模型相关的动力学研究, 最后讨论准周期势对拓扑超导和拓扑半金属的影响。

2 AA 模型简介及其冷原子实验实现

2.1 AA 模型简介

1958 年, 美国物理学家 Anderson^[24]研究了无序晶体中电子的运动, 提出了强无序体系中电子局域化的概念。由于无序的存在, 晶格的周期性被破坏, 电子的波函数不再能扩展到整个晶体中, 而是在空间中按照指数形式衰减, 这就是局域态。由于无序的存在, 动量不再是描述电子态的好量子数, 因此通常采用紧束缚近似, 在瓦尼尔基下进行讨论。考虑安德森模型 $H = \sum_i \varepsilon_i |i\rangle\langle i| + \sum_{i \neq j} J_{ij} |i\rangle\langle j|$, 其中 $|i\rangle$ 表示第 i 个格点的态矢量, J_{ij} 表示 i, j 格点之间的跃迁, ε_i 是 i 格点的化学势, 它在 $[-\frac{W}{2}, \frac{W}{2}]$ 范围内随机分布。本征态可写为 $|\Psi\rangle = \sum_i C_i |i\rangle$, 其中 C_i 是粒子在 i 格点的概率幅。容易得到动力学方程为

$$i\hbar \frac{dC_i}{dt} = \varepsilon_i C_i + \sum_j J_{ij} C_j. \quad (1)$$

如果初始时刻粒子在 i 格点, 即 $C_i(t=0) = 1$, 且 $C_j = 0(j \neq i)$. 由 (1) 式可以得到 t 时刻的波函数分布, 在热力学极限下, 若 $C_i(t \rightarrow \infty) = 0$, 则系统处于扩展态, 若 $C_i(t \rightarrow \infty)$ 是不等于零的有限值, 则系统处于局域态。

对于一维或二维系统, 很弱的随机无序就会使系统变得局域。AA 模型是一个一维准周期系统^[10](也可以称为非公约系统), 其哈密顿量为

$$H = J \sum_j (\hat{c}_j^\dagger \hat{c}_{j+1} + \text{H.c.}) + \sum_{j=1}^L \Delta \cos(2\pi\alpha j + \delta) \hat{n}_j, \quad (2)$$

其中 $\hat{c}_j^\dagger(\hat{c}_j)$ 是费米子的产生(湮灭)算符, J 是近邻格点的跃迁强度, α 是一个无理数, Δ 是准周期势的强度。AA 模型的扩展到局域的转变点是 $\Delta/J = 2$, 当 $\Delta/J < 2$ 时, 所有的本征态都是扩展的, 当 $\Delta/J > 2$ 时, 所有的本征态都是局域的。这个转变点可以通过下面的对偶变换解析得到。不失一般性, 设初相位 $\delta = 0$. 本征态写为 $|\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle$, $|n\rangle$ 是 n 格点的瓦尼尔态, 利用本征方程 $\hat{H}^n |\psi\rangle = E |\psi\rangle$ 可把 (2) 式化为

$$J(c_{n-1} + c_{n+1}) + \Delta \cos(2\pi\alpha n)c_n = Ec_n. \quad (3)$$

引入变换 $c_n = \sum_k c_k e^{i2\pi\alpha nk}$, 则 (3) 式变为

$$\frac{\Delta}{2}(c_{k-1} + c_{k+1}) + 2J \cos(2\pi\alpha k)c_k = Ec_k. \quad (4)$$

可以看到 (3) 式和 (4) 式有着完全类似的形式, 这时称这两个方程是对偶的. 对于固定的 J 和 Δ , 如果波函数 $|\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle$ 是扩展的 (局域的), 其变到对偶空间的波函数 $|\phi\rangle = \sum_k c_k |k\rangle$ 应该是局域的 (扩展的). 所以这个系统的扩展-局域的转变点是 $\frac{\Delta}{2} = J$.

为了直观展示 AA 模型的扩展局域的性质, 下面研究这个系统的倒参与率 (the inverse participation ratio, IPR) 和波函数的分布. 倒参与率是一个最常用的描述系统局域扩展性质的量 [25–27]:

$$\text{IPR}_n = \sum_{j=1}^L |\psi_{n,j}|^4, \text{ 这里 } j \text{ 代表第 } j \text{ 个格点, } \psi_n \text{ 是系统的第 } n \text{ 个本征态, 它满足归一化条件 } \sum_j |\psi_{n,j}|^2 = 1.$$

如果一个态是扩展的, 容易验证 $\text{IPR}_n \propto 1/L$, 当 $L \rightarrow \infty$ 时, IPR_n 趋于 0. 而对于局域态, 在热力学极限下, IPR 是一个有限的非零值. 固定跃迁强度 $J = 1$ 和系统尺寸 $L = 1000$, 在图 1 中展示了 AA 模型的基态的倒参与率随准周期势强度 Δ 的变化, 这里取的是开边界条件 (open boundary condition, OBC). 可以看出, IPR 在 $\Delta < 2$ 时接近于零, 在 $\Delta = 2$ 处突变为一个有限值, 说明系统在这一点从

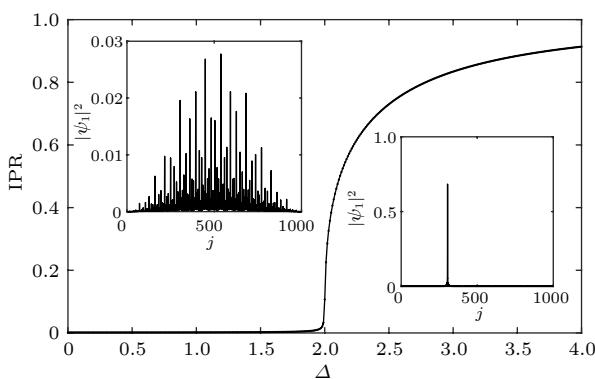


图 1 基态的倒参与率随 Δ 的变化, 这里固定 $J = 1$ 和 $L = 1000$. 左右的插图分别展示了 $\Delta = 1.9$ 和 $\Delta = 2.1$ 时系统的基态波函数的分布

Fig. 1. IPR of ground states as a function of Δ for this system with $J = 1$ and $L = 1000$. The left and right insets show the distribution of the ground state with $\Delta = 1.9$ and $\Delta = 2.1$ respectively.

扩展态变为了局域态. 在图 1 的左右插图中, 分别展示了 $\Delta = 1.9$ 和 $\Delta = 2.1$ 时系统的基态波函数的分布, 可以看出 $\Delta = 1.9$ 时系统的基态波函数分布在整个空间, 这是扩展态的特征, 而 $\Delta = 2.1$ 时系统的基态波函数分布在一个很小的区域内, 这是局域态的分布特征. 不止是基态, 容易验证其他态仍然有类似的特征.

2.2 AA 模型的冷原子实验实现

由于晶体中存在电子-电子以及电子-声子的相互作用, 所以很难在晶体中直接观测到安德森局域化. 冷原子系统干净和可控的特性为直接观测到安德森局域现象提供了可能. 2008 年, Roati 等 [15] 在冷原子系统中成功模拟了 AA 模型, 并在此基础上观测到了安德森局域态. 他们首先在光势阱中冷却得到一团玻色-爱因斯坦凝聚体 (Bose-Einstein condensate), 然后通过菲斯巴赫共振技术将原子间的相互作用调到零, 最后将其放入一维双色光晶格中, 如图 2 所示 [15]. 一维双色光晶格势可以通过两束激光以驻波的形式产生, 一束激光的波长为 λ_1 , 产生主晶格, 另一束波长为 λ_2 产生弱的次晶格, 它们的形式为 [28,29]:

$$V_b(x) = s_1 E_1 \sin^2(k_1 x) + s_2 E_2 \sin^2(k_2 x + \phi), \quad (5)$$

其中 $k_i = 2\pi/\lambda_i$ ($i = 1, 2$) 对应主次晶格的波数, s_i 是以各自反冲能量 $E_i = \hbar^2/(2m\lambda_i^2)$ 为单位的主次晶格的深度, ϕ 是一个任意的相位. 因此一维双色光晶格的单粒子哈密顿量可写为

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_x^2 + V_b(x), \quad (6)$$

如果以主晶格的参数为单位, 即以 k_1^{-1} 和 E_1 分别作为长度和能量的单位, 可将 (6) 式中的哈密顿量无量纲化:

$$\begin{aligned} H/E_1 &= -\nabla_\xi^2 + s_1 \sin^2(\xi) + s_2 \beta^2 \sin^2(\beta\xi + \phi) \\ &= H_1 + s_2 \beta^2 \sin^2(\beta\xi + \phi), \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $\xi = k_1 x$, $\beta = \lambda_1/\lambda_2$, $\beta^2 = E_2/E_1$.

将系统在主晶格的瓦尼尔基 $w_j = w(\xi - \xi_j)$ 下展开, 其中 j 表示格点, 即 H_1 最低能带的波函数可写为 $|\psi\rangle = \sum_j c_j |w_j\rangle$. 那么哈密顿量可以被写为

$$H \rightarrow \langle \psi | H | \psi \rangle = \sum_{ij} c_i^\dagger c_j \langle w_i | H | w_j \rangle, \quad (8)$$

式中矩阵元为

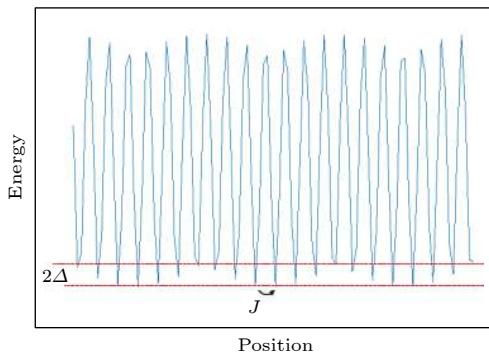


图 2 实验实现准周期晶格的原理示意图. J 描述的是主晶格最近邻格点之间的跃迁, 2Δ 是由次晶格导致的在位能最大的差别

Fig. 2. Sketch of the quasiperiodic lattice realized in the experiment. J describes the hopping between the nearest-neighbor sites of the primary lattice and 2Δ is the maximum shift of the on-site energy induced by the secondary lattice.

$$\begin{aligned} \langle w_i | H | w_j \rangle &\approx \varepsilon_0 \delta_{ij} - J \delta_{i,j \pm 1} \\ &+ \delta_{ij} s_2 \beta^2 \int d\xi \sin^2(\beta\xi + \phi) |w_i(\xi)|^2, \end{aligned} \quad (9)$$

其中

$$\varepsilon_0 = \int d\xi w_i(\xi) H_1 w_i(\xi); J = \int d\xi w_{i+1}(\xi) H_1 w_i(\xi). \quad (10)$$

考虑到晶格势很深时瓦尼尔函数的高度局域化, 这里交叠积分只取到了跃迁项的次近邻部分和次晶格势的在位部分. 利用 $\sin^2(\beta\xi + \phi) = (1 - \cos(2\beta\xi + 2\phi))/2$ 和

$$\begin{aligned} &\int d\xi \cos(2\beta\xi + \phi') |w_i(\xi)|^2 \\ &= \cos(2\pi\beta i + \phi') \int d\xi \cos(2\beta\xi) |w(\xi)|^2, \end{aligned} \quad (11)$$

(9) 式最后一项的积分可以写成 AA 模型中的准周期势项对应的形式. 定义

$$\Delta = \frac{s_2 \beta^2}{2} \int d\xi \cos(2\beta\xi) |w(\xi)|^2, \quad (12)$$

舍去常数项, 易得

$$\langle w_i | H | w_j \rangle \approx -J \delta_{i,j \pm 1} - \delta_{ij} \Delta \cos(2\pi\beta i + \phi'). \quad (13)$$

因此, 得到了 AA 模型类似的哈密顿量

$$\begin{aligned} H = -J \sum_j &\left(c_{j+1}^\dagger c_j + c_j^\dagger c_{j+1} \right) \\ &+ \Delta \sum_j \cos(2\pi\beta j + \phi) c_j^\dagger c_j. \end{aligned} \quad (14)$$

并且, 从 (10) 式和 (12) 式中可以看到, 通过实验

控制 s_1, s_2 和 β , 就可以得到 (14) 式中的参数 J 和 Δ .

实验上可以测量系统的输运性质来研究扩展-局域转变: 突然撤掉简谐势让原子在这个晶格中运动, 然后利用原位吸收成像技术测量原子随时间的演化. 会发现在准周期势强度很弱的情况下, 系统迅速膨胀; 而在准周期势强度很大的情况下, 系统基本上没有扩散发生. 这和前面通过动力学方程对安德森模型中扩展态和局域态的描述是一致的.

3 AA 模型的推广

3.1 存在迁移率边的一维准周期模型

对于三维系统, 如果加的无序强度在某个范围内, 系统的能带中可能会出现迁移率边 E_c 和 $E_{c'}$. 满足 $E_c < E < E_{c'}$ 的本征值对应的态是扩展的, 如果费米面在这个范围内, 系统就表现出金属属性, $E > E_{c'}$ 或者 $E < E_c$ 范围的本征值对应的态是局域的, 如果费米面在这个范围, 系统就表现出绝缘体属性. 通常可以通过掺杂、加压或者加电磁场等方式调节费米面或迁移率边的位置, 从而使系统可以发生金属-绝缘体的转变.

在 AA 模型之后, 科学家们在此基础上提出几个准周期模型 [11–14], 这使得可以在一维系统里研究迁移率边. 如哈密顿量 (2) 式中化学势项写为 $\sum_{j=1}^L \Delta \cos(2\pi\alpha j^\nu + \delta) \hat{n}_j$ [11,12]. 可以看出, 当 $\nu = 1$ 时, 该系统简化为 AA 模型. 固定跃迁强度 $J = 1$, 理论和数值研究发现, 当 $\nu < 1$ 以及 $\Delta < 2$ 时, 这个系统存在迁移率边, 在能带的中间 ($|E| < 2 - \Delta$), 所有的态是扩展的, 在能带的两边 ($2 - \Delta < |E| < 2 + \Delta$), 所有的态是局域的, $E_c = |2 - \Delta|$ 是两个迁移率边的位置. 当 $\Delta > 2$ 时, 所有的态都是局域的.

另一种扩展是在跃迁项上做文章 [13,14]. 考虑下面一个紧束缚模型:

$$E u_n = \sum_{n' \neq n} J e^{-p|n-n'|} u_{n'} + \Delta \cos(2\pi\alpha n + \delta) u_n, \quad (15)$$

其中 α 是个无理数, $p > 0$. 可以看出, 这里的跃迁不仅仅是只包含近邻的跃迁, 它的强度是随距离指数衰减的短程跃迁. 仿照 AA 模型的对偶变换, 这里做类似的处理. 定义参数 $p_0 > 0$, 使它满足:

$$(E + J) - \Delta \cos(2\pi\alpha n + \delta) = \omega^2 T_n, \quad (16)$$

$$T_n = \frac{\cosh(p_0) - \cos(2\pi\alpha n + \delta)}{\sinh(p_0)}, \quad (17)$$

其中 $\omega^2 = \sqrt{(E+J)^2 - \Delta^2}$, 由(16)、(17)式得 $(E+J)/\Delta = \cosh(p_0)$, 同时(15)式可写为

$$\omega^2 T_n u_n = \sum_{n'} J e^{-p|n-n'|} u_{n'}. \quad (18)$$

如果做下面的变换:

$$\tilde{u}_m = \sum_n e^{im(2\pi\alpha n + \delta)} T_n u_n, \quad (19)$$

可以得到 \tilde{u}_m 满足:

$$\omega^2 \tilde{T}_m \tilde{u}_m = \sum_{m'} J e^{-p_0|m-m'|} \tilde{u}_{m'}, \quad (20)$$

这里 \tilde{T}_m 定义为:

$$\tilde{T}_m = \frac{\cosh(p) - \cos(2\pi\alpha m + \delta)}{\sinh(p)}. \quad (21)$$

可以看到在(19)式的变换下, 当 $p = p_0$ 时, (18)式是自对偶的。类似于对 AA 模型的讨论, 当 $p > p_0$ 时, 所有的态是局域的, 当 $p < p_0$ 时, 所有的态是扩展的。因此可以给出临界条件:

$$\cosh(p) = \frac{E_0 + J}{\Delta}. \quad (22)$$

满足这个方程的 E_0 , 对应的态应该是临界态。 $E > E_0$ 对应的态是局域的, $E < E_0$ 对应的态应该是扩展的。

3.2 存在迁移率边的一维准周期光晶格的实验实现

最近, Li 等^[30] 和 Lüschen 等^[31] 在冷原子系统中成功实现了存在迁移率边的一维准周期光晶格

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{V_p}{2} \cos(2k_p x) + \frac{V_d}{2} \cos(2k_d x + \phi), \quad (23)$$

这里, V_p , V_d 分别是主次晶格的晶格势强度, $k_i = 2\pi/\lambda_i$ ($i = p, d$) 表示两个晶格的波矢, ϕ 是它们的相对相位, m 是实验中用到的⁴⁰K 原子的质量。实际上这个哈密顿量反映的就是前面讨论的含有指数衰减的短程跃迁的模型^[13]。

这个系统存在三个相: 局域相, 扩展相和中间相(包含局域态和扩展态的相)。实验中为了测得这三个相, 他们制备了一个电荷密度波(charge density wave, CDW) 的初态, 如图 3(a) 所示, 然后考虑这个初态的演化。如果系统中存在局域态, 那么初始的 CDW 的模式将会存在很长的时间, 考虑一个能反映奇偶格点的密度分布差异的量 $I =$

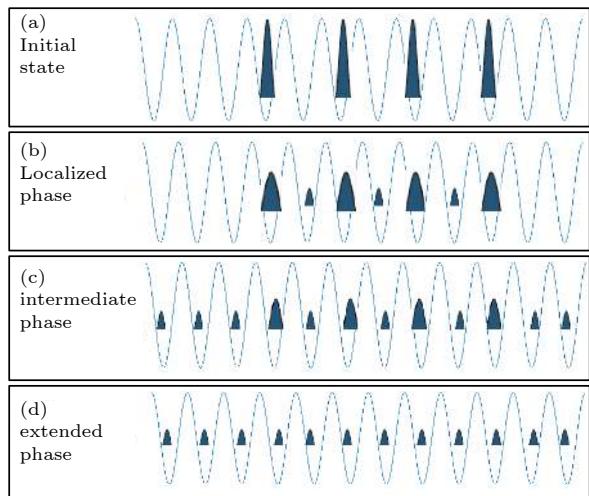


图 3 实验原理图。制备的初始 CDW 态, 以及在局域、中间和扩展相中, 经过一段时间演化后, 分别对应的系统的末态 (a) 初态分布, 制备为 CDW 态(根据定义, 有 $I > 0$, $\xi = 0$); (b) 局域态($I > 0$, $\xi = 0$);(c) 中间态, 对应于不同的能量存在局域态和扩展态($I > 0$, $\xi > 0$); (d) 扩展态($I = 0$, $\xi > 0$)

Fig. 3. Schematics of the experiment. Schematic illustration of the initial CDW state and the states reached after time evolution in the localized, intermediate, and extended phase, respectively: (a) Initial state: CDW state ($I > 0$, $\xi = 0$); (b) localized phase ($I > 0$, $\xi = 0$); (c) the intermediate phase, extended and localized states coexist at different energies ($I > 0$, $\xi > 0$); (d) extended phase ($I = 0$, $\xi > 0$).

$(N_e - N_o)/(N_e + N_o)$, 在很长时间的演化后, 它仍不等于零, 如图 3(b) 和图 3(c) 所示。这里, N_e (N_o) 表示偶(奇)格点的原子数。如果系统中存在扩展态, 那么初态会往整个空间扩散, 因此原子云的总尺寸 σ 将变大。引入可以反映这个变化的量 $\xi \sim (\sigma(t) - \sigma(0))$, 那么如果系统存在扩展态, ξ 将大于零, 如图 3(c) 和图 3(d) 所示。如果所有的态都是局域的, ξ 则等于零, 如图 3(b) 所示。如果所有的态都是扩展的, I 将等于零, 如图 3(d) 所示。如果系统中既存在扩展态又存在局域态, 那么在一段时间演化之后, I 和 ξ 都将不为零, 如图 3(c) 所示。在实验中通过测量这两个量, 证明了这个系统中中间相的存在, 从而间接地说明了迁移率边的存在。

4 存在相互作用的一维准周期系统

安德森局域化考虑的是单粒子的问题, 下面加上粒子间的相互作用。相互作用可以影响系统的自能, 自能的虚部在一定程度上反映了单粒子激发的寿命, 如果单粒子激发在有限时间内可衰减, 系统

是可热化的, 如果单粒子激发有无限长的衰减时间, 系统可稳定存在, 它是多体局域的, 所以相互作用可以影响热化相和多体局域相之间的转变^[32]. 另外, 从动力学角度来分析一个封闭的多体系统的初态在任意长的时间内会演化成什么样的态. 根据初始态的细节信息会不会在演化过程中消失也可以区分热化相和多体局域相^[33]. 多体局域的系统在任意长的时间演化后都不会热化, 从动力学上看它保留了初始态的信息, 并且它对于局域的微扰是不敏感的. 多体局域在过去几年里被广泛研究^[34–37], 它正逐渐成为其他理论的基础, 比如时间晶体(time crystal), 就是通过弗洛凯(Floquet)周期驱动和多体局域结合定义的^[38]. 人们第一次在实验中观测到多体局域现象就是在一维的准周期晶格中^[23]. 下面先讨论加相互作用的 AA 模型的相变^[20–22].

4.1 存在相互作用的 AA 模型

考虑在 AA 模型中加上近邻排斥相互作用的费米子模型, 其哈密顿量为^[21]:

$$H = \sum_j [-J(\hat{c}_j^\dagger \hat{c}_{j+1} + \hat{c}_{j+1}^\dagger \hat{c}_j) + h \cos(2\pi\alpha j + \theta) \hat{n}_j + U \hat{n}_j \hat{n}_{j+1}], \quad (24)$$

其中 $\hat{c}_j(\hat{c}_j^\dagger)$ 是费米子湮灭(产生)算符, $\hat{n}_j = \hat{c}_j^\dagger \hat{c}_j$ 是粒子数算符, h 是准周期势强度, α 是无理数, 仍取 $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, θ 是一个任意的相移. 为了方便, 设跃迁振幅 J 作为能量单位, 即 $J = 1$, 并且固定近邻格点的费米子之间的相互作用强度 $U = 0.4$, 其他情况可做类似的讨论. 考虑半填充的情况, 即固定 $N/L = 1/2$, 这里 N 是总的费米子数, L 是晶格尺寸.

下面用能级间距统计^[34,39]和纠缠熵^[40,41]来研究热化相到多体局域相的转变. 热化相的能级间距服从高斯正交分布 $P_T(\delta) = \frac{\pi}{2} \frac{\delta}{s^2} \exp\left[-\frac{\pi}{4}(\frac{\delta}{s})^2\right]$, 而多体局域相的能级间距服从泊松分布 $P_M(\delta) = \frac{1}{s} \exp\left[-\frac{\delta}{s}\right]$, 其中 δ 表示近邻能级间距, s 是其平均值, 即 $s = \langle \delta \rangle$. 由于能级间距 δ 的最大值和最小值差距很大, 不方便进行能级统计, 所以通常会对能级间距做进一步的处理. 将多体系统的本征值从小到大进行排列, 定义 $r^{(n)} = \min\{\delta^{(n)}, \delta^{(n+1)}\} / \max\{\delta^{(n)}, \delta^{(n+1)}\}$, 其中 $\delta^{(n)} = E^{(n)} - E^{(n-1)}$, 这里

$E^{(n)}$ 是系统的第 n 个本征值, 那么 $r^{(n)}$ 的大小显然属于 $[0, 1]$. 通常要对所有的态和样品做平均得到 $\langle r \rangle$. 可以解析证明, 对于多体局域相 $\langle r \rangle = 0.387$, 而对于热化相 $\langle r \rangle \approx 0.529$ ^[42]. 所以可以通过 $\langle r \rangle$ 的变化来研究系统从热化相到多体局域相的转变. 图 4(a) 展示了 $\langle r \rangle$ 随 h 的变化, 可以看到随着 h 的增大, $\langle r \rangle$ 从 0.529 变到 0.387, 对应于系统从热化相变到多体局域相.

把一个系统分成子系统 A 与其他部分 B, 对于一个多体本征态 $|n\rangle$, 可以得到其对应的密度矩阵 $\rho^{(n)} = |n\rangle\langle n|$ 和子系统 A 的约化密度矩阵 $\rho_A^{(n)} = \text{Tr}_B |n\rangle\langle n|$. 可以定义一个本征态的纠缠熵 $S = -\sum_i \lambda_i \ln \lambda_i$, 其中 λ_i 是对应的约化密度矩阵 ρ_A 的第 i 个本征值. 在图 4(b) 中, 展示了能谱中间 $1/3$ 能级对应的本征态的平均纠缠熵 $\langle S \rangle$ 和 $d\langle S \rangle/dh$ 随 h 的变化^[43]. 热化相的纠缠熵服从“体积律”, 而多体局域系统的纠缠熵服从“面积律”, 这可以简单地理解为只有 B 与子系统 A 接触的部分才会对 A 产生影响. 由于这里考虑的是一维系统, 所以, 热化相对应的纠缠熵应与尺寸 L 成正比, 而多体局域相对应的纠缠熵应该是与尺寸 L 无关的常数. 从图 4(b) 中可以看出, 随着准周期势强度 h 的增大, 纠缠熵的确从与 L 成正比的分布变到一个与 L 无关的数, 这意味着系统从热化相变到了多体局域相. 从图 4(b) 的插图中可以看到, 这个平均的纠缠熵的导数在转变点处有个尖峰, 所以这个系统的热化相到多体局域相的转变点大约在 $h_c = 2.4\text{--}2.5$ 处.

4.2 一维准周期系统中多体局域的实验实现

实验上第一次观测到多体局域现象的是 Schreiber 等^[23]. 他们制备的系统是在 AA 模型上加上在位的相互作用, 即

$$H = \sum_{j,\sigma} [-J(\hat{c}_{j,\sigma}^\dagger \hat{c}_{j+1,\sigma} + \hat{c}_{j+1,\sigma}^\dagger \hat{c}_{j,\sigma}) + \Delta \cos(2\pi\alpha j + \delta) \hat{c}_{j,\sigma}^\dagger \hat{c}_{j,\sigma}] + U \hat{n}_{j,\uparrow} \hat{n}_{j,\downarrow}, \quad (25)$$

其中 Δ 是准周期势强度, α 是无理数, δ 是一个任意的相移, U 表示在位格点费米子间相互作用强度, $\sigma \in \{\uparrow, \downarrow\}$. 仍然设跃迁振幅 J 作为能量单位, 即 $J = 1$. 他们首先制备了一个 CDW 的初态, 仍然是在一段时间演化后测量前面提到的能反映奇偶格点的密度分布差异的量 $I = (N_e - N_o)/(N_e + N_o)$, 不过这里有相互作用的系统. 在相互作用 U 为

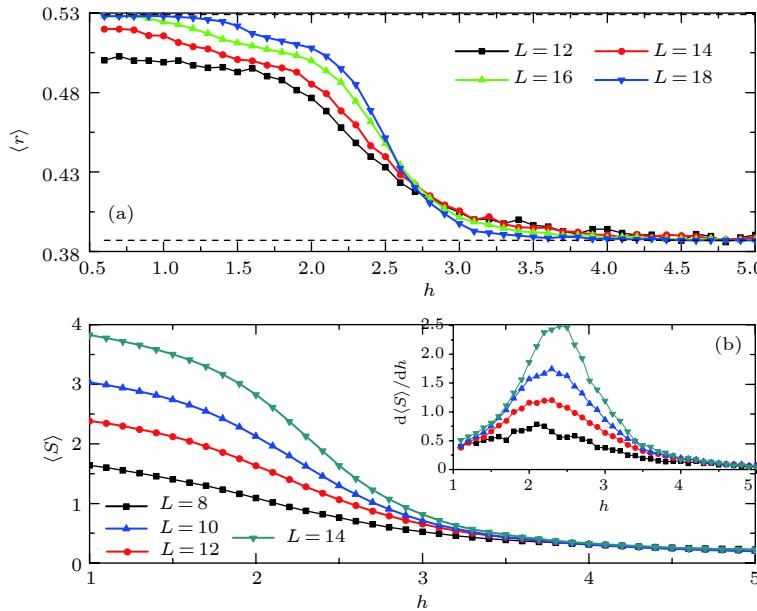


图 4 (a) $\langle r \rangle$ 随 h 的变化. 当系统尺寸为 $L = 12$ 和 $L = 14$ 时用的样品数是 50, 当 $L = 16$ 时用的样品数是 30, 当 $L = 18$ 时用的样品数是 20; (b) 平均的纠缠熵 $\langle S \rangle$ 和 $d\langle S \rangle/dh$ 随 h 的变化. 当 $L = 8$ 和 $L = 10$ 时用 500 个样品, 当 $L = 12$ 时用 100 个样品, 当 $L = 14$ 时用 30 个样品. 相互作用强度始终被固定为 $U = 0.4$. 这里一个样品指的是任选一个初相位 θ [21]

Fig. 4. (a) $\langle r \rangle$ as a function of h . Here we use 50 samples for $L = 12$ and $L = 14$, 30 samples for $L = 16$, and 20 samples for $L = 18$; (b) averaged entanglement entropy $\langle S \rangle$ and $d\langle S \rangle/dh$ versus h . Here we use 500 samples for $L = 8$ and $L = 10$, 100 samples for $L = 12$ and 30 samples for $L = 14$. The interaction strength is fixed at $U = 0.4$. Here a sample is specified by choosing an initial phase θ [21].

0 时, 这个系统的哈密顿量就是 AA 模型的哈密顿量, 所以扩展局域的转变点应该在 $\Delta/J = 2$, 将其对应的 I 作为热化相到多体局域相的转变点的参考值, 从而可以得到相互作用为 U 时, 发生热化到多体局域转变对应的准周期势强度 Δ_c . 从实验结果可以看出, 当相互作用 $|U|$ 比较小, 转变点会稍微变大, 这与前面研究的相互作用是近邻时的情况是一致的. 但是当相互作用 $|U|$ 很大时, 转变点反而变小. 为了理解这种情况, 假设初态为每个格点要么是空的, 要么是双占据, 由于能量守恒的原因, $|U|$ 很大时, 双占据的粒子不会分离, 所以, 有效的跃迁是个二阶过程, 有效的跃迁强度为 $J_{\text{eff}} = \frac{2J^2}{|U|} \ll J$, 那么粒子感受到的准周期势的强度 $\Delta/J_{\text{eff}} \gg \Delta/J$, 这会有利于形成局域态.

另外, 热化相和多体局域相的纠缠熵随时间的变化也明显不同 [44,45]. 多体局域相对应的纠缠熵随时间变化是对数增加的, 这是既不同于热化相, 也不同于安德森局域态的性质. 所以也可以在实验中测量纠缠熵随时间的变化观测系统从热化到多体局域的转变 [23].

进一步, Bordia 等 [46] 也成功在二维系统中观

测到多体局域现象. 最近, Kohlert 等 [47] 还在已经实现的有迁移率边的系统里引入相互作用, 并观测到多体局域. 这些实验都是在准周期的系统中完成的, 并极大地促进了多体局域方面的理论研究.

5 一维准周期系统中的动力学

正如前面提到的, 扩展态和局域态在动力学上会表现出明显不同的性质. 下面基于 AA 模型讨论常见的三种动力学方面的研究: 系统参数不变的动力学演化, 周期驱动和参数突变的动力学演化.

5.1 AA 模型的动力学演化

考虑 (2) 式所示的 AA 模型的动力学演化. 假设在时间 $t = 0$ 时, 把一个粒子放在 $L/2$ 格点, 那么在 t 时刻的波函数可写为 $|\psi(t)\rangle = \sum \psi_n(t) c_n^\dagger |0\rangle$, 这里 $|0\rangle$ 指的是真空态, 显然有 $\psi_n(t=0) = \delta_{n,L/2}$. 为了描述这个初始波包的时间演化, 定义 t 时刻波函数的位移均方 [48,49]: $\langle (\delta x)^2 \rangle = \sum_n (n - L/2)^2 |\psi_n(t)|^2$. 取开边界条件, 并固定 $L = 3000$ 和 $J = 1$, 在图 5 中展示了取不同的准周期势强度 Δ 时 $\sqrt{\langle (\delta x)^2 \rangle}$ 随时间 t 的变化.

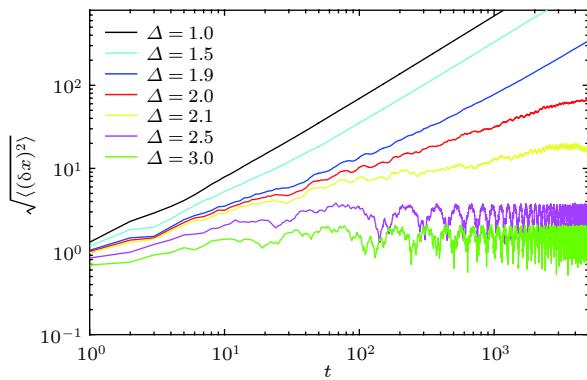


图 5 AA 模型中取不同的 Δ 时 $\sqrt{\langle (\delta x)^2 \rangle}$ 随时间 t 的变化的对数-对数图, 这里固定 $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 跃迁强度 $J = 1$, 以及系统尺寸 $L = 3000$

Fig. 5. Log-log plot of the width $\sqrt{\langle (\delta x)^2 \rangle}$ vs time t for several values of Δ in the AA model with $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $J = 1$ and $L = 3000$.

通常, $\sqrt{\langle (\delta x)^2 \rangle}$ 与时间 t 的关系满足幂律关系, 即 $\sqrt{\langle (\delta x)^2 \rangle} \sim t^\beta$, 所以在图 5 中, 横纵坐标均取了对数。从图中可以看出, 当 $\Delta < 2$ 时, 粒子的运动属于弹道 (ballistic) 输运, 即 $\beta = 1$, 并且与准周期势强度 Δ 的大小无关。当 $\Delta = 2$ 时, 粒子的运动属于扩散 (diffusive) 输运, 即 $\beta = 1/2$ ^[50–52]。当 $\Delta > 2$ 时, $\sqrt{\langle (\delta x)^2 \rangle}$ 在很长的一段时间后会在一个值附近波动, 即 $\beta = 0$, 这个值对应着这个系统的局域长度。在 AA 模型里, 局域长度 l_c 和准周期势强度 Δ 以及跃迁强度 J 的关系为 $l_c = 1/\ln\left(\frac{\Delta}{J}\right)$ ^[10]。可以看出, 局域、扩展和临界相的动力学演化或者输运性质有明显的差异。

另一个常用来描述 AA 模型不同相的动力学演化差异的是初态的残存率 (return probability)^[53,54], 即若假设初态是粒子在某一个格点上, 在一段时间演化之后, 研究这个粒子还待在这个格点的概率。因为在后面的 AA 模型的动力学相变中会详细介绍这个量, 所以这里不再赘述。

5.2 周期驱动的准周期晶格

考虑下面的准周期势是周期驱动的模型^[55]:

$$H = \sum_i \left[\left(-J \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_{i+1} + \text{H.c.} \right) + \sum_n \delta(t - nT) V_i \hat{n}_i \right], \quad (26)$$

其中 $\hat{n}_i = \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_i$ 是粒子数算符, \hat{c}_i^\dagger (\hat{c}_i) 是产生 (湮灭) 算符, J 是近邻的跃迁强度。其中 $V_i = \lambda \cos(2\pi i \alpha)$, 这里 α 是无理数, λ 是准周期势强度。对比 AA 模

型可以看出, 这里的准周期势是每隔周期 T 加上的, 这在实验上也是容易实现的^[55]。

引入弗洛凯 (Floquet) 算符 $U(T)$ 描述这个系统的演化^[56,57], 易得

$$U(T) = \exp(-iH_0 T) \exp\left(-i \sum_j^L V_j \hat{c}_j^\dagger \hat{c}_j\right),$$

其中 $H_0 = -\sum_j (\hat{c}_j^\dagger \hat{c}_{j+1} + \text{H.c.})$, L 是系统尺寸。为了方便, 设 $\hbar = 1$, 以及 $J = 1$ 作为能量单位。假如 $|\psi_\eta\rangle$ 是弗洛凯算符的本征态, 对应的弗洛凯本征值是 E_η , 即 $U(T)|\psi_\eta\rangle = e^{-iE_\eta T}|\psi_\eta\rangle$ 。引入 $|i\rangle = c_i^\dagger |0\rangle$ 表示一个粒子局域在第 i 个格点, 那么以 $|i\rangle$ 为基矢, 本征态可写为 $|\psi_\eta\rangle = \sum_{i=1}^L C_i(E_\eta)|i\rangle$ 。下面引入信息熵^[58–60]

$$S_\eta^{\text{inf}} \equiv - \sum_{i=1}^L |C_i(E_\eta)|^2 \ln |C_i(E_\eta)|^2.$$

容易验证它的最小值是 $S_\eta^{\text{inf}} = 0$, 对应着一个态完全局域在一个格点, 而它的最大值是 $S_\eta^{\text{inf}} = \ln(L)$, 对应着这个态完全扩展, 即 $|C_i(E_\eta)| = 1/\sqrt{L}$ 。

由于 AA 模型中不存在迁移率边, 所以可以定义一个平均的信息熵 $\overline{S^{\text{inf}}} \equiv L^{-1} \sum_{\eta=1}^L S_\eta^{\text{inf}}$ 。**图 6** 展

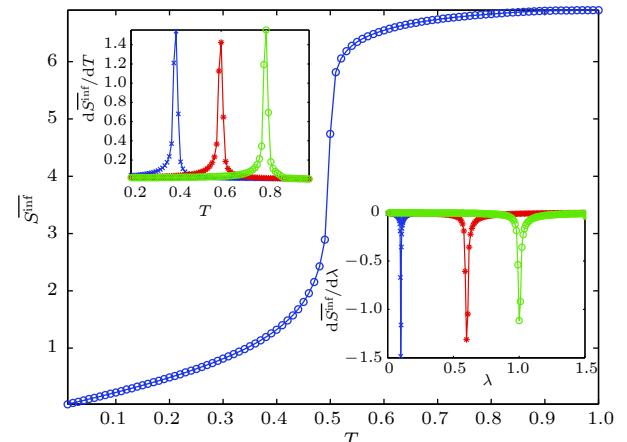


图 6 固定 $\lambda = 1$ 和 $L = 1500$, 平均信息熵随周期 T 的变化。左上角的插图展示了平均纠缠熵的导数随周期 T 的变化, 这里固定 $\lambda = 0.8$ (蓝色), $\lambda = 1.2$ (红色), 和 $\lambda = 1.6$ (绿色)。右下角的插图展示了平均纠缠熵随 λ 的变化, 这里分别固定 $T = 0.05$ (蓝色), $T = 0.3$ (红色), $T = 0.5$ (绿色)^[55]

Fig. 6. The mean information entropy as a function of T for this system with $\lambda = 1$ and $L = 1500$. The left up inset shows the derivative of the mean information entropy as a function of T with fixed $\lambda = 0.8$ (blue), $\lambda = 1.2$ (red), and $\lambda = 1.6$ (green). The right down inset shows the derivative of the mean information entropy as a function of λ with $T = 0.05$ (blue), $T = 0.3$ (red), and $T = 0.5$ (green)^[55].

示了这个平均的信息熵随驱动周期 T 的变化, 这里固定了准周期势的强度 $\lambda = 1$. 可以看出, 随着周期 T 的增大, 这个平均的信息熵从近似于零的小值变为一个非零的有限值, 这意味着这个系统的波函数从局域态变为扩展态. 在图 6 的插图中, 展示了不同强度的准周期势时, 平均信息熵的导数随周期 T 的变化. 当 $\lambda = 0.8$, $\lambda = 1.2$ 和 $\lambda = 1.6$ 时, 这个导数的尖峰分别出现在 $T = 0.4$, $T = 0.6$ 和 $T = 0.8$ 处. 图 6 下方的插图展示了不同周期时, 平均信息熵的导数随 λ 的变化, 可以看出当 $T = 0.05$, $T = 0.3$ 和 $T = 0.5$ 时, 平均信息熵导数的尖峰分别出现在 $\lambda = 0.1$, $\lambda = 0.6$ 和 $\lambda = 1.0$ 的地方. 可以看出, 平均信息熵导数的尖峰位置满足 $\lambda/T = 2$, 这对应于这个系统从动力学局域到扩展的转变点.

下面从这个系统的有效哈密顿量中来分析这个转变点,

$$\begin{aligned} U(T) &= \exp(-iH_0T) \exp(-i\lambda\hat{V}) \\ &= \exp(-iH_{\text{eff}}T), \end{aligned} \quad (27)$$

其中 $\hat{V} = \sum_j^L \cos(2\pi i\alpha) \hat{c}_j^\dagger \hat{c}_j$. 利用公式 [61]

$$\begin{aligned} e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} &= \exp\left(\hat{A} + \hat{B} + \frac{1}{2} [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{12} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]\right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{12} [[\hat{A}, \hat{B}], \hat{B}] + \dots\right), \end{aligned} \quad (28)$$

可以得到有效哈密顿量为

$$\begin{aligned} H_{\text{eff}} &= H_0 + \frac{\lambda}{T} \hat{V} - i\frac{\lambda}{2} [H_0, \hat{V}] - \frac{T\lambda}{12} [H_0, [H_0, \hat{V}]] \\ &\quad - \frac{\lambda^2}{12} [[H_0, \hat{V}], \hat{V}] + \dots. \end{aligned} \quad (29)$$

可以看出, 当 $1/T \gg 1$ 和 $\lambda \ll 1$ 时, 这个有效哈密顿量可写为 $H_{\text{eff}} = H_0 + \frac{\lambda}{T} \hat{V}$, 设 $\lambda_{AA} = \lambda/T$, 这就是 AA 模型, 所以在高频的情况下, $\lambda/T = 2$ 是系统局域到扩展的转变点. 但是, 在低频情况下, 即 $1/T$ 小于 1 的时候, 就需要考虑高阶项. 为了说明这一点, 图 7 展示了平均信息熵随准周期势强度和驱动周期的变化. 可以看出, 在高频的情况下, 在 $\lambda/T = 2$ 处, 平均信息熵有明显的突变, 但是当 $1/T < 1$ 时, 平均信息熵的变化就比较复杂, 转变点不再是 $\lambda/T = 2$.

5.3 准周期晶格中扩展-局域转变的动力学相变

动力学相变最近被广泛研究 [62–65], 它扩展了

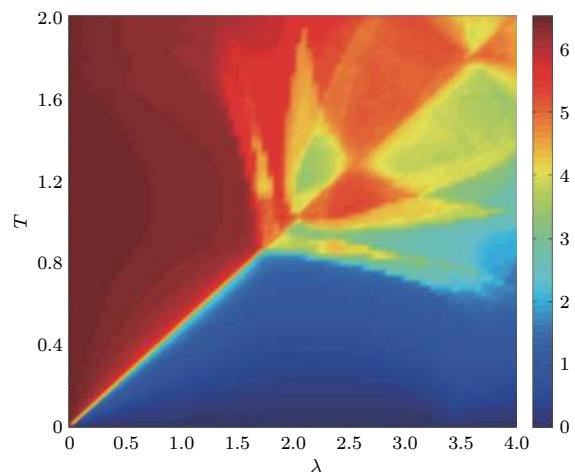


图 7 固定系统尺寸 $L = 900$, 平均信息熵随 λ 和 T 的变化^[55]

Fig. 7. The mean information entropy versus both λ and T for the system with $L = 900$ ^[55].

我们对相变的理解. 第一次在局域扩展的转变中引入动力学相变的概念是在 AA 模型中^[66], 即哈密顿量如 (2) 式所示, 下面设 $J = 1$ 作为能量单位. 制备一个初态, 使之是哈密顿量 $H(\Delta_i)$ 的一个本征态, 然后突然改变系统的参数, 用哈密顿量 $H(\Delta_f)$ 描述, 研究在一段时间演化后, 初态的残存率^[67–71]

$$L(t, \Delta_i, \Delta_f) = |\langle \Phi_0(\Delta_i) | e^{-itH(\Delta_f)} | \Phi_0(\Delta_i) \rangle|^2, \quad (30)$$

也被称为 Loschmidt echo. 这里 $|\Phi_0(\Delta_i)\rangle$ 表示初始哈密顿量的本征态, Δ_i 和 Δ_f 分别是参数突然变化前和变化后的准周期势的强度. Loschmidt echo 在动力学相变中扮演着重要的角色, 它可以类比于统计力学中的配分函数, 它的对数可类比自由能^[62]. 热力学极限下, 在一些时间点 t , Loschmidt echo 能够变为零被认为是动力学相变发生的标志, 因为 Loschmidt echo 等于 0 意味着其对数 (即类比于自由能) 在这些时间点是发散的, 其对数的一阶导数在这些时间点是不连续的.

在图 8(a) 和图 8(b) 中, 选择初始的准周期势强度为 $\Delta_i = 0.5$, 在图 8(c) 和图 8(d) 中, 选择初始的准周期势强度为 $\Delta_i = 4$. 初态为相应系统的基态, 这些图展示了不同的 Δ_f 时, Loschmidt echo 的演化情况. 可以看出, 当 Δ_i 和 Δ_f 在相同的相区间, 即都在局域区 ($\Delta > 2$) 或者都在扩展区 ($\Delta < 2$) 时, $L(t)$ 随时间振荡并且不会变为零, 如图 8(a) 和图 8(c) 所示. 但是, 如果 Δ_i 和 Δ_f 对应不同的相区间, $L(t)$ 会在一些时间变为零, 如图 8(b) 和图 8(d) 所示.

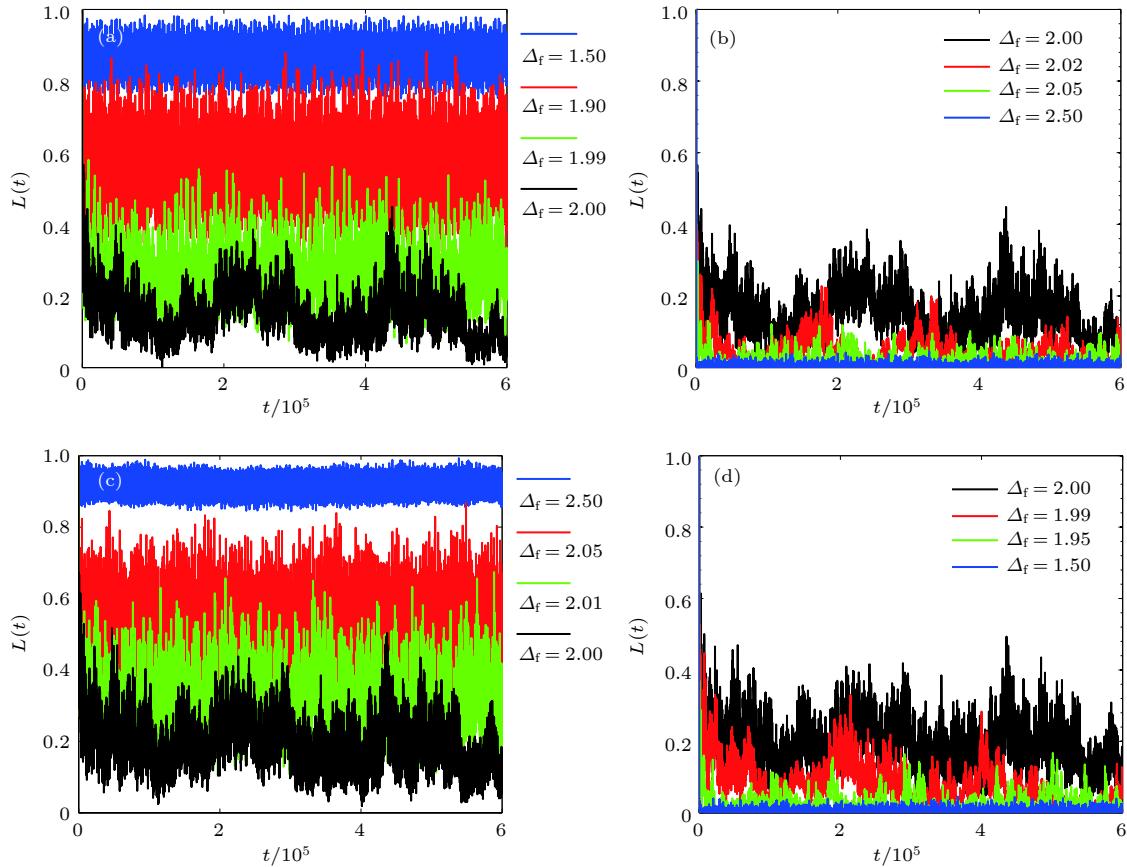


图 8 Δ_f 取不同值时 Loschmidt echo 的演化. 初态选准周期势强度为 $\Delta_i=0.5$ ((a), (b)) 和 $\Delta_i=4$ ((c), (d)) 的哈密顿量的基态^[66]
Fig. 8. Evolution of Loschmidt echo in a long time with different Δ_f s. The initial state is chosen to be the ground state of the Hamiltonian with $\Delta_i=0.5$ ((a), (b)) and $\Delta_i=4$ ((c), (d))^[66].

下面对 Loschmidt echo 怎么趋于零进行定量描述, 引入一个接近于零的小量 ε 对 $L(t)$ 做截断. 给定一个大的时间间隔 T , 在 $t \in [0, T]$ 中, 测量满足 $L(t) \leq \varepsilon$ 的时间间隔长度, 定义为 $M(\varepsilon)$. 相当于引入了一个勒贝格测度 (Lebesgue measure) $I(L \leq \varepsilon)$ ^[66]. 为了方便, 研究 $m(\varepsilon) = \frac{M(\varepsilon)}{T}$. 固定 $\Delta_i = 0.5$, 在图 9(a) 中, 展示了 ε 取不值同时 ($\varepsilon = 5 \times 10^{-4}, 3 \times 10^{-4}, 2 \times 10^{-4}$ 和 1×10^{-4}), $m(\varepsilon)$ 随 Δ_f 的变化. 这里的初态仍然是选系统的基态. 可以看出, $m(\varepsilon)$ 在 $\Delta_f < 2$ 和 $\Delta_f > 2$ 时的表现确实不同. 当 $\Delta_f < 2$ 时, $m(\varepsilon)$ 总是零, 但是过了转变点 $\Delta_c = 2$ 后, 它随着 Δ_f 的变大突然增大到一个有限的非零值. 尽管这个非零值会依赖于截断的 ε 的大小, 但是这种在转变点突变的性质不会随着截断的不同而改变.

尽管上面考虑的初态是 $H(\Delta_i)$ 的基态, 但是对于其他本征态也有类似的现象. 为了说明这一点, 把初态选为初始哈密顿量不同的本征态, 并在图 9(b) 中展示 $m(\varepsilon)$ 随 Δ_f 的变化. 可以看到, 在

$\Delta_f = 2$ 处, 对于所有的本征态, $m(\varepsilon)$ 都有从零到有限非零值的明显的转变. 所以, 对于 AA 模型, 它的动力学相变点和它的局域-扩展的转变点是一致的.

6 准周期势对系统拓扑性质的影响

最近几十年, 拓扑态 (拓扑绝缘体、拓扑超导体和拓扑半金属) 的发展是凝聚态发展的一个重要的方向^[72–75]. 对拓扑相变的描述超出了朗道对称性破缺的理论, 加深了我们对凝聚态的认识. 如果系统是周期的, 可以通过调节跃迁强度的相对大小来诱导拓扑和非拓扑之间的转变^[76,77]. 在开边界条件下, 这个转变会对应于边缘态的出现或消失; 在周期边界条件下, 这个转变可以计算拓扑不变量来描述, 这个不变量在实验上可以通过索利斯泵浦 (Thouless Pumping) 来测量^[78–81]. 如果系统中存在无序或者准周期势, 那么一个自然且有趣的问题是它们会对系统的拓扑性质产生什么影响. 下面研究在一维 p 波超导链^[82] 和外尔半金属^[83–85] 中增

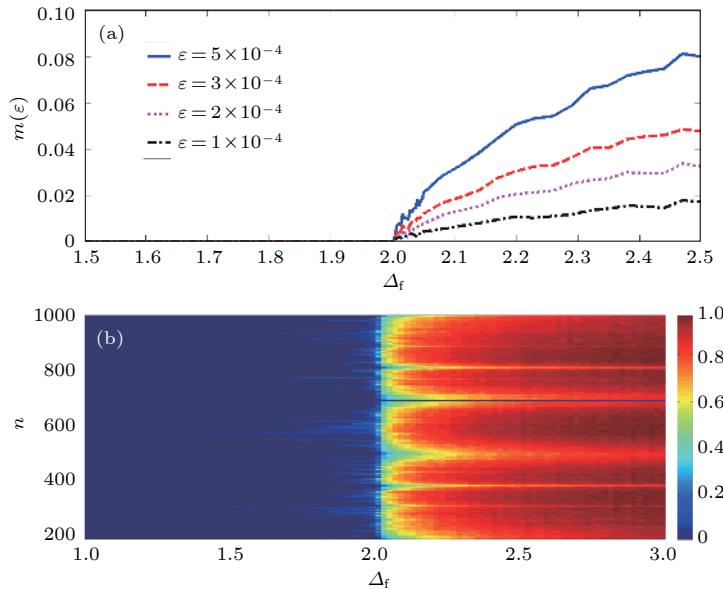


图 9 固定系统参数 $L = 1000$, $T = 6 \times 10^5$ 和 $\Delta_i = 0.5$ 时 $m(\varepsilon)$ 随 Δ_f 的变化: (a) 不同的颜色对应不同的 ε 值, 这里的初态是初始哈密顿量的基态; (b) 选取不同的初态, n 表示初始哈密顿量的第 n 个本征态. 在 $\Delta_f = 2$ 处, 可以清晰地看到一个相边界. 这里固定 $\varepsilon = 0.01$ ^[66]

Fig. 9. The behavior of m versus Δ_f for the system with $L = 1000$, $T = 6 \times 10^5$ and $\Delta_i = 0.5$: (a) Different colors correspond to different ε s and the initial state is chosen to be the ground state of the initial Hamiltonian; (b) different choice of initial state with n standing for the n th eigenstates of the initial Hamiltonian $H(\Delta_i)$. A clear boundary can be seen at $\Delta_f = 2$. Here we choose $\varepsilon = 0.01$ ^[66].

加准周期势对系统产生的影响.

6.1 准周期势对一维 p 波超导链的影响

在一维 p 波超导链上加上准周期势^[16,18,19], 讨论其影响. 系统的哈密顿量为

$$H = \sum_i \left[(-J\hat{c}_i^\dagger \hat{c}_{i+1} + \Delta \hat{c}_i \hat{c}_{i+1} + \text{H.c.}) + V \cos(2\pi i \alpha) \hat{n}_i \right], \quad (31)$$

其中 $\hat{n}_i = \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_i$ 是粒子数算符, \hat{c}_i^\dagger (\hat{c}_i) 是费米子的产生 (湮灭) 算符. J 是近邻跃迁强度, Δ 是 p 波配对强度. α 是无理数, 不失一般性, 仍然取 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. V 是准周期势强度. 可以看出, 当 $\Delta = 0$ 时, 这个模型就是 AA 模型. 当 $\alpha = 0$ 时, 这个哈密顿量描述的是一维 Kitaev 模型^[82], 这个模型在 $|V| = 2J$ 处会发生拓扑相变, 当 $|V| < 2J$ 时, 这个系统是拓扑的, 有马约拉纳 (Majorana) 零能模^[86–88], 当 $|V| > 2J$ 时, 这个系统是拓扑平庸 (topologically trivial) 的. 下面设 $J = 1$ 作为能量单位, 研究在准周期势和 p 波超导项共同作用下, 这个系统发生的相变.

这个哈密顿量可以用波戈留波夫-德热纳变换 (Bogoliubov-de Gennes (BDG) transformation)^[16,89] 来对角化:

$$\eta_n^\dagger = \sum_{i=1}^L \left[u_{n,i} \hat{c}_i^\dagger + v_{n,i} \hat{c}_i \right], \quad (32)$$

其中 L 是晶格尺寸, $n = 1, \dots, L$. 利用 η_n 和 η_n^\dagger , 哈密顿量可被对角化为 $H = \sum_{n=1}^L \Lambda_n \left(\eta_n^\dagger \eta_n - \frac{1}{2} \right)$, 这里 Λ_n 是单个的准粒子谱. 通过解下面的 BDG 方程, 可以得到 Λ_n , 以及对应的 $u_{n,i}$, $v_{n,i}$:

$$\begin{pmatrix} \hat{h} & \hat{\Delta} \\ -\hat{\Delta} & -\hat{h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \Lambda_n \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}, \quad (33)$$

其中 $\hat{h}_{ij} = -J(\delta_{j,i+1} + \delta_{j,i-1}) + V_i \delta_{ji}$, $\hat{\Delta}_{ij} = -\Delta(\delta_{j,i+1} - \delta_{j,i-1})$, $u_n^T = (u_{n,1}, \dots, u_{n,L})$ 和 $v_n^T = (v_{n,1}, \dots, v_{n,L})$.

既然这个系统存在准周期势, 那么随着准周期势强度的增加, 它应该会发生扩展到局域的转变. 定义这个系统的倒参与率^[25–27]: $\text{IPR}_n = \sum_{i=1}^L (u_{n,i}^4 + v_{n,i}^4)$, $u_{n,j}$ 和 $v_{n,j}$ 满足归一化条件 $\sum_i (u_{n,i}^2 + v_{n,i}^2) = 1$. 由于这个系统的基态是所有的负准粒子能级全填满, 所以可以定义一个平均 IPR, 即 $\text{MIPR} = \sum_{n=1}^L P_n / L$, 来刻画这个系统基态的局域-扩展性质. 图 10(a) 展示了 $\Delta = 0.5$ 和 0.8 时 MIPR 随 V 的变化. 可以看出在满足 $V = 2|\Delta - J|$ 和 $V = 2(\Delta +$

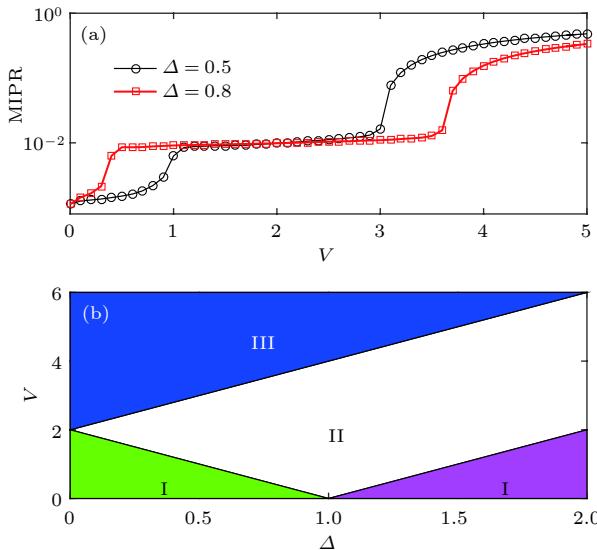


图 10 (a) 固定两个 p 波配对强度 $\Delta = 0.5$ 和 $\Delta = 0.8$ 时, MIPR 随准周期势强度 V 的变化, 这里用的系统尺寸是 $L = 1000$; (b) 系统随 p 波配对强度 Δ 和准周期势强度 V 变化的相图, I: 扩展相, II: 临界相, III: 局域相. 这里固定 $J = 1$.

Fig. 10. (a) MIPR as a function of the incommensurate potential strength V at two p-wave pairing strength $\Delta = 0.5$ and $\Delta = 0.8$. Here use $L = 1000$; (b) phase diagram of this system with a p-wave pairing strength Δ and incommensurate potential strength V . I: extended phase, II: critical phase and III: localized phase. Here fix $J = 1$.

J) 处, MIPR 有突然的变化. 进一步分析发现 $V < 2|\Delta - J|$ 时, 系统是扩展的, $2|\Delta - J| < V < 2(\Delta + J)$ 时, 系统是临界的, $V > 2(\Delta + J)$ 时, 系统是局域的. 这个系统的相图如图 10(b) 所示, 图中 I 对应扩展相, II 对应临界相, 它的波函数会表现出多分形的性质, III 对应局域相. 这三个相会在能谱统计和多分形分析上表现出明显的差异, Wang 等 [19] 也对这个系统做过尺寸分析, 给出这个系统临界相的一些临界参数和这些临界参数满足的标度律.

随着准周期势强度 V 和 p 波配对强度 Δ 的变化, 这个系统的拓扑性质也应该发生变化. 为了直观地看出拓扑相变, 取开边界条件, 分析这个系统零能模的变化. 图 11(a) 展示了在开边界条件下这个 BDG 方程的准粒子谱, 这里固定 $\Delta = 0.5$. 在图 11(a) 的插图中, 展示了 Λ_1 随 V 的变化, 可以看出 Λ_1 在 $V = 3$ (满足 $V = 2(\Delta + J)$) 处突然由零变为非零. 这里零能模的存在往往对应于马约拉纳边界态的存在. 为了清楚看到这一点, 引入马约拉纳算符 $\gamma_i^A = \hat{c}_i^\dagger + \hat{c}_i$ 和 $\gamma_i^B = (\hat{c}_i - \hat{c}_i^\dagger)/i$, 它们满足

$(\gamma_i^\alpha)^\dagger = \gamma_i^\alpha$ 和反对易关系 $\{\gamma_i^\alpha, \gamma_j^\beta\} = 2\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = A, B$), 那么准粒子算符可用马约拉纳算符重新写为

$$\eta_n^\dagger = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^L [\phi_{n,i} \gamma_i^A - i \Psi_{n,i} \gamma_i^B], \quad (34)$$

容易得到 $\phi_{n,i} = (u_{n,i} + v_{n,i})$ 和 $\psi_{n,i} = (u_{n,i} - v_{n,i})$. 图 11(b) 和图 11(c) 展示了最低激发 Λ_1 对应的 ϕ_i 和 ψ_i . $V < 2(\Delta + J)$ 时, ϕ_i 和 ψ_i 的分布是局域在链的两端, 对应于存在两个孤立的马约拉纳费米子局域在链的两端, 这时系统是拓扑超导的. 当 $V > 2(\Delta + J)$ 时, 例如图中所示的 $V = 3.5$, 最低激发模对应的 ϕ_i 和 ψ_i 的分布不在链的两端, 而是局域在体态内, 这意味着这个态是安德森局域态. 还可进一步计算这个系统的拓扑数 (马约拉纳数) 来标定这个系统的拓扑转变 [16]. 总的来说, 上面得到的扩展相和临界相是拓扑的, 得到的局域相是拓扑平庸的. 在 $V = 2(\Delta + J)$ 处, 存在拓扑超导到安德森局域的相变.

6.2 准周期势对外尔半金属的影响

考虑下面的可在冷原子中实现的外尔半金属模型的哈密顿量 [90]:

$$H_0 = - \sum_{m,n,l} (t_x e^{-i\phi_{m,n,l}} a_{m+1,n,l}^\dagger a_{m,n,l} + t_y a_{m,n+1,l}^\dagger a_{m,n,l} + t_z e^{-i\phi_{m,n,l}} a_{m,n,l+1}^\dagger a_{m,n,l} + H.c.), \quad (35)$$

这里 $a_{m,n,l}(a_{m,n,l}^\dagger)$ 是在点 (m, n, l) 上的湮灭 (产生) 算符, t_x , t_y 和 t_z 分别是 x , y 和 z 方向的跃迁强度, $\phi_{m,n,l} = (m+n)\pi$ (取除以 2π 的余数). 这个哈密顿量在动量空间中可写为

$$H_0 = \sum_{k_x, k_y, k_z} \Gamma^\dagger h_0(k_x, k_y, k_z) \Gamma,$$

这里 $\Gamma^\dagger = (a_{k_x, k_y, k_z}^{A\dagger}, a_{k_x, k_y, k_z}^{B\dagger})$, 以及

$$h_0(k_x, k_y, k_z) = -2[t_y \cos(k_y a) \sigma_x + t_x \sin(k_x a) \sigma_y - t_z \cos(k_z a) \sigma_z], \quad (36)$$

其中 $\sigma_{x,y,z}$ 是泡利矩阵. 容易得到这个系统的能谱为 $E = \pm 2\sqrt{t_x^2 \sin^2(k_x) + t_y^2 \cos^2(k_y) + t_z^2 \cos^2(k_z)}$, (37) 这两个带的四个接触点是外尔点 $(k_x, k_y, k_z) = (0, \pm\pi/2, \pm\pi/2)$ [90].

考虑系统体积为 $L_x \times L_y \times L_z$, 为了方便, 取 $L_x = L_y = L_z = Na$, 并设晶格常数 $a = 1$ 和 $t_x =$

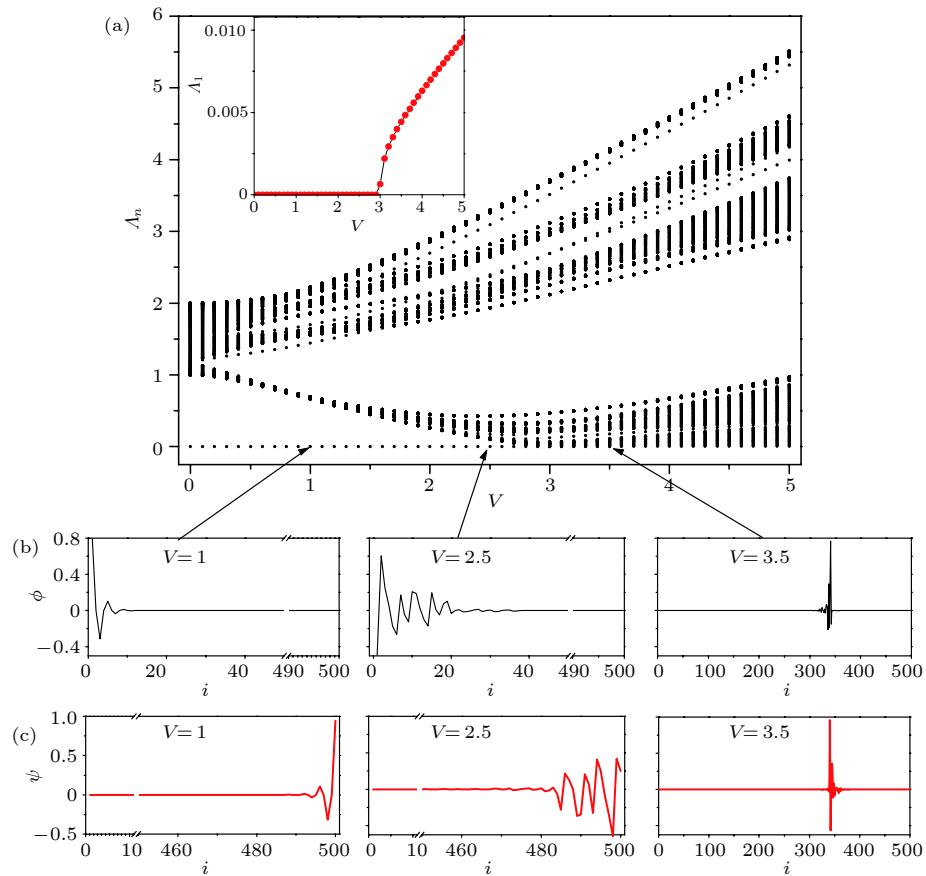


图 11 (a) 在开边界条件下, 固定 $\Delta = 0.5$ 和 $L = 500$ 时系统的能谱; (b), (c) 不同的 V 值时最低激发模的 ϕ_i ((b)) 和 ψ_i ((c)) 的分布^[16]

Fig. 11. (a) Energy spectra of this system with $\Delta = 0.5$ and $L = 500$ under OBC. The distributions of ϕ_i (b) and ψ_i (c) for the lowest excitation with different V ^[16].

$t_y = t_z = 1$ 作为能量单位. 下面沿 z 方向加上准周期势, 则哈密顿量变为

$$H = H_0 + V \sum_{m,n,l} \cos(2\pi\alpha l) n_{m,n,l}, \quad (38)$$

这里 $n_{m,n,l} = a_{m,n,l}^\dagger a_{m,n,l}$, V 是准周期势的强度, α 是一个无理数, 这里仍然取为 $\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2$. 这时, k_x 和 k_y 仍然是好量子数, 且 $k_x = \frac{2\pi}{N} i_x$, $k_y = \frac{2\pi}{N} i_y$, $(i_x = -\frac{N}{4}, -\frac{N}{4} + 1, \dots, \frac{N}{4} - 1, i_y = -\frac{N}{2}, -\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2} - 1)$. 固定动量 k_x 和 k_y 时, 这个系统可等效于一个一维系统, 可以对角化哈密顿量 (38) 式. 第 n 个本征值 $E_n(k_x, k_y)$ 对应的本征态可写为

$$|\Psi_n\rangle = \sum_l (\psi_{n,l,A} a_{k_x, k_y, l}^{A\dagger} + \psi_{n,l,B} a_{k_x, k_y, l}^{B\dagger}) |0\rangle, \quad (39)$$

式中 $a_{k_x, k_y, l}^A$ ($a_{k_x, k_y, l}^B$) 是固定 k_x 和 k_y 时沿 z 方向的第 l 层的子格 A (B) 上的湮灭算符. 然后由本征方程可得:

$$\begin{aligned} E_n \psi_{n,l,A} &= t_z (\psi_{n,l-1,A} + \psi_{n,l+1,A}) \\ &+ V \cos(2\pi\alpha l) \psi_{n,l,A} \\ &+ (-2t_y \cos k_y + 2it_x \sin k_x) \psi_{n,l,B}, \\ E_n \psi_{n,l,B} &= -t_z (\psi_{n,l-1,B} + \psi_{n,l+1,B}) \\ &+ (-2t_y \cos k_y - 2it_x \sin k_x) \psi_{n,l,A} \\ &+ V \cos(2\pi\alpha l) \psi_{n,l,B}, \end{aligned} \quad (40)$$

如果引入基矢 $\Psi = (\psi_{n,1,A}, \psi_{n,1,B}, \psi_{n,2,A}, \psi_{n,2,B}, \dots, \psi_{n,N,A}, \psi_{n,N,B})$, 解方程 (40) 简化成求一个 $2N \times 2N$ 矩阵的本征值问题.

可以想象, 由于准周期势的作用, z 方向应该会存在扩展到局域的转变. 为了研究这种转变, 可以引入倒参与率:

$$\text{IPR} = \sum_j (\psi_{n,j,A}^2 + \psi_{n,j,B}^2)^2, \quad (41)$$

这里波函数 Ψ_n 已经归一化. 对于填满的下带, 同样可以定义一个平均的 IPR:

$$\text{MIPR} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_j (\psi_{n,j,A}^2 + \psi_{n,j,B}^2)^2, \quad (42)$$

这是下带所有本征态的 IPR 的平均. MIPR 可以给出下带所有填充态的扩展到局域转变的信息. 图 12(a) 和图 12(b) 分别展示了第 N 个本征态的 IPR 和 MIPR 作为 k_x 和 k_y 的函数, 这里取 $V = 1.9$. 从图中可以看出, 在 $(k_x, k_y) = (0, \pm\pi/2)$ 附近的态是扩展的, 而其他区域的态在 z 方向已经变得局域, 也就是说 $(k_x, k_y) = (0, \pm\pi/2)$ 附近的态在 z 方向更难变得局域, 即需要更大的 V 才能使外尔点附近的态变得局域. 图 12(c) 和图 12(d) 分别刻画了固定 $k_y = \frac{\pi}{2}$ 时第 N 个本征态的 IPR 和 MIPR 作为 k_x 和 V 的函数. 图 12(e) 和图 12(f) 展示了固定 $k_x = 0$ 时第 N 个本征态的 IPR 和 MIPR 作为 k_y 和 V 的函数. 从这些图中可以看出在, $V > 0.4$ 时开始有本征态在 z 方向变得局域, 而动量在 $(k_x, k_y) = (0, \pm\pi/2)$ 附近的本征态在 $V > 2$ 时才由扩展变为局域. 从 (40) 式出发, 可以直观地理解这一现象. A 和 B 子格之间的有效跃迁强度大小依赖于 k_x 和 k_y . A 和 B 子格间的跃迁是在 xy 平面内, 其跃迁强度越大, 粒子在 z 方向的运动就会更容易变得局域, 反之, xy 平面内的跃迁强度越小, 则 z 方向的

运动变得局域所需要的 V 就越大. 当 $k_x = 0$ 和 $k_y = \pm\frac{\pi}{2}$ 时, 从 (40) 式中可以看出, 两个子格间的有效跃迁强度是零, 这时粒子在 z 方向的运动发生扩展到局域的转变所需要的 V 最大, 而且可以看出这时这个模型可以简化为 AA 模型, 所以 $V > 2$ 时所有 z 方向的本征态变成局域, 这和我们的数值结果是一致的.

为了研究系统的费米面随着准周期势增大的变化, 下面数值计算态密度 (density of states, DOS), 其定义为

$$\begin{aligned}\rho(E) &= \frac{1}{N^3} \sum_{i=1}^{N^3} \delta(E - E_i) \\ &= \frac{1}{N^3} \sum_{l=1}^{2N} \sum_{i_x=-\frac{N}{4}}^{\frac{N}{4}-1} \sum_{i_y=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \delta(E - E_{l,i_x,i_y}),\end{aligned}\quad (43)$$

其中 E_{l,i_x,i_y} 是固定 $k_x = \frac{2\pi}{N}i_x$ 和 $k_y = \frac{2\pi}{N}i_y$ 时的第 l 个本征态. 为了数值上推导 $\delta(E - E_i)$, 用高斯函数 $\frac{1}{\sqrt{\pi\sigma^2}}\exp(-\frac{x^2}{\sigma^2})$ 近似代替 $\delta(x)$ ^[92]. 外尔半金属的费米面附近的态密度满足 $\rho(E) \sim |E|^2$ ^[93], 易得

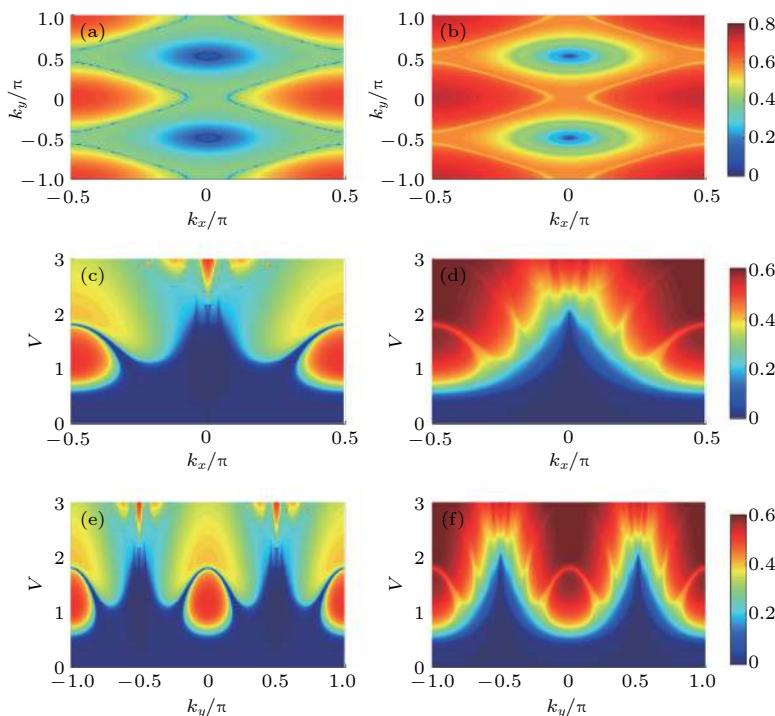


图 12 第 N 个本征态的 IPR((a)) 和 MIPR((b)) 随 k_x 和 k_y 的变化, 这里固定 $V = 1.9$; 第 N 个本征态的 IPR((c)) 和 MIPR((d)) 随 k_x 和 V 的变化, 这里固定 $k_y = \frac{\pi}{2}$; 第 N 个本征态的 IPR((e)) 和 MIPR((f)) 作为 k_y 和 V 的函数, 这里固定 $k_x = 0$. 其他参数是 $L = 300$ 和 $t_x = t_y = t_z = 1$ ^[91].

Fig. 12. IPR((a)) and MIPR((b)) as a function of k_x and k_y with fixed $V = 1.9$; IPR((c)) and MIPR((d)) as a function of k_x and V with fixed $k_y = \frac{\pi}{2}$; IPR((e)) and MIPR((f)) as a function of k_y and V with fixed $k_x = 0$. The lattice size is $L = 300$ and $t_x = t_y = t_z = 1$ ^[91].

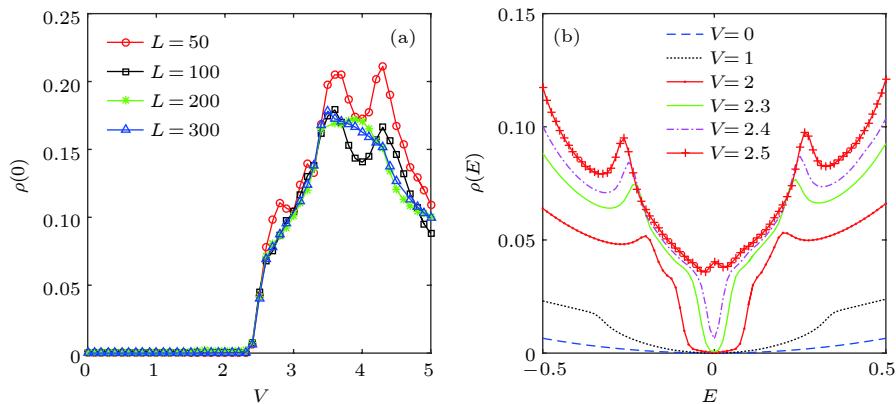


图 13 (a) 不同晶格尺寸 N 时, $\rho(0)$ 随 V 的变化, 这里固定 $\sigma = 0.02$; (b) 固定 $N = 300$, 取不同的准周期势强度 V 时系统的态密度随能量的变化^[91]

Fig. 13. (a) $\rho(0)$ versus V for different lattice size N with fixed $\sigma = 0.02$; (b) DOS with $N = 300$ as a function of energy for various values of incommensurate potential strength V ^[91].

$\rho(0) = 0$. 如果 $\rho(0)$ 变成一个有限值, 系统就进入了金属相, 所以能够用 $\rho(0)$ 来描述外尔半金属相到金属相的转变^[94,95]. 图 13(a) 显示了不同 N 时零能的态密度随准周期势强度的变化, 可以看到当 $N > 50$ 时转变点已经不依赖于系统尺寸, 所以下面选择 $N = 300$ 得到的结果是可靠的. 另外可以看出, 半金属到金属的转变点大约在 $V = 2.3$. 图 13(b) 展示了不同的准周期势强度 V 下系统的态密度作为能量的函数. 当 $V = 0$ 时, 可以看出 $\rho(E)$ 是 E 的二次函数, 即 $\rho(E) \sim |E|^2$, 在 $|E| \sim 0$ 附近, 即使加上一个较小的准周期势, 这个二次函数的关系也是近似满足的. 当 $V < 2.3$ 时, 都有 $\rho(0) = 0$, 当 $V > V_c (= 2.3)$ 时, $\rho(0)$ 成为一个非零的有限值, 这说明系统进入了金属相. 由于 $V_c > 2$, 所以系统在进入金属相之前 z 方向已经变得局域, 因此 $V > 2.3$ 时, 系统是一个准二维的金属.

最近, 人们还研究了在外尔半金属的三个方向上都加上准周期势^[96] 以及在节链 (nodal-link) 半金属的一个方向上加上准周期势^[97,98] 时系统发生的相变, 都得到了一些有趣的结果.

7 总结与展望

当一个新的物理现象被发现的时候, 一个自然而有趣的问题就是这种物理现象能否被无序 (或准周期势) 轻易地破坏, 比如前面提到的准周期势对拓扑超导体相和拓扑半金属相的影响. 所以对无序 (或准周期势) 的研究具有持久的生命力. 在一维系统或者冷原子系统中, 准周期势的优点显得尤

为突出: 一方面它本身具有很好的性质, 比如可解析得到扩展到局域的转变点等, 使得对这类模型本身的研究就很有意义, 如文中提到的动力学性质的研究; 另一方面, 这种势在冷原子实验中更容易实现, 因此正如文中提到的, 第一次实验观测到准周期势导致的局域转变, 第一次实验观测到多体局域, 第一次实验验证迁移率边的存在等等都是在冷原子中实现的准周期势的晶格中完成的. 正是因为在冷原子中实现了许多与准周期势有关的物理现象, 反过来又推动了这方面的理论研究. 相信在未来, 准周期势会被应用到更多的领域, 会带来更多有趣的物理现象. 本文主要涉及了准周期势带来的局域转变方面的工作, 实际上当体系处于扩展态时在准周期格子系统中也展示了丰富的拓扑相, 有兴趣的读者可以参考相关的文献^[77,99–101].

参考文献

- [1] Wang Y Q 2007 *Atomic Laser Cooling And Trapping* (Beijing: Peking University Press) (in Chinese) [王义遒 2007 原子的激光冷却与陷俘(北京: 北京大学出版社)]
- [2] Stwalley W C 1976 *Phys. Rev. Lett.* **37** 1628
- [3] Bloch I, Dalibard J, Zwerger W 2008 *Rev. Mod. Phys.* **80** 885
- [4] Lin Y J, Jimenez-Garcia K, Spielman I B 2011 *Nature* **471** 83
- [5] Wu Z, Zhang L, Sun W, Xu X T, Wang B Z, Ji S C, Deng Y J, Chen S, Liu X J, Pan J W 2016 *Science* **354** 83
- [6] Zhang L, Liu X J 2018 arXiv:1806.05628
- [7] Cooper N R, Dalibard J, Spielman I B 2018 arXiv:1803.00249
- [8] Jian C M, Zhai H 2011 *Phys. Rev. B* **84** 060508
- [9] Hu J, Feng L, Zhang Z, Chin C, 2018 arXiv:1807.07504
- [10] Aubry S, André G 1980 *Ann. Israel Phys. Soc* **3** 18
- [11] Das Sarma S, He S, Xie X C 1988 *Phys. Rev. Lett.* **61** 2144

- [12] Das Sarma S, He S, Xie X C 1990 *Phys. Rev. B* **41** 5544
- [13] Biddle J, Das Sarma S 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 070601
- [14] Biddle J, Priour Jr D J, Wang B, Das Sarma S 2011 *Phys. Rev. B* **83** 075105
- [15] Roati G, D'Errico C, Fallani L, Fattori M, Fort C, Zaccanti M, Modugno G, Modugno M, Inguscio M 2008 *Nature* **453** 895
- [16] Cai X, Lang L J, Chen S, Wang Y 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 176403
- [17] DeGottardi W, Sen D, Vishveshwara S 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 146404
- [18] Wang J, Liu X J, Gao X, Hu H 2016 *Phys. Rev. B* **93** 104504
- [19] Wang Y, Wang Y, Chen S 2016 *Eur. Phys. J. B* **89** 254
- [20] Iyer S, Oganesyan V, Refael G, Huse D A 2013 *Phys. Rev. B* **87** 134202
- [21] Wang Y, Hu H, Chen S 2016 *Eur. Phys. J. B* **89** 77
- [22] Setiawan F, Deng D L, Pixley J H 2017 *Phys. Rev. B* **96** 104205
- [23] Schreiber M, Hodgman S S, Bordia P, Lüschen H P, Fischer M H, Vosk R, Altman E, Schneider U, Bloch I 2015 *Science* **349** 842
- [24] Anderson P W 1958 *Phys. Rev.* **109** 1492
- [25] Thouless D J 1974 *Phys. Rep.* **13** 93
- [26] Schreiber M 1985 *J. Phys. C* **18** 2493
- [27] Hashimoto Y, Niizeki K, Okabe Y 1992 *J. Phys. A* **25** 5211
- [28] Modugno M 2009 *New J. Phys.* **11** 033023
- [29] Lang L J 2014 *Ph. D. Dissertation* (Beijing: University of Chinese Academy of Sciences) (in Chinese) [郎利君 2014 博士学位论文(北京: 中国科学院大学)]
- [30] Li X, Li X, Das Sarma S 2017 *Phys. Rev. B* **96** 085119
- [31] Lüschen H P, Scherg S, Kohlert T, Schreiber M, Bordia P, Li X, Das Sarma S, Bloch I 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 160404
- [32] Basko D, Aleiner I, Altshuler B 2006 *Ann. Phys.* **321** 1126
- [33] Nandkishore R, Huse D A 2015 *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.* **6** 15
- [34] Pal A, Huse D A 2010 *Phys. Rev. B* **82** 174411
- [35] Vosk R, Huse D A, Altman E 2015 *Phys. Rev. X* **5** 031032
- [36] Agarwal K, Gopalakrishnan S, Knap M, Müller, Demler E 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 160401
- [37] Fan R, Zhang P, Shen H, Zhai H 2017 *Sci. Bull.* **62** 707
- [38] Else D V, Bauer B, Nayak C 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 090402
- [39] Oganesyan V, Huse D A 2007 *Phys. Rev. B* **75** 155111
- [40] Vosk R, Altman E 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 067204
- [41] Bauer B, Nayak C 2013 *J. Stat. Mech.* **2013** P09005
- [42] Wang Y 2018 *Ph. D. Dissertation* (Beijing: University of Chinese Academy of Sciences) (in Chinese) [王玉成 2018 博士学位论文(北京: 中国科学院大学)]
- [43] Serbyn M, Papić, Abanin D A 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 127201
- [44] Bardarson J H, Pollmann F, Moore J E 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 017202
- [45] Serbyn M, Papić Z, Abanin D A 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 260601
- [46] Bordia P, Lüschen H P, Scherg S, Gopalakrishnan S, Knap M, Schneider U, Bloch I 2017 *Phys. Rev. X* **7** 041047
- [47] Kohlert T, Scherg S, Li X, Lüschen H P, Das Sarma S, Bloch I, Aidelsburger M 2018 arXiv:1809.04055
- [48] Hiramoto H, Abe S 1988 *J. Phys. Soc. Jpn.* **57** 230
- [49] Hiramoto H, Abe S 1988 *J. Phys. Soc. Jpn.* **57** 1365
- [50] Metzler R, Klafter J 2000 *Phys. Rep.* **339** 1
- [51] Battiato M, Carva K, Oppeneer P M 2012 *Phys. Rev. B* **86** 024404
- [52] Foster S, Thesberg M, Neophytou N 2017 *Phys. Rev. B* **96** 195425
- [53] Ketzmerick R, Petschel G, Geisel T 1992 *Phys. Rev. Lett.* **69** 695
- [54] Ketzmerick R, Kruse K, Kraut S, Geisel T 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 1959
- [55] Qin P, Yin C, Chen S 2014 *Phys. Rev. B* **90** 054303
- [56] Floquet G 1883 *Ann. ENS* **12** 47
- [57] Grifoni M, Hänggi P 1998 *Phys. Rep.* **304** 229
- [58] Blümel R, Smilansky U 1984 *Phys. Rev. Lett.* **52** 137
- [59] Izrailev F M 1988 *Phys. Lett. A* **134** 13
- [60] Amico L, Fazio R, Osterloh A, Vedral V 2008 *Rev. Mod. Phys.* **80** 517
- [61] Wilcox R M 1967 *J. Math. Phys.* **8** 962
- [62] Heyl M, Polkovnikov A, Kehrein S 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 135704
- [63] Heyl M 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 205701
- [64] Heyl M 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 140602
- [65] Heyl M 2018 *Rep. Prog. Phys.* **81** 054001
- [66] Yang C, Wang Y, Wang P, Gao X, Chen S 2017 *Phys. Rev. B* **95** 184201
- [67] Jalabert R A, Pastawski H M 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 2490
- [68] Cucchietti F M, Dalvit D A R, Paz J P, Zurek W H 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 210403
- [69] Gorin T, Prosen T, Seligman T H, Znidaric M 2006 *Phys. Rep.* **435** 33
- [70] Quan H T, Song Z, Liu X F, Zanardi P, Sun C P 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 140604
- [71] Jafari R, Johannesson H 2017 *Phys. Rev. Lett.* **118** 015701
- [72] Yang B J, Nagaosa N 2014 *Nat. Commun.* **5** 4898
- [73] Hassan M Z, Kane C L 2010 *Rev. Mod. Phys.* **82** 3045
- [74] Qi X L, Zhang S C 2011 *Rev. Mod. Phys.* **83** 1057
- [75] Fang C, Weng H, Dai X, Fang Z 2016 *Chin. Phys. B* **25** 117106
- [76] Su W P, Schrieffer J R, Heeger A J 1979 *Phys. Rev. Lett.* **42** 1698
- [77] Guo H, Chen S 2015 *Phys. Rev. B* **91** 041402
- [78] Thouless D J 1983 *Phys. Rev. B* **27** 6083
- [79] Wang L, Troyer M, Dai X 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 026802
- [80] Nakajima S, Tomita T, Taie S, Ichinose T, Ozawa H, Wang L, Troyer M, Takahashi Y 2016 *Nat. Phys.* **12** 296
- [81] Xu Z, Zhang Y, Chen S 2017 *Phys. Rev. A* **96** 013606
- [82] Kitaev A Y 2001 *Phys. Usp.* **44** 131
- [83] Wan X, Turner A M, Vishwanath A, Savrasov S Y 2011 *Phys. Rev. B* **83** 205101
- [84] Xu G, Weng H, Wang Z, Dai X, Fang Z 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 186806
- [85] Lv B Q, Xu N, Weng H M, Ma J Z, Richard P, Huang X C, Zhao L X, Chen G F, Matt C E, Bisti F, Strocov V N, Mesot J, Fang Z, Dai X, Qian T, Shiand M, Ding H 2015 *Nat. Phys.* **11** 724
- [86] Alicea J 2012 *Rep. Prog. Phys.* **75** 076501
- [87] Gangadharaiah S, Braunecker B, Simon P, Loss D 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 036801
- [88] Zhu G Y, Wang R R, Zhang G M 2017 *Phys.* **46** 154 (in Chinese) [朱国毅, 王瑞蕊, 张广铭 2017 物理 **46** 154]
- [89] Lieb E, Schultz T, Mattis D 1961 *Ann. Phys.* **16** 407
- [90] Dubček T, Kennedy C J, Lu L, Ketterle W, Soljačić M, Buljan H 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 225301
- [91] Wang Y, Chen S 2017 *Phys. Rev. A* **95** 053634
- [92] Weiße A, Wellein G, Alvermann A, Fehske H 2006 *Rev. Mod. Phys.* **78** 275
- [93] Bera S, Sau J D, Roy B 2016 *Phys. Rev. B* **93** 201302
- [94] Kobayashi K, Ohtsuki T, Imura K I, Herbut I F 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 016402
- [95] Pixley J H, Goswami P, Das Sarma S 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 076601

- [96] Pixley J H, Wilson J H, Huse D A, Gopalakrishnan S 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 207604
[97] Yan Z, Bi R, Shen H, Lu L, Zhang S C, Wang Z 2017 *Phys. Rev. B* **96** 041103
[98] Wang Y, Hu H, Chen S 2018 *Phys. Rev. B* **98** 205410
[99] Kraus Y E, Lahini Y, Ringel Z, Verbin M, Zilberberg O 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 106402
[100] Lang L, Cai X, Chen S 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 220401
[101] Madsen K, Bergholtz E J, Brouwer 2013 *Phys. Rev. B* **88** 125118

SPECIAL TOPIC—Cold atoms and molecules

Properties and applications of one dimensional quasiperiodic lattices^{*}

Wang Yu-Cheng^{1)2)3)†} Liu Xiong-Jun²⁾⁶⁾ Chen Shu^{4)5)6)‡}

1) (*Shenzhen Institute for Quantum Science and Engineering, Department of Physics, Southern University of Science and Technology, Shenzhen 518055, China*)

2) (*International Center for Quantum Materials, School of Physics, Peking University, Beijing 100871, China*)

3) (*Synergetic Innovation Center of Quantum Information and Quantum Physics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China*)

4) (*Beijing National Laboratory for Condensed Matter Physics, Institute of Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China*)

5) (*School of Physical Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China*)

6) (*Collaborative Innovation Center of Quantum Matter, Beijing 100084, China*)
(Received 30 October 2018; revised manuscript received 25 December 2018)

Abstract

Quasiperiodic lattices have been widely studied in cold atoms, which make one study extended-Anderson localization transition in one-dimensional (1D) or two-dimensional (2D) systems. In 2008, Inguscio's group prepared one-dimensional quasiperiodic lattice in cold atomic system and observed Anderson localization, which promoted the theoretical and experimental studies of quasiperiodic systems. Later, Bloch's group observed the many body localization in their prepared 1D and 2D quasiperiodic lattices. Recently, they also successfully observed the mobility edge and many body localization in a system with mobility edge in quasiperiodic lattices. These cold atom experiments have promoted the researches of many body localization and mobility edge. Quasiperiodic lattices have become a platform and its effects on many physical phenomena are being extensively studied, which can be expectantly observed in cold atomic experiments. This paper is based on the authors' some related work and briefly review some recent studies on the 1D quasiperiodic lattices, including some important cold atom experiments, some important properties of the quasiperiodic lattices and their effects on some physical phenomena, such as topological states.

Keywords: optical lattice, Anderson localization, many body localization, topological states

PACS: 03.65.Vf, 04.60.Kz, 71.10.Fd, 72.15.Rn

DOI: 10.7498/aps.68.20181927

* Project supported by the National Key Research and Development Program of China (Grant Nos. 2016YFA0301604, 2016YFA0300600, 2016YFA0302104), the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11674301, 11574008, 11761161003, 11425419), the Thousand-Young-Talent Program of China, and the Strategic Priority Research Program (B) of the Chinese Academy of Sciences (Grant No. XDB07020000).

† Corresponding author. E-mail: wangyc3@sustc.edu.cn

‡ Corresponding author. E-mail: schen@iphy.ac.cn

量子气体中的输运行为

张世忠

Transport phenomena in dilute quantum gases

Zhang Shi-Zhong

引用信息 Citation: [Acta Physica Sinica](#), 68, 040302 (2019) DOI: 10.7498/aps.68.20181966

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181966>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

自旋-轨道耦合作用下玻色-爱因斯坦凝聚在量子相变附近的朗道临界速度

Landau critical velocity of spin-orbit-coupled Bose-Einstein condensate across quantum phase transition

物理学报. 2017, 66(22): 220301 <https://doi.org/10.7498/aps.66.220301>

低维纳米材料量子热输运与自旋热电性质——非平衡格林函数方法的应用

Quantum thermal transport and spin thermoelectrics in low-dimensional nano systems: application of nonequilibrium Green's function method

物理学报. 2015, 64(18): 186302 <https://doi.org/10.7498/aps.64.186302>

用于精密测量玻尔兹曼常数的量子电压噪声源芯片研制

Development of quantum voltage noise source chip for precision measurement of Boltzmann constant

物理学报. 2018, 67(10): 108501 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20172643>

自旋-轨道耦合作用下双组分量子气体中的动力学结构因子与求和规则

Dynamic structure factors and sum rules in two-component quantum gases with spin-orbit coupling

物理学报. 2016, 65(13): 131101 <https://doi.org/10.7498/aps.65.131101>

超构材料中的光学量子自旋霍尔效应

Quantum spin Hall effect in metamaterials

物理学报. 2017, 66(22): 227803 <https://doi.org/10.7498/aps.66.227803>

专题：冷原子-分子物理

量子气体中的输运行为^{*}张世忠[†]

(香港大学物理系, 理论和计算物理中心, 香港)

(2018年11月5日收到; 2018年12月13日收到修改稿)

输运测量是了解物质性质的一个重要手段. 本文简单介绍最近在量子气体中实现的输运实验及其主要结论, 包括在类似于介观物理器件中的 Landauer 输运和强相互作用费米气体中的自旋输运行为. 我们着重讨论自旋动力学的特殊性以及其由于全同粒子相互作用所导致的特殊自旋扩散流的形式.

关键词: 自旋扩散, 电导量子化, 朗道-玻尔兹曼方程, 全同自旋旋转效应

PACS: 03.75.-b, 67.85.-d, 67.25.du, 67.30.eh

DOI: 10.7498/aps.68.20181966

1 引言

最近几年来, 输运行为成为量子气体研究中的一个主要方向. 这些研究主要集中在以下几个方面. 首先是一般集体运动中的弛豫行为, 比如说在谐振子势中呼吸模式的衰变和体积黏度的关系^[1]. 这类实验关心的是体系的集体激发, 测量的物理量一般是在势阱中密度平均之后的结果, 因此其物理解释需要比较多的模拟. 其次是类似于传统固体物理实验中的输运, 比如说在磁势阱或者光晶格中电导以及自旋扩散的研究^[2-9]. 量子气体的一个突出优点是它具有比较高的可控性和可调制性. 实验中可以较容易地改变体系的相互作用, 维度等等. 尤其重要的是, 利用光学控制, 人们可以在比体系本征时间尺度更短的时间内调节体系的参数, 从而为研究骤变现象提供了一个很好的平台.

2 量子气体的特殊性

相比于传统的凝聚态(包括电子气, 液氦等), 量子气体这种比较新的多体量子系统具有其特有的性质, 从而也导致了一些特有的现象和问

题^[10-12].

在量子气体的研究中, 我们一般关心的是处在电子构型基态上的碱金属原子, 比如钠(Na)或者钾(K). 这些原子之间的相互作用是由一个长程的范德瓦尔斯吸引势 $-C_6/r^6$ 和一个强烈的短程排斥势所构成, 如图1. C_6 是范德瓦尔斯常数. 对于这样的两体相互作用而言, 我们可以定义一个特征长度, 范德瓦尔斯长度 r_0 , 其大小可以通过平衡两体动能和相互作用能的大小来得到^[9,10]

$$\frac{\hbar^2}{mr_0^2} \sim \frac{C_6}{r_0^6}$$

也就是说, $r_0 = (mC_6/\hbar^2)^{1/4}$. 它对应着在范德瓦尔斯吸引势中最靠近零能的两体束缚态的特征大小. 一般而言, r_0 的大小大概是50 Å. 它一方面远远大于一般分子的大小, 但同时又远远小于一般是几个微米的原子间距 d . 对应于这些长度尺度, 冷原子中的能量尺度也相差很大. 对费米系统而言, 体系的费米能 E_F 一般是20 kHz左右, 比范德瓦尔斯吸引势中能量最小的两体束缚态的能量小很多. 这就导致我们在考虑多体问题的时候, 只关心低能两体散射, 因此只需要为数不多的几个散射参数就可以描述体系的相互作用了. 对于s波而

* 香港研究资助局优配研究金(批准号: 17303215)和香港裘槎基金会资助的课题.

† 通信作者. E-mail: shizhong@hku.hk

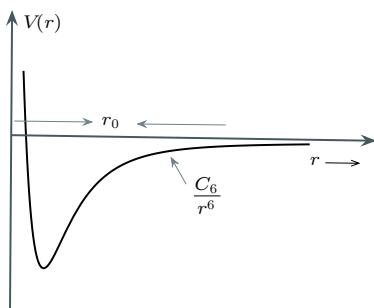


图 1 原子之间的范德瓦尔斯吸引势和短程排斥势

Fig. 1. van der Waals attractive potential and short-range repulsive potential between atoms.

言^[9,10], 一般只需要一个散射长度 a_s ; 对于 p-波而言^[13–15], 就需要同时考虑低能散射体积和有效长度. 另外在有限温度下, 热德布罗意波长 λ_T 也是一个重要的长度尺度, 它决定了在考虑相互作用的时候原子的粒子性和波动性的相对重要性. 在高温下, $\lambda_T \ll r_0$, 这时候粒子基本上可以看成经典粒子, 散射可以看成经典散射. 然而当 $\lambda_T > r_0$ 的时候, 两体散射不能看成是经典散射, 而必须考虑衍射的效果. 在这种情况下, 我们可以进一步依据 λ_T 和 d 的相对大小来分两类情况. $\lambda_T > d$ 对应于量子简并气体: 玻色子形成玻色-爱因斯坦凝聚而费米子表现出简并费米压. 在这种情况下, 原子的空间运动自由度是量子化的. $\lambda_T < d$ 对应于简并温度之上, 空间运动自由度是经典的, 但散射过程必须要考虑粒子的量子性质. 具体比较见表 1.

表 1 冷原子物理研究中的三个不同区域

Table 1. Three different regimes in the study of cold atom physics.

	长度尺度	备注
经典气体	$\lambda_T < r_0 < d$	经典散射; 麦克斯韦-玻尔兹曼经典分布
量子气体	$r_0 < \lambda_T < d$	量子散射; 麦克斯韦-玻尔兹曼经典分布
量子简并气体	$r_0 < d < \lambda_T$	量子散射; 玻色-爱因斯坦或者费米-狄拉克分布

在光晶格中, 相邻格点之间的距离 d_L 提供了一个新的长度尺度^[16]. 对于现有的实验而言, 一般 $d \sim d_L$. 另外, 单个光晶格可以近似为一个简谐振子势 $\frac{1}{2}m\omega_0^2 r^2$, 其中 $\hbar\omega_0 = 2E_L(V_0/E_L)^{1/2}$. V_0 是光场势的幅度, $E_L = \hbar^2 k^2 / 2m$ 是反冲能量. k 是光晶格相干激光的波矢. 实验上可以通过控制 V_0 的大小来控制单个光晶格势束缚的强弱. 我们可以定义

谐振子长度 $a_0 = (\hbar/m\omega_0)^{1/2}$. 一般而言 $a_0 < d_L$, 其对应的能量尺度 $\hbar\omega_0$ 给出光晶格中能带之间能隙的大小. 如果 $\hbar\omega_0 \gg E_F$, 我们可以忽略激发能带的贡献.

在考虑非平衡态运输的时候, 一个比较重要的问题是如何处理和描述粒子之间的相互作用. 在平衡态, 我们所关心的物理量不随时间变化, 多体波函数在空间的分布以及关联也不随时间变化. 在这种情况下, 复杂的相互作用势可以由低能散射的几个参数来描述. 具体而言, 对于 s-波散射的问题, 两体相互作用可以写成^[9,17]

$$E \sim \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m} |\psi(r \sim 0)|^2,$$

这里, $\psi(r \sim 0)$ 是指波函数在接近零点 ($r_0 \ll r \ll d$) 的幅度大小. 如果还需要继续使用上面的式子描述非平衡过程, 就要求在动力学过程中, 多体波函数在以上尺度的行为必须可以绝热的跟随局域体系参量(温度、压强等)变化以保证上面简化的正确性. 在现有的实验中, 上述条件似乎都是成立的. 不过在某些特殊情况下, 比如说骤变实验, 我们还是有必要回头看看上述假设是否成立.

3 量子气体中的运输实验

本文着重讨论类似于固体物理中的运输实验. 我们大概可以将这类运输实验分成两类. 一类实验关注类似于介观量子结构的特殊势场构型的运输行为. 另一类实验注重于测量束缚在谐振子势场或者盒子势中的量子气体的运输系数. 首先简单介绍前一类实验(详细介绍可参考文献[2]), 之后再讨论后一类实验.

3.1 类似于介观物理器件的运输实验^[2]

在这类实验中, 玻色子或费米子被束缚在一个各向异性的谐振子势中. 谐振子势的频率满足如下条件: $\omega_z = \omega_y \gg \omega_x$. 沿着 y 方向, 一束蓝失谐的激光将原子团沿着 x 方向分成三部分: 两侧未经扰动的原子和中间的准二维区域. 一般而言, 原子团在 x 方向的大小约为 300 微米, 而准二维区域在 x 方向的大小约为 50—60 微米. 沿着垂直于准二维区域的 z 方向上, 谐振子频率可以达到 3.9 kHz. 注意到准二维束缚区域的大小比起原子气体的所有特征长度都大. 在这个范围内, 缠缚势导致的空

间运动量子效果可以忽略, 体系处于多通道区域. 在进行类似电导输运实验的测量中, 可以调节两侧原子的相对数目 ($\Delta N \equiv N_L - N_R$) 来产生两侧化学势差:

$$\Delta\mu = \mu_L - \mu_R = \left(\frac{\partial\mu_L}{\partial N_L} + \frac{\partial\mu_R}{\partial N_R} \right) \frac{\Delta N}{2}$$

$\kappa = \left(\frac{\partial\mu_L}{\partial N_L} + \frac{\partial\mu_R}{\partial N_R} \right)^{-1}$ 可以看作整个体系的有效压缩率. 在 $\Delta N \ll N$ 的情况下, κ 可以认为不随 ΔN 变化, 其大小可以由平衡态的热力学测量得到. 实验上可以通过测量两侧原子相对数目随着时间的变化, $\Delta N(t)$, 来得知粒子流的大小.

$$I(t) = -\frac{1}{2} \frac{d\Delta N(t)}{dt}$$

利用 $I(t) = G\Delta\mu(t) = G\kappa^{-1}\Delta N(t)/2$, 我们可以得到二维区域电导 G 或者电阻 G^{-1} 的大小. 对于无相互作用或者弱相互作用的费米子而言, 实验上发现二维区域的粒子输运行为满足一般的欧姆定则 $I(t) = G\Delta\mu(t)$, 初始的原子数差别以指数形式衰减,

$$\Delta N(t) = \Delta N(0) \exp(-t/\tau),$$

时间常数 $\tau = \kappa/G$. 实验中 τ 一般是 200 毫秒左右. 由于原子自由程远大于体系的尺度, 原子在二维区域属于弹道输运, 所以以上的电阻几乎完全是由三维和二维势接触区域贡献的 (接触电阻). 需要说明的是, 这里的接触区域相比于凝聚态介观体系要光滑很多. ETH 实验组还测量了在二维区域加上由激光散斑产生的无序势后的输运行为. 同样的实验装置也可以用来测量自旋以及热的传导.

同样在多通道区域, 实验上可以通过再加上一个高斯激光束来调节在二维区域内的原子密度. 由于在有吸引相互作用的费米系统中存在超流, 这类调控显得更为重要. 在保持温度不变的情况下, 如果二维区域的原子密度比较低, 体系处于正常态, 实验上发现 $\Delta N(t)$ 依旧满足指数形式衰减; 当密度变大到使得体系处于超流状态时候, $\Delta N(t)$ 的长时行为不再满足指数衰减形式, 反而呈现出残余震荡的迹象. 另外 $\Delta N(t)$ 的短时指数衰减行为被解释成由于涡旋的产生所导致的超流衰变, 但是这还有待于进一步的研究.

在多通道实验设置的基础上, 加上另一蓝失谐的激光系统, 可以在原先二维区域制造出一个更窄的区域 (量子点接触), 大概 5.5 微米沿着 x 方向;

沿着垂直方向的束缚非常强, 有效的谐振子频率最高可达 $\omega_y = 50$ KHz, 尺度大约 1.5 微米. 在这种情况下, 我们需要计入径向的量子化的后果. 由于 $\hbar\omega_y \sim E_F$, 输运处于单个或少数几个通道的区域. 通过改变 ω_y 的大小, 实验上可以调节有效通道的数目. 对于无相互作用或者弱相互作用费米系统, 弹道输运给出量子化的电导 $G = n/h$, n 是费米面下的通道数目, h 是普朗克常数. 这在实验上被验证了.

对于强相互作用的费米系统而言, 单通道下的输运表现出更有趣的性质. 在超流态, 实验上观察到约瑟夫森动力学过程以及多次安德烈夫反射导致的正常粒子流. 在靠近超流温度的正常态以及较高温下, 实验上测量到的电导随着 ω_y 的改变仍然表现出量子化的结构, 但是量子化的值不再是之前的 n/h 的形式, 而是 α/h , α 是一个依赖于温度以及相互作用的常数 (不一定是整数). 一类的理论解释认为这是在强相互作用下超流温度附近的涨落效应导致的 [18,19]; 另一类解释认为在量子点接触处的强束缚导致原子密度较高, 从而该处处于超流态. 因为两边的量子气体仍旧在正常态, 所以边界处的安德烈夫反射导致电导加强 [20].

3.2 量子气体中的自旋扩散实验

下面着重讨论第二类输运实验. 解释这类实验的一个复杂之处在于实验中的原子是被束缚在谐振子势中, 所以一般情况下输运行为和和谐振子势中的动力学过程是耦合在一起的. 区分内秉的输运行为和和谐振子势中的集体行为通常不是那么容易. 在下面的讨论中, 假设实验上的这些麻烦可以被适当的处理, 而只讨论由于强相互作用而导致的内秉的输运行为. 作为一个例子, 我们将讨论强相互作用的费米系统中的自旋扩散行为 [7–9]. 关于强相互作用费米子体系粘滞系数的行为请参见文献 [21,22].

我们首先讨论二元流体中的扩散. 假设体系中有两种原子, 这两种原子的总质量分别为 M_1 和 M_2 , 密度分别为 ρ_1 和 ρ_2 , 速度分别为 v_1 和 v_2 . 如果 $v_1 \neq v_2$, 扩散现象就会发生. 设想一体积元 ΔV , 其质心运动速度为 $v = (\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2)/(\rho_1 + \rho_2)$. 对于单纯扩散行为, 在质心系中两种原子的流密度可以写成 $J_{1,2} = \rho_{1,2}(v_{1,2} - v)$. 然而, 宏观的观察告诉我们, 扩散流密度的大小和密度的梯度成正比关系:

$$\mathbf{J}_{1,2} = -D\rho\nabla(\rho_{1,2}/\rho),$$

其中 $\rho = \rho_1 + \rho_2$ 是总密度, D 是扩散系数, 它将流密度(流量)和密度梯度线性的联系起来。(原则上 D 有下标 $D_{1,2}$, 描述第一种和第二种原子的扩散系数, 但是很容易说明两者相等。这是昂萨格倒易关系的一个特例)。 D 是一个唯象的参数, 它的计算涉及到具体物理体系的微观细节。我们注意到, 因为这里扩散的物理量(密度)是一个标量, 所以只对应一个扩散系数。

相对而言, 自旋的扩散就不一样了。假设空间某一体积元 ΔV 中的自旋密度是 $\mathbf{s}(\mathbf{r})$ 。它的梯度可以写成两项:

$$\nabla \mathbf{s}(\mathbf{r}) = \nabla s(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{e}}(\mathbf{r}) + s(\mathbf{r}) \nabla \hat{\mathbf{e}}(\mathbf{r}),$$

其中 $s(\mathbf{r}) = s(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{e}}(\mathbf{r})$, $s(\mathbf{r})$ 是自旋密度的大小而 $\hat{\mathbf{e}}(\mathbf{r})$ 描述自旋密度的方向。上式第一项对应于纵向的自旋扩散, 由自旋密度大小的梯度驱动; 第二项对应于横向的自旋扩散, 由自旋密度方向的梯度驱动。在考虑自旋扩散时, 我们一般可以比较好的分辨这两类扩散过程。纵向的自旋扩散过程和二元流体中的扩散过程类似, 它所引起的自旋流(沿着 x 方向)可以写成

$$\mathbf{J}_{L,x} = -D_{\parallel} \frac{\partial s(\mathbf{r})}{\partial x} \hat{\mathbf{e}}(\mathbf{r}).$$

我们注意到对于纵向自旋流而言, 它在自旋空间的方向和自旋密度是一致的, 而在空间的方向则由自旋密度大小的梯度来决定。对横向的自旋扩散而言, 事情就比较复杂了。我们首先注意到在自旋空间, 横向自旋流和自旋密度方向是垂直的。这决定了在自旋空间, 它可能的方向是 $\nabla \hat{\mathbf{e}}(\mathbf{r})$ 或者 $\mathbf{s}(\mathbf{r}) \times \nabla \hat{\mathbf{e}}(\mathbf{r})$ 。具体计算发现^[23],

$$\mathbf{J}_{T,x} = -\frac{D_{\perp}}{1 + \mu^2 s^2} \left(s(\mathbf{r}) \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}(\mathbf{r})}{\partial x} + \mu \mathbf{s}(\mathbf{r}) \times \frac{\partial \mathbf{s}(\mathbf{r})}{\partial x} \right),$$

其中 μ 是一个新的参数(Leggett-Rice 参数)。最初上面的方程是在研究简并费米液体氦-3 中推导出来的。其后的研究发现, 这样的自旋流不仅仅描述简并费米液体里面的自旋输运, 同时也描述了非简并量子气体中的自旋扩散行为(全同自旋旋转效应^[24])。在后面一种情况下, 它描述了由于全同粒子交换不变性所导致的自旋进动。具体物理可以由图 2 中描述的两体散射看出来^[25]。

假设粒子 1 和粒子 2 散射。粒子 1 的自旋为 \mathbf{s}_1 , 粒子 2 的自旋为 \mathbf{s}_2 。散射势是与自旋无关的, 所以

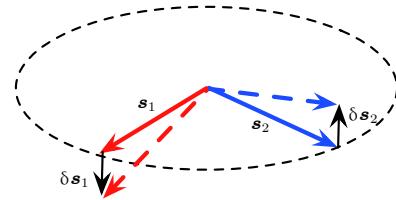


图 2 全同自旋旋转效应

Fig. 2. Identical spin rotation effect.

总自旋

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$$

是一个守恒量。如果粒子 1 和 2 的速度分别为 \mathbf{v}_1 和 \mathbf{v}_2 , 那么自旋流的大小就是

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{s}_1 \mathbf{v}_1 + \mathbf{s}_2 \mathbf{v}_2,$$

散射过程中, 单个自旋会绕着总自旋 \mathbf{s} 作进动。假设在散射过程中, \mathbf{s}_1 改变 $\delta \mathbf{s}_1$, \mathbf{s}_2 改变 $\delta \mathbf{s}_2$ 。那么 $\delta \mathbf{s}_1 + \delta \mathbf{s}_2 = \mathbf{0}$ 。但自旋流因此改变了,

$$\delta \mathbf{J}_s = \delta \mathbf{s}_1 (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2).$$

从这里我们也可以看出, $\delta \mathbf{J}_s$ 在自旋空间是沿着 $\delta \mathbf{s}_1$ 的方向, 垂直于 \mathbf{s}_1 和 \mathbf{s}_2 所决定的平面。也就是说即使两体散射是和自旋无关的, 自旋流也会在垂直方向产生一个分量, 绕着总自旋作进动。通过自旋守恒的方程

$$\partial_t \mathbf{s}(rt) + \frac{\partial \mathbf{J}_{s,x}(rt)}{\partial x} = 0,$$

$\delta \mathbf{J}_s$ 可以改变自旋密度的大小和方向。具体的微观计算发现^[25]

$$\delta \mathbf{s}_1 = 2\pi R e T(\pi) \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2,$$

这里 $T(\theta)$ 是两体散射矩阵, $\theta = \pi$ 时对应交换散射的幅度。对于两分量费米子而言, 理论计算的目标是要给出 D_{\perp} 以及 μ 随着温度以及相互作用的变化。

考虑一个两分量的费米子体系(两分量分别用自旋 $\pm \frac{1}{2}$, 或者 \uparrow 和 \downarrow 来表示), 它的哈密顿量可以写成

$$\begin{aligned} H = & \sum_{k\sigma=\pm 1/2} (\epsilon_k - \mu_{\sigma}) a_{k\sigma}^{\dagger} a_{k\sigma} \\ & + \frac{g}{V} \sum_{kk'q} a_{k\uparrow}^{\dagger} a_{k'\downarrow}^{\dagger} a_{k'-q\downarrow} a_{k+q\uparrow}, \end{aligned}$$

$\epsilon_k = k^2/2m$ 是单粒子的能量。 μ_{σ} 是自旋为 σ 的费米子的化学势。 g 是两个费米子之间的相互作用强度, 它和散射长度 a_s 的关系由众所周知的公式 $g^{-1} + \int \frac{m}{k^2} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} = \frac{m}{4\pi a_s}$ 给出。在真空中, 两体散射可以由自由散射 T 矩阵来描述。在质心系内, 如果两个粒子的总能量是 E , 那么

$$T_0(E) = \frac{4\pi/m}{a_s^{-1} + \sqrt{-mE}},$$

对于两个动能为 $\epsilon_k = k^2/2m$ 的散射粒子 ($E = 2\epsilon_k$), 散射振幅可以写成,

$$f(k) = \frac{-1}{a_s^{-1} + ik},$$

相应的微分散射截面可以写成

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(k)|^2 = \frac{1}{a_s^{-2} + k^2}.$$

对立体角积分, 我们得到总的散射截面 $\sigma = \frac{4\pi}{a_s^{-2} + k^2}$. 这告诉我们, 在弱相互作用下 ($a_s \ll k^{-1}$), 散射截面正比于 a_s^2 . 在强相互作用下, 散射截面正比于 k^2 , 和散射长度无关. 相应的输运自由程 $\ell = 1/(n\sigma)$ 在弱相互作用下正比于 $(1/k_F) \times 1/(k_F a_s)^2$, 远远大于粒子之间的距离; 而在强相互作用下 $\ell \sim k^2/n$, 它依赖于粒子的动量 $\hbar k$ 以及体系的密度. 对于在低温下的费米子体系, $k \sim n^{1/3}$, $\ell \sim n^{-1/3}$, 仅是粒子之间距离的尺度. 需要指出的是, 当自由程和粒子间距相当的时候, 自由程就失去了其物理意义, 以上的讨论只能作为一个定性的分析.

对于一般的扩散过程, 玻尔兹曼方程给出如下形式的扩散系数

$$D = \frac{1}{3}v\ell,$$

在上式中, v 是平均速度. 因为上面的讨论对纵向和横向自旋扩散都适用, 所以我们先不区分 D_{\parallel} 和 D_{\perp} , 而统一写成 D . 在实际推导中, 平均速度的定义并不是非常明确, 而且上式中的系数 $\frac{1}{3}$ 也不是很确定的系数. 但是扩散系数的量纲以及其随温度和相互作用的变化是可以由上面的表达式确定下来 [26]. 考虑在简并温度之上, $T_F < T \ll \frac{\hbar^2}{2mr_0^2}$, 粒子的平均速度 $v \propto \sqrt{T}$, 对于弱相互作用体系因为自由程不依赖于温度, 所以 $D \propto \sqrt{T}$; 在强相互作用下, $k^2 \propto T$, 所以 $D \propto T^{3/2}$. 在低温下 $T \ll T_F$, 我们需要计入由于费米面的存在而导致的散射相空间变小, 另外我们也不能使用高温时的粒子观念, 而应该计入相互作用对粒子的重整化效果 (朗道准粒子). 最终的结果是 $D = C(T_F/T)^2$; 这样的 $1/T^2$ 温度依赖在低温朗道液体理论里是非常常见的. 常数 C 在弱相互作用的时候还是和 $(k_F a_s)^{-2}$ 成正比;

在强相互作用下, $a_s = \infty$, 它就是一个常数. 从上面的分析可以看出, D 随温度的变化是非线性的. 高温以及低温 D 都是比较大的. 在温度 $T \sim T_F$ 的时候达到最小值. 其大小可以由量纲分析得到

$$D \propto v\ell \propto \frac{\hbar k_F}{m} \frac{1}{k_F} = \frac{\hbar}{m}.$$

有的时候, 大家认为由于海森伯不确定原理, D 会有一个最小值: $D \propto v\ell = \frac{\hbar}{m} k\ell > \frac{\hbar}{m}$, 因为自由程不能小于德布罗意波长. 但是这类论证依赖于扩散系数的动力学表达式, 而在自由程和德布罗意波长相当的时候, 针对粒子或者准粒子的玻尔兹曼方程不一定成立, 所以不是很有说服力. 实验上的确发现在散射共振附近, 扩散系数达到一个最小值, 见表 2. 我们注意到二维纵向自旋扩散还没有被测量, 另外实验给出的二维横向自旋扩散也存在相互矛盾, 这还有待进一步实验研究.

表 2 强相互作用费米系统的自旋扩散系数

Table 2. Spin diffusion constants for strongly interacting Fermi gases.

	实验测量值 (单位 $\frac{\hbar}{m}$)	实验组
二维费米系统 横向自旋扩散	0.0067	剑桥 ^[8]
	1.7	多伦多 ^[9]
三维费米系统 纵向自旋扩散	1.34	MIT ^[6]
三维费米系统 横向自旋扩散	1.08	多伦多 ^[7]

如果需要更加精确地计算扩散系数和 Leggett-Rice 参数 μ 的大小, 我们需要考虑碰撞积分的详细形式. 从动力学理论我们可以得到 D_{\perp} 的表达式 [27,28]

$$D_{\perp} = \frac{\tau_{\perp}}{ns} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_i v_{k,i} v_{k,j} (f_{k\uparrow} - f_{k\downarrow}),$$

其中 $f_{k\sigma}$ 是粒子在动量空间的分布函数. $v_{k,i}$ 是动量为 \mathbf{k} 的粒子沿着 i 方向的速度. τ_{\perp} 是横向自旋扩散弛豫时间. τ_{\perp} 可以写成如下形式 [27]

$$\frac{1}{\tau_{\perp}} = \frac{\sinh(\beta h)}{\alpha_{\perp}s} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} d\Omega \frac{k_x^2}{2m} |T(\mathbf{k}, \mathbf{k}')|^2 \times (e^{-\beta h} f_{1\uparrow} f_{2\uparrow} + e^{\beta h} f_{1\downarrow} f_{2\downarrow}) (1 - f_{3\uparrow}) (1 - f_{4\downarrow}),$$

α_{\perp} 是一个参数, 其具体表达式可以见文献 [27], $h = \mu_{\uparrow} - \mu_{\downarrow}$. 上式中的下标 1, 2, 3, 4 分别代表以下四个动量, $\mathbf{p}_{1,2} = \mathbf{q}/2 \pm \mathbf{k}$ 以及 $\mathbf{p}_{3,4} = \mathbf{q}/2 \pm \mathbf{k}'$. Leggett-Rice 参数 μ 则可以表示为 [27,28]

$$\mu = \frac{\tau_{\perp}^2}{2D_{\perp}s^2} \int \frac{d^3\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{k}_2}{(2\pi)^3} v_{1x} (v_{1x} - v_{2x}) \\ \times (f_{1\uparrow} - f_{1\downarrow}) (f_{2\uparrow} - f_{2\downarrow}) \text{Re}T(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_1)$$

在具体计算中, 对于 $T(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$, 我们可以使用不同的近似. 最粗糙的是使用两粒子在真空中的散射矩阵, 其次我们可以加入费米面对于散射的影响, 或者可以做一些更自洽的计算; 具体可以参见文献 [27,28].

需要指出的是, 在散射共振附近的强相互作用费米子体系中, 虽然以上计算和实验大概吻合, 但是不代表这些动力学计算已经抓住了本质的物理. 这主要有以下原因. 第一, 对于描述体系的自旋动力学的方程而言, 它的形式在很大程度上已经由对称以及守恒律决定了, 不依赖于动力方程的推导过程. 第二, 玻尔兹曼方程的出发点是体系有比较好的准粒子, 但这对于处在共振附近的正常费米体系来说还是一个没有完全解决的问题. 利用全像原理 (holographic principle), 我们可以对一些无正常准粒子的体系进行一些初步可控的输运计算 [29].

4 结 论

作为总结, 我们想提一下最近在光晶格中的原子输运和自旋输运实验 [3–5]. 这一类实验的主要目的在于模拟 Fermi-Hubbard 模型在低温乃至零温下的性质. 这些冷原子模拟实验中的温度还没有达到超交换相互作用的尺度, 因此输运行为可以认为是相对高温下 Fermi-Hubbard 模型的行为. 一个比较值得关注的发现是在低参杂时出现类似于高温超导中电导和温度的线性关系 [4], 另一个是在高参杂的时候电导在强相互作用下的饱和行为 [3]. 在冷原子体系, 这方面的探索现在才刚刚开始, 我们期待之后更多的实验和理论发现.

参考文献

- [1] Elliott E, Joseph J A, Thomas J E 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 040405
- [2] Krinner S, Esslinger T, Brantut J 2017 *J. Phys.: Condens. Matter* **29** 343003
- [3] Anderson R, Wang F D, Xu P H, Venu V, Trotzky S, Chevy F, Thywissen J H 2017 *arXiv*: 1712.09965
- [4] Brown P T, Mitra D, Guardado-Sánchez E, Nourafkan R, Reymbaut A, Bergeron S, Tremblay A M S, Kokalj J, Huse D, Schauss P, Bakr W S 2018, *arXiv*: 1802.09456
- [5] Nichols M A, Cheuk L W, Okan M, Hartke T R, Mendez E, Senthil T, Khatami E, Zhang H, Zwierlein M W 2018 *arXiv*: 1802.10018
- [6] Sommer A, Ku M, Roati G, Zwierlein M W 2011 *Nature* **472** 201
- [7] Bardon A B, Beattie S, Luciuk C, Cairncross W, Fine D, Cheng N S, Edge G J A, Taylor E, Zhang S Z, Trotzky S, Thywissen J H 2014 *Science* **344** 722
- [8] Koschorreck M, Pertot D, Vogt E, Köhl M 2013 *Nature Physics* **9** 1
- [9] Luciuk C, Smale S, Böttcher F, Sharum H, Olsen B A, Trotzky S, Enss T, and Thywissen J H 2017 *Phys. Rev. Lett.* **118** 130405
- [10] Leggett A 2001 *Rev. Mod. Phys.* **73** 307
- [11] Pethick C J, Smith H 2011, *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases* (Cambridge: Cambridge University Press) p109
- [12] Pitaevskii L P and Stringari S 2003 *Bose-Einstein Condensation* (Oxford: Clarendon Press) p129
- [13] Braaten E, Hagen P, Hammer H W, and Platter L 2012 *Phys. Rev. A* **86** 012711
- [14] Bertulani C A, Hammer H W and van Kolck U 2002 *Nuclear Physics A* **712** 37
- [15] Yu Z H, Thywissen J H, and Zhang S Z 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 135304
- [16] Bloch I, Dalibard J and Zwerger W 2008 *Rev. Mod. Phys.* **80** 885
- [17] Leggett A 2006 *Quantum Liquids* (Oxford: Oxford University Press) p120
- [18] Uchino S and Ueda M 2017 *Phys. Rev. Lett.* **118** 105303
- [19] Liu B, Zhai H and Zhang S Z 2017 *Phys. Rev. A* **95** 013623
- [20] Kanász-Nagy M, Glazman L, Esslinger T and Demler E 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 255302
- [21] Thomas S 2014 *Annual Review of Nuclear and Particle Science* **64** 125
- [22] Joseph J A, Elliott E, and Thomas J E 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 020401
- [23] Leggett A 1969 *J. Phys. C, Solid St. Physics* **3** 448
- [24] Lhuillier C, Laloë F 1982 *J. Physique* **43** 197
- [25] Cohen-Tannoudji C and Guéry-Odelin D 2011 *Advances In Atomic Physics: An Overview* (Singapore: World Scientific) p497
- [26] Bruun G M 2011 *New J. Phys.* **13** 035005
- [27] Enss T 2013 *Phys. Rev. A* **88** 033630
- [28] Trotzky S, Beattie S, Luciuk C, Smale S, Bardon A B, Enss T, Taylor E, Zhang S Z, and Thywissen J H 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 015301
- [29] Hartnoll S, Lucas A, Sachdev S 2018 *Holographic Quantum Matter* (Cambridge: MIT Press) p334

SPECIAL TOPIC—Cold atoms and molecules

Transport phenomena in dilute quantum gases^{*}

Zhang Shi-Zhong[†]

(Department of Physics and Centre for Theoretical and Computational Physics,

The University of Hong Kong, Hong Kong, SAR, China)

(Received 5 November 2018; revised manuscript received 13 December 2018)

Abstract

Transport measurement is one of the most important ways to study the properties of matter. In this article, we discuss recent experiments in ultracold atomic gases where the analog of Landauer transport in mesoscopic devices is realized and spin dynamics in a strongly interacting Fermi gas is probed. In the latter case, we pay special attention to the peculiarity of spin dynamics due to identical spin rotation effect which leads to a novel form of spin diffusion current. This modifies the usual diffusion equation into a more complicated form and leads to important consequence for, in particular, transverse spin diffusion in ultracold Fermi gases.

Keywords: spin diffusion, Landauer transport, Landau-Boltzmann equation, identical spin rotation effect

PACS: 03.75.-b, 67.85.-d, 67.25.du, 67.30.eh

DOI: 10.7498/aps.68.20181966

* Hong Kong Research Grant Council, General research fund (Grant No. 17303215), and Croucher Foundation.

† Corresponding author. E-mail: shizhong@hku.hk

动力学淬火过程中的不动点及衍生拓扑现象

邓天舒 易为

Fixed points and dynamic topological phenomena in quench dynamics

Deng Tian-Shu Yi Wei

引用信息 Citation: [Acta Physica Sinica](#), 68, 040303 (2019) DOI: 10.7498/aps.68.20181928

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181928>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

磁斯格明子拓扑特性及其动力学微磁学模拟研究进展

Research progress on topological properties and micro-magnetic simulation study in dynamics of magnetic skyrmions

物理学报. 2018, 67(13): 137506 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180235>

超冷费米气体的膨胀动力学研究新进展

Recent progress of expansion dynamics in strongly-interacting ultracold Fermi gases

物理学报. 2019, 68(4): 046702 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20182293>

Mg-CO(X₁Σ₊)体系的冷碰撞动力学

Collision dynamic behaviors of CO(X₁Σ₊) molecule with Mg atom in cold and ultracold temperatures

物理学报. 2015, 64(10): 103402 <https://doi.org/10.7498/aps.64.103402>

El-Nabulsi力学模型下非Chetaev型非完整系统的精确不变量与绝热不变量

Exact invariants and adiabatic invariants for nonholonomic systems in non-Chetaev's type based on El-Nabulsi dynamical models

物理学报. 2015, 64(3): 034502 <https://doi.org/10.7498/aps.64.034502>

双色场控制与测量原子分子超快电子动力学过程的研究进展

Research progress of the control and measurement of the atomic and molecular ultrafast electron dynamics using two-color field

物理学报. 2016, 65(22): 223206 <https://doi.org/10.7498/aps.65.223206>

专题：冷原子-分子物理

动力学淬火过程中的不动点及衍生拓扑现象*

邓天舒 易为[†]

(中国科学技术大学, 中国科学院量子信息重点实验室, 合肥 230026)

(2018年10月30日收到; 2018年12月27日收到修改稿)

本文对近两年来有关淬火动力学过程中拓扑现象的研究做简要综述。这些动力学拓扑现象被动力学过程中的衍生拓扑不变量保护, 与淬火前后体系的拓扑性质有密切关系。基于人工量子模拟平台的高度可控性, 已在诸如超冷原子、超导量子比特、核磁共振、线性光学等众多物理体系中, 通过对人工拓扑体系动力学过程的调控, 观测到如动力学涡旋、动量-时间域的 Hopf 映射及环绕数、拓扑保护的自旋环结构、动力学量子相变、动量-时间斯格明子等诸多动力学拓扑现象。其中某些拓扑结构还可以在非幺正动力学淬火过程中稳定存在。这些研究将人们对拓扑物相的认识和研究从平衡态推广到非平衡动力学领域, 具有重要的科学价值。

关键词: 拓扑相, 淬火动力学, 动力学拓扑不变量, 超冷原子

PACS: 03.75.Kk, 03.75.Ss

DOI: 10.7498/aps.68.20181928

1 引言

对拓扑相与相变的研究是现代物理的重要方向之一。在传统的金斯堡-朗道相变中, 量子相与体系的对称性有深刻的关系, 量子相变由局域序参量刻画, 同时伴随着对称性的破缺。拓扑相和相变与此截然不同: 拓扑相变一般不伴随对称性的破缺, 拓扑相则与体系基态波函数在希尔伯特空间的几何性质相关并由拓扑不变量刻画^[1,2]。从人们发现量子霍尔效应至今已有三十多年了, 此间人们对无相互作用体系中拓扑相的理解和分类日趋完善, 对有相互作用体系中拓扑相的认识也有了长足进展。近年来拓扑物态研究领域的一个新兴方向是在凝聚态物质之外的体系中寻找、刻画拓扑相及与拓扑相关的现象。随着超冷原子、线性光学等量子模拟平台的蓬勃发展, 具有拓扑能带及拓扑特性的人工拓扑体系相继在这些平台上得以实现^[3–11]。此外, 人工拓扑体系的高度可控性使对动力学过程及非厄米体系中拓扑现象的实验研究成为可能^[7–11], 而

这也驱动了相关领域的理论研究^[12–16]。值得强调的是, 动力学过程及非厄米体系中的拓扑现象在传统凝聚态体系中一般很难被实现。因此各量子模拟平台上的人工拓扑体系具有重要的价值。

在这一背景下, 本文简要综述近年来人们对淬火动力学过程中拓扑现象的理论和实验研究。所谓淬火, 即体系由初始哈密顿量 H^i 的本征态出发, 在末态哈密顿量 H^f 作用下演化的动力学过程。对于拓扑体系, 一个重要的问题是该体系的淬火动力学过程中是否也会出现受拓扑保护的拓扑现象? 更进一步, 如果初态和末态哈密顿量具有不同拓扑性质的能带, 体系淬火过程中的拓扑现象是由初态还是末态哈密顿量的拓扑性质决定? 对这些问题, 一个最直接的回答来自于对体系瞬时波函数几何性质的刻画。文献^[17,18]研究了几种简单拓扑体系在淬火过程中瞬时波函数的拓扑不变量, 结果表明瞬时波函数的拓扑不变量不随时间变化, 即淬火过程的拓扑性质完全由初始哈密顿量决定。由于这些工作中考虑的体系都是无相互作用(或者平均场意义下无相互作用)的厄米体系, 淬火动力学时间演

* 国家自然科学基金(批准号: 15522545)资助的课题。

† 通信作者。E-mail: wyiz@ustc.edu.cn

化相当于对初始态做局域幺正变换。此时,由于局域幺正变换不破坏保护拓扑性质的对称性,瞬时态的拓扑不变量必然不变。然而,人们发现在淬火过程中会出现衍生的动力学拓扑现象,这些拓扑现象或与初态和末态哈密顿量的拓扑性质相关,或由衍生的动力学拓扑数保护,并在动力学过程中表现出可观测效应^[19–31]。有趣的是,即使基于同一淬火过程中观测到的拓扑现象,也可以构造不同的衍生拓扑结构加以解释。这一方面说明了淬火动力学过程中丰富的物理内涵,另一方面也会引发关于动力学拓扑现象普适描述的思考。

冷原子体系的高度可控性使其成为研究淬火动力学过程中拓扑性质的理想平台之一。2017年初,德国汉堡大学的研究组通过周期驱动光晶格,在冷原子中实现了基于 Floquet Haldane 模型的淬火过程,并利用动力学量子相变理论对淬火过程中的动力学涡旋进行了刻画^[24]。此后,清华大学的研究组从理论上研究了淬火动力学过程中的衍生拓扑结构,利用 Hopf 映射和环绕数重新解释了汉堡实验,并把环绕数与淬火前后哈密顿量的静态拓扑性质联系了起来^[19]。这一理论随后被汉堡大学研究组的另一实验所证实^[25]。与此同时,来自中国科学技术大学和北京大学的研究组在对拉曼晶格上的冷原子气体进行淬火时发现了动力学过程中原子自旋分布中的环形结构,并通过能带反转面的理论把环的出现与静态哈密顿量的陈数联系了起来^[22,23,26]。这些实验充分反映了淬火动力学中衍生拓扑现象的普遍性和丰富性。除冷原子气体之外,淬火过程中的动力学拓扑现象也在超导量子比特、单光子量子行走等量子模拟平台上被实验观测。目前这些模拟平台都还是通过操控单量子比特模拟费米体系拓扑模型的淬火过程,其优势是更易于进行实验操控和态重构,以及可以方便的实现耗散以研究非幺正动力学淬火过程。

我们将从几个不同的方面介绍这一领域的一些最新进展,着重描述与拓扑保护的动力学不动点相关的衍生拓扑结构。所谓动力学不动点,即在这些参数点上体系不随时间演化。而拓扑保护的动力学不动点的存在性与淬火前后静态哈密顿量的拓扑性质直接相关。由此,拓扑保护的动力学不动点为这些动力学拓扑现象提供了一个普适的基础,并成为连接动力学拓扑现象和体系静态拓扑性质的桥梁。

2 动力学量子相变及动力学拓扑序参量

我们首先介绍动力学量子相变及其与拓扑保护不动点的关系。先回顾动力学过程中 Loschmidt 回波的定义。Loschmidt 回波是量子体系动力学演化中的一个重要可观测量,它描述体系初态在演化过程中的重现行为。如体系的时间演化由 H^f 决定,则 Loschmidt 回波 L 可表示为

$$L = |G(t)|^2 = |\langle \psi^i | e^{-iH^f t} | \psi^i \rangle|^2, \quad (1)$$

其中 $|\psi^i\rangle$ 为体系初态, $G(t)$ 为 Loschmidt 振幅。如果对(1)式中的时间作 Wick 转动,即取虚时 $t = -i\beta$, Loschmidt 振幅 $G(\beta)$ 的形式会非常类似于热力学中的正则系综配分函数

$$Z = \text{Tr}(e^{-\beta H^f}), \quad (2)$$

其中 $\beta = 1/k_B T$, k_B 为玻尔兹曼常数, T 为体系温度。

基于这一形式上的相似性, Heyl 等提出了动力学量子相变的概念^[32–36]。在热力学中,热力学相变发生在体系自由能 $F = -\frac{1}{V} \lim_{V \rightarrow \infty} \ln Z$ (V 为体系体积) 非解析处,此时 Z 过零点。相应的, Heyl 等人认为,当 $G(t)$ 过零点时,动力学演化过程中也存在动力学量子相变。相应的动力学自由能 $g(t)$ 可定义为

$$g(t) = -\frac{1}{V} \lim_{V \rightarrow \infty} \ln |G|^2. \quad (3)$$

从上述定义可知,动力学相变发生在瞬时态和初态正交的时刻,此时动力学自由能非解析。与热力学相变不同,动力学量子相变的临界点可以在体系演化时周期性地出现,而不是通过调节体系哈密顿量参数达到。动力学量子相变在多大程度上可以定义为相变仍然是有争议的话题。比如动力学量子相变是否继承了传统热力学相变中重要的性质,如在临界点附近的标度行为,相变普适类等。

与此同时,人们发现动力学量子相变有深刻的几何溯源,它的出现可以由动力学拓扑序参量联系起来^[35]。在这个意义上,动力学量子相变可以看作是动力学过程中的衍生拓扑现象。动力学序参量的定义与所谓的 Pancharatnam 几何相位有密切联系。Pancharatnam 相位是 Loschmidt 振幅 G 的辐角中与动力学相位无关的部分,源于体系动力学演化过程中的几何性质。以无相互作用的半满晶格模型为例,由于晶格平移对称性,不同晶格动量子空

间的动力学演化解耦。此时, Pancharatnam 几何相位写做 $\phi_k^G(t) = \phi_k(t) - \phi_k^{\text{dyn}}(t)$, 其中 $G = \prod_k G_k$, 而 $\phi_k(t)$ 为 G_k 的辐角。体系的动力学相位为 $\phi_k^{\text{dyn}}(t) = -\int_0^t \langle \psi_k(t') | H_k^f | \psi_k(t') \rangle dt'$, 其中 H_k^f 为末态的 Bloch 哈密顿量 (假设 H_k^f 不含时)。

在体系的淬火过程中, 往往存在一些 ϕ_k^G 在任意时刻都消失的不动点 $\{k_m\}$ ($m = 1, 2, \dots$)。而在拓扑体系的淬火过程里, 不动点的存在性与淬火前后哈密顿量的拓扑性质有一定关系 [37,38]。举例来说, 对于一维两能带拓扑体系, 只要淬火前后的能带具有不同的拓扑数, 则不动点一定成对出现。对于二维的两能带陈绝缘体, 如淬火前后哈密顿量能带的陈数绝对值不同, 则不动点也会成对出现。其他诸如高维、多能带、不同拓扑分类的情况不动点原则上也会存在, 但规律会比较复杂 [39,40]。除此之外, 淬火过程中也可能出现一些与拓扑完全无关的不动点。这里, 我们主要考虑与淬火前后体系拓扑特性相关的不动点, 即拓扑不动点。

在拓扑不动点的基础上, 可以进一步定义动力学拓扑序参量。对于一维体系, 动力学拓扑序参量可以写作

$$\nu^D(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{k_m}^{k_n} \frac{\partial \phi_k^G(t)}{\partial k} dk. \quad (4)$$

此处积分限取为两个不同的拓扑不动点。由于 ϕ_k^G 在不动点上消失, ν^D 为从 $k \in (k_m, k_n)$ 到 $e^{i\phi_k^G}$ 的 $S^1 \rightarrow S^1$ 映射度, 因此只能取整数。同时, 在动力学量子相变发生时 $G_k(t) = 0$, ϕ_k^G 无法定义, 所以 ν^D 只能在临界点处跳变。在二维体系中, 动力学序参量的定义更为复杂。这是因为动力学量子相变的临界点 k_c 会随时间在布里渊区内产生、移动、消失。文献中目前存在两种不同的定义二维动力学拓扑序参量的方式, 其出发点均基于动力学量子相变的几何结构。因此, 动力学拓扑序参量的重要性在于提供了一个从动力学衍生拓扑不变量的角度理解动力学量子相变的途径。目前, 动力学量子相变已在离子阱, 超冷原子, 单光子量子行走, 以及核磁共振等多个人工量子模拟平台上被观测到, 动力学量子相变和 Pancharatnam 几何相及动力学拓扑序的关系也相继被实验证实 [24,27–30]。

从上述讨论可以看出, 动力学量子相变及动力学拓扑序参量与拓扑保护的不动点有深刻联系。基于这一认识, 下面我们将进一步揭示动力学量子相

变与其他衍生动力学拓扑不变量的关系。

3 动力学拓扑不变量

我们在第 2 节讨论了拓扑体系淬火过程中的拓扑不动点。在拓扑不动点上, Pancharatnam 相位在时间演化过程中恒为零。相位在拓扑不动点消失的本质原因在于这些不动点同时也是动力学不动点, 即在这些参数点上体系的态不随时间演化。基于这一认识, 人们发现可以基于不动点在动量-时间的二维参数空间里定义衍生动力学拓扑不变量 [20,21,27,28,31]。这些动力学拓扑不变量跟同样基于不动点的动力学量子相变、动力学拓扑序参量以及淬火前后哈密顿量的拓扑性质等紧密关联。目前文献里这方面的工作主要集中在一维两能带拓扑体系的淬火过程, 我们也将具体介绍这类体系中的不动点结构和动力学拓扑不变量。高维多带体系的动力学淬火过程中的拓扑结构会更加丰富, 但仍有待进一步研究。

对于无相互作用且具有晶格平移对称性的体系, 不同动量部分的动力学解耦。因此, 一维两能带拓扑体系的普适 Bloch 哈密顿量可表示为

$$H_k = \mathbf{h}_k \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (5)$$

这里仅考虑突变淬火过程: 初态的哈密顿量 H_k^i 由 \mathbf{h}_k^i 刻画; 末态的哈密顿量 H_k^f 由 \mathbf{h}_k^f 刻画。同时, 选择体系初态为 H_k^i 的基态。对于而能带体系, 体系的初态和任意时刻的瞬时态都可以表示在同一个 Bloch 球上。

如图 1 所示, 淬火动力学过程可以形象的表示为瞬时态矢量从初态出发, 在 Bloch 球面上绕 \mathbf{h}^f 轴的转动。这里有两种值得注意的特殊情况。

其一, \mathbf{h}^i 和 \mathbf{h}^f 平行或反平行。此时只有瞬时态的相位随时间演化, 瞬时态在 Bloch 球上的矢量位置不变。这种情况对应着前述的不动点。我们定义 $\mathbf{h}^i \cdot \mathbf{h}_k^f = \pm 1$ 为两种不同类型的不动点。可以证明, 当初始哈密顿量和末态哈密顿量基态拓扑数不一样时, 不同类型的不动点一定成对出现。对于二维两能带拓扑体系, 不同类型不动点出现的充分必要条件变为初始哈密顿量和末态哈密顿量对应的陈数绝对值不同。我们把这种与体系静态拓扑性质相关的不动点叫做拓扑保护的不动点。

其二, \mathbf{h}_k^i 和 \mathbf{h}_k^f 垂直。此时, 瞬时态在 Bloch 球上演化半个周期后会与初态正交。按照前一节的定

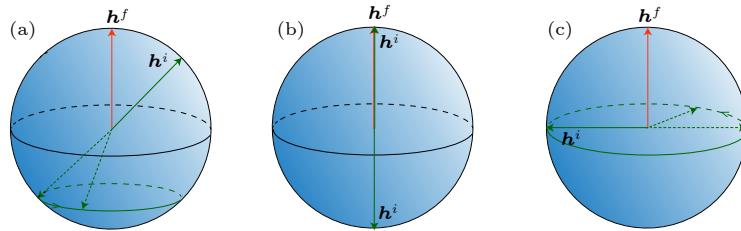


图 1 Bloch 球上的动力学演化 (a) 态矢量在 Bloch 球上绕 \mathbf{h}^f 运动; (b) 动力学不动点对应于 $\mathbf{h}^i \cdot \mathbf{h}^f = \pm 1$; (c) 临界点对应于 $\mathbf{h}^i \cdot \mathbf{h}^f = 0$. 实线代表 \mathbf{h}^i (绿色) 与 \mathbf{h}^f (红色), 虚线代表态矢量; 假设初态处于 H_k 基态上, 即 $t=0$ 时态矢量与 \mathbf{h}^i 方向相反

Fig. 1. Visualizing dynamics on the Bloch sphere: (a) State vector revolving around the \mathbf{h}^f axis; (b) illustration of fixed points when $\mathbf{h}^i \cdot \mathbf{h}^f = \pm 1$; (c) illustration of critical points with $\mathbf{h}^i \cdot \mathbf{h}^f = 0$.

义, 在相应的临界动量和时间处会发生动力学量子相变. 由于 $\mathbf{h}^i \cdot \mathbf{h}_k^f$ 是 k 的连续函数, 可以证明两个不同类型的不动点间一定存在至少一个临界动量 k_c 满足 $\mathbf{h}_k^i \cdot \mathbf{h}_k^f = 0$. 这样的临界点称为拓扑临界点.

由此可见, 拓扑不动点的存在与动力学量子相变临界点的存在有直接关系. 同时, 基于这些动力学不动点, 我们可以在衍生的动量-时间空间内定义动力学拓扑不变量. 由于每个动量上的态演化都是周期性的, 态矢量的演化在动量-时间参数空间内的轨迹是垂直于动量轴的圆. 而在动力学不动点, 态的轨迹是动量轴上的一个点. 这样, 任意两个动力学不动点间的态演化都可以映射到一个 Bloch 球上. 我们由此可以定义衍生的动力学拓扑陈数

$$C_{mn} = \frac{1}{4\pi} \int_{k_m}^{k_n} dk \int_0^{t_k} dt [\mathbf{h}(k, t) \times \partial_t \mathbf{h}(k, t)] \cdot \partial_k \mathbf{h}(k, t), \quad (6)$$

其中 $\mathbf{h}(k, t)$ 为动量 k 上瞬时态在时刻 t 对应的矢量, k_m, n 为不动点, t_k 为动量 k 上的演化周期. 可以证明, 动力学陈数不为零的条件是 k_m 和 k_n 是不同类型的不动点. 考虑到前述静态哈密顿量拓扑性质和动力学不动点之间的关系, 我们可以证明淬火前后静态哈密顿量具有不同拓扑数是存在非零动力学拓扑不变量的充分非必要条件.

动力学拓扑不变量的存在直接体现在 $\mathbf{h}(k, t)$ 于动量-时间衍生空间内的自旋结构上. 如图 2 所示, 当淬火前后哈密顿量具有不同拓扑数时, $\mathbf{h}(k, t)$ 在动量-时间空间表现出斯格明子结构. 由于前述的不动点和动力学量子相变临界点的关系, 我们发现动力学量子相变就发生在斯格明子的极点上. 这一结构已在实验上被直接观测到 [27,31]. 同时, 如文献 [21] 所示, 动力学拓扑不变量的存在, 也体现在体系的纠缠谱中.

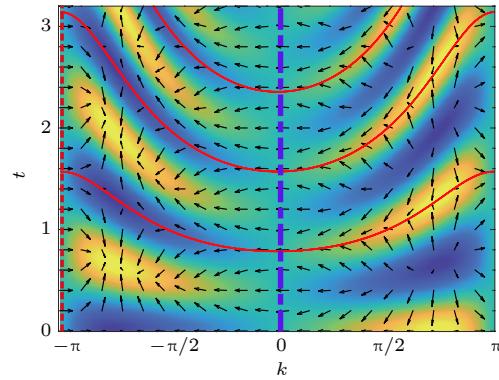


图 2 淬火前后哈密顿量具有不同拓扑数时的典型斯格明子结构. 黑色箭头为自旋在平面内方向, 背景颜色对应自旋在与平面垂直方向上的分量大小, 蓝色对应向内, 黄色对应向外. 坚直虚线为不动点位置, 红色实线表示不同动量 k 点的周期

Fig. 2. Momentum-time skyrmions when pre- and post-quench Hamiltonians possess different winding numbers.

4 非厄米体系中的非幺正淬火过程

前述的动力学拓扑结构也存在于非厄米体系的非幺正淬火过程中, 前提是体系的动力学演化仍然是相干的 [41]. 这一前提满足的条件体系具有宇称-时间对称性. 一般而言, 非厄米哈密顿量的本征值不是实数. 但如果该哈密顿量有宇称-时间对称性, 即 $\mathcal{PT}H(\mathcal{PT})^{-1} = H$, 且本征态也为 \mathcal{PT} 算符的本征态时, 该本征态对应的哈密顿量本征值为实数 [42-44]. 这里 \mathcal{P} 为宇称算符, \mathcal{T} 为时间反演算符. 如果宇称-时间守恒的哈密顿量所有本征值均为实数, 则体系处于宇称-时间对称守恒相; 反之, 如哈密顿量某些本征值非实数, 体系处于宇称-时间对称自发破缺相.

这里我们考虑最简单的宇称-时间守恒的拓扑体系, 一维宇称-时间守恒的 Su-Schieffer-Heeger (SSH) 模型 [45,46].

如图 3(a) 所示, 该模型与标准 SSH 模型的区

别在每个格点上均存在增益或损耗项。体系的 Bloch 哈密顿量仍然可记为 $H_k = h_k \cdot \sigma$, 其中 $h_x = w \cos k + v$, $h_y = w \sin k$, and $h_z = iu$. 体系的拓扑数可由全局贝里相 φ_B 对应的绕数刻画

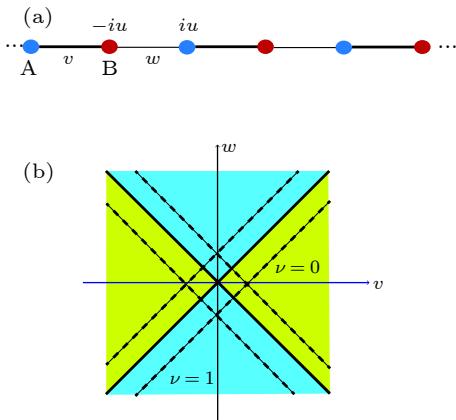


图 3 非厄米 SSH 模型及其拓扑相图 (a) 非厄米 SSH 模型. 在厄米 SSH 模型的基础上, 每个格点上均有增益或损耗; (b) 体系拓扑相图. 实线为拓扑边界, 虚线为宇称-时间对称与对称破缺区域的边界. v , w 为 SSH 模型的跃迁系数, u 为增益损耗系数, ν 为绕数

Fig. 3. Non-Hermitian SSH model and its topological phase diagram: (a) Non-Hermitian SSH model; (b) topological phase diagram.

$$\nu = \varphi_B / 2\pi, \quad (7)$$

$$\varphi_B = -i \sum_{\mu=\pm} \oint dk \frac{\langle \chi_\mu | \frac{\partial}{\partial k} | \psi_\mu \rangle}{\langle \chi_\mu | \psi_\mu \rangle}, \quad (8)$$

其中 $|\chi_\mu\rangle$ 和 $|\psi_\mu\rangle$ ($\mu = +, -$) 分别是 H_k 的左、右本征矢, 即 $H_k |\psi_\mu\rangle = \epsilon_\mu |\psi_\mu\rangle$, $H_k^\dagger |\chi_\mu\rangle = \epsilon_\mu^* |\chi_\mu\rangle$. 这里 ϵ_μ 是体系本征谱. 体系的拓扑相图如图 3(b) 所示. 我们注意到拓扑相变界周围是宇称-时间对称性自发破缺区域.

为了描述非幺正淬火演化, 我们可以把体系的密度矩阵写为 [41,47,48]

$$\rho(k, t) = \frac{1}{2} [\tau_0 + \mathbf{d}(k, t) \cdot \boldsymbol{\tau}]. \quad (9)$$

这里 $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$, 并且 $\tau_\gamma = \sum_{\mu, \nu=\pm} |\psi_\mu^f\rangle \sigma_\gamma^{\mu\nu} \langle \chi_\nu^f|$ ($\gamma = 0, 1, 2, 3$). 引入 $\boldsymbol{\tau}$ 矩阵的好处是, 虽然密度矩阵是非厄米的, $\mathbf{d}(k, t)$ 是模为 1 的实矢量. 这一点至关重要, 因为我们又可以在 Bloch 球上表示体系演化的轨迹了.

当末态哈密顿量处在宇称-时间守恒区域时, 瞬时态矢量在 Bloch 球上绕着南北极旋转. 此时, Bloch 球南北极对应的动量就是动力学不动点. 当末态哈密顿量处在宇称-时间对称自发破缺区域时,

瞬时态矢量在 Bloch 球上会沿着大圆渐近趋近北极. 此时不存在动力学不动点. 基于这一图像, 我们可以在动力学不动点存在的时候构造动力学拓扑不变量. 事实上, 可以证明当体系在宇称-时间守恒的不同拓扑相间淬火时, 不同种类的不动点(即分别对应于南北极的不动点)会成对出现. 此时, 所有幺正淬火演化过程中的动力学拓扑构造和相关可观测量也会存在. 而只要淬火前后的哈密顿量之一处于宇称-时间对称自发破缺区域, 不动点以及动力学拓扑构造就不一定存在了. 需要强调的是, 在非幺正动力学淬火过程中, 不动点和动力学量子相变的临界点不再出现在布里渊区的高对称点. 这会导致多个临界时间尺度的出现. 如图 4 所示, 此时动力学量子相变的发生会存在多个周期, 同时也会存在多个对应的的动力学拓扑序参量.

实验上, 具有损耗-增益的宇称-时间守恒非厄米体系在光波导, 微波腔阵列, 线性光学等多中物

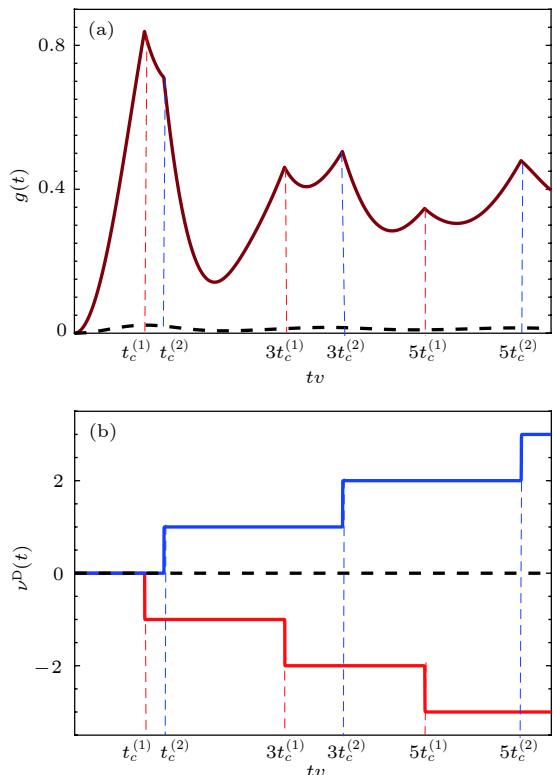


图 4 非厄密 SSH 模型淬火中的典型动力学自由能 $g(t)$ 与动力学拓扑序参量 $\nu^D(t)$ (a) 动力学自由能 $g(t)$; (b) 动力学拓扑序参量 $\nu^D(t)$. 在非厄密淬火过程中存在两个临界时间尺度及两个动力学拓扑序参量

Fig. 4. Dynamic free energy $g(t)$ and dynamic topological order parameter $\nu^D(t)$ in the quench dynamics of non-Hermitian SSH model: (a) Dynamic free energy $g(t)$; (b) dynamic topological order parameter $\nu^D(t)$.

理体系中实现。在一些难以实现增益的物理体系如冷原子气体、单光子量子行走中,可以实现基于纯损耗的被动宇称-时间守恒非厄米体系^[49,50]。被动宇称-时间守恒非厄米体系虽然不会有纯实数的本征谱,但体系的能谱及动力学性质可以方便地映射到基于损耗-增益的主动宇称-时间守恒非厄米体系上。最近,动力学量子相变、动力学拓扑序参量、动力学拓扑不变量等衍生动力学拓扑现象已经在具有被动宇称-时间守恒性质的单光子非幺正量子行走实验里被探测到^[31]。

5 总结与展望

本文集中讨论了几种基于拓扑保护动力学不动点的动力学拓扑结构的构造和关联。由于相关动力学拓扑不变量的定义都基于不同类拓扑不动点的存在,而后者又与静态哈密顿量的拓扑性质密切相关,拓扑保护的动力学不动点成为有机联系各种动力学衍生拓扑现象及平衡态拓扑相的核心要素。目前对于动力学拓扑现象的讨论多数集中在低维(一维或者二维)两能带五相互作用体系的突变淬火过程。高维多能带拓扑系统淬火过程中会出现更丰富的拓扑结构,如何系统的刻画它们是今后研究的一个方向。除本文讨论的衍生拓扑现象以外,其他已知的动力学拓扑结构如 Hopf 映射、环绕数、基于能带反转面的拓扑环等与动力学不动点及动力学量子相变临界点的关系则需要进一步研究讨论。因此,关于动力学拓扑结构的更普适的描述是个亟待解决的问题。

参考文献

- [1] Hasan M Z, Kane C L 2010 *Rev. Mod. Phys.* **82** 3045
- [2] Qi X L, Zhang S C 2011 *Rev. Mod. Phys.* **83** 1057
- [3] Jotzu G, Messer M, Desbuquois R, Lebrat M, Uehlinger T, Greif D, Esslinger T 2014 *Nature* **515** 237
- [4] Fläschner N, Rem B S, Tarnowski M, Vogel D, Lühmann D S, Sengstock K, Weitenberg C 2016 *Science* **352** 1091
- [5] Wu Z, Zhang L, Sun W, Xu X T, Wang B Z, Ji S C, Deng Y, Chen S, Liu X J, Pan J W 2016 *Science* **354** 83
- [6] Song B, Zhang L, He C, Poon T F J, Haiiyev E, Zhang S, Liu X J, Jo G B 2018 *Sci. Adv.* **4** 4748
- [7] Poli C, Bellec M, Kuhl U, Mortessagne F, Schomerus H 2015 *Nat. Commun.* **6** 6710
- [8] Weimann S, Kremer M, Plotnik Y, Lumer Y, Nolte S, Makris K G, Segev M, Rechtsman M C, Szameit A 2017 *Nat. Mater.* **16** 433
- [9] Xiao L, Zhan X, Bian Z H, Wang K K, Zhang X, Wang X P, Li J, Mochizuki K, Kim D, Kawakami N, Yi W, Obuse H, Sanders B C, Xue P 2017 *Nat. Phys.* **13** 1117
- [10] Zeuner J M, Rechtsman M C, Plotnik Y, Lumer Y, Nolte S, Rudner M S, Segev M, Szameit A 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 040402
- [11] Zhan X, Xiao L, Bian Z, Wang K, Qiu X, Sanders B C, Yi W, Xue P 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 130501
- [12] Shen H, Zhen B, Fu L 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 146402
- [13] Chen Y, Zhai H 2018 *Phys. Rev. B* **98** 245130
- [14] Kunst F K, Edvardsson E, Budich J C, Bergholtz E J 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 026808
- [15] Yao S, Wang Z 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 086803
- [16] Yao S, Song F, Wang Z 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 136802
- [17] Caio M D, Cooper N R, Bhaseen M J 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 236403
- [18] D'Alessio L, Rigol M 2015 *Nat. Commun.* **6** 8336
- [19] Wang C, Zhang P, Chen X, Yu J, Zhai H 2017 *Phys. Rev. Lett.* **118** 185701
- [20] Yang C, Li L, Chen S 2018 *Phys. Rev. B* **97** 060304
- [21] Gong Z, Ueda M 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 250601
- [22] Zhang L, Zhang L, Niu S, Liu X J 2018 *Science Bulletin* **63** 1385
- [23] Zhang L, Zhang L, Liu X J 2018 arXiv: 1807.10782 [cond-mat.quant-gas]
- [24] Fläschner N, Vogel D, Tarnowski M, Rem B S, Lühmann D S, Heyl M, Budich J C, Mathey L, Sengstock K, Weitenberg C 2018 *Nat. Phys.* **14** 265
- [25] Tarnowski M, Nur-Unal F, Fläschner N, Rem B S, Eckard A, Sengstock K, Weitenberg C 2017 arXiv:1709.01046 [cond-mat.quant-gas]
- [26] Sun W, Yi C R, Wang B Z, Zhang W W, Sanders B C, Xu X T, Wang Z Y, Schmiedmayer J, Deng Y J, Liu X J, Chen S, Pan J W 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 250403
- [27] Guo X Y, Yang C, Zeng Y, Peng Y, Li H K, Deng H, Jin Y R, Chen S, Zheng D N, Fan H 2018 arXiv:1806.09269 [cond-mat.stat-mech]
- [28] Wang K, Qiu X, Xiao L, Zhan X, Bina Z, Yi W, Xue P 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 020501
- [29] Tian T, Ke K, Zhang L, Lin L, Shi Z, Huang P, Lee C, Du J 2018 arXiv:1807.04483 [quant-ph]
- [30] Xu X Y, Wang Q Q, Heyl M, Budich J C, Pan W W, Chen Z, Jan M, Sun K, Xu J S, Han Y J, Li C F, Guo G C 2018 arXiv:1808.03930 [quant-ph]
- [31] Wang K, Qiu X, Xiao L, Zhan X, Bian Z, Yi W, Xue P 2018 arXiv:1808.06446 [quant-ph]
- [32] Heyl M, Polkovnikov A, Kehrein S 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 135704
- [33] Heyl M 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 140602
- [34] Heyl M 2018 *Rep. Prog. Phys.* **81** 054001
- [35] Budich J C, Heyl M 2016 *Phys. Rev. B* **93** 085416
- [36] Huang Z, Balatsky A V 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 086802
- [37] Vajna S, Dora B 2015 *Phys. Rev. B* **91** 155127
- [38] Zhou L W, Wang Q H, Wang H L 2018 *Phys. Rev. A* **98** 022129
- [39] Gu J, Sun K 2016 *Phys. Rev. B* **94** 12511
- [40] Qiu X, Deng T S, Guo G C, Yi W 2018 *Phys. Rev. A* **98** 021601
- [41] Qiu X, Deng T S, Hu Y, Xue P, Yi W 2018 arXiv:1806.10268[cond-mat.quant-gas]
- [42] Bender C M, Boettcher S 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 5243
- [43] Bender C M, Brody D C, Jones H F 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 270401
- [44] Bender C M 2007 *Rep. Prog. Phys.* **70** 947
- [45] Su W P, Schrieffer J R, Heeger A J 1979 *Phys. Rev. Lett.* **42**

1698

- [46] Zhu B, Lu R, Chen S 2014 *Phys. Rev. A* **89** 062102
 [47] Garrison J, Wright E 1988 *Phys. Lett. A* **128** 177
 [48] Brody D C 2014 *J. Phys. A: Math. Theor.* **47** 035305
 [49] Li J, Harter A K, Liu J, de Melo L, Joglekar Y N, Luo L 2016 arXiv:1608.05061[cond-mat.quant-gas]
 [50] Kohei K, Yuto A, Hosho K, Masahito U 2018 *Phys. Rev. B* **98** 085116

SPECIAL TOPIC—Cold atoms and molecules

Fixed points and dynamic topological phenomena in quench dynamics^{*}

Deng Tian-Shu Yi Wei[†]

(Key Laboratory of Quantum Information, University of Science and Technology of China, CAS, Hefei 230026, China)

(Received 30 October 2018; revised manuscript received 27 December 2018)

Abstract

In this review, we discuss the recent progress on the study of dynamic topological phenomena in quench dynamics. In particular, we focus on dynamic quantum phase transition and dynamic topological invariant, both of which are hinged upon the existence of fixed points in the dynamics. Further, the existence of these fixed points are topologically protected, in the sense that their existence are closely related to static topological invariants of pre- and post-quench Hamiltonians. We also discuss under what condition these dynamic topological phenomena are robust in non-unitary quench dynamics governed by non-Hermitian Hamiltonians. So far, dynamic topological phenomena have been experimentally observed in synthetic systems such as cold atomic gases, superconducting qubits, and linear optics. These studies extend our understanding of topological matter to the non-equilibrium regime.

Keywords: topological phase, quench dynamics, dynamic topological invariant, ultracold atoms

PACS: 03.75.Kk, 03.75.Ss

DOI: 10.7498/aps.68.20181928

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 15522545).

† Corresponding author. E-mail: wyiz@ustc.edu.cn

冷原子物理中的一维少体问题

刘彦霞 张云波

Review of one-dimensional few-body systems in ultracold atomic physics

Liu Yan-Xia Zhang Yun-Bo

引用信息 Citation: [Acta Physica Sinica](#), 68, 040304 (2019) DOI: 10.7498/aps.68.20181993

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181993>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

一维准周期晶格的性质及应用

Properties and applications of one dimensional quasiperiodic lattices

物理学报. 2019, 68(4): 040301 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181927>

一维原子链局域等离激元的非线性激发

Nonlinear excitation of localized plasmon in one-dimensional atomic chain

物理学报. 2016, 65(8): 087301 <https://doi.org/10.7498/aps.65.087301>

超冷原子系综的非高斯纠缠态与精密测量

Non-Gaussian entangled states and quantum metrology with ultracold atomic ensemble

物理学报. 2019, 68(4): 040306 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190147>

超冷费米气体的膨胀动力学研究新进展

Recent progress of expansion dynamics in strongly-interacting ultracold Fermi gases

物理学报. 2019, 68(4): 046702 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20182293>

光晶格中超冷原子系统的磁激发

Magnetic excitation of ultra-cold atoms trapped in optical lattice

物理学报. 2019, 68(4): 043703 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190153>

专题：冷原子-分子物理

冷原子物理中的一维少体问题^{*}刘彦霞¹⁾²⁾ 张云波^{1)†}

1) (山西大学, 理论物理研究所, 太原 030006)

2) (中国科学院物理研究所, 北京 100190)

(2018年11月9日收到; 2019年1月7日收到修改稿)

作为构成量子多体系统的基本单元, 一维少体系统的研究不仅可以在理论上为多体系统的量子关联及动力学等性质提供更为基本的理解, 也可以为实验上制备多体系统提供更加方便和功能更加全面的方法。本文回顾了冷原子物理中一维少体系统最新的实验和理论进展。首先介绍了少体实验中实现的谐振子势阱中确定原子数的精确制备, 亚稳态势阱和双阱系统中原子的隧穿, 以及强相互作用下等效自旋链的实验结果。然后深度解析了理论研究方面, 特别是基于精确可解模型的一些重要结果, 包括亚稳态势阱中相互作用原子的隧穿概率, 以及相应实验上常见势阱的能谱分析、密度分布、隧穿动力学以及强相互作用极限下的有效自旋链模型等。

关键词: 冷原子物理, 一维系统, 少体问题, 精确可解模型

PACS: 03.75.Lm, 67.85.-d, 03.75.Mn

DOI: 10.7498/aps.68.20181993

1 引言

少体物理几乎在所有的物理分支中都起着重要作用, 比如天体力学中的三体开普勒问题以及量子力学中把氦原子中的核子看做是质点的三体问题, 一般情况下三体问题很难退化到一个有效的单体问题。这里简单介绍一些囚禁在势阱中的玻色子或费米子的少体问题, 这些都是研究少体物理的理想模型。这些系统中有很多是可以解析处理的, 尽管存在很强的相互作用和很多的自由度, 但是在某些情况下, 可以转换成单体问题来求解。

如今, 简并的玻色和费米气体在世界各地的实验室都可以产生。大多数实验小组都以碱金属原子作为研究对象, 如 Li, Na, K, Rb, Cs, 这些原子的共同特点是最外层只有一个价电子。在超冷温度下, 当两体相互作用的有效力程 r_0 远小于德布罗意

波长 λ_{dB} 时, 原子间的相互作用主要是以各向同性的 s 波碰撞为主。s 波碰撞的效应可以通过 s 波散射长度 a_s 描述, 在很多情况下 a_s 成为用来描述系统的唯一微观参数^[1,2]。一个经典的例子就是平均场 Gross-Pitaevskii 方程^[3-6] 只依赖于粒子数 N 和 s 波散射长度 a_s 。Gross-Pitaevskii 方程将多体问题转换成一个有效的单体问题, 可以非常准确地描述弱相互作用稀薄玻色凝聚体的特性。除了碱金属原子, 实验上也可以实现价电子结构更复杂的原子的凝聚, 如 Ca, He, Cr, Yb, Sr。例如两个 Cr 原子间的碰撞是各向异性和长程的^[7,8]。这些特性会引起超出 s 波的物理, 两原子间的相互作用除了依赖 s 波散射长度外还依赖偶极相互作用强度。

实验上囚禁少体系统可以通过所谓的微势阱装载少数个粒子来实现^[9]。一系列的少体系统可以通过将多个原子囚禁在很深的光晶格中来实现, 其中不同格点间的隧穿被抑制, 近邻相互作用可以忽

* 国家自然科学基金(批准号: 11674201, 11474189)资助的课题。

† 通信作者。E-mail: ybzhang@sxu.edu.cn

略^[10,11]. 对于冷原子系统, 原子间的相互作用可以通过外磁场在 Feshbach 共振附近调节^[12]. 超冷碱金属原子间的 Feshbach 共振现象可以用两通道模型解释. 两个原子最外面的两个电子的相互作用可以由一个比较浅的电子自旋三重态和一个比较深的单重态的 Born-Oppenheimer 势能曲线来描述. 超精细相互作用将单态和三重态的势能耦合, 形成一个闭通道和一个开通道. 当闭通道的束缚能量和开通道入口处的能量相同时就发生 Feshbach 共振, 散射长度趋于发散, 1998 年首次在超冷原子气体中观察到 Feshbach 共振^[13–15], 为理论和实验对比铺平了道路.

一个特别有趣的少体现象是 Efimov 效应. 早在 1970 年, 俄罗斯核物理学家 Efimov^[16,17] 就发现在无穷大 s 波散射长度时, 自由空间的两体系统只存在一个零能束缚态, 没有其他弱的束缚态. 但是当加入第三个粒子以后, 就会出现令人惊讶的结果, 相应的三体系统会出现无穷多个弱的束缚三体态, 且束缚能有分立标度不变性^[18,19](这里假设只有两体相互作用). Efimov 效应激发了很多理论和实验的研究^[20], 直到现在仍然是少体物理中的重要研究课题. 在氦的三聚物、核物理、还有其他系统中都有三体 Efimov 效应和关联的 Efimov 共振的研究. 然而, 它的第一个实验证是 2006 年由 Kraemer 等^[21] 在铯原子气体中完成的. 从更广的范围看, Efimov 态是 Borromean 环的一种, 这一类物态的标志特征是只有三个粒子会形成束缚态环链, 而其中任意两个都不互相束缚. 这是一个纯粹由量子力学导致的效应, 有丰富而深刻的物理内涵. 自从 Efimov 效应提出以后, 推广到大系统已经有很多进展, 但这仍然是一个开放问题. 在自由空间或者有外势的情况下 N 体系统 ($N > 3$) 的能谱如何依赖于三体参数, 四体、五体和更多体系统的研究可能会给出答案.

本文主要回顾最近超冷原子实验在准一维少体系统中的突破性进展及相关的理论研究^[22,23]. 海德堡 Zürn 等首先将两个费米子囚禁在光势阱中, 研究了强相互作用下费米子的费米化, 通过施加一个磁场梯度, 在排斥相互作用下研究了单粒子的隧穿^[24], 在吸引相互作用下研究了配对粒子的隧穿^[25]. 然后通过精确地逐个增加原子个数, 测量单个杂质粒子与背景气体的相互作用可以用来研究从少体到多体的跨越, 观察到了费米海的形成^[26]. 该实验

组接着实现了两个原子在双势阱间的量子隧穿, 得到相互作用强度对双势阱的本征态以及占据概率的影响^[27], 在一维的谐振子势阱中准确制备由自旋 1/2 费米子构成的反铁磁海森堡自旋链^[28]. Kaufman 等^[29] 用光镊子将单个原子冷却到它的振动基态, 随后扩展实验技术将两个原子冷却到双阱的基态, 通过两个粒子的干涉观察粒子的统计效应^[30].

2 一维冷原子少体实验

目前超冷气体的研究大部分关注的是多体系统的性质, 在热力学极限下粒子数的涨落和散粒噪声一样, 不会明显改变热力学量, 例如温度、压强等. 与此相反, 少体系统非常依赖于粒子的数目. 目前的实验技术已经可以很精确地控制少体系统中粒子的个数. 海德堡 Jochim 实验小组从 2011 年开始对一维冷原子物理中的少体问题做了一系列关键实验, 包括相互作用原子在亚稳态和双阱模型中的隧穿^[24–28], 从少体到多体的转变, 以及一维自旋链的量子磁学. 他们用光偶极阱和磁场梯度将少数⁶Li 费米原子制备到基态, 精确度可以达到 $93 \pm 2\%$. 粒子囚禁在纵横比为 1:10 的三维雪茄状的势阱中, 各方向可近似认为是谐振子势阱, 此系统可以作为一维系统来处理. 文献^[31] 中给出的解析解可以很好地描述这种势阱中两个相互作用原子的基态. 一维光势阱加上梯度磁场可以将势阱的一边打开而形成一个亚稳态势阱, 是研究隧穿动力学的重要模型之一. 原子间的相互作用可以通过 Feshbach 共振^[12] 和束缚诱导共振^[32] 来调节. 一维的耦合常数 g 可以通过三维散射长度 a_{3D} 和横向谐振子势的特征长度 $a_{\perp} = \sqrt{\hbar/\mu\omega_{\perp}}$ 来确定, 这里 \hbar 是普朗克常数, $\mu = m/2$ 是两个质量为 m 的原子的约化质量. 耦合常数为

$$g = \frac{2\hbar^2 a_{3D}}{\mu a_{\perp}^2} \frac{1}{1 - Ca_{3D}/a_{\perp}}, \quad (1)$$

这里常数 $C = \zeta(1/2) \simeq 1.46$, ζ 是 Riemann zeta 函数. 当 $a_{3D} = a_{\perp}/C$ 时发生所谓的束缚诱导共振, 一维耦合常数发散, 这样三维散射长度为有限值时就可以表现出共振散射的特点.

2.1 原子的费米化及单粒子隧穿

当相互作用强度趋于无穷时, 两个可区分的粒子的能量和波函数的模平方与两个无相互作

用的全同费米子相同, 这被称为原子的费米化。实验上通过直接比较强相互作用极限的两种可区分费米子和相同势阱中的两个全同费米子来观察这种现象。文献 [24] 将两个⁶Li 费米原子制备到最低的两个 Zeeman 子能级的超精细态 $|F=1/2, m_F=\pm 1/2\rangle$, 分别标记为 $|\uparrow\rangle$ 和 $|\downarrow\rangle$ 。对于可区分粒子系统和全同系统分别用 $|\uparrow\uparrow\rangle$ 和 $|\uparrow\downarrow\rangle$ 表示。由于费米子的反对称性, 全同系统感受不到 s 波相互作用, 对于可区分粒子系统的相互作用则可以通过磁 Feshbach 共振来调节。实验上可以测量其中一个原子隧穿出势阱的时间随相互作用强度 g 的变化规律, 通过拟合留在阱中的平均粒子数可定义一个隧穿时间常数 τ 。实验发现随着磁场的增加, 两个可区分原子的 τ 减少了两个数量级, 而全同费米子的 τ 保持为常数, 二者在 CIR 处相交。对⁶Li 原子, 该 CIR 共振发生在磁场为 (783.4 ± 0.4) G ($1G = 10^{-4}$ T) 处。也就是说在相互作用强度 $g \rightarrow \infty$ 时, $|\uparrow\uparrow\rangle$ 态和 $|\downarrow\downarrow\rangle$ 态的能量、波函数密度分布及隧穿时间常数 τ 都是相同的。文献 [33] 通过 WKB(Wenzel-Kramers-Brillouin) 近似给出了隧穿的准粒子理论, 很好地解释了实验的数据点, 揭示了波函数在束缚诱导共振点处的费米化特点。

2.2 原子的配对隧穿

原子费米化的研究是将两个可区分的原子制备到排斥相互作用区域, 该区域系统中的粒子只会出现单粒子隧穿。当原子处在吸引相互作用区域时, 会发生两个原子同时隧穿的现象 [25]。测量过程如下: 首先将两个原子制备到基态, 一个原子处在 $|\uparrow\rangle$ 态, 另一个处在 $|\downarrow\rangle$ 态, 然后突然加上磁场梯度, 使势阱的一边倾斜形成势垒, 这时粒子会跑出去, 在某个固定的时间迅速去掉磁场梯度, 将势阱恢复, 然后测量势阱里面的原子个数, 重复多次, 计算某一时刻的势阱出现两个原子、单个原子、以及零个原子的概率 $P_2(t), P_1(t), P_0(t)$ 。通过这些概率可以得到平均粒子数 $\bar{N}(t) = 2P_2(t) + P_1(t)$ 随时间的演化。

为了描述两个粒子的配对隧穿, 实验中用一个简单的模型来描述, 如图 1 所示。对于两个原子的隧穿有两个过程: 一个过程是配对隧穿, 即两个原子同时离开势阱, 发生这个过程的速率记为 γ_p 。另一个过程是原子按次序离开势阱, 第一个粒子先离开势阱, 第二个粒子处在势阱的非微扰基态, 这个

过程第一个粒子隧穿的速率记成 γ_s 。这个速率主要由隧穿势垒的高度决定, 同时依赖于两个原子的相互作用能。对于第二个原子, 没有相互作用的影响, 因此离开势阱的速率是无相互作用系统的 γ_{s_0} 。考虑实验上有限的准备精确度以及通过改变磁场调节相互作用强度会影响原子自旋的取向, 隧穿速率可以修正成为一个依赖于自旋的结果。实验结果表明在相互作用强度 $g > -0.59$ 时是没有配对隧穿的。在强吸引相互作用区域 $g < -0.64$, 粒子配对隧穿占主导地位, 单粒子的隧穿速率很小, 可以认为两个粒子绑在一起形成了束缚态, 相互作用可看做是其内部的自由度。文献 [33,34] 通过 WKB 近似理论计算给出了隧穿率和其随相互作用强度的变化。

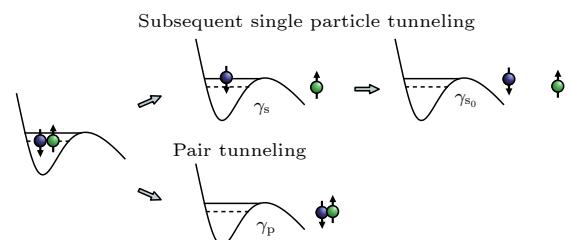


图 1 双原子的两种隧穿过程: 单原子次序隧穿及两原子配对隧穿。本图摘自参考文献 [25]

Fig. 1. The loss processes include two tunneling processes of two atoms out of a metastable potential: subsequent single-particle tunneling and direct pair tunneling (Reproduced with permission from Ref. [25]).

2.3 双阱中的两个费米子

实验上双阱可以由两束激光通过高分辨率的物镜聚焦产生, 通过声光偏转器独立地控制两束激光的强度和位置, 可以调节双阱的隧穿耦合系数 J 和两阱之间的偏差 Δ 。双阱是构成光晶格的基本单元, 文献 [27] 介绍了半满填充时 Fermi-Hubbard 模型的基本构建块的实现, 即在双阱中 $|\uparrow\rangle$ 态和 $|\downarrow\rangle$ 态原子形成的自旋单态。在 Hubbard 模型体系, 两个粒子的空间波函数可以由基矢 $|LL\rangle, |LR\rangle, |RL\rangle, |RR\rangle$ 展开, 其中 $|L\rangle$ 和 $|R\rangle$ 分别表示单粒子在左阱和右阱的基态。通过对角化对称双阱在双模近似下的哈密顿量, 可以得到四个本征态 a, b, c, d , 其本征能量分别是 $2A_{-}J, U, 2A_{+}J, 0$, 这里 $A_{\pm} = \frac{1}{4}(U/J \pm \sqrt{16 + (U/J)^2})$ 。基态 a 和第二激发态 c 是依赖隧穿能 J 和相互作用强度 U 的, 并且这两个态都是满足交换对称的。文献 [27] 给出了实验结

果: 基态 a 的双占据概率随着排斥相互作用的增加而增加, 第二激发态 c 则相反, 双占据几率随着相互作用的增加而减小. b 和 d 这两个态的占据概率则不依赖于相互作用强度. d 是交换反对称的态, 其占据概率不随相互作用强度改变. 但是 b 是交换对称的态, 实验中并没有给出这个态的占据概率随相互作用强度的改变. 另一方面, 从这几个态的宇称对称性来看, a 和 c 是偶宇称态, b 和 d 是奇宇称态. 双模近似下 b 是一个两粒子的 NOON 态, 是量子力学两体的最大纠缠态.

为了研究两个粒子在双阱中的隧穿动力学. 实验上首先将两个原子制备到 $|LL\rangle$ 态, 然后迅速将势垒降低到可以使原子在双阱中来回隧穿. 为了观察动力学的结果, 在演化的不同时刻, 迅速增加势垒的高度使原子在双阱中的空间分布锁定, 然后通过荧光谱测量每个阱中原子的个数, 重复测量多次得到每一时刻的占据概率. 实验可以给出不同参数下占据概率随时间的振荡图像, 也可以将原子制备到系统的本征态, 如基态、激发态, 探测两个粒子在不同阱的概率和两个粒子在同一个阱的概率, 得到相互作用强度对双势阱的本征态以及占据概率的影响.

2.4 少体到多体: 观察费米海的形成

知道一个物理体系什么时候可以具有宏观特性并且可以用多体理论很好地描述是非常困难的. 一维冷原子的少体实验^[26] 通过精确控制单杂质系统中全同费米子的数目来研究从少体到多体的跨越. 首先制备一个 $N + 1$ 个粒子的系统, 其中 1 个杂质粒子和 N 个囚禁在细长光偶极阱基态的全同粒子之间存在排斥相互作用. 实验上将超冷费米子原子制备到两个精细态来实现这样的系统, 这里杂质粒子处在 $|\downarrow\rangle$ 态, 全同粒子都处在 $|\uparrow\rangle$ 态. 为了探测这个系统, 实验上主要测量杂质和全同粒子间的相互作用能 $\Delta E = E(N, N_{\downarrow} = 1) - E(N, N_{\downarrow} = 0)$ 随多数粒子数的变化. 相互作用能的测量可以通过 RF(radio frequency) 脉冲改变杂质粒子的内态来实现. 如果没有全同粒子的存在, 转变发生在频率 ν_0 , 对应杂质粒子初末态超精细能级差. 对于有 N 个全同粒子存在的情况, 杂质粒子和全同粒子之间的相互作用引起一个 $\Delta\nu(N)$ 的频率移动. 对于给定的相互作用强度, 相互作用能为 $E = \hbar\Delta\nu(N)$.

每个全同粒子的添加都会增加与杂质粒子相

互作用的原子数目, 因此随着粒子数的增加, 相互作用能是增加的. 对于弱相互作用, 满足 $\Delta E \propto \sqrt{N}$. 当 $N \rightarrow \infty$ 时, ΔE 是发散的. 因此, 通过自然能量标度重新定义相互作用能, 无量纲的相互作用能为 $E = \Delta E/E_F$, 这里 E_F 是全同原子的费米能. 由于只考虑相互作用能, 因此忽略零点动能, 这意味着对于谐振子的情况 $E_F = N\hbar\omega$. 为了补偿由于增加粒子引起的密度改变, 引入无量纲的排斥相互作用参数 $\gamma > 0$. 为了判断系统是否达到多体极限, 实验的数据要和两种极限情况比较, 一种是 $N = 1$ 的情况, 另一种是 $N \rightarrow \infty$ 的情况. 前一种情况的相互作用能可以通过两相互作用原子的精确解得到, 后一种情况是多粒子极限, 即单个杂质粒子浸入到无穷多个粒子形成的费米海中. 对于 $\gamma = 0$, 相互作用能为 0. 对于 $\gamma \rightarrow \infty$, 系统达到费米化极限, 杂质粒子和 N 个全同费米子相互作用的能量与 $N + 1$ 个没有相互作用的全同粒子的能量相同, 因此这种情况的相互作用能与费米能量 E_F 是相同的. $N = 1$ 和 $N \rightarrow \infty$ 两种极限情况在 $\gamma \rightarrow \infty$ 时结果是一致的. 比较理论和实验的结果, 可以发现 $N \geq 4$ 时的相互作用能和无穷多个粒子情况符合很好, 也就是说, $N \geq 4$ 就已经体现了多体的特性.

2.5 一维势阱中的反铁磁 Heisenberg 自旋链

实验^[28] 报导了 N_{\uparrow} 个自旋向上的粒子和 N_{\downarrow} 个自旋向下的粒子在一维势阱中如何实现 Heisenberg 自旋链. 实验中研究的系统有 $(N_{\uparrow}, N_{\downarrow}) = (2, 1), (3, 1), (2, 2)$. 这些体系的基态在强相互作用区域都表现出反铁磁态的特征. 实验上通过两个独立的测量来判断系统是否处于反铁磁态: 利用隧穿技术探测自旋链最外边粒子自旋的方向, 以及利用波函数在单粒子能级的投影探测自旋向下粒子在体系中的空间波函数.

在准一维的系统中可以通过磁 Feshbach 共振和束缚诱导共振, 将不同组分间的一维相互作用强度调到共振区域, 即费米化区域, 此时相同自旋组分的散射是被禁止的. 在费米化区域, 原子之间是不可穿透的, 因此原子在势纵轴方向的排序是固定, 这样就可以通过隧穿确定最外边原子的自旋方向. 倾斜势阱, 最外边的原子会隧穿出去. 通过探测势阱中剩余自旋向上原子的个数, 来判断隧穿出去的原子的自旋, 重复多次测量, 计算概率, 与理

论结果比较。例如,对于系统(2, 1),其基态为 $|\text{AFM}_3\rangle \propto (|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle - 2|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle + |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle)$,自旋向下粒子隧穿出去的概率为 $P_{\downarrow} = |\langle\uparrow\uparrow\downarrow|\text{AFM}_3\rangle|^2$ 。在实验中由于要加磁场梯度,因此实验结果要考虑外加磁场梯度使外势不对称引起的变化。通过以上的测量计算就可以判断是否处在反铁磁态。对于强相互作用系统,相对坐标在杂质处会产生一个尖峰,这个尖峰会导致更高能量的能级占据。一个态空间波函数越对称,尖峰就会越多。因此单粒子能级占据数的分布直接反应了系统自旋的结构。不引入外势的情况下,两分量间的强相互作用就可以使自旋链达到稳定,这使得在非格点模型中制备自旋链成为可能,也为磁学性质的研究提供了一个新的平台。

3 一维冷原子少体可解模型

量子力学中只有屈指可数的几个问题是可以通过严格求解的,其中应用最广的例子之一是谐振子势阱中的单个粒子。考虑相互作用的两体问题可精确求解的则更少,特别地,氢原子中由于库仑相互作用只和相对坐标有关,引入相对坐标和质心坐标可将动能部分分离变量,描述质心运动的方程是一个自由粒子的能量本征方程,而描述相对运动部分的方程形式上与单体波动方程完全一样,两体问题于是简化为单体问题。实验上使用激光冷却和蒸发冷却技术实现的简并原子气体需要将原子囚禁于外势场中,这些囚禁系统中的相互作用所起的作用与自由空间中的超冷碰撞不同。在自由空间中,通过微分散射截面和碰撞相移因子来探测两原子间的相互作用,而在存在囚禁势的情况下这些物理量都没有了意义,因为囚禁系统中无法构造入射态和出射态的渐进行为。相反,在囚禁势中相互有作用的多原子系统的特征在于其离散能谱以及能级间的跃迁矩阵元。下面简单介绍几种一维囚禁势阱中严格可解的相互作用少原子体系的离散能谱及相关的动力学结果,该体系的哈密顿量为

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \left[-\frac{\hbar^2}{2m_i} \frac{d^2}{dx_i^2} + V(x_i) \right] + g \sum_{i < j}^N \delta(x_i - x_j), \quad (2)$$

其中 x_i 为原子的坐标, m_i 为原子的质量, N 为粒子数, $V(x_i)$ 为囚禁势阱,原子间为接触相互作用,相互作用强度 g 可以通过Feshbach共振从弱相互作用到强相互作用很大范围内进行调节。

3.1 Bethe Ansatz 方法简介

对于相互作用的多体均匀系统,哈密顿量(2)式中 $V(x_i) = 0$,Bethe ansatz (BA)^[35]提供了一种行之有效的方法,在特定的边界条件下可以给出某些一维系统的精确结果。该方法最早由Bethe^[35]在1931年提出并成功求解了一维各向同性的铁磁Heisenberg自旋链。1963年,Lieb和Liniger^[36]将这个方法应用到一维排斥性相互作用无自旋的均匀玻色子系统中。随后,McGuire^[37],Gaudin^[38],Yang等^[39]和Baxter^[40]将该方法推广到了多分量费米子、玻色子以及玻色费米混合系统中。Lieb和Wu^[41]将该方法应用到Hubbard模型,得到了基态能量、波函数以及化学势。BA方法在凝聚态物理、强关联体系、以及数学领域中都有很广泛的应用^[42-46]。近年来,冷原子实验技术的精确可控性促进了理论上进一步更细致准确地研究基础模型的原理和性质,其中一个方面就是可积模型的研究,包括各种可积模型BA方程的数值求解其基态^[47-53],一维可积模型的热力学及临界现象^[54-63]等。例如,在2004年和2009年实验上分别实现了Tonks-Girardeau(TG)气体^[64,65]和超TG(sTG)气体^[66,67],很快就有理论小组通过BA严格解给出了关于TG气体和超TG(sTG)气体的联系,同时也解释了sTG气体实现的物理机理^[68-71]。近期有实验利用光晶格实现Lieb-Liniger模型,并通过测量得到的高精度密度分布来提取热力学量,验证了量子临界现象和Tomonaga-Luttinger Liquid理论等^[72,73]。下面主要介绍BA方法的基本思路。

周期性边界条件下波函数满足 $\psi(\dots, x_j = 0, \dots) = \psi(\dots, x_j = L, \dots)$,系统的波函数可以假设成平面波叠加的形式

$$\psi(x_1, \dots, x_N) = \sum_{Q, P} \theta(x_{Q_1} < \dots < x_{Q_N}) \times A(Q, P) e^{i \sum_{l=1}^N k_{P_l} x_{Q_l}}, \quad (3)$$

其中 $Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_N)$ 和 $P = (P_1, P_2, \dots, P_N)$ 是 $(1, 2, \dots, N)$ 的两个排序, k_i 是准动量, θ 是阶梯函数,当 $x_{Q_1} < \dots < x_{Q_N}$ 时等于1,否则为0, A 是系数。根据波函数在 $x_i - x_j = 0$ 的连续性和其一阶导数的不连续性可以得到散射矩阵 S 。对于无自旋的系统,所有的 S 矩阵都是 c 数,再结合周期性边界条件就可以得到BA方程,形如 $e^{ik_j L} =$

$\prod_{l \neq j}^N S_{lj}(k_j - k_l)$. 在描述单分量玻色子的 Lieb-Liniger 模型中 $S_{lj}(k_j - k_l) = (k_j - k_l + i\zeta)/(k_j - k_l - i\zeta)$, ζ 为粒子间的相互作用强度.

对于多组分系统, 粒子具有内部自旋自由度, S 矩阵通常是算符, 满足 Yang-Baxter 方程

$$S_{ab}S_{ac}S_{bc} = S_{bc}S_{ac}S_{ab}. \quad (4)$$

该方程是 Yang^[39] 和 Baxter^[40] 在研究一维 δ 势相互作用费米气体模型和二维格子统计模型时分别提出的. 其含义是系统从初态 (a, b, c) 到末态 (c, b, a) 有两种途径, 这两种散射过程是等价的. (4) 式是周期性边界条件系统可积的条件. 根据 Yang-Baxter 方程, 得到转移矩阵 $t(u) = \text{tr}L_1(u)L_2(u)\cdots L_N(u)$, 这里 Lax 算符形式与散射矩阵相同:

$$L_j(u) = b(u - u_j) + c(u - u_j)P_{\sigma_j\tau}, \quad (5)$$

其中 $u_j = k_j/c$, $b(x) = -x/(-x+i)$, $c(x) = i/(-x+i)$, $P_{\sigma_j\tau}$ 是自旋交换算符, τ 代表辅助空间的自旋. 系统的哈密顿量与转移矩阵 $t(u)$ 是对易的, 通过转移矩阵的本征值和本征态, 就可以得到相应的哈密顿量的本征值和本征态. 将转移矩阵作用到本征态上结合周期性边界条件就可以得到 $t(u_j)|\psi\rangle = e^{ik_j L}|\psi\rangle$, 其中 ψ 是转移矩阵的本征态. 这个方程可通过代数 BA 方法计算, 从而得到 BA 方程. 对于两分量费米子的 Gaudin-Yang 模型, BA 方程为

$$e^{ik_j L} = \prod_{\alpha=1}^M \frac{i(k_j - \Lambda_\alpha) - c/2}{i(k_j - \Lambda_\alpha) + c/2}, \quad (6)$$

$$-\prod_{j=1}^N \frac{i(k_j - \Lambda_\alpha) - c/2}{i(k_j - \Lambda_\alpha) + c/2} = \prod_{\beta=1}^M \frac{i(\Lambda_\alpha - \Lambda_\beta) + c}{i(\Lambda_\alpha - \Lambda_\beta) - c}, \quad (7)$$

其中 $j = 1, \dots, N$, $\alpha = 1, \dots, M$, Λ 是自旋快度, M 是数量较少分量的粒子数目. 这就是 BA 方法的基本思路.

3.2 谐振子势阱中的两粒子问题

1998 年 Busch 等^[31] 给出了两个冷原子在谐振子势中的精确波函数和解析解. 为了避免处理真实原子间相互作用的困难, 在稀薄原子气体中通常采用零程的点状势将原子间相互作用近似为接触相互作用, 一维系统中只含有简单的 $\delta(x)$ 项. 质量为 m 的两个原子在频率为 ω 的一维谐振子势中的运动由 (2) 式中描述的哈密顿量, 其中

$$m_1 = m_2, N = 2, V(x_i) = \frac{1}{2}m\omega^2 x_i^2. \quad (8)$$

求解本征方程 $\hat{H}\psi(x_1, x_2) = E\psi(x_1, x_2)$, 这里 $\psi(x_1, x_2)$ 为两粒子波函数, E 为本征能量. 由于动能项和势能项都是二次函数的形式, 引入质心坐标 $X = (x_1 + x_2)/2$ 和相对坐标 $x = x_1 - x_2$, 可将本征函数分离变量 $\psi(x_1, x_2) = \Psi_{CM}(X)\varphi(x)$, 哈密顿量 (8) 式可以分解为质心部分和相对运动部分, $\hat{H} = \hat{H}_{CM} + \hat{H}_{rel}$, 可以看出质心运动的本征函数就是质量为 $M = 2m$ 的单粒子谐振子态 $\Psi_{CM,n}(X) \propto e^{-a^2 X^2} H_n(\sqrt{2}aX)$, 其中 $a = \sqrt{m\omega/\hbar}$, $H_n(x)$ 为 n 阶厄米多项式, 其本征能量为 $\mathcal{E}_n = (n + 1/2)\hbar\omega$, 这里 $n = 0, 1, 2, \dots$. 而相对运动部分的薛定谔方程可以看作质量为 $\mu = m/2$ 的粒子在谐振子势阱加一个 δ 势阱中的运动.

文献 [31] 给出了该哈密顿量的精确解, 其波函数分为奇宇称和偶宇称两部分: 1) 奇宇称的波函数(即满足粒子交换反对称)为 $\varphi_j(x) \propto e^{-a^2 x^2/4} H_j(\sqrt{2}ax/2)$, 本征能量不依赖于相互作用强度 $\varepsilon_j = (j + 1/2)\hbar\omega$, 这里 $j = 1, 3, 5, \dots$; 2) 偶宇称波函数满足粒子交换对称, 依赖相互作用强度, 其形式为^[31,74] $\varphi_j(x) \propto e^{-a^2 x^2/4} \Gamma(-v_j) U\left(-v_j, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}a^2 x^2\right)$, 相应的本征能量为 $\varepsilon_j = (2v_j + 1/2)\hbar\omega$, 其中 Γ 为伽马函数, U 是合流超几何函数, v_j 是主量子数的非整数类似量. 具体来说, 将相对运动部分的波函数 $\varphi_j(x)$ 按照谐振子波函数 $\phi_n(x)$ 展开, 根据正交归一性可得到展开系数 $A_n = C \frac{\phi_n^*(0)}{n - 2v_j}$, 这里 $C = -g\varphi_j(0)/\hbar\omega$. 通过波函数的积分表示可以确认 $\varphi_j(x)$ 具有合流超几何函数的形式, 而其在零点的取值 $\varphi_j(0)$ 则是贝特函数, 后者可以用伽马函数表示. 由此可以得到 v_j 满足下面的关系式:

$$\frac{\Gamma(-v_j + \frac{1}{2})}{\Gamma(-v_j)} + \frac{g}{2} = 0, \quad (9)$$

其中 g 是以 $\sqrt{\hbar^3\omega/\mu}$ 为单位的重新标度过的相互作用强度, $j = 0, 2, 4, \dots$. 给定一个相互作用强度 g 的值, v_j 有无数多个解. 以上可以看出相互作用只对交换对称的偶宇称波函数有影响, 而奇宇称的波函数因其在 $x = 0$ 处取值为零是感受不到相互作用势的. 系统的总能量为 $E_{n,j} = \mathcal{E}_n + \varepsilon_j$, 总的波函数为 $\psi_{n,j}(x_1, x_2) \propto \Psi_{CM,n}(X)\varphi_j(x)$, 图 2(a) 展示了 $n = 0$ 情况下总能量 E 随相互作用变化的趋势.

Rubeni 等^[75] 用变分法对一维谐振子势阱中

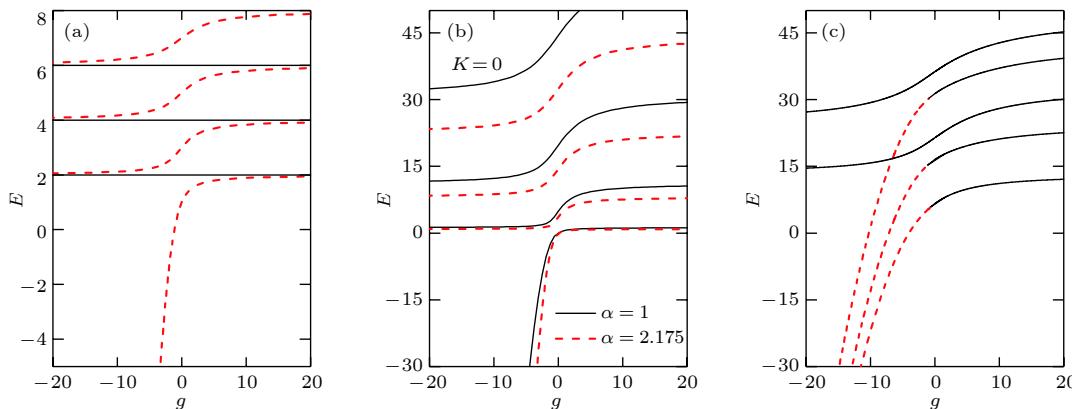


图 2 三种相互作用的两原子系统的能量 E 与相互作用强度 g 的关系: (a) 谐振子势阱中的两原子, 黑实线和红虚线分别表示相对运动奇宇称和偶宇称波函数所对应的能量; (b) 周期边界条件下两异核原子, 黑实线和红虚线分别表示质量相等两原子和质量比为 2.175 情况下对应的能量; (c) 双势阱中相互作用两原子的奇宇称态, 一维无限深方势阱中心为一个强度为 $d = 0.5$ 的 δ 势垒劈开, 黑实线和红虚线分别表示准动量为实数的原子本征态和准动量为复数的分子态对应的能量. 这里能量的单位分别是 $\hbar\omega, 8\hbar^2/m_1L^2, 2\hbar^2/mL^2$, 相互作用强度 g 的单位分别是 $\sqrt{\hbar^3\omega/\mu}, 8\hbar^2/m_1L, 2\hbar^2/mL$

Fig. 2. Energy spectrum of three types of interacting two-atom system: (a) Two atoms in a harmonic oscillator potential. Black solid lines and red dashed lines are odd parity and even parity energy level respectively; (b) two heteronuclear atoms in a ring trap. Black solid lines and red dashed lines are energy levels for equal mass and mass ratio $\alpha = 2.175$ respectively; (c) two atoms in a δ -split hard-wall double well. Five lowest odd parity levels for barrier height $d = 0.5$. Black solid lines and red dashed lines are the bound states for atoms with real-valued quasimomentum and the molecule states with complex-valued quasimomentum respectively.

两相互作用费米子的基态波函数进行了研究, 但其试探波函数存在缺陷, 即在边界处一阶导数不连续, Liu 等^[76]改进了该变分法方案得到了关于动量的一个限制条件, 该条件类似于 Bethe ansatz 方程, 但是与边界条件无关, 结合变分法和波函数及其一阶导数的连续性条件得到的基态能量和精确结果符合, 给出了更为合理的基态波函数, 可以作为两原子亚稳态隧穿的初始波函数.

3.3 周期边界条件下两异核原子的解析解

冷原子混合物体系是不同质量原子的混合, 实验上已经成功制备了 ^{40}K - ^{6}Li , ^{40}K - ^{87}Rb , ^{6}Li - ^{23}Na 等异核系统^[77-79]. 异核费米子的超流性质、配对机制以及异核分子的形成等新现象得到广泛研究^[80-82]. 在异核系统中, 一个新的自由度——质量比表征了原子混合物体系的特性, 诱导了异核模型中新的物理效应. 这里介绍一种精确求解周期边界条件下两体相互作用异核系统的精确求解方法^[83], 其关键在于较为普适的波函数假设.

具有接触相互作用的两个异核原子在周期边界条件下可以看作原子囚禁在一维环状的势阱中, 在哈密顿量(2)式中取

$$m_1 \neq m_2, N = 2, V(x_i) = 0. \quad (10)$$

周期边界条件要求波函数满足 $\psi(x_1 + L, x_2) =$

$\psi(x_1, x_2 + L) = \psi(x_1, x_2)$, 其中 L 是一维系统的长度或环状势的周长. 异核系统质心坐标应当定义为 $X = (m_1x_1 + m_2x_2)/(m_1 + m_2)$, 约化质量则为 $\mu = m_1m_2/(m_1 + m_2)$. 形式上质心和相对部分的运动仍然可以分离变量, 波函数可写为 $\psi(x_1, x_2) = e^{iKX}\varphi(x)$, 这里 e^{iKX} 是质心运动为自由粒子情况下的平面波解, $K = k_1 + k_2$ 为总动量, 而相对运动部分的波函数有如下形式

$$\varphi(x) = (A_+e^{ikx} + B_+e^{-ikx})\theta(x) + (A_-e^{ikx} + B_-e^{-ikx})\theta(-x), \quad (11)$$

其中 A_{\pm} 和 B_{\pm} 为待定系数, $\theta(x)$ 为阶跃函数. 然而相对部分的动量 $k = (m_2k_1 - m_1k_2)/(m_1 + m_2)$ 并不是独立的, 事实上由于周期边界条件的影响它总是与质心部分的总动量 K 耦合在一起. 将波函数(11)式写回到 x_1 和 x_2 坐标空间, 利用周期边界条件可以得到 $e^{iKL} = 1$, 这意味着 $KL = 2\pi n$, n 为整数. 相对动量满足

$$\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\frac{k}{c} = \frac{\sin(kL)}{\cos\left(\frac{KL}{1+\alpha}\right) - \cos(kL)}, \quad (12)$$

其中 $c = gm_1/\hbar^2$, $\alpha = m_2/m_1$ 为质量比, 显然 k 与 K 是耦合在一起的. 令 $\hbar^2/2m_1 = 1$, 异核系统的能量表示为 $E = \frac{1}{1+\alpha}K^2 + \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)k^2$. 由于系统总动量守恒, 可以用 K 来标记能谱. $K = 0$ 对应系

统的基态, $K = \pm 2\pi/L$ 则对应两个简并的激发态。数值求解上述方程得到异核系统的本征能谱和本征波函数, 可以研究系统的密度分布和动量分布等。在实际的异核系统⁴⁰K-⁸⁷Rb 中质量比为 $\alpha = 2.175$, 图 2(b) 对比了异核两原子和两玻色原子的无量纲能谱。结果表明不等质量情况下的能谱总是低于等质量情况。在吸引相互作用 $c < 0$ 时, 发现仅当吸引相互作用足够强, 超过一定阈值 c_t 时才能够形成束缚态, 阈值 $c = c_t$ 表示为 $c_t = (1 + \alpha) \times [\cos(KL/(1 + \alpha) - 1)]/\alpha L$ 。对于总动量 $K = 0$ 的情况, 阈值 $c_t = 0$, 缠缚态可以在任意小的相互作用下形成。当总动量 $K \neq 0$, 则有 $c_t < 0$, 仅当吸引作用足够大 $|c| > |c_t|$ 时, 两体异核系统才能形成束缚态。

异核系统的动量分布与全同粒子系统区别很大, 因为系统不再有交换对称性。质量比为 $\alpha = 2.175$ 时的动量分布表明 [83], 对于全同粒子系统, 每个粒子的动量分布相同, 动量位于 $\pm 2\pi/L$ 或者 0 的概率相同; 对于异核系统, 质量大的粒子以 $\pm 2\pi/L$ 为中心, 质量小的粒子则集中在 0 处, 从而保证总体能量更低。

3.4 双原子在亚稳态势阱的隧穿

冷原子少体实验的准确制备使得在少体系统中研究隧穿问题成为可能。隧穿理论的两个主要模型包括亚稳态势阱和双势阱。在这两种势阱中研究隧穿已有很长的历史, 最新进展包括隧穿的干涉效应以及共振隧穿等 [24,25,84]。亚稳态势阱的量子隧穿衰变是早已熟知的量子现象, 如核衰变、量子成核等, 这些模型都是在单粒子图像上建立的。这里主要介绍相互作用的双原子体系在亚稳态势阱的隧穿问题, 哈密顿量中的外势场如下

$$V(x) = pV_0 \left(1 - \frac{1}{1 + (x/x_r)^2} \right) - \mu_m B' x, \quad (13)$$

其中 V_0 是光势阱的初始深度, p 是以初始光阱深度为单位的光阱深度, x_r 是光势阱光波的 Rayleigh 长度, μ_m 是原子磁矩, B' 是磁场梯度的强度。不考虑两个原子在势阱外的相互作用, 文献 [33] 建立了一个原子从含有两个相互作用的冷原子的阱中隧穿的理论, 通过与势阱中的伴随原子相互作用而修饰的准粒子波函数取代了隧穿矩阵元中的无相互作用的轨道。计算出的两个⁶Li 原子的衰减时间与最近的实验结果一致。双原子在这样一个外势中的运动可分为三个区域: 势阱 I, 势垒 II 和真空 III。

边界是依赖于能量的经典折返点 x_a 和 x_b , 因此区域 II 的范围是 $x_a < x < x_b$ 。这里有两种单粒子态: (i) 真空区域的波函数可以看作在势垒的地方反射, 能量为 ε 的平面波 $\chi_\varepsilon(x)$ 在势垒区域以指数衰减; (ii) 势阱区域在低能时可以看作是谐振子波函数 $\phi_n(x)$, 并且在势垒有一个尾巴, 在真空区域光滑地消失。这两种态都不能很好地描述整个区域, 但是这两个态可以近似认为是正交的。

类似地, 对整个两费米子系统来说也存在两种双粒子态: $\Psi_0(x_1, x_2)$ 是 2.1 节介绍过的能量为 W_0 的两个相互作用原子在谐振子势阱中的波函数, $\Psi_{m,\varepsilon}(x_1, x_2)$ 是一个原子留在势阱的轨道 $\phi_m(x)$, 另一个原子隧穿出去处在真空态 $\chi_\varepsilon(x)$, 且与原子无相互作用, 能量为 $W_{m,\varepsilon}$ 的波函数。根据隧穿理论, 量子隧穿过程可以看做是从 $\Psi_0(x_1, x_2)$ 到末态 $\Psi_{m,\varepsilon}(x_1, x_2)$ 的跃迁过程, 其跃迁矩阵元为 $M_{m,\varepsilon}$, 当能量守恒时 $W_0 \simeq W_{m,\varepsilon}$, Bardeen [85] 证明 $M_{m,\varepsilon} = -\hbar^2 J_{m,\varepsilon}/2m$, 这里 $J_{m,\varepsilon}$ 正比于几率流密度算符的矩阵元。衰变率可以通过量子跃迁的费米黄金规则估算, $1/\tau = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{m,\varepsilon} |M_{m,\varepsilon}|^2 \delta(W_0 - W_{m,\varepsilon})$ 。

对于两个无相互作用的粒子 $|\uparrow\downarrow\rangle$ 的情况是很容易计算的。势阱的初态就是 $n = 0$ 和 $n = 1$ 的史莱特行列式, 所有可能的末态中, 概率最大的一种是 $n = 0$, $\varepsilon = 3\hbar\omega/2$ 的组合。对于两个可区分费米子的情况, $|\uparrow\downarrow\rangle$ 不再平庸。初态不能写成简单的史莱特行列式的形式, 事实上在 3.1 节, 已经给出了质心坐标波函数 $\Psi_{CM}(X)$ 和相对运动波函数 $\varphi(x)$ 的具体形式, 这里可以简单记为 $\psi_{\uparrow\downarrow}$ 。末态仍然是一个自旋单态, 一个原子在势阱最低的能量, 另一个在真空态 χ_ε , 这里的共振能量 ε 由能量守恒来确定, 与相互作用强度 g 有关。经过计算得到以下关于跃迁矩阵元的重要结果

$$J_{0,\varepsilon} = \left[\varphi_{QP}^* \frac{d\chi_\varepsilon}{dx} - \chi_\varepsilon \frac{d\varphi_{QP}^*}{dx} \right]_{x=x_{\text{bar}}}, \quad (14)$$

其中 x_{bar} 是势垒区域 II 的任意一点, φ_{QP}^* 是准粒子的波函数, 其定义为

$$\varphi_{QP}^*(x) = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \phi_0(x') \Psi_{CM}([x'+x]/2) \varphi^*(x'-x). \quad (15)$$

衰减率因此增加了一个修正 $1/\tau \simeq A_{QP}/\tau_0$, 其中 $A_{QP} = \int dx |\varphi_{QP}(x)|^2$ 。图 3 给出了单粒子的衰减时间 τ 随磁场的变化。如黑色实线所示, 加上修正

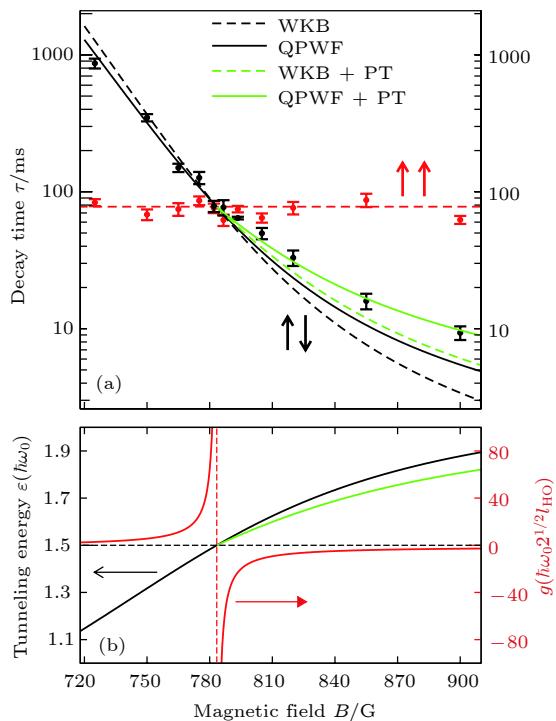


图 3 (a) 衰减时间随磁场的变化. 黑色虚线和实线分别是 WKB 和考虑准粒子波动方程的修正的结果. 绿色线表示通过微扰论考虑非谐项贡献的结果; (b) 相互作用强度和隧穿能量随磁场的变化. 本图摘自参考文献 [33]

Fig. 3. (a) Decay time τ vs magnetic field B . The points with error bars are the experimental data^[24], the dashed and solid lines are, respectively, the WKB (τ_0) and QPWF predictions. The green light gray lines include the perturbation theory correction to the tunneling energy ε ; (b) interaction strength (red gray curve) and tunneling energy (black and green light gray curve) vs B (Reproduced with permission from Ref. [33]).

以后明显与实验结果符合得更好. 由于势阱部分并不是一个好的谐振子势阱, 在求解势阱部分的波函数时可以把非谐部分看作微扰, 来计算其波函数和能量, 得到一个更准确的准粒子波函数, 进而给 A_{QP} 一个修正, 使隧穿率的计算结果更准确, 隧穿的时间依赖于相互作用强度, 如图 3 中绿线所示. 隧穿的准粒子理论为少体冷原子的亚稳态隧穿实验给出一个很好的解释.

3.5 双阱中少体玻色系统的基态性质及隧穿动力学

双阱是研究超导比特 Josephson 振荡^[86]和玻色爱因斯坦凝聚中自囚禁现象^[87–89]的典型模型. 受实验启发, 对于双阱的研究, 目前大部分的工作都是基于双模近似^[90,91], 或者是数值求解^[92,93,94], 没有严格解的结果. Murphy 等^[95]研究中间带有 δ

势垒的一维简谐势阱中一对超冷玻色原子的基态和低能激发态性质. 通过计算约化单粒子密度矩阵、动量分布和双粒子纠缠来完整表征基态性质, 得到了无限排斥相互作用 Tonks-Girardeau 极限的几个解析表达式, 并通过数值解处理了有限粒子间的相互作用, 这里空间坐标的离散化是通过分立变量表象 (DVR) 做到的. 双阱中的对相互作用形成了周期势中多体系统的基本构件, 势垒的添加使得系统变得不平庸, 由于中间势垒的存在, 势垒两边的粒子可以发生隧穿, 人们在双阱中发现了约瑟夫森振荡和自束缚现象等. 文献 [96] 研究了束缚在中间带有势垒的无限深方势阱中的少体玻色气体的基态性质. 利用玻色子与费米子的对应关系构建了 Tonks-Girardeau 气体的基态波函数, 研究了势垒两边的关联特性以及这种特性和粒子数目宇称的关系, 并且运用精确对角化方法计算了在任意势垒高度和原子间相互作用强度下系统基态的密度分布、占据数分布、动量分布等. 计算表明动量次峰峰值随着势垒的升高而增大, 随着原子间相互作用强度的增大而减小. 该模型甚至可以被推广到玻色费米混合物系统^[97], 在动量分布中次峰的出现显示了势垒两边有着显著的关联.

Liu 和 Zhang^[98]给出了双阱中的 BA 严格解, 在严格解的基础上研究了其隧穿动力学问题. 考虑 N 个质量为 m 的玻色子在中间加 δ 势垒的一维无限深方势阱中运动, (2) 式的系统哈密顿量中

$$m_i = m, V(x_i) = d\delta(x_i) + V_S(x_i), \quad (16)$$

其中 $d > 0$ 是势垒的强度, V_S 为宽度为 L 的无限深方势阱, 可以等价为开边界条件 $\psi(x_i = \pm L/2) = 0$. 由于系统是反射对称的, 可以定义宇称算符 $P\psi(x_1, x_2, \dots) = \psi(-x_1, -x_2, \dots)$, 将本征态分成偶宇称和奇宇称两部分. 文献 [98] 只得到了奇宇称部分的严格解, 主要原因是不考虑两个粒子同时与势垒的散射, 正如在 Lieb-Liniger 模型中忽略三体相互作用一样. 波函数可以由如下的 Bethe 假设给出:

$$\begin{aligned} \psi(x_1, \dots, x_N) = & \sum_{n=0}^N \sum_{\mathbf{Q}, \mathbf{P}} \sum_{\epsilon_P = \pm 1} \theta(x_{Q_1} < \dots < x_{Q_N}) \\ & \times A_n(\mathbf{Q}, \epsilon_P \mathbf{P}) e^{i \sum_{l=1}^N \epsilon_{P_l} k_{P_l} x_{Q_l}}, \end{aligned} \quad (17)$$

区别于 (3) 式中的 BA 波函数, 这里引入额外的求和指标 n , 其物理意义为位于势垒左边的原子个数. 用下标 n 来标记这一块 (block) 区域, (17) 式中对

n 的求和包含所有可能的 $N + 1$ 个块。另外 $\epsilon_P = \pm 1$ 表示粒子向右或向左运动，在势垒处粒子发生反射。因此对于固定的块区域 n ，开边界条件对于左边界和右边界是不同的，在左阱的粒子 ($i = 1, 2, \dots, n$) 只能感受到左边的边界条件 $\psi(x_{Q_i} = -L/2) = 0$ ，在右阱的粒子 ($i = n+1, n+2, \dots, N$) 只能感受到右边的边界条件 $\psi(x_{Q_i} = L/2) = 0$ 。于是存在两个反射矩阵 $\mathbf{R}(P_1)$ 和 $\mathbf{R}(P_N)$ 分别在左右边界上反射。

至于两个粒子的散射，注意到仅当相邻两个粒子的坐标位于双阱的同一侧时才能发生散射。由相互作用条件导致波函数相对坐标的一阶导数不连续，可以得到散射矩阵 $\mathbf{S}_{\epsilon_{P_i} P_i, \epsilon_{P_j} P_j}$ 。根据位于中心处势垒的阶跃条件连接块区域 $n-1$ 和 n ，可以得到第 n 个粒子和 δ 势垒的散射矩阵 $\mathbf{S}_{d, P_n}(n)$ 。存在势垒时准动量满足的 BA 类型的方程为

$$ik_{P_n} \left(\frac{1 - R_{n-1}(P_n)}{1 + R_{n-1}(P_n)} - \frac{1 - R_n(P_n)}{1 + R_n(P_n)} \right) = \frac{2m}{\hbar^2} d, \quad (18)$$

其中 $R_{n-1}(P_n)$ 表示在块区域 $n-1$ 改变 P_n 符号 ϵ_P 的两个系数 A 的比值。一系列散射加反射会改变第 n 个粒子的动量方向，即 P_n 反号：在块区域 $n-1$ ，首先应该和右边最邻近的粒子依次散射 $N-n$ 次，直到没有粒子可以散射到达最右端，然后和边界反射改变符号，再向左边依次散射，回到原先位置。两个粒子在散射过程中尽管会改变内部状态，但仍然满足动量守恒。自封闭条件要求粒子间的碰撞顺序不影响最后的结果，这给出如下的 Yang-Baxter 类型的方程

$$\begin{aligned} & \mathbf{S}_{d, P_n}(n+1) \mathbf{S}_{d, P_{n+1}}(n) \mathbf{S}_{P_n, P_{n+1}} \\ &= \mathbf{S}_{P_n, P_{n+1}} \mathbf{S}_{d, P_{n+1}}(n+1) \mathbf{S}_{d, P_n}(n), \end{aligned} \quad (19)$$

该式描述了从 (d, P_n, P_{n+1}) 到 (P_{n+1}, P_n, d) 的两个等价过程：左边表示块区域 $n-1$ 的两个粒子先碰撞，然后依次和势垒碰撞，右边表示两个邻近的粒子先后和势垒碰撞，然后这两个粒子再碰撞。作为量子反散射方法中最基础的代数结构，Yang-Baxter 方程是判断系统可积的重要依据。[\(19\)](#) 式不同于常规的 Yang-Baxter 方程，这里存在两种不同形式的散射矩阵，一种是描述两个粒子之间的散射，另一种描述粒子和势垒间的散射。极限情况下，当 $d = 0$ 时 [\(18\)](#) 式将变成熟知的开边界条件下 Lieb-Liniger 模型的 BA 方程[\[35\]](#)，在无相互作用，即 $g = 0$ 时则简化为单粒子的结果。

准动量要同时满足 [\(18\)](#) 式和 [\(19\)](#) 两式，通过数值求解得到 $N = 2$ 即两粒子在双阱中的能谱图。[图 2\(c\)](#) 展示了 $d = 0$ 和 2 的能谱随着相互作用强度 g 的变化。在无势垒的情况下奇宇称和偶宇称的解析解都存在，除 $g = 0$ 外该方法只找到了奇宇称的解。对于 $g > 0$ 的情况，准动量的解都是实数，对于 $g < 0$ 的情况，准动量有两种解，实数解对应亚稳态，互为共轭的复数解对应分子态。

精确解模型得到的能谱可用来研究两个原子在双阱中的布局数及隧穿动力学。随着排斥相互作用的增加，双占据的概率减小，单占据概率则增加，强相互作用时双占据和单占据的概率都接近 50%。将两个原子制备在一个无限高势垒的 NOON 态（数值上取 $d = 300$ ），然后将势垒的强度突然降低到 $d = 0.5$ ，原子在两阱间隧穿。[图 4](#) 给出了两个原子在同一个阱中的占据概率随时间的演化。随着排斥相互作用强度从弱到强，双占据概率振荡过程的振幅逐渐增强。强排斥相互作用使得振荡不再完整，双占据概率不能再 100% 回到初始 NOON 态。[图 4\(b\)](#) 展示了相互作用强度分别为 $g = 1.5$ 和 20 的两体密度分布在一个周期内的变化。

3.6 强相互作用系统的等效自旋链

强相互作用系统有很丰富的物理，但通常情况下求解是非常困难的。然而有一种情况除外，即相互作用趋于无穷大时。对于无穷大相互作用极限的情况，不论是玻色子还是费米子都表现出无自旋费米子的行为，每个粒子占据不同的位置，不可穿透，也就是说具有了费米化的特点，因此相互作用趋于无穷时的系统是容易处理的。对于强相互作用区域，相互作用强度为有限值的连续系统可以等效成自旋链模型，在实验上通过自旋 $1/2$ 的费米子系统已经实现了海森堡自旋链。一个重要的区别在于外势的不同会导致格点间的耦合强度的非均匀性。比如对强相互作用极限下的自旋 $1/2$ 系统，无穷大相互作用附近的微扰计算可以将连续模型的哈密顿量等效为一个自旋链模型

$$H_{\text{eff}} = E_F + \frac{1}{g} \sum_{i=1}^{N-1} J_i \frac{1 \pm P_{i,i+1}}{2}, \quad (20)$$

其中 E_F 是系统的费米能， $P_{i,i+1}$ 是两个粒子自旋的置换算符， J_i 是格点间的耦合强度，外势的不均匀会导致不同格点间的耦合强度依赖格点位

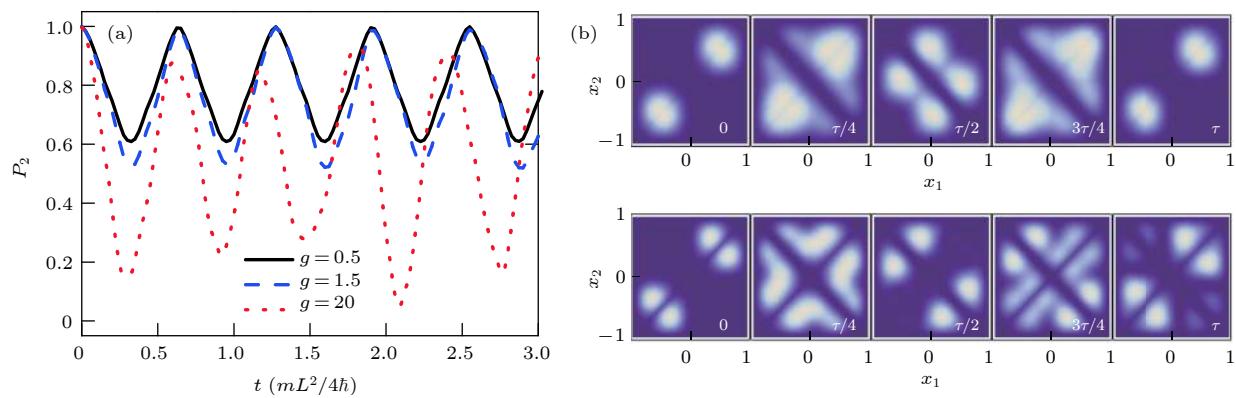


图 4 (a) 两个原子在同一个阱中的占据概率随时间的演化图. 黑实线, 蓝虚线, 红点线分别表示不同的相互作用强度 $g = 0.5, 1.5, 20$. 在 $t = 0$ 时刻势垒高度突然从 $d = 300$ 降到 $d = 0.5$. (b) $g = 1.5$ 和 20 时一个周期里不同时刻的密度分布图, 这里坐标 x_1 和 x_2 的单位是 $L/2$. 本图摘自参考文献 [98]

Fig. 4. (a) Tunneling dynamics of the occupation probability $P_2(t)$ of finding both atoms in the same well for $g = 0.5$ (black solid line), $g = 1.5$ (blue dashed line), and $g = 20$ (red dotted line). The δ barrier is abruptly lowered from a height $d = 300$ to 0.5 at time $t = 0$. (b) the two-body density functions $\rho(x_1, x_2, t)$ at different times t , for $g = 1.5$ and 20 , respectively. Here the coordinates x_1 and x_2 are in units of $L/2$ (Reproduced with permission from Ref. [98]).

置, 土分别对应玻色子和费米子. 近年来, 很多理论小组在不同的体系, 如仅考虑 s 波的两分量系统 [99,100–111]、同时考虑 s 波和 p 波的系统 [112–114]、玻色费米混合系统 [115,116]、不等质量系统 [117] 和多组分的系统 [118,119] 都给出了等效自旋链模型, 并且研究了系统的能谱、磁学性质、密度分布、动量分布以及相变. 对于接触相互作用且外势不依赖自旋的连续模型, 系统有很多守恒量, 比如总自旋守恒、总自旋的 z 分量守恒、宇称守恒等等. 通过这些守恒量可以给出体系能级排布的规律, 例如对于自旋 $1/2$ 的系统, 具有 $SU(2)$ 对称性, 在强相互作用区域, 能量关于相互作用的倒数 $1/g$ 成线性关系, 在 $g > 0$ 时, 能量随总自旋的增加而增加. 多组分系统, 如果具有 $SU(N)$ 对称性, 可以借助杨图来排布能级 [118], 如果不具有 $SU(N)$ 对称性, 则情况比较复杂, 但是也有规律可循, 文献 [119] 列出了自旋为 1 的系统能级排布的规律.

4 结 论

量子少体问题是当前研究的一个热点问题. 少体系统的研究对于理解微观现象有很大的帮助, 也为研究多体系统奠定了基础. 随着冷原子实验迅速发展, 实验上的精确操控, 少体系统的研究成为目前关注的热点. 本文简单介绍了实验和理论两方面的进展. 由于目前冷原子实验的精确操控, 少体实验可以准确地观察到一些重要的物理现象, 比如强

相互作用时的费米化, 格点模型中的量子相变, 以及少体到多体转变等等. 这些基本物理现象在少体实验中的实现让我们看到了少体研究的重要性. 对于少体的理论研究不同于多体物理, 基于精确可解模型的一些重要结果, 包括亚稳态势阱中相互作用原子的衰减率以及双势阱中的相互作用原子的隧穿动力学研究, 使得该研究领域富有挑战性又对理解单体到多体系统的物理性质提供了过渡.

感谢陈星博士在关于异核系统精确解方面的讨论, 以及昌茂林同学在论文撰写方面提供的帮助.

参 考 文 献

- [1] Pitaevskii L, Stringari S 2016 *Bose-Einstein Condensation and Superfluidity*(2nd Ed.) (New York: Oxford University Press) p.42
- [2] Pethick C J, Smith H 2008 *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases* (2nd Ed.) (Cambridge: Cambridge University Press) p.159
- [3] Gross E P 1961 *Nuovo Cimento* **20** 454
- [4] Gross E P 1963 *J. Math. Phys.* **4** 195
- [5] Pitaevskii L P 1961 *J. Exp. Theor. Phys.* **40** 646
- [6] Dalfovo F, Giorgini S, Pitaevskii L P, Stringari S 1999 *Rev. Mod. Phys.* **71** 463
- [7] Baranov M A 2008 *Phys. Rep.* **464** 71
- [8] Lahaye T, Menotti C, Santos L, Lewenstein M, Pfau T 2009 *Rep. Prog. Phys.* **72** 126401
- [9] Serwane F, Zurn G, Lompe T, Ottenstein T B, Wenz A N, Jochim S 2011 *Science* **332** 236
- [10] Greiner M, Mandel O, Esslinger T, Hänsch T W, Bloch I 2002 *Nature* **415** 39
- [11] Kohl M, Moritz H, Stöferle T, Günter K, Esslinger T 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 080403

- [12] Chin C, Grimm R, Julienne P, Tiesinga E 2010 *Rev. Mod. Phys.* **82** 1225
- [13] Inouye S, Andrews M R, Stenger J, Miesner H J, Stamper-Kurn D M, Ketterle W 1998 *Nature* **392** 151
- [14] Courteille P, Freeland R S, Heinzen D J, van Abeelen F A, Verhaar B J 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 69
- [15] Roberts J L, Claussen N R, Burke J P, Greene C H, Cornell E A, Wieman C E 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 5109
- [16] Efimov V 1970 *Phys. Lett. B* **33** 563
- [17] Efimov V 1970 *Sov. J. Nucl. Phys.* **12** 598
- [18] Efimov V 1973 *Nucl. Phys. A* **210** 157
- [19] Blume D, Daily K M 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 170403
- [20] Naidon P, Endo S 2017 *Rep. Prog. Phys.* **80** 056001
- [21] Kraemer T, Mark M, Waldburger P, Danzl J G, Chin C, Engeser B, Lange A D, Pilch K, Jaakkola A, Nägerl H C, Grimm R 2006 *Nature* **440** 315
- [22] Liu Y X 2017 *Ph. D. Dissertation* (Taiyuan: Shanxi University) (in Chinese) [刘彦霞 2017 博士学位论文(太原: 山西大学)]
- [23] Blume D 2012 *Rep. Prog. Phys.* **75** 046401
- [24] Zürn G, Serwane F, Serwane F, Lompe T, Wenz A N, Ries M G, Bohn J E, Jochim S 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 075303
- [25] Zürn G, Wenz A N, Murmann S, Bergschneider A, Lompe T, Jochim S 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 175302
- [26] Wenz A N, Zürn G, Murmann S, Brouzos I, Lompe T, Jochim S 2013 *Science* **342** 457
- [27] Murmann S, Bergschneider A, Klinkhamer V M, Zürn G, Lompe T, Jochim S 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 080402
- [28] Murmann S, Deuretzbacher F, Zürn G, Bjerlin J, Reimann S M, Santos L, Lompe T, Jochim S 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 215301
- [29] Kaufman A M, Lester B J, Regal C A 2012 *Phys. Rev. X* **2** 041014
- [30] Kaufman A M, Lester B J, Reynolds C M, Wall M L, Foss-Feig M, Hazzard K R A, Rey A M, Regal C A 2014 *Science* **345** 306
- [31] Busch T, Englert B G, Rzazewski K, Wilkens M 1998 *Found. Phys.* **28** 549
- [32] Olshanii M 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 938
- [33] Rontani M 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 115302
- [34] Rontani M 2013 *Phys. Rev. A* **88** 043633
- [35] Bethe H A 1931 *Z. Phys.* **71** 205
- [36] Lieb E H, Liniger W 1963 *Phys. Rev.* **1963** 130
- [37] McGuire J B 1965 *J. Math. Phys.* **6** 432
- [38] Gaudin M 1967 *Phys. Lett. A* **24** 55
- [39] Yang C N 1967 *Phys. Rev. Lett.* **19** 1312
- [40] Baxter R J 1972 *Ann. Phys.* **70** 193
- [41] Lieb E H, Wu F Y 1968 *Phys. Rev. Lett.* **20** 1445
- [42] Korepin V E, Essler F H L 1994 *Exactly Solvable Models of Strongly Correlated Electrons* (Singapore: World Scientific)
- [43] Mattis D C 1993 *The Many-Body Problem: An Encyclopedia of Exactly Solved Models in One Dimension* (Singapore: World Scientific)
- [44] Takahashi M 1999 *Thermodynamics of One-Dimensional Solvable models* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [45] Baxter R J 1989 *Exactly solved models in statistical mechanics* (London: Academic Press)
- [46] Sutherland B 2004 *Beautiful Models-70 years of exactly solved quantum many-body problems* (Singapore: World Scientific)
- [47] Hao Y, Zhang Y, Liang J, Chen S 2006 *Phys. Rev. A* **73** 053605
- [48] Hao Y, Zhang Y, Chen S 2009 *Phys. Rev. A* **79** 043633
- [49] Hao Y, Zhang Y, Liang J, Chen S 2006 *Phys. Rev. A* **73** 063617
- [50] Hao Y, Zhang Y, Guan X, Chen S 2009 *Phys. Rev. A* **79** 033607
- [51] Hao Y, Chen S 2009 *Phys. Rev. A* **80** 043608
- [52] Hao Y, Guo H, Zhang Y, Chen S 2011 *Phys. Rev. A* **83** 053632
- [53] Hao Y, Zhang Y, Chen S 2008 *Phys. Rev. A* **78** 023631
- [54] Guan X 2014 *Int. J. Mod. Phys. B* **28** 1430015
- [55] Guan X, Batchelor M, Lee C 2013 *Rev. Mod. Phys.* **85** 1633
- [56] Jiang Y, Chen Y, Guan X 2015 *Chinese Phys. B* **24** 050311
- [57] Yin X, Chen S, Zhang Y 2009 *Phys. Rev. A* **79** 053604
- [58] Yin X, Guan X, Batchelor M, Chen S 2011 *Phys. Rev. A* **83** 013602
- [59] Yin X, Guan X, Chen S, Batchelor M 2011 *Phys. Rev. A* **84** 011602(R)
- [60] Yin X, Guan X, Zhang Y, Chen S 2012 *Phys. Rev. A* **85** 013608
- [61] Yin X, Guan X, Zhang Y, Su H, Zhang S 2018 *Phys. Rev. A* **98** 023605
- [62] Wang H, Hao Y, Zhang Y 2012 *Phys. Rev. A* **85** 053630
- [63] Wang H, Zhang Y 2013 *Phys. Rev. A* **88** 023626
- [64] Paredes B, Widera A, Murg V, Mandel O, Fölling S, Cirac I, Shlyapnikov G, Hänsch T, Bloch I 2004 *Nature* **429** 277
- [65] Kinoshita, T, Wenger T, Weiss D 2004 *Science* **305** 1125
- [66] Haller E, Gustavsson M, Mark M, Danzl J, Hart R, Pupillo G, Nägerl H 2009 *Science* **325** 1224
- [67] Liao Y, Rittner A, Paprotta T, Li W, Partridge G, Hulet R, Baur S, Mueller E 2010 *Nature* **467** 567
- [68] Guan L, Chen S, Wang Y, Ma Z 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 160402
- [69] Chen S, Guan X, Yin X, Guan L, Batchelor M 2010 *Phys. Rev. A* **81** 031608(R)
- [70] Chen S, Guan L, Yin X, Hao Y, Guan X 2010 *Phys. Rev. A* **81** 031609(R)
- [71] Guan L, Chen S 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 175301
- [72] Yang B, Chen Y, Zheng Y, Sun H, Dai H, Guan X, Yuan Z, Pan J 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 165701
- [73] Chen Y, Jiang Y, Guan X, Zhou Q 2014 *Nat. Commun.* **5** 5140
- [74] Goold J, Busch T 2008 *Phys. Rev. A* **77** 063601
- [75] Rubeni D, Foerster A, Roditi I 2012 *Phys. Rev. A* **86** 043619
- [76] Liu Y, Ye J, Li Y, Zhang Y 2015 *Chin. Phys. B* **24** 086701
- [77] Stan C A, Zwierlein M W, Schunck C H, Raupach S M F, Ketterle W 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 143001
- [78] Ospelkaus C, Ospelkaus S, Humbert L, Ernst P, Sengstock K, Bongs K 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 120402
- [79] Wille E, Spiegelhalder F M, Kerner G, Naik D, Trenkwalder A, Hendl G, Schreck F, Grimm R, Tiecke T G, Walraven J T M, Kokkelmans S J J M F, Tiesinga E, Julienne P S 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 053201
- [80] Iskin M, Sa de Melo C A R 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 100404
- [81] Deuretzbacher F, Plassmeier K, Pfannkuche D, Werner F, Ospelkaus C, Ospelkaus S, Sengstock K, Bongs K 2008 *Phys. Rev. A* **77** 032726
- [82] Massignan P, Zaccanti M, Bruun G M 2014 *Rep. Prog. Phys.* **77** 034401
- [83] Chen X, Guan L M, Chen S 2011 *Eur. Phys. J. D* **64** 459
- [84] Will S, Best T, Schneider U, Hackermüller L, Lühmann D S, Bloch I 2010 *Nature* **465** 201
- [85] Bardeen J 1961 *Phys. Rev. Lett.* **6** 57
- [86] Simmonds R W, Lang K M, Hite D A, Nam S, Pappas D P,

- Martinis J M 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 077003
- [87] Albiez M, Gati R, Fölling J, Hunsmann S, Cristiani M, Oberthaler M K 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 010402
- [88] Shin Y, Saba M, Pasquini T A, Ketterle W, Pritchard D E, Leanhard A E 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 050405
- [89] Saba M, Pasquini T A, Sanner C, Shin Y, Ketterle W, Pritchard D E 2005 *Science* **307** 1948
- [90] Milburn G J, Corney J, Wright E M, Walls D F 1997 *Phys. Rev. A* **55** 4318
- [91] Smerzi A, Fantoni S, Giovanazzi S, Shenoy S R 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 4950
- [92] Zöllner S, Meyer H D, Schmelcher P 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 040401
- [93] Zöllner S, Meyer H D, Schmelcher P 2007 *Phys. Rev. A* **75** 043608
- [94] Zöllner S, Meyer H D, Schmelcher P 2008 *Phys. Rev. A* **78** 013621
- [95] Murphy D S, McCann J F, Goold J, Busch T 2007 *Phys. Rev. A* **76** 053616
- [96] Yin X, Hao Y, Chen S, Zhang Y 2008 *Phys. Rev. A* **78** 013604
- [97] Li X, Yin X, Zhang Y 2010 *Phys. Rev. A* **81** 043607
- [98] Liu Y, Zhang Y 2015 *Phys. Rev. A* **91** 053610
- [99] Deuretzbacher F, Fredenhagen K, Becker D, Bongs K, Sengstock K, Pfannkuche K 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 160405
- [100] Deuretzbacher F, Becker D, Bjerlin J, Reimann S, Santos L 2014 *Phys. Rev. A* **90** 013611
- [101] Yang L, Cui X 2016 *Phys. Rev. A* **93** 013617
- [102] Yang L, Guan L, Pu H 2015 *Phys. Rev. A* **91** 043634
- [103] Yang L, Pu H 2016 *Phys. Rev. A* **94** 033614
- [104] Lindgren E, Rotureau J, Forssen C, Volosniev A, Zinner N 2014 *New J. Phys.* **16** 063003
- [105] Volosniev A, Petrosyan D, Valiente M, Fedorov D, Jensen A, Zinner N 2015 *Phys. Rev. A* **91** 023620
- [106] Deuretzbacher F, Becker D, Santos L 2016 *Phys. Rev. A* **94** 023606
- [107] Dehkharghani A, Volosniev A, Lindgren E, Rotureau J, Forssen C, Fedorov D, Jensen A, Zinner N 2015 *Sci. Rep.* **5** 16075
- [108] Barfknecht R, Foerster A, Zinner N 2017 *Phys. Rev. A* **95** 023612
- [109] Volosniev A, Fedorov D, Jensen A, Valiente M, Zinner N 2014 *Nat. Commun.* **5** 5300
- [110] Volosniev A, Petrosyan D, Valiente M, Fedorov D, Jensen A, Zinner N 2015 *Phys. Rev. A* **91** 023620
- [111] Levinse J, Massignan P, Bruun G, Parish, M 2015 *Sci. Adv.* **1** e1500197
- [112] Hu H, Pan L, Chen S 2016 *Phys. Rev. A* **93** 033636
- [113] Yang L, Guan X, Cui X 2016 *Phys. Rev. A* **93** 051605
- [114] Massignan P, Levinse J, Parish M 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 247202
- [115] Hu H, Guan L, Chen S 2016 *New J. Phys.* **18** 025009
- [116] Deuretzbacher F, Becker D, Bjerlin J, Reimann S, Santos L 2017 *Phys. Rev. A* **95** 043630
- [117] Volosniev A 2017 *Few-body Syst.* **58** 54
- [118] Pan L, Liu Y, Hu H, Zhang Y, Chen S 2017 *Phys. Rev. B* **96** 075149
- [119] Liu Y, Chen S, Zhang Y 2017 *Phys. Rev. A* **95** 043628

SPECIAL TOPIC—Cold atoms and molecules**Review of one-dimensional few-body systems in ultracold atomic physics***Liu Yan-Xia¹⁾²⁾ Zhang Yun-Bo^{1)†}1) (*Institute of Theoretical Physics, Shanxi University, Taiyuan 030006, China*)2) (*Institute of Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China*)

(Received 9 November 2018; revised manuscript received 7 January 2019)

Abstract

We review some recent theoretical and experimental developments of one-dimensional few-body problems in ultracold atomic system. The experiments have so far realized the deterministic loading of few atoms in the ground state of a potential well, the observation of tunneling dynamics out of the metastable trap controlled by a magnetic gradient for a repulsively or attractively interacting system, the preparation of two fermionic atoms in an isolated double-well potential with a full control over the quantum state of the system, the formation of a Fermi sea by studying quasi-one-dimensional systems of ultracold atoms consisting of a single impurity interacting with an increasing number of identical fermions, and the deterministic preparation of antiferromagnetic Heisenberg spin chains consisting of up to four fermionic atoms in a one-dimensional trap. These achievements make the ultracold atoms an ideal platform to study many-body physics in a bottom-up approach, i.e., one starts from the fundamental building block of the system and observes the emergence of many-body effects by adding atoms one by one into the system. Corresponding theoretical models have been developed to explain the experimental data, to tackle the crossover boundary between few and many particles, and even explore the solvability and integrability of the models, especially the energy spectrum of interacting few atoms such as two atoms in a harmonic trap, two heteronuclear atoms of unequal mass in a ring trap, and two atoms in a δ -barrier split double well potential. After a brief review of Bethe-Ansatz method, a theory for the tunneling of one atom out of a trap containing two interacting cold atoms is developed based on the calculation of the quasiparticle wave function, and the tunneling dynamics of two atoms starting from the NOON state is explored from the exactly solved model of δ -barrier split double well based on a Bethe ansatz type hypothesis of the wave functions. It was shown that the spectroscopy and spin dynamics for strongly interacting few atoms of spin-1/2 and spin-1 can be described by effective spin chain Hamiltonians, which serves as a useful and efficient tool to study the quantum magnetism with cold atoms.

Keywords: ultracold atom physics, one dimensional system, few-body problem, exactly solvable model

PACS: 03.75.Lm, 67.85.-d, 03.75.Mn

DOI: 10.7498/aps.68.20181993

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11674201, 11474189).

† Corresponding author. E-mail: ybzhang@sxu.edu.cn

轨道Feshbach共振附近类碱土金属原子的杂质态问题

石悦然 卢倬成 王璟琨 张威

Impurity problem of alkaline-earth-like atoms near an orbital Feshbach resonance

Shi Yue-Ran Lu Zhuo-Cheng Wang Jing-Kun Zhang Wei

引用信息 Citation: [Acta Physica Sinica](#), 68, 040305 (2019) DOI: 10.7498/aps.68.20181937

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181937>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

硼烯和碱土金属硼化物二维纳米材料的制备、结构、物性及应用研究

Preparation, structure configuration, physical properties and applications of borophene and two-dimensional alkaline-earth metal boride nanomaterials

物理学报. 2017, 66(21): 217702 <https://doi.org/10.7498/aps.66.217702>

离化态原子基态电子结构特征与轨道竞争规律

Characteristics of ground state electronic structures of ionized atoms and rules of their orbital competitions

物理学报. 2016, 65(14): 140702 <https://doi.org/10.7498/aps.65.140702>

不同波长下氩原子高阶阈上电离的类共振增强结构

Resonance-like enhancement in high-order above-threshold ionization of argon at different wavelengths

物理学报. 2015, 64(14): 143201 <https://doi.org/10.7498/aps.64.143201>

基于轨道角动量的多自由度W态纠缠系统

Entangled W state of multi degree of freedom system based on orbital angular momentum

物理学报. 2015, 64(14): 140301 <https://doi.org/10.7498/aps.64.140301>

He-He-Ba三原子体系弱束缚态计算

Calculations of the binding energies of weakly bound He-He-Ba molecules

物理学报. 2015, 64(19): 193102 <https://doi.org/10.7498/aps.64.193102>

专题：冷原子-分子物理

轨道 Feshbach 共振附近类碱土金属原子的杂质态问题*

石悦然¹⁾ 卢倬成¹⁾ 王璟琨^{1)2)†} 张威^{1)2)‡}

1) (中国人民大学物理学系, 北京 100872)

2) (中国人民大学, 光电功能材料与微纳器件北京市重点实验室, 北京 100872)

(2018 年 10 月 31 日收到; 2018 年 12 月 29 日收到修改稿)

近年来, 碱土金属原子和类碱土金属原子体系的研究成为冷原子物理的研究热点之一. 特别是最近在¹⁷³Yb 原子中发现的轨道 Feshbach 共振, 使得研究有强相互作用的碱土金属和类碱土金属原子系统成为可能, 极大扩展了此类原子体系的研究范围. 本文介绍了¹⁷³Yb 费米气体在轨道 Feshbach 共振附近的杂质态问题. 在此问题中, 位于³P₀态的杂质原子与处于基态的背景费米海相互作用, 并在费米海表面产生分子态或极化子态. 本文使用试探波函数的研究方法, 首先对分子态和吸引极化子态进行介绍, 并重点描述了分子态与吸引极化子态间的转变. 其次归纳总结了排斥极化子态的相关性质, 如有效质量、衰变率等. 然后考虑双费米面情况, 介绍在闭通道中引入另外一个费米面对系统产生的影响. 最后简要介绍二维¹⁷³Yb 费米气体中的杂质态问题.

关键词: 类碱土金属原子, 轨道 Feshbach 共振, 分子态, 极化子态

PACS: 03.75.Ss, 05.30.Fk, 67.85.Lm

DOI: 10.7498/aps.68.20181937

1 引言

由于存在两个最外层价电子, 碱土金属原子和类碱土金属原子拥有一些特殊性质, 例如存在长寿命的原子激发态, 以及可实现核自旋与电子自旋分离等, 这使该类原子成为近年来的一个研究热点, 并且已被广泛应用于精密测量^[1–3]、量子信息和量子模拟^[4–9]等领域的研究中. 然而, 由于类碱土金属原子的电子总自旋角动量为零, 无法在此类原子体系中应用磁 Feshbach 共振技术. 尽管已有实验利用光 Feshbach 共振技术来调控该类原子间相互作用, 但这种手段会造成大量的原子损失^[10–12].

最近, 在¹⁷³Yb 原子中实现的轨道 Feshbach 共振 (orbital Feshbach resonance, OFR), 成功解决了上述难题, 并极大扩展了在碱土金属和类碱土金属原子系统中进行量子模拟的研究范围^[13–15]. 与碱金属中的磁 Feshbach 共振技术类似^[16], OFR 同样由开通道和闭通道间的共振散射引起, 例如在¹⁷³Yb 原子中, 开通道对应的是分别占据在|g↓⟩态和|e↑⟩态的两个原子, 其中|g⟩和|e⟩态分别与电子轨道态¹S₀和³P₀对应, |↓⟩和|↑⟩代表不同的核自旋态. 闭通道则对应于分别占据|g↑⟩态和|e↓⟩态的两个原子. 值得注意的是, 由于电子总自旋角动量 $J = 0$, 核自旋和电子自旋不耦合, 体系中的短程两体相互作用可以发生在轨道单态通道:

* 国家重点研发计划 (批准号: 2018YFA0306501)、国家自然科学基金 (批准号: 11434011, 11522436, 11774425) 和中国人民大学科研基金 (批准号: 16XNLQ03, 18XNLQ15) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: jkwang@ruc.edu.cn

‡ 通信作者. E-mail: wzhangl@ruc.edu.cn

$|-\rangle \equiv \frac{1}{2}(|ge\rangle - |eg\rangle) \otimes (|\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle)$ 或轨道三态通道: $|+\rangle \equiv \frac{1}{2}(|ge\rangle + |eg\rangle) \otimes (|\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle)$ ^[7–9]. 因此, 短程相互作用以开通道和闭通道为基时是非对角化的, 并且可以将这两个通道以轨道间核自旋交换相互作用的形式耦合起来. 此外, 当存在磁场时, 利用 $|g\rangle$ 态和 $|e\rangle$ 态间塞曼移动的不同, 可以调节开通道和闭通道间的能量差^[13,17,18]. 因此, 当闭通道中的浅束缚态能量被调节至开通道两体散射阈值时, 便会发生散射共振. 2015年, 在理论研究中首次提出 OFR 方法^[13], 紧接着在¹⁷³Yb 原子中实验实现了该技术. 之后对 OFR 的进一步研究表明: 从普适性的角度来看, OFR 是窄共振, 而从磁场角度来看, OFR 则是一个宽共振^[19], 后者决定了 OFR 在¹⁷³Yb 原子中易于实现.

OFR 存在一个有趣的特点: 两体相互作用势具有自旋交换属性, 因此在多体领域的研究中吸引了许多科研工作者的兴趣^[20–30]. 这其中, 在 OFR 附近的杂质态问题是一个很重要的研究方向. 在碱金属原子体系中, 磁 Feshbach 共振中的杂质态问题, 也就是极化子问题, 近年来已被广泛研究^[31–42], 这是由于: 第一, 可以利用简单的理论模型来对此多体系统进行精确描述; 第二, 利用对碱金属原子体系中杂质态问题的研究, 可以模拟研究有强相互作用的量子混合系统中的相图, 例如, 利用极化子问题可以对巡游铁磁进行研究. 在之前对杂质态问题的研究中, Landau^[43] 和 Pekar^[44] 提出, 对电介质中传导电子的性质可以用极化子理论来解释. 这个开创性的想法后来被 Fröhlich 等^[45,46] 和 Feynman^[47] 进一步推导, 他们将离子晶体和极性半导体看作由声子组成的背景粒子体系. 其他还有一些著名的研究, 例如在氦-4 原子背景体系下, 研究氦-3 原子作为杂质粒子的杂质态问题^[48], 以及在金属中研究局部磁性杂质引起的 Kondo 效应^[49].

超冷原子中杂质系统的成功实现, 进一步引起了人们对该问题的研究兴趣. 在超冷原子体系中, 可以利用混合体系来实现杂质系统, 其中数量较少的粒子为杂质粒子, 而数量较多的粒子组成背景粒子, 系统的性质与背景粒子的量子属性密切相关. 实验中, 背景粒子为玻色子^[50–53] 和费米子^[31–33] 的系统均已实现. 在玻色系统中的杂质态问题可以看作是对 Fröhlich 极化子的模拟^[54–56]. 系统中杂质粒子动态性质的改变由其与玻色激发相互作用决定, 在玻色凝聚中的激发为 Bogoliubov 粒子, 而

在热玻色气体中的激发为单粒子. 当背景粒子为低温费米气体时, 产生的费米极化子是 Landau 准粒子基本概念的典型再现. 在冷原子系统中, 可以在强相互作用区域内, 用一个十分简单的理论模型来精确描述极化子的性质, 这为增进对强关联系统的认识和理解提供了便利. 进一步研究发现, 在冷原子中, 对只存在一个杂质粒子的系统进行研究, 就能够得到有强相互作用的极化气体的精确信息. 在这样的背景下, 科研工作者在冷原子系统中针对杂质态问题进行了一系列的研究, 例如: 在有两种不同自旋轨道耦合的二维费米气体中研究杂质态问题^[57]; 在玻色极化子系统中研究 Efimov 态^[58]; 在有拓扑 p 波超流的一维准周期费米系统中研究极化子态^[59]; 研究非零温和杂质粒子数密度为有限值对吸引极化子性质的影响^[60] 等. 这些理论和实验研究揭示了强极化条件下多体系统中的物理性质. 在有 OFR 的系统中, 科研工作者们自然希望通过类似的研究得到此系统中的少体和多体性质.

本文考虑处于激发态 $|e\uparrow\rangle$ 的杂质原子与处于基态的费米海间的相互作用. 当存在一个有限强度的磁场时, 利用 OFR 技术可以调节杂质原子与费米海中原子间的相互作用. 在此过程中, 在不同参数情况下, 杂质原子可能与背景费米海结合形成极化子, 也可能形成紧束缚分子态. 因此, 当调节粒子间相互作用强度时, 会出现所谓的吸引极化子态到分子态的转变. 研究发现, 转变点位置在 OFR 附近, 且与系统的粒子数密度有关. 由于 OFR 中存在轨道间自旋交换相互作用, 极化子态和分子态的形成都会经历自旋翻转的过程, 例如, 一个位于 $|g\downarrow\rangle$ 态的粒子和一个位于 $|e\uparrow\rangle$ 态的粒子会被散射到 $|g\uparrow\rangle$ 态和 $|e\downarrow\rangle$ 态. 由此产生的结果是, 对于极化子, 除了传统自旋守恒的激发, 也存在自旋翻转激发, 在这类激发中, 原来空着的超精细态将被占据, 研究发现这种自旋翻转过程十分重要. 接下来, 对排斥极化子态的性质进行介绍, 包括谱函数、本征能量、准粒子残余、有效质量、衰变率等. 然后考虑双费米面情况, 介绍引入另一个费米面对系统性质的影响. 最后介绍二维¹⁷³Yb 费米气体中的分子态和极化子态性质.

本文结构如下: 第 2 节首先对所关注的体系进行介绍; 第 3 节和第 4 节分别介绍分子态和吸引极化子态在整个共振区域的性质; 第 5 节介绍吸引极化子态到分子态的转变; 第 6 节归纳总结排斥极化

子态的相关性质; 第 7 节在体系中引入另一个费米面, 进而介绍双费米面情况下体系的性质; 第 8 节简要介绍二维系统中分子态和极化子态的性质; 最后对上述内容进行总结.

2 体系简介

本文关注由类碱土金属原子组成的费米气体. 在此体系中, 开通道 $|o\rangle$ 和闭通道 $|c\rangle$ 由两个核自旋态和两个轨道能级组成, 分别为: $|o\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\downarrow; e\uparrow\rangle - |e\uparrow; g\downarrow\rangle)$ 和 $|c\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\uparrow; e\downarrow\rangle - |e\downarrow; g\uparrow\rangle)$, 通道间的相对能量可以通过磁场进行调节. 体系的哈密顿量可以表示为^[13,19]

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \left(\varepsilon_{\mathbf{k}} + \frac{\delta}{2} \right) (a_{\mathbf{k}g\downarrow}^\dagger a_{\mathbf{k}g\downarrow} + a_{\mathbf{k}e\uparrow}^\dagger a_{\mathbf{k}e\uparrow}) + \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}g\uparrow}^\dagger a_{\mathbf{k}g\uparrow} + a_{\mathbf{k}e\downarrow}^\dagger a_{\mathbf{k}e\downarrow}) + H_{\text{int}}, \quad (1)$$

其中, $a_{\mathbf{k}p\sigma}^\dagger$ 和 $a_{\mathbf{k}p\sigma}$ ($p = e, g$, $\sigma = \uparrow, \downarrow$) 是与动量 \mathbf{k} 有关的费米算符. 由于轨道态 $|g\rangle$ 和 $|e\rangle$ 中的朗德因子不同, 两个超精细能级间的塞曼移动 δ_g 和 δ_e 不相等, 如图 1 所示. 通过调节磁场, 可以控制两个通道间的塞曼移动差 $\delta = \delta_e - \delta_g$. 这里需要注意的是, 为了将系统哈密顿量写为 (1) 式所示的对称形式, 将 $|g\uparrow\rangle$ 和 $|e\downarrow\rangle$ 设为零能参考点, 同时设定 $|g\downarrow\rangle$ 和 $|e\uparrow\rangle$ 均移动 $\delta/2$.

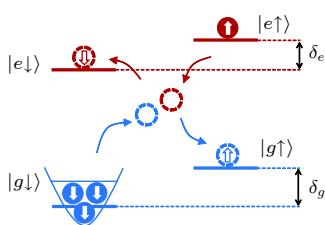


图 1 类碱土金属原子中的 OFR 能级图. 杂质原子处于 $|e\uparrow\rangle$ 态, 费米海处于 $|g\downarrow\rangle$ 态. 通过相互作用, 杂质原子和费米海中原子会被散射到闭通道的两个态上. δ_g 和 δ_e 是两个能级的塞曼移动

Fig. 1. Level diagram of an OFR. An impurity atom in the $|e\uparrow\rangle$ state is immersed in a Fermi gas of alkaline-earth-like atoms in the $|g\downarrow\rangle$ state. δ_g and δ_e are the Zeeman shifts of the $|g\rangle$ and $|e\rangle$ manifolds, respectively.

利用轨道单态和三态作基, 相互作用哈密顿量可以写为

$$H_{\text{int}} = \sum_{\mathbf{q}} \left(\frac{g_+}{2} \hat{A}_{\mathbf{q},+}^\dagger \hat{A}_{\mathbf{q},+} + \frac{g_-}{2} \hat{A}_{\mathbf{q},-}^\dagger \hat{A}_{\mathbf{q},-} \right), \quad (2)$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{A}_{\mathbf{q},+} &= \sum_{\mathbf{k}} (a_{-\mathbf{k}+\mathbf{q},g\downarrow} a_{\mathbf{k}+\mathbf{q},e\uparrow} - a_{-\mathbf{k}+\mathbf{q},g\uparrow} a_{\mathbf{k}+\mathbf{q},e\downarrow}), \\ \hat{A}_{\mathbf{q},-} &= \sum_{\mathbf{k}} (a_{-\mathbf{k}+\mathbf{q},g\downarrow} a_{\mathbf{k}+\mathbf{q},e\uparrow} + a_{-\mathbf{k}+\mathbf{q},g\uparrow} a_{\mathbf{k}+\mathbf{q},e\downarrow}), \end{aligned} \quad (3)$$

相互作用强度 g_{\pm} 可以通过公式 $1/g_{\pm} = 1/g_{\pm}^p - \sum_{\mathbf{k}} 1/(2\varepsilon_{\mathbf{k}})$ 和 $g_{\pm}^p = 4\pi\hbar^2 a_{\pm}/m$ 与 s 波散射长度 a_{\pm} 联系起来, 其中 m 为原子质量. 在接下来的章节中, 将介绍利用 Chevy 试探波函数来研究体系中分子态和极化子态的性质^[61,62].

3 分子态的研究

分子态中, 处于 $|e\uparrow\rangle$ 态的杂质原子会从处于 $|g\downarrow\rangle$ 态由 N 个原子形成的费米海中散射出一个原子, 并且二者形成束缚态. 分子态的试探波函数可以写为

$$|M\rangle_{\mathbf{Q}} = \sum_{|\mathbf{k}| > k_{\downarrow F}} \alpha_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{Q}-\mathbf{k},e\uparrow}^\dagger a_{\mathbf{k},g\downarrow}^\dagger |g\downarrow\rangle_{N-1} + \sum_{\mathbf{k}} \beta_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{Q}-\mathbf{k},e\downarrow}^\dagger a_{\mathbf{k},g\uparrow}^\dagger |g\downarrow\rangle_{N-1}, \quad (4)$$

其中 \mathbf{Q} 为质心动量, $|g\downarrow\rangle_{N-1}$ 代表余下的 $N-1$ 个原子组成的费米海. 值得注意的是, 这里形成的分子态可以在开通道中, 也可以在闭通道中, 与之对应的系数分别为 $\alpha_{\mathbf{k}}$ 和 $\beta_{\mathbf{k}}$.

然后给出与试探波函数 (4) 对应的薛定谔方程:

$$H|M\rangle_{\mathbf{Q}} = \tilde{E}_{\mathbf{M}}(\mathbf{Q})|M\rangle_{\mathbf{Q}}, \quad (5)$$

其中 $\tilde{E}_{\mathbf{M}}(\mathbf{Q})$ 为本征能量. 将试探波函数方程代入哈密顿量 (1) 式中, 在舍弃掉一些高阶项后, 可以得到一系列关于系数 $\alpha_{\mathbf{k}}$ 和 $\beta_{\mathbf{k}}$ 的线性方程. 在将系数 $\alpha_{\mathbf{k}}$ 和 $\beta_{\mathbf{k}}$ 作为变分参数时, 这些线性方程也可以通过计算期望值 $\langle M|H - \tilde{E}_{\mathbf{M}}(\mathbf{Q})|M\rangle_{\mathbf{Q}}$ 来获得. 系数方程可整合为如下形式:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{g_- + g_+}{2} \Theta_{\mathbf{Q}} \right) \sum_{|\mathbf{k}_1| > k_{\downarrow F}} \alpha_{\mathbf{k}_1} + \frac{g_- - g_+}{2} \Theta_{\mathbf{Q}} \sum_{\mathbf{k}_1} \beta_{\mathbf{k}_1} &= 0, \\ \frac{g_- - g_+}{2} \Theta'_{\mathbf{Q}} \sum_{|\mathbf{k}_1| > k_{\downarrow F}} \alpha_{\mathbf{k}_1} + \left(1 + \frac{g_- + g_+}{2} \Theta'_{\mathbf{Q}} \right) \beta_{\mathbf{k}_1} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

其中的系数定义为:

$$\begin{aligned}\Theta_Q &= \sum_{|\mathbf{k}|>k_{\downarrow F}} \frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{k}} + \varepsilon_{Q-\mathbf{k}} + \delta - E_M}, \\ \Theta'_Q &= \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{k}} + \varepsilon_{Q-\mathbf{k}} - E_M}.\end{aligned}\quad (7)$$

为简化符号, 移动了能量参考点 $E_M = \tilde{E} - \sum_{|\mathbf{k}|>k_{\downarrow F}} (\varepsilon_{\mathbf{k}} + \delta/2)$. 在此能量参考点下, 位于 $|e \uparrow\rangle$ 态的杂质粒子的阈值能量为 $E_{th} = E_{\downarrow F} + \delta$. 从 (6) 式中可以得到关于分子态本征能量的重整化方程为

$$\begin{aligned}\frac{1}{g_-^p g_+^p} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{g_-^p} + \frac{1}{g_+^p} \right) (\Theta_Q + \Theta'_Q - 2\Lambda_c) \\ + (\Theta_Q - \Lambda_c)(\Theta'_Q - \Lambda_c) = 0,\end{aligned}\quad (8)$$

其中 $\Lambda_c \equiv \sum_{\mathbf{k}} 1/(2\varepsilon_{\mathbf{k}})$.

首先讨论质心动量为零, 即 $\mathbf{Q} = 0$ 时分子态的性质. 通过对 (8) 式进行数值求解, 可以得到能量 E_M 的两个解: 一个解为浅束缚态, 即能量接近阈值能量 $|E_M - E_{th}| \sim E_{\downarrow F}$, 另一个解为深束缚态, 即能量远高于阈值能量 $|E_M - E_{th}| \gg E_{\downarrow F}$. 本文关注的是由 ^{173}Yb 原子组成的系统, 系统参数为: 粒子数密度 $n = 2 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}$, 取 $m = 1/2$, $\hbar = 1$, $k_{\downarrow F} = 1$, $E_{\downarrow F}$ 为能量单位, 散射长度 $a_+ = 1900a_0$ 和 $a_- =$

$200a_0$, 其中 a_0 是玻尔半径 [15,19]. 在此参数取值下, 深束缚态能量约为常数 $160E_{\downarrow F}$, 远远大于费米能 $E_{\downarrow F}$, 所以只考虑浅束缚态能量, 即 $|E_M - E_{th}| \sim E_{\downarrow F}$ 的情况. 图 2(a) 和图 2(b) 分别展示了本征能量 $E_M - E_{th}$ 随 δ 和 $1/(k_{\downarrow F} a_s)$ 的变化情况, 其中, s 波散射长度满足如下关系式 [19]:

$$a_s = \frac{-a_{s0} + \sqrt{m|\delta|/\hbar^2(a_{s0}^2 - a_{s1}^2)}}{a_{s0}\sqrt{m|\delta|/\hbar^2 - 1}}, \quad (9)$$

其中 $a_{s0} = (a_+ + a_-)/2$, $a_{s1} = (a_- - a_+)/2$.

通过将本征能量的解代入系数方程中, 可以求得试探波函数方程 (4) 式中的系数. 图 2(c) 描述了浅束缚态中波函数的分布情况. 其中, 闭通道部分 $\sum_{\mathbf{k}} |\beta_{\mathbf{k}}|^2$ 随 δ 的增大而变大, 并且在 δ 较大时成为波函数的主要部分, 而波函数中的开通道部分 $\sum_{\mathbf{k}} |\alpha_{\mathbf{k}}|^2$ 呈现出与闭通道部分相反的变化趋势. 此现象可解释为, 当 δ 为一个较大的正值时, 开通道在闭通道之上有很大的失谐, 如图 1 所示, 这导致开通道的部分可以被忽略.

现在考虑质心动量 $\mathbf{Q} \neq 0$ 的情况. 可以计算当 \mathbf{Q} 略微背离零值时, 分子态的有效质量. 如图 2(d) 所示, 在深 BEC (Bose-Einstein condensate) 极限下, 分子有效质量从一个有限值开始增大, 此时分

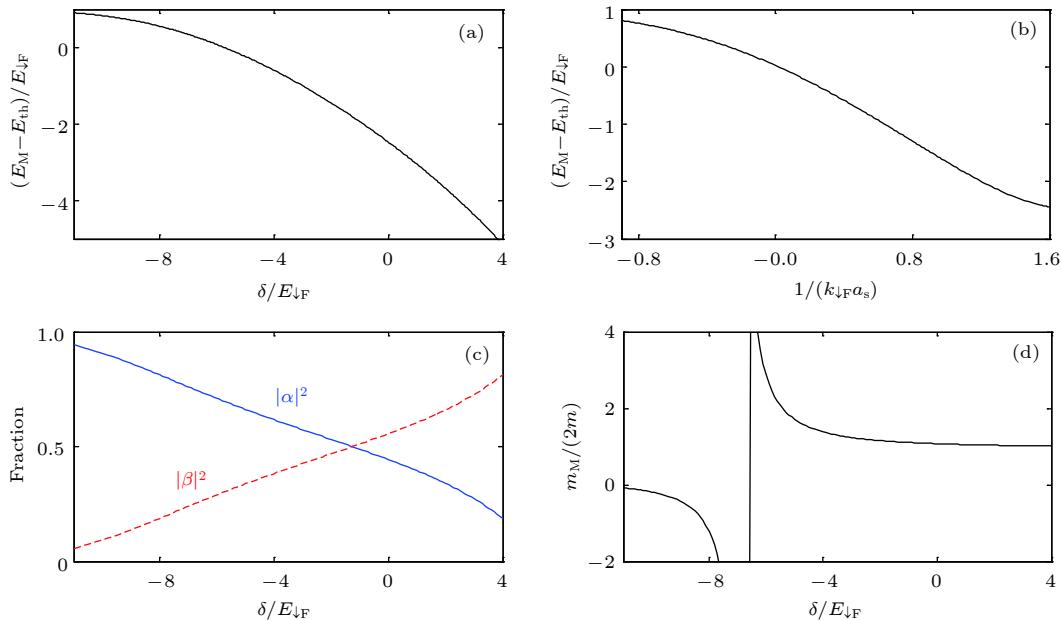


图 2 (a), (b) 分子态的能量随 δ 和 $1/(k_{\downarrow F} a_s)$ 的变化; (c) 分子态的波函数分布情况; (d) E_M 接近阈值能量 E_F 的分子态, 在 $\mathbf{Q} \neq 0$ 时的有效质量. 引自参考文献 [23]

Fig. 2. (a), (b) The eigenenergy in the molecular state varies with δ and $1/(k_{\downarrow F} a_s)$; (c) the wave functions' distribution in the open and closed channels; (d) the effective mass for the molecular state whose energy is closed to the threshold energy when $\mathbf{Q} \neq 0$. Reproduced from Ref. [23].

子本质上是一个质量为有限值, 且无固定结构的玻色子. 在 BCS (Bardeen-Copper-Schrieffer) 一侧时, 有效质量变为负值. 有效质量将会在 $\delta/E_{\downarrow F} \approx -6.6$ 处发散, 此发散点位于共振的 BCS 一侧. 此发散行为, 也表明 OFR 是一个窄共振, 因为在宽共振中, 有效质量的发散点通常位于共振的 BEC 一侧.

4 吸引极化子态的研究

极化子态的试探波函数可写为

$$\begin{aligned} |P\rangle_Q = & \gamma a_{Qe\uparrow}^\dagger |g_\downarrow\rangle_N \\ & + \sum_{\substack{|\mathbf{k}| > k_{\downarrow F} \\ |\mathbf{q}| < k_{\downarrow F}}} \alpha_{\mathbf{k}\mathbf{q}} a_{Q+\mathbf{q}-\mathbf{k}, e\uparrow}^\dagger a_{\mathbf{k}g\downarrow}^\dagger a_{\mathbf{q}g\downarrow} |g_\downarrow\rangle_N \\ & + \sum_{\substack{\mathbf{k} \\ |\mathbf{q}| < k_{\downarrow F}}} \beta_{\mathbf{k}\mathbf{q}} a_{Q+\mathbf{q}-\mathbf{k}, e\downarrow}^\dagger a_{\mathbf{k}g\uparrow}^\dagger a_{\mathbf{q}g\downarrow} |g_\downarrow\rangle_N, \end{aligned} \quad (10)$$

其中, 第一项对应于一个裸的杂质粒子态和未受扰动的费米海; 第二项表示在开通道中, 费米海表面存在一对粒子-空穴激发; 第三项代表在费米海表面, 杂质粒子与费米海中粒子相互作用并被散射到闭通道中的情况.

利用与上一节中计算分子态相同的方法, 可以得到极化子态的本征能量方程为

$$\begin{aligned} E_p - \frac{\delta}{2} - \varepsilon_Q = & \sum_{|\mathbf{q}| < k_{\downarrow F}} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{g_+^p} + \frac{1}{g_-^p} \right) \right. \\ & + \Gamma'_{Q\mathbf{q}} - \Lambda_c - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{g_+^p} - \frac{1}{g_-^p} \right)^2 \\ & \times \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{g_+^p} + \frac{1}{g_-^p} \right) + \Gamma_{Q\mathbf{q}} - \Lambda_c \right]^{-1} \left. \right\}^{-1}, \end{aligned} \quad (11)$$

其中,

$$\begin{aligned} \Gamma'_{Q\mathbf{q}} = & \sum_{|\mathbf{k}| > k_{\downarrow F}} \frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{q}} + \varepsilon_{Q+\mathbf{q}-\mathbf{k}} + \frac{\delta}{2} - E_p}, \\ \Gamma_{Q\mathbf{q}} = & \sum_{|\mathbf{k}|} \frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{q}} + \varepsilon_{Q+\mathbf{q}-\mathbf{k}} - \frac{\delta}{2} - E_p}. \end{aligned} \quad (12)$$

通过求解 (11) 式和对应的系数方程, 可以得到极化子态的相关性质. 与分子态相似, 在极化子态中, 也存在两个低于阈值的能量解: 一个解接近阈值能量, 另一个解满足 $|E_p - E_{th}| \gg E_{\downarrow F}$. 其中, 前者为浅吸引极化子态, 后者为深吸引极化子态. 本节关注浅吸引极化子态的性质.

在图 (3) 中, 描述了吸引极化子态能量、波函

数分布以及质心动量 $Q \neq 0$ 时有效质量的变化情况. 从图中可以发现, 在 BCS 极限下, 即 δ 是一个较大负值时, 波函数主要是由裸粒子态部分 $|\gamma|^2$ 组成, 而在 BEC 极限下, 闭通道部分 $\sum_{\mathbf{k}, |\mathbf{q}| < k_{\downarrow F}} |\beta_{\mathbf{k}\mathbf{q}}|^2$ 成为主要组成部分. 开通道部分 $\sum_{|\mathbf{k}| > k_{\downarrow F}, |\mathbf{q}| < k_{\downarrow F}} |\alpha_{\mathbf{k}\mathbf{q}}|^2$ 在共振点处, 与闭通道部分相当, 但随着 δ 的增大会降低.

接下来考虑吸引极化子态中, 质心动量 $Q \neq 0$ 的情况. 与研究分子态时相似, 计算当 Q 偏离零值很小时, 吸引极化子态的有效质量. 从图 3(d) 中可以发现, 在 BCS 极限下, 吸引极化子的有效质量趋近于有限值 $1/2$, 此时系统变为一个未受扰动的费米海, 同时费米海表面存在一个质量为 $1/2$ 的杂质粒子. 当向共振点移动时, 有效质量变大, 并且会呈现出与分子态类似的发散行为. 发散点位于 $\delta/E_{\downarrow F} \approx -0.35$ 处, 位于共振的 BEC 一侧.

5 吸引极化子态到分子态的转变

前面两节分别介绍了分子态和吸引极化子态的性质. 将计算得到的两个态的能量放在同一张图中, 如图 4(a) 和图 4(b) 所示, 可以清晰地看到, 存在吸引极化子态到分子态的转变, 且转变点 $\delta_c/E_{\downarrow F} \approx -2.3$, $1/(k_{\downarrow F} a_c) \approx 0.81$. 当 $\delta < \delta_c$ 时, 系统的基态为质心动量为零的吸引极化子态. 另一方面, 当 $\delta > \delta_c$ 时, 系统基态变为质心动量为零的分子态. 图 4(c) 中, 描述了转变点 δ_c 随粒子数密度的变化情况. 从图中可以发现, δ_c 随粒子数密度的增大而变大, 这清楚表明, 系统在共振点附近表现出的性质不具有普适性, 体现出窄共振的特点.

6 排斥极化子态的研究

本节中将对能量 E_p 高于阈值能量 E_{th} 的排斥极化子态进行研究. 该体系的自能可以表示为 [63,64]

$$\begin{aligned} \Sigma(Q, E_p) = & \sum_{|\mathbf{q}| < k_{\downarrow F}} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{g_-^p} + \frac{1}{g_+^p} \right) \right. \\ & + \Gamma'_{Q\mathbf{q}} - \Lambda - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{g_-^p} - \frac{1}{g_+^p} \right)^2 \\ & \times \left. \frac{1}{\frac{1}{2}(\frac{1}{g_-^p} + \frac{1}{g_+^p}) + \Gamma_{Q\mathbf{q}} - \Lambda_c} \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (13)$$

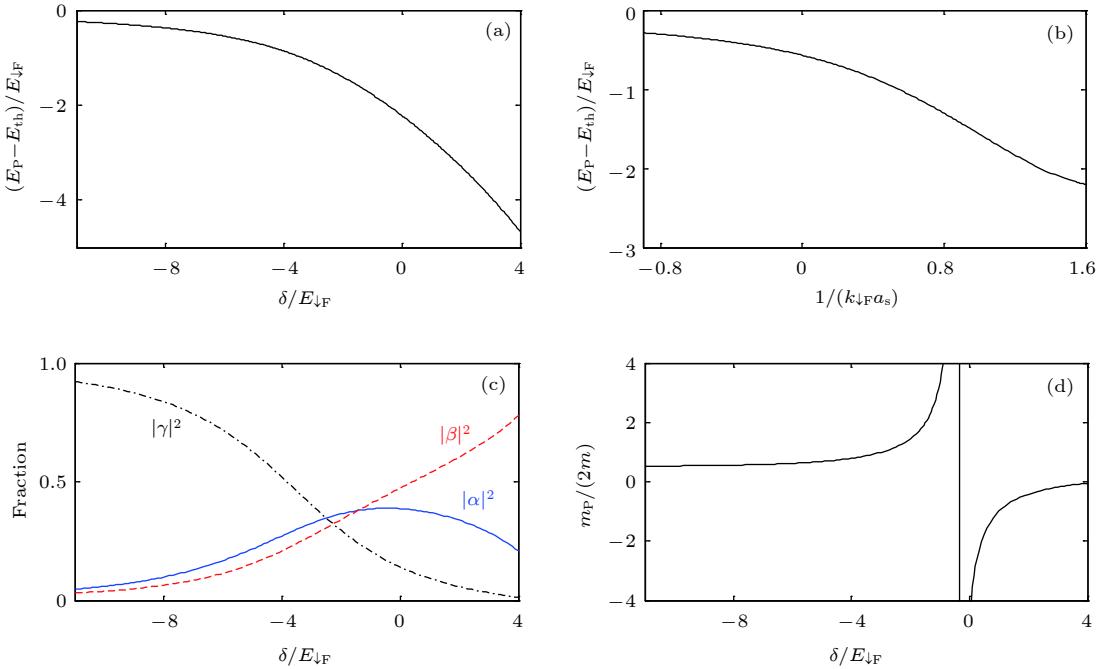


图 3 (a), (b) 吸引极化子态的能量随 δ 和 $1/(k_{\downarrow F}a_s)$ 的变化; (c) 吸引极化子态的波函数分布情况; (d) 吸引极化子态在 $\mathbf{Q} \neq 0$ 时的有效质量, 图中发散点为 $\delta/E_{\downarrow F} \approx -0.35$, 对应于 $1/(k_{\downarrow F}a_s) \approx 1.40$. 图中参数与图 2 中一致. 引自参考文献 [23]

Fig. 3. (a), (b) The eigenenergy in the attractive polaron state varies with δ and $1/(k_{\downarrow F}a_s)$; (c) the wave functions' distribution in the open and closed channels; (d) the effective mass for the attractive polaron state when $\mathbf{Q} \neq 0$. Parameters here are the same as those in Fig. 2. Reproduced from Ref. [23].

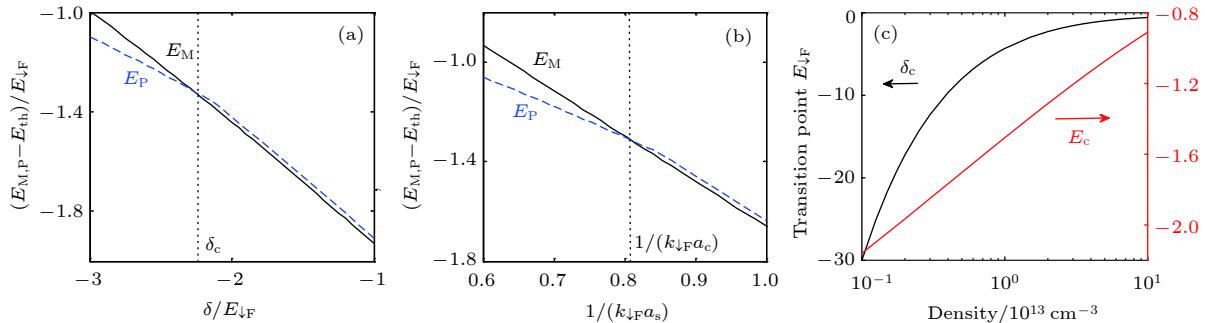


图 4 (a), (b) 分子态(黑色实线)和吸引极化子态(蓝色虚线)的本征能量随 δ 和 $1/(k_{\downarrow F}a_s)$ 的变化, 吸引极化子态到分子态的转变发生在 $\delta_c/E_{\downarrow F} \approx -2.3$ 和 $1/(k_{\downarrow F}a_c) \approx 0.81$ 处; (c) 转变点 δ_c (黑色实线)和对应的转变能量 E_c (红色实线)随粒子数密度的变化. 引自参考文献 [23]

Fig. 4. (a), (b) The eigenenergy of the molecule (black solid) and polaron (blue dashed) states vary with δ and $1/(k_{\downarrow F}a_s)$. The transition point is around $\delta_c/E_{\downarrow F} \approx -2.3$ and $1/(k_{\downarrow F}a_c) \approx 0.81$; (c) the transition point δ_c (black solid) and the corresponding energy E_c (red solid) vary with particle density. Reproduced from Ref. [23].

其中 Γ'_{Qq} 和 Γ_{Qq} 在 (12) 式中给出定义. 谱函数方程可写为如下形式:

$$A(\mathbf{Q}, E_p) = -2\text{Im} \frac{1}{E_p + i0^+ - (\varepsilon_Q + \frac{\delta}{2}) - \Sigma(\mathbf{Q}, E_p)}, \quad (14)$$

其中 $\varepsilon_Q + \delta/2$ 是质心动量为 \mathbf{Q} 的杂质粒子的能量.

图 (5) 描绘了质心动量 $\mathbf{Q} = 0$ 时, 谱函数在 $\delta - E$ 平面中的变化情况. 从图中可以看出, 谱函

数存在两支峰值, 且满足关系:

$$E_p - \frac{\delta}{2} = \text{Re}[\Sigma(\mathbf{Q} = 0, E_p)]. \quad (15)$$

其中较低的一支峰值为 $E_p - E_{\text{th}} < 0$, 对应于前面讨论的吸引极化子态. 当 $\delta/E_{\downarrow F} \lesssim -2.3$ 时, 吸引极化子态是系统的稳定基态. 当 $\delta/E_{\downarrow F} > -2.3$ 时, 吸引极化子态变得不稳定, 可以衰减为一个分子和一个空穴, 或者一个分子、两个空穴和一个费米子,

或者一个分子和其他粒子-空穴激发，并在 $\delta/E_{\downarrow F}$ 大于零时与粒子-空穴连续区域汇合，这与图(5)中吸引极化子态分支上面的浅黄色部分对应。图(5)中位于上面的一支峰值 $E_{P+} - E_{th} > 0$ ，与排斥极化子态相对应。在 $\delta/E_{\downarrow F} \lesssim -4.0$ 区域，排斥极化子态与粒子-空穴连续区域重叠。当 $-4.0 \lesssim \delta/E_{\downarrow F} \lesssim 0$ 时，排斥极化子是一个界限清晰的准粒子态。当 $\delta/E_{\downarrow F} \gtrsim 0$ 时，排斥极化子态分支的峰值变得模糊，这是由于排斥极化子态和闭通道中的散射态发生耦合造成的^[65]。

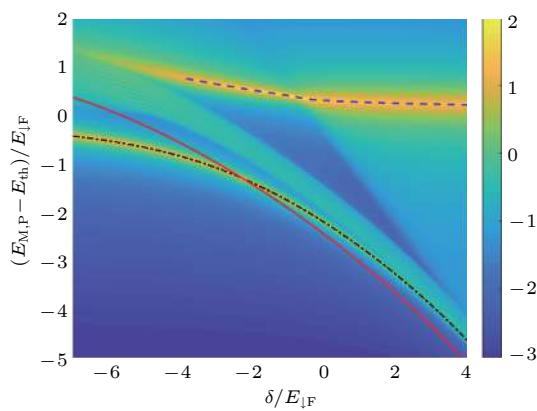


图 5 极化子态的谱函数 $A(\mathbf{Q}=0, E_p)$ 随 δ 和能量变化的彩色图。图中红色实线表示分子态能量，由(8)式计算得到。黑色点划线为吸引极化子态能量，由(11)式计算得到。两条线相交于 $\delta_c/E_{\downarrow F} \approx -2.3$ 处。图中蓝色虚线代表排斥极化子能量，由(15)式得到。当 δ 为较大负值时，排斥极化子与图中由浅黄色区域代表的粒子-空穴连续区域重合。当 δ 大于零时，由于存在闭通道散射，排斥极化子分支会变得模糊。引自参考文献[30]

Fig. 5. The spectral function of the polaron state as a function of δ and energy for $\mathbf{Q} = 0$. The red solid line represents the energy of molecule state, which is given by Eq. (8), and the black dashed-dotted line is the energy of attractive polaron state given by Eq. (11). The value of the crossing point for these two lines is $\delta_c/E_{\downarrow F} \approx -2.3$. The blue dashed line denotes the repulsive polaron energy given by Eq. (15). At large negative δ , the branch of repulsive polaron merges into the molecule-hole continuum, which is represented by the broad light yellow area. When δ is a positive value, because of the closed channel scattering continuum, the repulsive polaron branch will be blurred. Reproduced from Ref. [30].

下面计算极化子态的准粒子残余和有效质量。其中，准粒子残余可定义为^[66]

$$Z_{\pm} = \left\{ 1 - \text{Re} \left[\frac{\partial \Sigma(\mathbf{Q}=0, E_p)}{\partial E_p} \right]_{E_p \pm} \right\}^{-1}, \quad (16)$$

有效质量为^[66]

$$m_{P\pm} = \frac{m}{Z_{\pm}} \left\{ 1 + \text{Re} \left[\frac{\partial \Sigma(\mathbf{Q}, E_p)}{\partial \mathbf{Q}^2} \right]_{\mathbf{Q}=0, E_p=E_p\pm} \right\}^{-1}, \quad (17)$$

其中，脚标+和-分别代表排斥和吸引极化子态。同时，作为准粒子激发，排斥极化子谱函数宽度有限，有可能衰变到能量更低的态中。对于碱金属原子，实验已经证实，当相互作用不在深 BEC 区域中时，主要衰变通道会与吸引极化子态中的裸杂质态耦合。在 OFR 中，我们自然认为会发生类似情况。排斥极化子态的衰变率可通过下面的公式计算^[63–66]：

$$\Gamma = -2Z_+ \text{Im}[\tilde{\Sigma}(0, E_{P+})], \quad (18)$$

其中 Z_+ 是排斥极化子的准粒子残余， $\tilde{\Sigma}$ 为：

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}(\mathbf{Q}, E_{P+}) = & \sum_{|\mathbf{q}| < k_{\downarrow F}} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{g_-^p} + \frac{1}{g_+^p} \right) \right. \\ & + (1-Z_+) (\Gamma'_{\mathbf{Q}\mathbf{q}} - \Lambda) - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{g_-^p} - \frac{1}{g_+^p} \right)^2 \\ & \times \left. \frac{1}{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{g_-^p} + \frac{1}{g_+^p} \right) + \Gamma_{\mathbf{Q}\mathbf{q}} - \Lambda} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (19)$$

这里需要注意的是，在 $\tilde{\Sigma}$ 的表达式中，与(13)式相比，已将 $(\Gamma'_{\mathbf{Q}\mathbf{q}} - \Lambda)$ 替换为 $(1-Z_+)(\Gamma'_{\mathbf{Q}\mathbf{q}} - \Lambda)$ ，这是为了便于确定衰变后的终态。

在图 6(a) 和图 6(b) 中描绘了排斥极化子态的准粒子残余和有效质量，为了便于比较，在图中同时画出了吸引极化子态的准粒子残余和有效质量。从图中可以看出，当 δ 变大时， Z_+ 变大， m_{P+} 变小，这与碱金属原子体系情况一致。但不同的是，在本文研究的体系中，排斥极化子态的准粒子残余和有效质量都会出现明显的非解析行为。这种非解析行为的出现，可定性解释为由类似于共振散射的行为引起。其中，由于杂质原子和费米海中原子相互作用，在失谐满足能量和动量守恒条件下，一个通道中的原子可能被共振散射到另一个通道中^[65]。图 6(c) 展示了从(18)式中计算得到的衰变率 Γ 。当 δ 在大于零或小于但较接近零的区域中，开通道失谐在闭通道之上，排斥极化子的衰变主要由闭通道决定。当 δ 向着较大正值不断趋近时，衰变率会变大。另一方面，当 δ 在小于零或者大于但较接近零的区域时，衰变通道主要由开通道决定，并随着 δ 减小而变大。衰变率 Γ 的非单调变化，是由两个通道间的竞争导致的，当两个通道简并时，衰变率处于最小值处。当 δ 趋近于较大的负值时 Γ 开始下

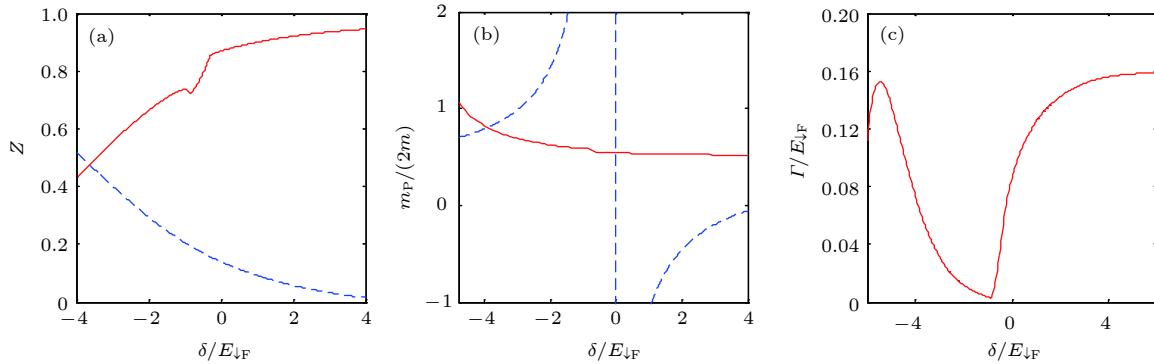


图 6 (a), (b) 极化子态的准粒子残余和有效质量随 δ 的变化, 其中红色实线对应排斥极化子态, 蓝色虚线对应吸引极化子态; (c) 排斥极化子态的衰变率随 δ 的变化. 引自参考文献 [65]

Fig. 6. (a), (b) Quasiparticle residues Z_{\pm} and effective masses for the attractive (blue dashed) and repulsive (red solid) polarons as functions of δ ; (c) the decay rate Γ varies with δ . Reproduced from Ref. [65].

降, 这是由准粒子残留 Z_+ 的降低造成的. 如图 (5) 所示, 当排斥极化子分支最终与粒子-空穴连续区域重合时, 排斥极化子将不再是一个定义较好的准粒子, 所以本文不对此区域中的衰变率进行讨论.

7 双费米面情况下系统性质的研究

本节将介绍双费米面情况下系统的性质. 此时体系如图 7 所示, 处于激发态 $|e \uparrow\rangle$ 的杂质粒子与处于 $|g \uparrow\rangle$ 和 $|g \downarrow\rangle$ 态的费米海相互作用. 同样利用轨道单态和三态作基, 系统相互作用哈密顿量可以写为

$$H_{\text{int}} = \sum_{\mathbf{q}} \left[\frac{g_+}{2} \hat{A}_{\mathbf{q},+}^\dagger \hat{A}_{\mathbf{q},+} + \frac{g_-}{2} \left(\hat{A}_{\mathbf{q},-}^\dagger \hat{A}_{\mathbf{q},-} + \hat{A}_{\mathbf{q},\downarrow}^\dagger \hat{A}_{\mathbf{q},\downarrow} + \hat{A}_{\mathbf{q},\uparrow}^\dagger \hat{A}_{\mathbf{q},\uparrow} \right) \right], \quad (20)$$

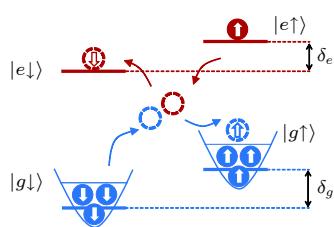


图 7 双费米面情况下, 类碱土金属原子的 OFR 能级图. 杂质原子处于 $|e \uparrow\rangle$ 态, 费米海处于 $|g \downarrow\rangle$ 态和 $|g \uparrow\rangle$ 态. 通过相互作用, 杂质原子和费米海中原子会被散射到闭通道的两个态上. δ_g 和 δ_e 是两个能级的塞曼移动

Fig. 7. Level diagram of an OFR, which has two fermi seas. An impurity atom in the $|e \uparrow\rangle$ state is immersed in a Fermi gas of alkaline-earth-like atoms in the $|g \downarrow\rangle$ and $|g \uparrow\rangle$ states. δ_g and δ_e are the Zeeman shifts of the $|g\rangle$ and $|e\rangle$ manifolds, respectively.

其中,

$$\begin{aligned} \hat{A}_{\mathbf{q},+} &= \sum_{\mathbf{k}} (a_{-\mathbf{k}+\mathbf{q},g\downarrow} a_{\mathbf{k}+\mathbf{q},e\uparrow} - a_{-\mathbf{k}+\mathbf{q},g\uparrow} a_{\mathbf{k}+\mathbf{q},e\downarrow}), \\ \hat{A}_{\mathbf{q},-} &= \sum_{\mathbf{k}} (a_{-\mathbf{k}+\mathbf{q},g\downarrow} a_{\mathbf{k}+\mathbf{q},e\uparrow} + a_{-\mathbf{k}+\mathbf{q},g\uparrow} a_{\mathbf{k}+\mathbf{q},e\downarrow}), \\ \hat{A}_{\mathbf{q},\downarrow} &= \sum_{\mathbf{k}} (a_{-\mathbf{k}+\mathbf{q},g\downarrow} a_{\mathbf{k}+\mathbf{q},e\downarrow} + a_{-\mathbf{k}+\mathbf{q},g\downarrow} a_{\mathbf{k}+\mathbf{q},e\downarrow}), \\ \hat{A}_{\mathbf{q},\uparrow} &= \sum_{\mathbf{k}} (a_{-\mathbf{k}+\mathbf{q},g\uparrow} a_{\mathbf{k}+\mathbf{q},e\uparrow} + a_{-\mathbf{k}+\mathbf{q},g\uparrow} a_{\mathbf{k}+\mathbf{q},e\uparrow}). \end{aligned} \quad (21)$$

此系统中, 分子态试探波函数可写为

$$\begin{aligned} |M\rangle_Q = & \sum_{|\mathbf{k}| > k_{\text{F}}} \alpha_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{Q}-\mathbf{k},e\uparrow}^\dagger a_{\mathbf{k},g\downarrow}^\dagger |g\downarrow\rangle_{N\downarrow-1} |g\uparrow\rangle_{N\uparrow} \\ & + \sum_{|\mathbf{k}| > k_{\text{F}}} \beta_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{Q}-\mathbf{k},e\downarrow}^\dagger a_{\mathbf{k},g\uparrow}^\dagger |g\downarrow\rangle_{N\downarrow-1} |g\uparrow\rangle_{N\uparrow}, \end{aligned} \quad (22)$$

极化子态的试探波函数可写为

$$\begin{aligned} |P\rangle_Q = & \left[\gamma a_{\mathbf{Q}e\uparrow}^\dagger + \sum_{\substack{|\mathbf{k}| > k_{\text{F}} \\ |\mathbf{q}| < k_{\text{F}}}} \alpha_{\mathbf{k}\mathbf{q}} a_{\mathbf{Q}+\mathbf{q}-\mathbf{k},e\uparrow}^\dagger a_{\mathbf{k}g\downarrow}^\dagger a_{\mathbf{q}g\downarrow} + \right. \\ & \left. \sum_{\substack{|\mathbf{k}| > k_{\text{F}} \\ |\mathbf{q}| < k_{\text{F}}}} \beta_{\mathbf{k}\mathbf{q}} a_{\mathbf{Q}+\mathbf{q}-\mathbf{k},e\downarrow}^\dagger a_{\mathbf{k}g\uparrow}^\dagger a_{\mathbf{q}g\downarrow} \right] |g\downarrow\rangle_{N\downarrow} |g\uparrow\rangle_{N\uparrow}. \end{aligned} \quad (23)$$

然后, 利用研究单费米面体系相同的方法, 可以得到双费米面系统的相关性质.

7.1 分子态与吸引极化子态

图 8(a)–图 8(c) 描绘了质心动量 $\mathbf{Q} = 0$ 时, 分子态和吸引极化子态的能量在 k_{F} 等于不同值时的变化情况. 从图中可以看出, 在 k_{F} 为不同值的所有情况下, 当 δ 为较大负值时, 系统的基态为吸

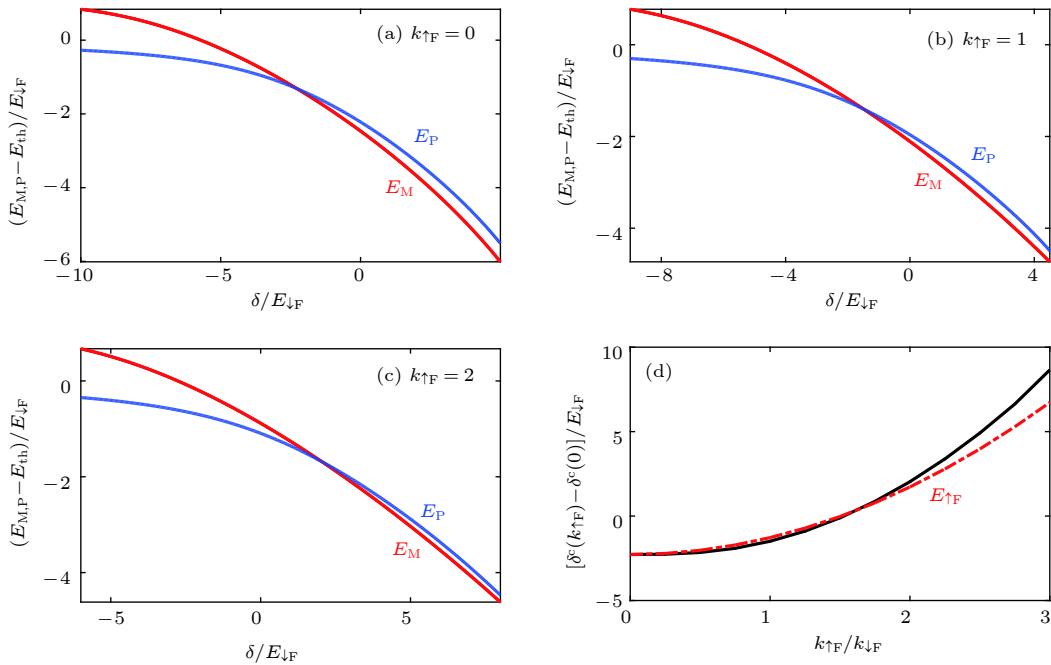


图 8 质心动量为零, $k_{\uparrow F} = 0$ ((a)), $k_{\uparrow F} = 1$ ((b)), $k_{\uparrow F} = 2$ ((c))时, 分子态和吸引极化子态的本征能量随 δ 的变化; (d) 吸引极化子态到分子态的转变点随 $k_{\uparrow F}$ 的变化, 其中, 黑色实线为计算得到的转变点, 红色点划线为费米能级 $E_{\uparrow F} = k_{\uparrow F}^2$. 引自参考文献 [30]

Fig. 8. The eigen energies of molecule and attractive polaron states vary with δ when $Q = 0$ and (a) $k_{\uparrow F} = 0$, (b) $k_{\uparrow F} = 1$, (c) $k_{\uparrow F} = 2$; (d) the transition point δ_c varies with $k_{\uparrow F}$, where the black solid line represents δ_c and the red dashed-dotted line is the Fermi level $E_{\uparrow F} = k_{\uparrow F}^2$. Reproduced from Ref. [30].

引极化子态, 而伴随着 δ 的增大并超过转变点 δ_c 时, 分子态成为系统的基态. 同时可以发现, 对于图 8 中三种不同 $k_{\uparrow F}$ 的情况, 转变点均处于 OFR 的 BEC 一侧, 分别为 (a) $\delta_c = -2.28$ $1/(k_{\downarrow F}a_c) \approx 0.81$; (b) $\delta_c = -1.50$, $1/(k_{\downarrow F}a_c) \approx 1.01$; (c) $\delta_c = 2.02$, $1/(k_{\downarrow F}a_c) \approx 0.87$. 为进一步阐明在闭通道中引进另一个费米面对系统产生的影响, 在图 8(d) 中画出了转变点 δ_c 随 $k_{\uparrow F}$ 的变化情况. 从图中可以看出, 转变点 δ_c 会随着费米能级 $k_{\uparrow F}$ 的变大而单调上升, 这说明 $|g\uparrow\rangle$ 态上的费米面占据了费米能 $E_{\uparrow F}$ 以下的所有态, 等效于提高了闭通道能量 δ_g . 相应地, 开通道能量 δ_c 也需要升高相同的能量来抵消闭通道中能量的移动. 从图 8(d) 中也可以看出, 在 $k_{\uparrow F}$ 不是很大时, 利用费米能 $E_{\uparrow F}$ 能够近似估算出转变点 δ_c , 而当 $k_{\uparrow F}$ 较大时, 二者的偏离是由费米面附近相互作用引起的涨落引起的.

接下来介绍分子态和吸引极化子态波函数分布受外加费米面的影响. 比较图 9 中 $k_{\uparrow F} = 1$ 和 $k_{\uparrow F} = 2$ 的情况可以发现, 除了存在能量移动, 波函数的整体结构都十分类似. 从图中可以看出, 在分子态和吸引极化子态中, 在 δ 小于零的区域, 开通

道部分为波函数的主要组成, 但在 δ 大于零的区域, 闭通道部分占据主导. 另外也可以发现, 在吸引极化子态中, 当开通道失谐较大时, 裸杂质态部分 $|\gamma|^2$ 消失. 这些发现与前几节讨论的单费米面情况相似.

7.2 排斥极化子态

接下来讨论双费米面体系中排斥极化子态的各项性质. 图 10 描绘了在 $k_{\uparrow F}$ 等于不同值时排斥极化子态的准粒子残余、有效质量和衰变率随 δ 的变化情况. 从图 10(a) 中的准粒子残余和图 10(b) 中的有效质量曲线可以发现, 随着 δ 的不断增大, 排斥极化子态的准粒子残余 Z_+ 和有效质量 m_{P+} 均趋于一个定值, 这意味着随着 δ 的不断增大, 排斥极化子态将变为一个满足 $Z_+ \rightarrow 1$ 和 $m_{P+} \rightarrow 1/2$ 的裸杂质粒子态, 且杂质粒子与费米海相互作用极弱. 此外也发现, 在单费米面, 即 $k_{\uparrow F} = 0$ 时出现的非解析行为, 将随着闭通道中费米面的出现而变得模糊并最终消失. 在单费米面时已经介绍过, 这种非解析行为的出现由类似共振行为引起. 当失谐满足能量-动量守恒时, 一个通道中的原子会被共振散射到另外一个通道中. 当闭通道为空, 即 $k_{\uparrow F} = 0$ 时,

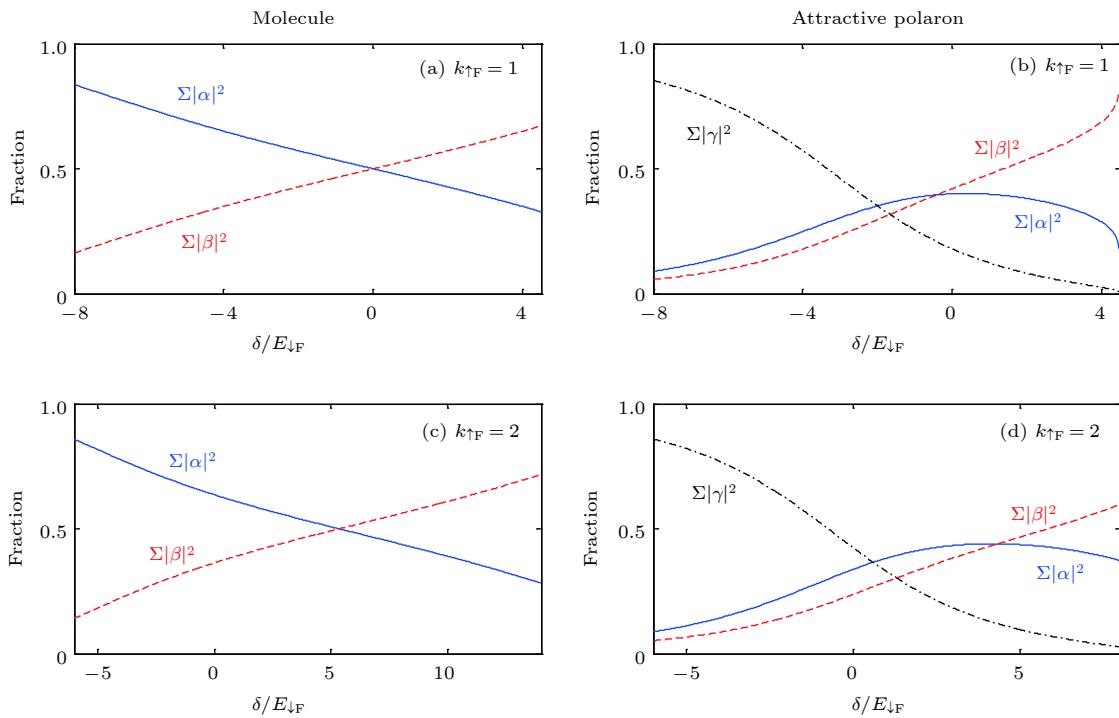


图 9 (a), (c) 分子态的波函数分布情况; (b), (d) 吸引极化子态的波函数分布, 此时质心动量为零. (a) 和 (b) 中, $k_{\uparrow F} = 1$, (c) 和 (d) 中, $k_{\uparrow F} = 2$. 引自参考文献 [30]

Fig. 9. The fractions of wave functions for molecule ((a), (c)) and attractive polaron states ((b), (d)) with zero center-of-mass momentum. The parameter in this figure is $k_{\uparrow F} = 1$ for (a) and (b), $k_{\uparrow F} = 2$ for (c) and (d). Reproduced from Ref. [30].

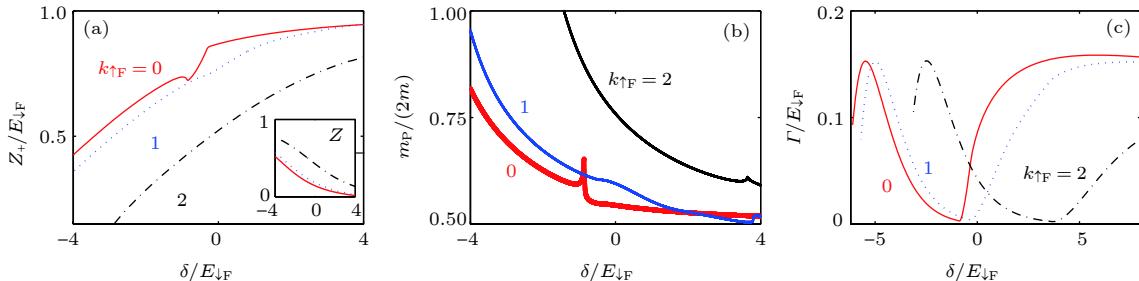


图 10 (a), (b) 在 $k_{\uparrow F}$ 等于不同值时, 排斥极化子态的准粒子残余和有效质量随 δ 的变化情况. 图 (a) 中的插图描绘了吸引极化子态的准粒子残余随 δ 的变化情况. 图中, 当 $k_{\uparrow F} = 0$ 时出现的非解析行为发生在 $\delta/E_{\downarrow F} = -0.87$ 处; (c) 排斥极化子态的衰变率 Γ 在 $k_{\uparrow F}$ 等于不同值时随 δ 的变化情况. 引自参考文献 [30]

Fig. 10. (a), (b) The quasiparticle residue Z_+ and the effective mass m_P vary with δ for different values of $k_{\uparrow F}$. The obvious kink structure when $k_{\uparrow F} = 0$ appears near $\delta/E_{\downarrow F} = -0.87$. The inset of (a) is the residues for attractive polarons; (c) the decay rates vary with δ for different values of $k_{\uparrow F}$. Reproduced from Ref. [30].

这种共振现象最为显著. 当闭通道中存在另外一个费米面时, 这种非解析行为会发生移动, 以此来抵消闭通道中引入费米面后带来的能量移动. 同时由于存在相互作用, 费米面以下的态不再被完全禁戒, 最终导致非解析行为变得模糊, 进而消失. 图 10(c) 描绘了在 $k_{\uparrow F}$ 等于不同值时衰变率 Γ 随 δ 的变化情况. 从图中可以看出, 对于 $k_{\uparrow F}$ 等于不同值的情况, 除了另一个费米面所带来的能量移动, 衰变率 Γ 的整体变化行为都十分相似, 且与单费米面时性

质定性相同.

8 二维系统中杂质态问题的研究

本节将介绍二维¹⁷³Yb 费米气体中的杂质态问题. 实验上, 一般通过在 $x-y$ 平面添加频率较弱的简谐束缚势阱, 同时在 z 轴方向施加强束缚来实现二维体系 [67]. 为了与实验研究有可比性, 在二维系统杂质态问题的计算中, 设定 z 轴方向的束缚频率

满足 $\hbar\omega_z = 10 \gg E_{\downarrow F}$, 其他参数与前面讨论的三维体系相同. 利用与研究三维系统相同的方法, 可以得到二维¹⁷³Yb 费米气体中分子态和极化子态的性质, 以及外加费米面对体系的影响.

图 11(a)—图 11(c) 描绘了二维系统中质心动量 $\mathbf{Q} = 0$ 时, 分子态和吸引极化子态的能量在 $k_{\uparrow F}$ 等于不同值时随 δ 的变化情况. 从图中可以看出, 与三维体系性质相同, 当 δ 为较小值时, 系统基态为吸引极化子态, 而当 δ 值较大时, 分子态成为系

统的基态, 这中间存在吸引极化子态到分子态的转变. 图 11(d) 描绘了转变点 δ_c 随 $k_{\uparrow F}$ 的变化情况. 从图中可以看出, 转变点 δ_c 会随着费米能级 $k_{\uparrow F}$ 的变大而单调上升, 这说明二维系统中 $|g \uparrow\rangle$ 态上的费米面同样有提高闭通道能量 δ_g 的作用. 但与三维系统不同的是, 即使在 $k_{\uparrow F}$ 较小的情况下, 转变点 δ_c 的变化也会显著偏离费米能 $E_{\uparrow F}$. 这说明在二维时, 另一个费米面的存在不仅仅提供了一个能量偏置, 而且费米面附近的涨落会产生更加显著的多体效应.

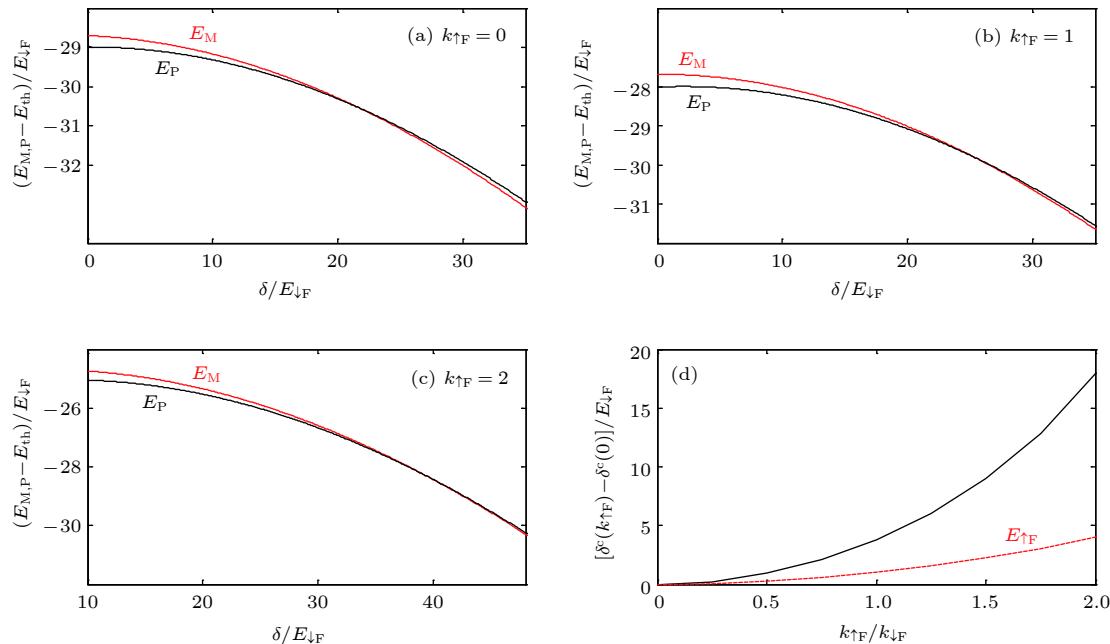


图 11 (a)-(c) 二维系统中, 质心动量为零, $k_{\uparrow F} = 0$ ((a)), $k_{\uparrow F} = 1$ ((b)), $k_{\uparrow F} = 2$ ((c)) 时, 分子态和吸引极化子态的本征能量随 δ 的变化; (d) 吸引极化子态到分子态的转变点随 $k_{\uparrow F}$ 的变化, 其中黑色实线为计算得到的转变点, 红色虚线为费米能级 $E_{\uparrow F} = k_{\uparrow F}^2$

Fig. 11. The eigen energies of molecule and attractive polaron states vary with δ when $\mathbf{Q} = 0$ in a two-dimensional system and (a) $k_{\uparrow F} = 0$, (b) $k_{\uparrow F} = 1$, (c) $k_{\uparrow F} = 2$; (d) the transition point δ_c varies with $k_{\uparrow F}$, where the black solid line represents δ_c and the red dashed line is the Fermi level $E_{\uparrow F} = k_{\uparrow F}^2$.

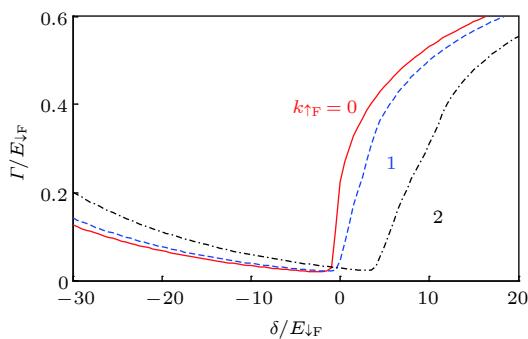


图 12 二维系统中 $k_{\uparrow F}$ 等于不同值时排斥极化子态的衰变率 Γ 随 δ 的变化情况

Fig. 12. The decay rates of the repulsive polaron state in a two-dimentional system vary with δ for different values of $k_{\uparrow F}$.

图 12 描绘了二维系统中, 在 $k_{\uparrow F}$ 等于不同值时排斥极化子态的衰变率 Γ 随 δ 的变化情况. 从图中可以看出, 与三维系统情况类似, 由于存在开通道与闭通道间的竞争, 衰变率 Γ 随 δ 的变化是非单调的, 且当两个通道简并时, 衰变率处于最低点处. 同时可以发现, 在二维系统中引入另一个费米面, 同样会引起能量的移动.

9 结 论

本文介绍了利用试探波函数的方法来研究由类碱土金属原子¹⁷³Yb 组成的费米气体在轨道

Feshbach 共振附近的杂质态问题.

首先考虑质心动量 $\mathbf{Q} = 0$ 时, 分子态的本征能量和波函数分布随失谐 δ 的变化. 研究发现, 分子态的本征能量存在两个解: $|E_M - E_{\text{th}}| \gg E_{\downarrow F}$ 和 $|E_M - E_{\text{th}}| \sim E_{\downarrow F}$, 其中前者为深束缚态且束缚能约为常数, 所以只讨论后者的情况. 在分子态的波函数分布中, 发现当 δ 为较大正值时, 开通道相对于闭通道有很大失谐, 此时波函数中开通道的部分可以被忽略, 而随着 δ 不断减小, 开通道将变为波函数中的主要组成. 然后介绍了质心动量 \mathbf{Q} 略微背离零值时分子态的有效质量, 发现在共振的 BCS 一侧, 有效质量存在发散行为.

紧接着, 考虑质心动量 $\mathbf{Q} = 0$ 时, 系统中吸引极化子态的本征能量和波函数分布随失谐 δ 的变化. 从计算结果中可以发现, 吸引极化子态同样存在深浅两个分支. 其中浅吸引极化子态的波函数分布在 BCS 极限下主要由裸粒子态部分构成; 在 BEC 极限下主要由闭通道部分构成; 而在共振点处, 开通道与闭通道占比相当. 同时, 质心动量 \mathbf{Q} 略微背离零值时, 吸引极化子态的有效质量会在 BEC 一侧存在发散.

对比质心动量为零时的分子态和吸引极化子态的本征能量可以发现, 随着 δ 的变化, 系统中存在由吸引极化子态到分子态的转变. 当 δ 小于转变点 δ_c 时, 系统的基态为吸引极化子态, 而当 δ 大于 δ_c 时, 系统基态变为分子态. 同时研究发现, δ_c 会随着系统粒子数密度的增大而变大. 这一普适性的缺失说明 OFR 是一个窄共振.

然后讨论了排斥极化子态的性质. 排斥极化子的本征能量高于阈值能量, 且伴随着 δ 的变化, 排斥极化子态会与其他态发生耦合. 在排斥极化子态的准粒子残余和有效质量中均存在明显的非解析行为, 这可以定性解释为由类似于共振散射行为引起. 同时, 研究发现当开通道与闭通道近简并时, 排斥极化子态的衰变率最小.

接下来在 $|g \uparrow\rangle$ 态中另外引入一个费米面, 此时体系变为双费米面情况. 通过对比单费米面和双费米面两种情况中分子态、吸引极化子态和排斥极化子态的各项性质可以发现, 在闭通道中引入费米海等效于对闭通道基态的移动, 这使分子态到吸引极化子态的转变点和其他特征量都向着 δ 较大的方向移动. 闭通道中由于自旋交换相互作用引起的费米面附近的涨落, 会使排斥极化子态中类共振行为及

其他非解析结构变得模糊并最终消失.

最后讨论了二维 ^{173}Yb 费米气体中的杂质态问题. 通过对比发现, 二维体系中分子态和极化子态的性质与三维系统类似, 例如存在吸引极化子态到分子态的转变, 排斥极化子态的衰变率在两个通道简并时存在最小值点, 以及引入另一个费米面会引起能量移动等. 但与三维系统不同的是, 二维系统中费米面附近的涨落较大, 会产生更为显著的多体效应.

参考文献

- [1] Takamoto M, Hong F L, Higashi R, Katori H 2005 *Nature* **435** 321
- [2] Ludlow A D, Boyd M M, Zelevinsky T, Foreman S M, Blatt S, Notcutt M, Ido T, Ye J 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 033003
- [3] Bloom B J, Nicholson T L, Williams J R, Campbell S L, Bishop M, Zhang X, Zhang W, Bromley S L, Ye J 2014 *Nature* **506** 71
- [4] Wu C, Hu J P, Zhang S C 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 186402
- [5] Fukuhara T, Takasu Y, Kumakura M, Takahashi Y 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 030401
- [6] Gorshkov A V, Rey A M, Daley A J, Boyd M M, Ye J, Zoller P, Lukin M D 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 110503
- [7] Zhang X, Bishop M, Bromley S L, Kraus C V, Safronova M S, Zoller P, Rey A M, Ye J 2014 *Science* **345** 6203
- [8] Cappellini G, Mancini M, Pagano G, Lombardi P, Livi L, Siciliani de Cumis M, Cancio P, Pizzocaro M, Calonico D, Levi F, Sias C, Catani J, Inguscio M, Fallani L 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 120402
- [9] Scazza F, Hofrichter C, Höfer M, De Groot P C, Bloch I, Fölling S 2014 *Nat. Phys.* **10** 779
- [10] Enomoto K, Kasa K, Kitagawa M, Takahashi Y 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 203201
- [11] Blatt S, Nicholson T L, Bloom B J, Williams J R, Thomsen J W, Julienne P S, Ye J 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 073202
- [12] Yan M, DeSalvo B J, Ramachandhran B, Pu H, Killian T C 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 123201
- [13] Zhang R, Cheng Y, Zhai H, Zhang P 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 135301
- [14] Pagano G, Mancini M, Cappellini G, Livi L, Sias C, Catani J, Inguscio M, Fallani L 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 265301
- [15] Höfer M, Riegger L, Scazza F, Hofrichter C, Fernandes D R, Parish M M, Levinsen J, Bloch I, Fölling S 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 265302
- [16] Chin C, Grimm R, Julienne P, Tiesinga E 2010 *Rev. Mod. Phys.* **82** 1225
- [17] Porosev S G, Derevianko A, Fortson E N 2004 *Phys. Rev. A* **69** 021403(R)
- [18] Santra R, Christ K V, Greene C H 2004 *Phys. Rev. A* **69** 042510
- [19] Xu J, Zhang R, Cheng Y, Zhang P, Qi R, Zhai H 2016 *Phys. Rev. A* **94** 033609
- [20] Iskin M 2016 *Phys. Rev. A* **94** 011604(R)
- [21] Isaev L, Schachenmayer J, Rey A M 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 135302
- [22] He L, Wang J, Peng S G, Liu X J, Hu H 2016 *Phys. Rev. A* **94** 043624

- [23] Chen J G, Deng T S, Yi W, Zhang W 2016 *Phys. Rev. A* **94** 053627
- [24] Iskin M 2017 *Phys. Rev. A* **95** 013618
- [25] Zhang Y C, Ding S, Zhang S 2017 *Phys. Rev. A* **95** 041603(R)
- [26] Wang S, Pan J S, Cui X, Zhang W, Yi W 2017 *Phys. Rev. A* **95** 043634
- [27] Deng T S, Zhang W, Yi W 2017 *Phys. Rev. A* **96** 050701(R)
- [28] Zhou X, Pan J S, Liu Z X, Zhang W, Yi W, Chen G, Jia S 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 185701
- [29] Xu J, Qi R 2018 *Eur. Phys. J. D* **72** 65
- [30] Chen J G, Shi Y R, Zhang X, Zhang W 2018 *Frontiers of Physics* **4** 136702
- [31] Schirotzek A, Wu C H, Sommer A, Zwierlein M W 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 230402
- [32] Kohstall C, Zaccanti M, Jag M, Trenkwalder A, Massignan P, Bruun G M, Schreck F, Grimm R 2012 *Nature* **485** 615
- [33] Koschorreck M, Pertot D, Vogt E, Fröhlich B, Feld M, Köhl M 2012 *Nature* **485** 619
- [34] Nascimbène S, Navon N, Jiang K J, Tarruell L, Teichmann M, McKeever J, Chevy F, Salomon C 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 170402
- [35] Massignan P, Zaccanti M, Bruun G M 2014 *Rep. Prog. Phys.* **77** 034401
- [36] Cui X, Zhai H 2010 *Phys. Rev. A* **81** 041602(R)
- [37] Pilati S, Bertaina G, Giorgini S, Troyer M 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 030405
- [38] Mathy C J M, Parish M M, Huse D A 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 166404
- [39] Yi W, Zhang W 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 140402
- [40] Zhou L, Cui X, Yi W 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 195301
- [41] Nishida Y 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 115302
- [42] Yi W, Cui X 2015 *Phys. Rev. A* **92** 013620
- [43] Landau L D 1933 *Phys. Z. Sowjetunion* **3** 644
- [44] Pekar S I 1946 *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **16** 335
- [45] Fröhlich H, Pelzer H, Zienau S 1950 *Philos. Mag.* **41** 221
- [46] Fröhlich H 1954 *Adv. Phys.* **3** 325
- [47] Feynman R P 1955 *Phys. Rev.* **97** 660
- [48] Bardeen J, Baym G, Pines D 1967 *Phys. Rev.* **156** 207
- [49] Li J, Schneider W D, Berndt R, Delley B 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 2893
- [50] Chikkatur A P, Görlitz A, Stamper-Kurn D M, Inouye S, Gupta S, Ketterle W 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 483
- [51] Catani J, Lamporesi G, Naik D, Gring M, Inguscio M, Minardi F, Kantian A, Giamarchi T 2012 *Phys. Rev. A* **85** 023623
- [52] Spethmann N, Kindermann F, John S, Weber C, Meschede D, Widera A 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 235301
- [53] Scelle R, Rentrop T, Trautmann A, Schuster T, Oberthaler M K 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 070401
- [54] Cucchietti F M, Timmermans E 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 210401
- [55] Tempere J, Casteels W, Oberthaler M K, Knoop S, Timmermans E, Devreese J T 2009 *Phys. Rev. B* **80** 184504
- [56] Rath S P, Schmidt R 2013 *Phys. Rev. A* **88** 053632
- [57] Qiu X, Cui X, Yi W 2016 *Phys. Rev. A* **94** 051604(R)
- [58] Sun M, Cui X 2017 *Phys. Rev. A* **96** 022707
- [59] Bai X D, Wang J, Liu X J, Xiong J, Deng F G, Hu H 2018 *Phys. Rev. A* **98** 023627
- [60] Hu H, Mulkerin B C, Wang J, Liu X J 2018 *Phys. Rev. A* **98** 013626
- [61] Chevy F 2006 *Phys. Rev. A* **74** 063628
- [62] Combescot R, Recati A, Lobo C, Chevy F 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 180402
- [63] Schmidt R, Enss T 2011 *Phys. Rev. A* **83** 063620
- [64] Massignan P, Bruun G M 2011 *Eur. Phys. J. D* **65** 83
- [65] Deng T S, Lu Z C, Shi Y R, Chen J G, Zhang W, Yi W 2018 *Phys. Rev. A* **97** 013635
- [66] Scazza F, Valtolina G, Massignan P, Recati A, Amico A, Burchianti A, Fort C, Inguscio M, Zaccanti M, Roati G 2017 *Phys. Rev. Lett.* **118** 083602
- [67] Dyke P, Kuhmle E D, Whitlock S, Hu H, Mark M, Hoinka S, Lingham M, Hannaford P, Vale C J 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 105304

SPECIAL TOPIC—Cold atoms and molecules

Impurity problem of alkaline-earth-like atoms near an orbital Feshbach resonance^{*}

Shi Yue-Ran¹⁾ Lu Zhuo-Cheng¹⁾ Wang Jing-Kun^{1,2)†} Zhang Wei^{1,2)‡}

1) (*Department of Physics, Renmin University of China, Beijing 100872, China*)

2) (*Beijing Key Laboratory of Opto-electronic Functional Materials and Micro-nano Devices, Renmin University of China, Beijing 100872, China*)

(Received 31 October 2018; revised manuscript received 29 December 2018)

Abstract

In recent years, alkaline-earth and alkaline-earth-like atoms have attracted much research interest in the field of ultracold atom. Especially, the recently discovered orbital Feshbach resonance makes it possible to investigate a strongly interacting gas of alkaline-earth or alkaline-earth-like atoms, which has greatly enriched the scope of quantum simulation in these systems. This paper focuses on the impurity problem in a Fermi gas of ^{173}Yb atoms near orbital Feshbach resonance. In this problem, the impurity atom in 3P_0 state will interact with the background Fermi sea in the ground state and the molecule or polaron state will be produced out of the Fermi sea. By using the Chevy-like ansatz, we investigate the properties of the molecule and attractive polaron states firstly and a transition between these two states will be found. Then, some properties of the repulsive polaron state will be introduced, such as the effective mass and the decay rate. Furthermore, the effect of an additional Fermi sea will be considered in this system. Finally, we will discuss the impurity problem in a two-dimensional system.

Keywords: alkaline-earth-like atom, orbital Feshbach resonance, the molecule state, the polaron state

PACS: 03.75.Ss, 05.30.Fk, 67.85.Lm

DOI: [10.7498/aps.68.20181937](https://doi.org/10.7498/aps.68.20181937)

* Project supported by the National Key R&D Program of China (Grant No. 2018YFA0306501), the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11434011, 11522436, 11774425), and the Research Funds of Renmin University of China (Grant Nos. 16XNLQ03, 18XNLQ15).

† Corresponding author. E-mail: jkwang@ruc.edu.cn

‡ Corresponding author. E-mail: wzhangl@ruc.edu.cn

超冷原子系综的非高斯纠缠态与精密测量

鹿博 韩成银 庄敏 柯勇贯 黄嘉豪 李朝红

Non-Gaussian entangled states and quantum metrology with ultracold atomic ensemble

Lu Bo Han Cheng-Yin Zhuang Min Ke Yong-Guan Huang Jia-Hao Lee Chao-Hong

引用信息 Citation: [Acta Physica Sinica](#), 68, 040306 (2019) DOI: 10.7498/aps.68.20190147

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190147>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

冷原子系综内单集体激发态的相干操纵

Coherent manipulation of single collective excitations in a cold atomic ensemble

物理学报. 2018, 67(22): 224203 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20181183>

基于量子Fisher信息的量子计量进展

Development on quantum metrology with quantum Fisher information

物理学报. 2019, 68(4): 040601 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181965>

光和原子关联与量子计量

Quantum metrology with atom and light correlation

物理学报. 2018, 67(16): 164204 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180895>

关联高斯与非高斯噪声激励的FHN神经元系统的稳态分析

Steady state characteristics in FHN neural system driven by correlated non-Gaussian noise and Gaussian noise

物理学报. 2016, 65(12): 120501 <https://doi.org/10.7498/aps.65.120501>

冷原子系综中两正交光场偏振模高效率存储的实验研究

Highly-efficient optical storage of two orthogonal polarization modes in a cold atom ensemble

物理学报. 2018, 67(1): 014204 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20171217>

专题：冷原子-分子物理

超冷原子系综的非高斯纠缠态与精密测量*

鹿博¹⁾²⁾ 韩成银¹⁾²⁾ 庄敏¹⁾²⁾ 柯勇贯¹⁾²⁾ 黄嘉豪¹⁾²⁾ 李朝红^{1)2)†}

1) (中山大学物理与天文学院, 量子工程与精密测量实验室, 珠海 519082)

2) (中山大学, 光电材料与技术国家重点实验室, 广州 510275)

(2019年1月26日收到; 2019年2月20日收到修改稿)

量子精密测量是基于量子力学的基本原理对特定物理量实施测量, 并利用量子效应提高测量精度的交叉科学。随着超冷原子实验技术的发展, 超冷原子为量子精密测量提供了一个优异的研究平台。利用发展成熟的量子调控技术, 人们可以基于超冷原子系综制备一些新奇的非高斯多粒子纠缠态。基于多体量子干涉, 利用这些非高斯纠缠态作为输入, 可以实现超越标准量子极限的高精度测量。本文简要综述这一研究领域的进展。

关键词: 量子精密测量, 非高斯纠缠态, 超冷原子系综, 多体量子干涉

PACS: 03.75.Dg, 03.75.Gg, 03.67.Bg, 03.75.Mn

DOI: 10.7498/aps.68.20190147

1 引言

量子精密测量是量子物理学与精密测量科学相结合的学科^[1–4]。其研究对探索基础科学问题、发展前沿技术都具有重要意义。它不仅能提高基本物理学常数(如万有引力常数、精细结构常数、普朗克常数等)的测量精度, 在更高精度上检验物理学基本定律^[5–8], 而且能应用于设计制造各种量子器件, 提高时间频率、磁场、重力加速度等参数测量的灵敏度^[9–16]。

量子精密测量主要研究如何利用量子力学的基本原理以及操控其独有的量子纠缠、量子关联和量子压缩等量子特性来提高参数的测量精度^[1–4]。目前, 用于研究的物理体系主要包括超冷原子体系^[17,18]、囚禁离子体系^[19–21]、光子体系^[22,23]、金刚石色心体系^[24]、核磁共振体系^[25–27]、固态体系^[28]等。其中, 超冷原子气体作为一种环境洁净且便于操控的多体量子系统而备受关注。超冷原子体系具

有稳固的量子相干性和高度的可控性。利用磁光囚禁技术, 超冷原子气体几乎处于没有其他杂质存在的空间中, 体系与环境的相互作用可以忽略, 因而体系具有超长的量子相干时间。超冷原子体系是原子层次的人造量子体系, 原子被囚禁在特定的空间范围之内, 原子的超精细态和原子之间的相互作用可以用电场、磁场、微波或激光等外场进行精确地操控。这些特性使超冷原子气体成为研究多体量子物理的一个新平台, 尤其为基于超冷原子系综的量子精密测量提供了新的机遇。

一般地, 对于参数的精密测量可以利用干涉过程来实现^[29,30]。基于量子力学的基本原理, 干涉结果可由每个粒子沿不同路径或内态的振幅相干叠加而得到。不同路径或者内态受到待测参数的影响会积累一个相对相位 ϕ 。根据干涉的结果可以测定这一相对相位 ϕ , 从而得到待测参数的信息。增加干涉仪中使用的粒子数目可以提高测量的信噪比。如果用 N 个没有关联的独立粒子作为干涉仪的输入态, 这等同于对同一个粒子进行 N 次测量。由中

* 国家自然科学基金(批准号: 11874434, 11574405, 11704420)资助的课题。

† 通信作者。E-mail: lichaoh2@mail.sysu.edu.cn

心极限定理可知, 其所能达到的测量精度最终将受限于标准量子极限: $N^{-1/2}$, 也叫经典极限. 进一步, 如果引入多体量子效应, 利用粒子之间的量子关联, 将有可能突破这一经典极限. 例如, 把输入态制备成最大纠缠态, 在理想情况下可以把测量精度提高到 N^{-1} . 此精度极限比标准量子极限提高了 $N^{1/2}$ 倍, 通常被称为海森伯极限.

在量子力学的框架中, 对于一个含待测相位信息的量子态 $|\psi(\phi)\rangle$, 其所能达到的测量精度极限可用量子 Fisher 信息 F_Q 来计算 [31–33]. 待测相位 ϕ 的标准偏差满足 $\Delta\phi \geq \Delta\phi_{QCRB} \equiv (\nu F_Q)^{-1/2}$, 其中 ν 是测量的次数. 对于一个粒子数为 N 的无纠缠态, $F_Q = N$, 其相位测量极限为标准量子极限. 对于一个 N 粒子的纠缠态, 量子 Fisher 信息可能会增大, $F_Q > N$, 从而其相位测量精度极限可能突破标准量子极限. 因此, 寻找和制备合适的多粒子纠缠态是实现突破标准量子极限测量的一个核心问题.

近些年, 国内外在这方面的研究取得了很多新进展. 众多新奇的多粒子纠缠态(如最大纠缠态、自旋压缩态、双数态、双模压缩真空态、自旋猫态等)在理论上被提出用于突破标准量子极限的量子精密测量, 并陆续在冷原子体系的实验中成功实现. 自旋压缩态是其中最为典型且已被广泛研究的一种 [13,17,18]. 由于自旋相干态和压缩态的概率分布可以用高斯统计来描述, 因而它们都是多粒子高斯态. 与之相反, 若概率分布不能用高斯统计来描述, 则这样的多粒子量子态属于非高斯态. 最大纠缠态、自旋猫态、双数态等都是典型的非高斯纠缠态. 最近, 这些非高斯纠缠态也逐步受到人们的关注, 在理论与实验上均取得了很大的突破 [34–38].

本文先介绍高斯型的自旋相干态与自旋压缩态, 随后着重讨论几个重要的非高斯多粒子纠缠态, 介绍如何在超冷原子系综实现这些多粒子纠缠态的制备, 并展示它们在量子精密测量中的应用.

2 基于量子干涉的精密测量

一般的物理量测量过程可以分为如下 3 个步骤: 1) 将探针制备到所需的输入态; 2) 让探针经历一个与待测参数有依赖关系的动力学演化; 3) 对探针含有待测参数信息的末态进行相应的测量, 选取合适的分析方法估算出参数的值.

这里仅讨论基于量子探针的物理量测量过程.

假设初始输入态为 $|\psi_{in}\rangle$; 在动力学演化过程中, 输入态在演化算符 $U(\theta)$ 的作用下演化成含有 θ 信息的末态 $|\psi(\theta)\rangle = U(\theta)|\psi_{in}\rangle$; 得到末态后, 再选取适当的可观测量 O , 并作用到 $|\psi(\theta)\rangle$ 上得到相应的期望值. 要成功地提取出未知参数 θ 的信息, 所选取的观测量 O 的期望值 $\langle O \rangle$ 必须与 θ 有一定的函数依赖关系. 如果对动力学演化过程有一定的先验知识, 而且能得到观测量期望值 $\langle O \rangle$ 与未知参数 θ 的函数依赖关系, 那么未知参数 θ 的信息可以通过观测量 O 的测量结果提取出来. 同时, 估计未知参数 θ 的误差也能相应得到. 根据误差传递公式, 可以得到估计未知参量的标准偏差 $\Delta\phi = \frac{\Delta O}{|\partial \langle O \rangle / \partial \theta|}$, 其中, ΔO 是观测量 O 的标准偏差, $\Delta O = \sqrt{\langle O^2 \rangle - \langle O \rangle^2}$, $\langle O \rangle = \langle \psi(\theta) | O | \psi(\theta) \rangle$, $\langle O^2 \rangle = \langle \psi(\theta) | O^2 | \psi(\theta) \rangle$.

由量子力学可以推导得到 [31–33], 待测参数的测量精度极限由量子 Fisher 信息 $F_Q = 4 \left(\langle \psi'(\theta) | \psi'(\theta) \rangle - |\langle \psi'(\theta) | \psi(\theta) \rangle|^2 \right)$ 决定, 即 $\Delta\theta \geq \Delta\theta_{QCRB} \equiv (\nu F_Q)^{-1/2}$, 其中 ν 是测量的次数, $|\psi'(\theta)\rangle$ 表示 $|\psi(\theta)\rangle$ 对相位 θ 求导数.

量子干涉是一种常用的参数测量手段. 对应参数估计的 3 个步骤, 运用量子态进行两模干涉可以概括为: 1) 把初态分成两个不同的模; 2) 自由演化一段时间积累与待测参数相关的相位; 3) 将两模进行复合读取相位并估计待测参数. 下面以单原子的 Ramsey 干涉为例.

一般的 Ramsey 干涉仪由两个 $\pi/2$ 脉冲和一个自由演化过程组成. Ramsey 干涉类似于 Mach-Zehnder 干涉, Ramsey 干涉的两个 $\pi/2$ 脉冲相当于 Mach-Zehnder 干涉的两个分束镜, 而自由演化过程对应于 Mach-Zehnder 干涉的相位积累过程.

考虑一个两能级原子, 分别标记其基态和激发态为 $|\downarrow\rangle$ 和 $|\uparrow\rangle$. 不失一般性, 假设基态与激发态对应的本征能量分别为 $-\omega_0/2$ 与 $+\omega_0/2$. 这里, ω_0 就是待测参数. 假设初始态 $|\psi_0\rangle$ 处于基态 $|\downarrow\rangle$, 运用第一个 $\pi/2$ 脉冲后, 得到输入态 $|\psi_{in}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\rangle + |\uparrow\rangle)$, 输入态为基态 $|\downarrow\rangle$ 与激发态 $|\uparrow\rangle$ 的等概率叠加态. 接着, 系统经历一个自由演化过程. 在此过程中, 基态 $|\downarrow\rangle$ 积累一个正的相位 $+\phi/2$, 激发态 $|\uparrow\rangle$ 积累一个负的相位 $-\phi/2$. 其中, $\phi = \omega_0 T$, T 为相位积累时间. 这时, 自由演化后的输出态可以写成 $|\psi(\phi)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\phi/2}|\uparrow\rangle + e^{+i\phi/2}|\downarrow\rangle)$. 最后, 运用第二个 $\pi/2$

脉冲，并对末态进行布居数测量。测得原子处在基态 $|\downarrow\rangle$ 的概率为 $p(\downarrow|\phi) = \frac{1+\cos\phi}{2} = \cos^2\frac{\phi}{2}$ ，测得原子处在激发态 $|\uparrow\rangle$ 的概率为 $p(\uparrow|\phi) = \frac{1-\cos\phi}{2} = \sin^2\frac{\phi}{2}$ 。因此，由布居数的测量即可得到 ϕ 的信息。

通过计算可以求得单原子 Ramsey 干涉的量子 Fisher 信息为 $F_Q(\phi) = 1$ 。由此可得，相对相位的不确定度 $\Delta\phi \geq \frac{1}{\sqrt{F_Q(\phi)}} = 1$ 。于是，只要知道相位积累时间 T ，就可以得到待测参数的不确定度 $\Delta\omega_0 \geq \frac{1}{T}$ 。对于 N 个独立单原子，待测参数的不确定度则降低 \sqrt{N} 倍，即 $\Delta\omega_0 \geq \frac{1}{\sqrt{NT}}$ 。假设 N 个原子是纠缠的，待测参数的测量不确定度会进一步降低。下面详细介绍量子多体纠缠态如何提高测量的精度。

3 多粒子高斯态与精密测量

3.1 自旋相干态

对于一个由 N 个二能级原子组成的超冷原子系综，可以把每个原子看成全同的自旋 $1/2$ 粒子。这样，整个系综就可以被描述成一个自旋长度为 $J = N/2$ 的大自旋系统。因此，系综可以用集体自旋算符 $\hat{J}_i = \sum_{l=1}^N \hat{S}_i^{(l)}$ ($i = x, y, z$) 来刻画，其中 $\hat{S}_i^{(l)}$ ($i = x, y, z$) 为第 l 个自旋 $1/2$ 粒子的自旋算符。当 N 个独立的、没有任何量子关联的自旋 $1/2$ 粒子同时处在同一个单粒子态时，就可以把这样的量子态叫作自旋相干态，它是最接近经典态的一个多粒子态。任意一个自旋相干态都可以写成

$$|\theta, \varphi\rangle_{\text{SCS}} = \otimes_{l=1}^N \left[\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} |\uparrow\rangle_l + \cos \frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2} |\downarrow\rangle_l \right] \quad (1)$$

其中， (θ, φ) 为自旋相干态的平均自旋方向。自旋相干态在 Dicke 基矢下的一般形式可以写成 $|\theta, \varphi\rangle_{\text{SCS}} = \sum_{m=-J}^J c_m(\theta) e^{-i(J+m)\varphi} |J, m\rangle$ ，其系数 $c_m(\theta) = \left[\frac{(2J)!}{(J+m)!(J-m)!} \right]^{\frac{1}{2}} \cos^{J-m}(\theta/2) \sin^{J+m}(\theta/2)$ 。当粒子数 N 很大时，其分布趋近标准的高斯正态分布^[39]，如图 1 左边。对于一个自旋相干态，任意垂直于其平均自旋方向 (θ, φ) 的自旋分量的方差 $(\Delta\hat{J}_\perp)^2$ 都相等。 $(\Delta\hat{J}_\perp)^2$ 就等于 N 个自旋 $1/2$ 粒子的方差 $(\Delta\hat{S}_\perp)^2$ 之和，即 $(\Delta\hat{J}_\perp)^2 = N \times (\Delta\hat{S}_\perp)^2 =$

$\frac{N}{4}$ 。自旋相干态满足海森伯不确定关系的极限条件，即不等式取等号的情况。利用自旋相干态进行 Ramsey 干涉，计算其量子 Fisher 信息得到 $F_Q = N$ ，可知其相位测量精度最多只能达到标准量子极限^[33]。

3.2 自旋压缩态

自旋压缩的概念由两位日本物理学家 Kitagawa 和 Ueda 于 1992 年提出，他们把量子光学的压缩定义推广到自旋算符中^[40]。对于无纠缠的自旋相干态，在垂直于平均自旋方向上，每个独立的自旋 $1/2$ 粒子的涨落均为 $1/4$ 。假如可以在各个独立自旋间建立一定的关联，就有可能抵消或者增加某个方向上的涨落。类似于位置动量的量子压缩，在不违背海森伯不确定关系的基础上，一个自旋分量的涨落（方差）能以增大另一个共轭自旋分量的涨落（方差）为代价而降低。对于自旋为 J 的系统，如果一个量子态沿某个自旋方向的涨落 $(\Delta\hat{J}_\perp)^2 < |\langle J_k \rangle|/2$ (k 为平均自旋方向)，这个量子态就可以被称为自旋压缩态。自旋压缩的产生与粒子间的量子关联密切相关。其相对粒子数差的概率分布也会从标准的高斯分布（自旋相干态）变为半高宽狭窄的高斯型分布^[39]，如图 1 右边所示。

常见的自旋压缩参数有三种。第一种是根据海森伯不确定关系定义的： $\xi_H^2 = \frac{2(\Delta\hat{J}_\alpha)^2}{|\langle \hat{J}_\gamma \rangle|}$ ， $\alpha \neq \gamma \in (x, y, z)$ 。第二种压缩参数定义为垂直于平均自旋方向的自旋分量涨落的最小值与平均自旋长度的比值，即 $\xi_S^2 = \frac{\min(\Delta\hat{J}_{n_\perp})^2}{J/2} = \frac{4\min(\Delta\hat{J}_{n_\perp})^2}{N}$ ，这

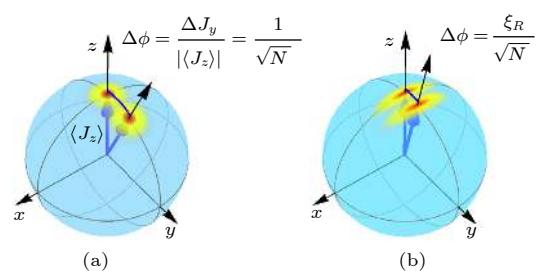


图 1 自旋相干态（左）与自旋压缩态（右）在广义 Bloch 球上的 Husimi 分布（摘自文献^[39]）

Fig. 1. The Husimi distribution of spin coherent state (left) and spin squeezed state (right) on the generalized Bloch sphere. Adapted from Ref. [39].

里可以通过寻找垂直于平均自旋方向上所有可能的 n_{\perp} 对应自旋分量的最小值, 来确定最佳的自旋压缩方向. 第三种压缩参数与精密光谱密切相关, 它是通过给定的量子态相位不确定度与一个参考的自旋相干态对应的相位不确定度的比值来定义,

$$\text{具体写成 } \xi_{\text{R}}^2 = \frac{\Delta\phi}{(\Delta\phi)_{\text{SCS}}} = \frac{N(\Delta\hat{J}_{n_{\perp}})^2}{|\langle j \rangle|^2}, \text{ 其中, } \langle j \rangle$$

为平均自旋长度. 当压缩系数 $\xi_{\alpha}^2 < 1 (\alpha = \text{H, S, R})$ 时, 可知体系产生自旋压缩. 输入自旋压缩态进行 Ramsey 干涉, 其量子 Fisher 信息 $F_Q > N$, 因此测量精度能突破标准量子极限.

自旋压缩态可以从一个自旋相干态出发, 通过单轴扭曲来实现. 单轴扭曲的哈密顿量可以写成 [13,18,41]:

$$H_{\text{twist}} = \chi \hat{J}_z^2, \quad (2)$$

其中, χ 描述的是原子间的有效非线性相互作用强度. 实验上可以对原子之间的非线性相互作用进行调节, 利用时间演化制备自旋压缩态. 一方面, 可以在体系中外加一个控制磁场, 利用 Feshbach 共振技术, 调节原子间的 s 分波散射长度, 从而改变原子间的有效相互作用 [18]. 另一方面, 可以通过调节原子物质波的空间密度分布来控制有效相互作用的大小. 在原子芯片上, 可以采用后一种方法, 通过微波操控波函数的交叠来调控原子间的非线性相互作用, 实现自旋压缩 [13,17]. 在一个双势阱中绝热相干地劈裂一个玻色-爱因斯坦凝聚体, 利用劈裂后两个不同的外部空间模式同样可以实现自旋压缩 [42,43]. 利用自旋压缩态, 可以实现突破标准量子极限的测量. 另外, 一种新型的非线性探测手段被提出, 并在自旋压缩态上实现了无需单粒子分辨的探测器也能突破标准量子极限的相位测量 [44-47]. 这类方案实际上是在可观测量探测前再进行一次非线性的动力学演化过程. 其实现与非线性动力学制备输入态类似, 实验可操作性强, 丰富了现有量子精密测量的探测手段.

4 非高斯纠缠态与精密测量

4.1 最大纠缠态

在 $J = N/2$ 的大自旋系统中, 所有 N 个粒子同时处在 $|\downarrow\rangle$ 与所有 N 个粒子同时处在 $|\uparrow\rangle$ 的等概率

叠加态, 被称为 N 粒子的 Greenberger-Horne-Zeilinger(GHZ) 态, 有时也被称为最大纠缠态. N 粒子的 GHZ 态在 Dicke 基矢下可以写成

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left| \frac{N}{2}, +\frac{N}{2} \right\rangle + e^{i\gamma} \left| \frac{N}{2}, -\frac{N}{2} \right\rangle \right), \quad (3)$$

其中, γ 代表一个任意相位. 在理想情况下, GHZ 态被认为是提高测量精度的最优候选态.

一般考虑干涉过程时, 设 $\gamma = 0$. 利用 GHZ 态来进行量子干涉, 输入态写成 $|\Psi\rangle_{\text{in}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left| \frac{N}{2}, +\frac{N}{2} \right\rangle + \left| \frac{N}{2}, -\frac{N}{2} \right\rangle \right)$. 在自由演化过程中, 每个处在 $|\downarrow\rangle$ 的粒子都积累一个 $+\frac{\varphi}{2}$ 的相位, 而每个处在 $|\uparrow\rangle$ 的粒子都积累一个 $-\frac{\varphi}{2}$ 的相位. 于是, 得到输出态 $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\frac{N\varphi}{2}} \left| \frac{N}{2}, +\frac{N}{2} \right\rangle + e^{+i\frac{N\varphi}{2}} \left| \frac{N}{2}, -\frac{N}{2} \right\rangle \right)$. 因此, 可以得到其量子 Fisher 信息为 $F_Q = N^2$, 其相位极限精度达到 $1/N$. 对比没有量子关联的独立原子, 把原子制备成最大纠缠态, 理论上能使测量精度从标准量子极限提高到海森伯极限 [48-53].

对于超冷原子系综, 最大纠缠态也可以用单轴扭曲的方法来制备. 当演化时间与有效相互作用满足 $\chi t = \frac{\pi}{2}$ 的条件时 [54], 系统的态可以从自旋相干态演化为最大纠缠态. 然而, 要达到这一条件比较困难. 其一, 实验上可实现的有效相互作用较弱, 需要很长的演化时间, 体系难以长时间保持相干性; 其二, 演化的时间需要控制得非常精确, 制备具有很大的随机性. 另外, 最大纠缠态非常脆弱, 纠缠特性容易受粒子数损失、失相等环境效应影响而被破坏. 这些都是利用最大纠缠态来进行量子精密测量时亟待解决的问题.

4.2 自旋猫态

由于最大纠缠态极端脆弱且制备较为困难, 实验上能实现的并不多, 即使实现了, 其纠缠的粒子数也很少. 因此, 寻找对环境效应具有鲁棒性同时实验上又易于制备的多粒子态成为关键. 下面, 着重介绍另一种有潜力运用到量子精密测量中的非高斯多粒子纠缠态——自旋猫态. 首先, 简要阐述自旋猫态的基本特点, 然后讨论其制备的方案和在精密测量中的表现.

自旋猫态实际上是一种宏观自旋相干叠加态 [55]. 假设有两个不同的自旋相干态相干叠加, 对于这样

形成的量子态, 可以由彼此正交的或非正交的自旋相干态叠加而成. 宏观自旋相干叠加态的形式可以写成 $|\Psi(\theta, \varphi)\rangle_M = N_C (|\theta, \varphi\rangle_{\text{SCS}} + |\pi - \theta, \varphi\rangle_{\text{SCS}})$, 其中, N_C 代表量子态的归一化系数. $|\theta, \varphi\rangle_{\text{SCS}}$ 和 $|\pi - \theta, \varphi\rangle_{\text{SCS}}$ 为两个自旋相干态. 不失一般性, 假设径角 $\varphi = 0$, 这时, 在 Dicke 基矢下, 宏观自旋相干叠加态表示为

$$|\Psi(\theta)\rangle_M = N_C \left[\sum_{m=-J}^J (c_m(\theta) + c_m(\pi - \theta)) |J, m\rangle \right]$$

对于 $\theta = 0$, $|\Psi(0)\rangle_M$ 变为最大纠缠态. 当 $\theta = \pi/2$ 时, $|\Psi(\pi/2)\rangle_M$ 实际上是 $\theta = \pi/2, \varphi = 0$ 的自旋相干态 $|\pi/2, 0\rangle_{\text{SCS}}$. 在 $0 \leq \theta \leq \pi/2$ 的区间内, $|\Psi(\theta)\rangle_M$ 中的两个相干叠加态间的距离随着 θ 的增大而减小. 在图 2 上方, 给出了不同 θ 对应的 $|\Psi(\theta)\rangle_M$ 在广义 Bloch 球面上的 Husimi 分布. 从图上可以看到, 对于 $0 \leq \theta < \pi/2$, 每个 Husimi 分布会出现两个峰, 而这两个峰的距离会随着 θ 的减小而增大. 特别地, 对于适中的 θ 值, $|\Psi(\theta)\rangle_M$ 会是两个准正交的自旋相干态的叠加态, 这种态可以看作是自旋猫态. 这里, 准正交指的是两个自旋相干态 $|\theta, 0\rangle_{\text{SCS}}$ 与 $|\pi - \theta, 0\rangle_{\text{SCS}}$ 波函数交叠的部分非常小. 当 $0 \leq \theta \leq \theta_C$, 交叠部分满足 $|\langle \text{scs} | \langle \theta, 0 | \pi - \theta, 0 \rangle_{\text{SCS}} |^2 < \varepsilon$ (ε 是一个很小的参数) 时, 就可以把 $|\Psi(\theta)\rangle_M$ 看成是自

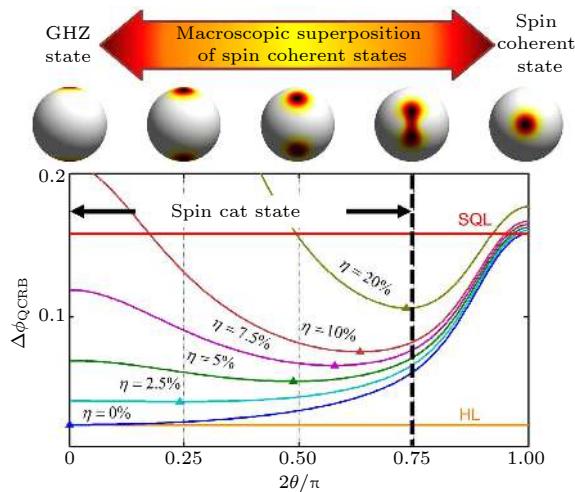


图 2 上图为不同自旋猫态在广义 Bloch 球上的 Husimi 分布; 下图为不同自旋猫态在有原子数损失 (η 为原子的损失率) 情况下的相位测量精度极限 (摘自文献 [55])

Fig. 2. Top: The Husimi distribution of different spin cat states on the generalized Bloch sphere. Bottom: The ultimate phase measurement precision with different spin cat states under atomic loss (η denotes the ratio of atom loss). Adapted from Ref. [55].

旋猫态. 此时, 自旋猫态可以写成 [56]:

$$|\Psi(\theta)\rangle_{\text{CAT}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sum_{m=-J}^J c_m(\theta) (|J, m\rangle + |J, -m\rangle) \right]. \quad (4)$$

最近的研究发现自旋猫态具有海森伯极限标度. 从上式出发, 可以得到其量子 Fisher 信息为 $F_Q = \left(1 - \frac{2\tan^2(\theta/2)}{1 + \tan^2(\theta/2)}\right)^2 N^2$. 因此, 其相位测量精度满足 $\Delta\phi \geq \Delta\phi_{QCRB} \equiv \nu^{-1/2} \left(1 + \frac{2\tan^2(\theta/2)}{1 - \tan^2(\theta/2)}\right) N^{-1}$, 接近海森伯极限 [56].

自旋猫态的一大优点是其对环境效应的鲁棒性. 在基于耗散体系的自旋猫态的量子相位测量方面有一些研究工作 [55]. 通过与不同的输入态 (尤其与最大纠缠态) 做对比, 发现纠缠适中的自旋猫态对原子损失具有很强的鲁棒性, 其在耗散下所能达到的相位测量精度依然很高, 如图 2 所示.

此外, 相对最大纠缠态, 自旋猫态较容易在实验中制备. 针对不同体系, 已有一些制备自旋猫态的方案被提出来 [57–71]. 在玻色-爱因斯坦凝聚体中可以利用原子碰撞引起的非线性 Kerr 效应来制备 [57,58]. 也可以从自旋相干态出发利用非线性动力学来制备, 但制备的自旋猫态可能需要合适的旋转操作才能作为输入态 [59]. 利用与热库的耦合 [60,61]、非破坏测量 [62–65]、里德伯阻塞 [66] 等手段都可以产生有效非线性, 从而制备自旋猫态. 引入一系列自旋测量操作也可以条件性地产生自旋猫态 [67–69]. 此外, 还有研究组在热原子体系中利用量子泽诺 (Zeno) 效应也能实现自旋猫态的制备 [71].

最近, 通过驱动系统穿越量子相变的绝热基态制备方法来实现自旋猫态被提出 [48,51,72]. 通过绝热改变系统的参数, 初态可以从一个非简并的基态逐渐演化到一个高度简并的纠缠态 [72]. 这样的过程既实现了产生纠缠态的作用, 同时又发挥了分束的作用, 如图 3 所示. 利用这样的方法可以在超冷原子系综上实现自旋猫态.

考虑一团两态的玻色凝聚原子 (占据两个超精细态), 用两模玻色-约瑟夫森哈密顿量来描述 [17,18,41,73]:

$$H_{\text{BJ}} = -\Omega \hat{J}_x + \delta \hat{J}_z + \chi \hat{J}_z^2, \quad (5)$$

这里, Ω 为 Rabi 频率 (在下面的讨论中假设 $\Omega \geq 0$), δ 表示失谐量, χ 为有效非线性相互作用. 其中, $\chi \propto g_{aa} + g_{bb} - 2g_{ab}$ 与模内、模间的原子相互作用

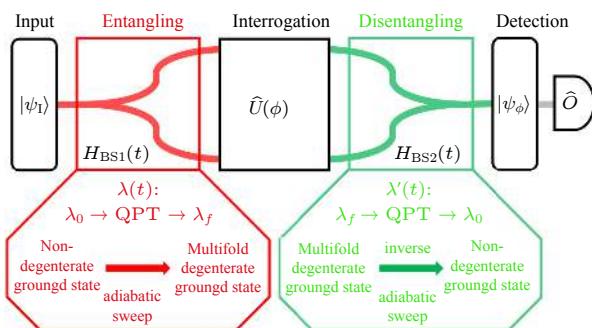


图 3 基于量子相变和多体量子干涉的相位测量方案示意图 (摘自文献 [61])

Fig. 3. Schematic of precision phase measurement based on driving through quantum phase transitions and many-body quantum interferometry. Adapted from Ref. [61].

强度相关。通过 Feshbach 共振调节原子模内或模间的散射长度就可以调节有效非线性相互作用 χ 。

对于自旋猫态的制备, 可以利用有效非线性相互作用为负时 (即 $\chi < 0$) 的基态特性 [48,49]。理论上, 对于 $\chi < 0$ 的对称玻色-约瑟夫森结 ($\delta = 0$), 可以利用绝热制备的方法产生从自旋相干态到自旋猫态等各种纠缠态。当 $\chi < 0$, $\delta = 0$, 体系基态性质只由系数 $\kappa = \Omega/\chi$ 决定。在强耦合极限下 ($|\kappa| \gg 1$), 其基态为自旋相干态。当 κ 从 $\kappa < -N$ 变到 $-N < \kappa < 0$ 时, 基态的布居数差概率分布会出现从单峰形态到双峰形态的转变。这种双峰形态所对应的基态可以被看成是两个对称的自囚禁态的等概率宏观叠加, 与自旋猫态类似。

因此, 从自旋相干态出发, 绝热地调节 Rabi 频率 Ω , 使其从很大的数值缓慢降为 0, 系统所处的态会绝热演化到最大纠缠态上。在绝热演化过程中, 系统的态会经过一个从正常态到自囚禁态的分叉。当 Ω 较小时, 由于宇称对称性的保护 [48,74], 系统演化的态会是两个自囚禁态的叠加态, 即自旋猫态。而自旋猫态 $|\Psi(\theta)\rangle_{\text{CAT}}$ 中决定两个叠加自旋相干态“距离”的参数 θ 只需要通过调节 Ω/χ 来控制即可 [51]。相比动力学演化的方法, 利用基态的绝热制备, 得到的自旋猫态是确定性的。

自旋猫态还可以通过其他巧妙设计的量子调控手段来获取。最近, 国外的研究组提出运用相干驱动 [75]、绝热捷径 [76] 等手段在玻色-约瑟夫森系统中产生自旋猫态, 其态制备时间能进一步缩短。

在实验中, 自旋猫态积累完待测相位后, 还需要进行可观测量的测量来提取待测相位的信息。最初, 人们发现常用的布居数之差测量无法提取相位

信息, 需要利用宇称测量 [51]。然而, 宇称测量需要分辨原子数的奇偶性, 实际需要单原子分辨率的探测器。这是一个比较严苛的实验要求, 在实验中很难实现。

为了克服这一困难, 引入与绝热制备基态的相反过程 (绝热改变系统参数使系统从简并区域回到非简并区域, 如图 3 所示) 作为合束器后, 就可以利用布居数之差的测量来提取相位信息, 从而不需要单原子分辨的探测器 [61]。另外, 在探测前引入非线性探测过程也可以实现。非线性探测过程包括一个单轴压缩、两个 $\pi/2$ 脉冲和布居数测量, 均可用当前实验技术实现。相比之前基于自旋压缩态的非线性探测方案, 改用自旋猫态, 其测量精度对探测噪声的鲁棒性大大增强 [56]。

4.3 双数态

双数态是两个模具有确定相等粒子数目的 Fock 直积态, 即

$$|TWIN\rangle = \left| \frac{N}{2} \right\rangle_a \left| \frac{N}{2} \right\rangle_b = |N/2, 0\rangle, \quad (6)$$

其中, N 为偶数。由于其两模的粒子数都是确定的, 相对粒子数的不确定度为零, 因此两模间的相对相位是完全不确定的 [77]。利用双数态作为输入, 可以实现达到海森伯极限的量子干涉测量。首先, 双数态经过一个形式 $\hat{U}_{\text{BS1}} = \exp \left[\frac{\pi}{4} (\hat{a}^\dagger \hat{b} - \hat{b}^\dagger \hat{a}) \right]$ 的分束器会变成 $|\Psi\rangle_{\text{in}} = \sum_{k=0}^{N/2} C_k^{N/2} |2k\rangle_a |N-2k\rangle_b$, 其系数 $C_k^{N/2}$ 的形式为

$$C_k^{N/2} = \frac{1}{2^{N/2}} (-1)^{N/2-k} \left[\binom{2k}{k} \binom{N-2k}{N/2-k} \right]^{1/2},$$

可以通过计算它的量子 Fisher 信息 $F_Q = N(1+N/2)$, 得知其相位测量精度极限满足 $\Delta\varphi \geq \frac{1}{\sqrt{N^2/2 + N}}$ 。因此, 利用双数态进行相位测量, 理论上所能达到的最小相位不确定度几乎正比于总粒子数 N ($N \gg 1$), 具有海森伯极限的标度 [32]。

理论上, 选用双数态作为初态, 结合宇称测量, 可以实现接近海森伯极限的相位测量。得到输出态后, 再经过合束器得到末态, 并进行宇称测量。定义 b 模上的宇称算符为 $\hat{P}_b = \exp(i\pi \hat{b}^\dagger \hat{b})$, 其对末态的期望值为 $\langle \hat{P}_b \rangle = P_{N/2} [\cos(2\varphi)]$ (其中 $P_{N/2} [\cos(2\varphi)]$ 为 Legendre 多项式) [78]。根据误差传

递公式 $\Delta\varphi = \frac{\Delta\hat{H}_b}{|\partial\langle\hat{H}_b\rangle/\partial\varphi|}$, 可以得到: 当 $\varphi \rightarrow 0$

时, 宇称测量的相位不确定度与总粒子数 N 成反比关系, 即 $\Delta\varphi \propto \frac{1}{N}$. 最近, 国内外在基于超冷原子系综的双数态制备及其相位估计方面取得了巨大的实验突破.

通过旋量玻色-爱因斯坦凝聚体 (BEC) 中原子的自旋交换碰撞可以实现大原子数的双数态^[34]. 若将原子制备在 $m_F = 0$ 的初始态, 两个 $m_F = 0$ 原子通过自旋交换碰撞就可以产生一对自旋向上和向下 ($m_F = \pm 1$) 的原子. Klemp et al.^[34] 利用自旋交换动力学成功制备了双数态, 他们的实验利用旋量为 2 的 ^{87}Rb 凝聚体, 通过选择合适的磁场强度 (1.23 G) 和演化时间 (15 ms), 制备了原子数可多达 10^4 的双数态, 并利用双数态得到低于散粒噪声 $1.61_{-1.1}^{+0.98}$ dB 的干涉灵敏度. 然而, 利用旋量 BEC 中的自旋动力学产生的双数态总原子数存在很大的涨落, 因此在利用双数态展示突破标准量子极限的测量时需要对样本总原子数进行后选择, 大大降低了双数态的实用性.

最近, 通过调控旋量为 1 的 ^{87}Rb 凝聚体自旋混合过程, 实现连续发生两次量子相变, 可以在实验中确定性地制备约 11000 个原子的双数态^[35]. 在这个实验中, 旋量 BEC 的自旋动力学哈密顿量可以描述为 $H = \frac{c_2}{2N_t} [2(\hat{a}_+^\dagger \hat{a}_{-1}^\dagger \hat{a}_0 \hat{a}_0 + \text{h.c.}) + (2\hat{N}_0 - 1)(N_t - \hat{N}_0)] - q\hat{N}_0$, 其中 $\hat{a}_{m_F}^\dagger (\hat{a}_{m_F})$ 与 \hat{N}_{m_F} 分别代表 m_F 磁子能级原子产生 (湮灭) 和粒子数算符, $N_t = N_{+1} + N_{-1} + N_0$ 为总粒子数. 第一项代表与自旋相关的相互作用, 包括自旋交换相互作用, 参数 $|c_2|$ 表示自旋交换发生的平均速率; 第二项代表二阶塞曼效应对系统的影响, 实验上通过磁场或者微波可以调控 q . 对于该哈密顿量, 在 $q = \pm 2|c_2|$ 处有两个量子相变点, 如图 4(a) 所示, 对于 $q \gg 2|c_2|$, 所有基态为 polar(P) 相; 对于 $q \ll -2|c_2|$, 基态变成双数相, 产生相等数目的 $m_F = \pm 1$ 态; $-2|c_2| < q < 2|c_2|$ 对应 broken-axis symmetry 相, 在该区域内 BEC 中的原子容易发生自旋交换碰撞, 产生双数态. 他们在实验中设计 q 的扫描曲线, 让 q 尽量慢地穿过量子相变点, 使相变点的激发大为减少, 从而确定性地制备双数态. 在扫描结束后, 有 $(96 \pm 2)\%$ 的 $m_F = 0$ 的原子 (共约 11000 个原子) 转换为双数态. 另外, 利用

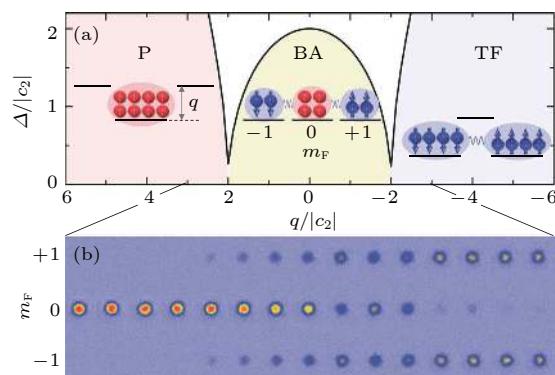


图 4 (a) 旋量 BEC 的基态由单原子内态的二阶塞曼效应和 BEC 中自旋交换作用强度的大小决定, 会出现两个相变点, 将相图分为三个区域, 分别为 P, BA 和 TF 相; (b) 线性扫描 q 时, 通过吸收成像观察到的 BEC 在各个内态上的分布随时间的变化 (摘自文献 [35])

Fig. 4. (a) The thick black solid line denotes the gap Δ between the first excited and the ground state of Hamiltonian, which together with the two minima at $q = \pm 2|c_2|$ defines three quantum phases, illustrated by their atom distributions in the three spin components, the first-order Zeeman shifts are not shown because they are inconsequential for a system with zero magnetization; (b) absorption images of atoms in the three spin components after Stern-Gerlach separation, showing efficient conversion of a condensate from a polar state into a TFS by sweeping q linearly from $3|c_2|$ to $-3|c_2|$ in 3 s. Adapted from Ref. [35].

类似的方法, 他们还成功制备了三模的 balanced spin-1 Dicke 态, 并实现了超越三模标准量子极限的干涉精度 (达到 $2.42_{-1.29}^{+1.76}$ dB)^[36]. 这些成果为研究超越标准量子极限的量子精密测量指引了新的方向.

4.4 精密测量中的应用

基于上述非高斯纠缠态, 通过多体量子干涉可实现对物理参数的高精度测量. 第一, 利用多粒子 GHZ 态的 Sagnac 干涉来提高旋转频率的测量精度^[51]. 利用态依赖的旋转势, 两态的玻色原子系综在一个环内移动. 其中, 不同内态的原子沿不同方向运动. 然后, 原子通过 Ramsey 脉冲进行复合干涉. 相位积累的时间由态依赖的旋转势的形式确定. 只要原子的内态存在纠缠 (把原子制备在 GHZ 态上), 其旋转频率的精度极限将有可能达到海森伯极限. 第二, 基于玻色凝聚铷原子气体, 耦合不同 Zeeman 能级并调控原子之间的相互作用强度^[13], 制备磁敏感非高斯纠缠态 (自旋猫态、双数态等) 并实施 Ramsey 干涉, 再选取恰当的可观测量提取磁场信号, 可实现超越传统测量极限的精

密磁场测量。第三, 利用旋量玻色凝聚原子, 可利用多模的多体量子干涉实现线性与非线性 Zeeman 系数的同时测量^[52]。把原子制备在多模的 GHZ 态上, 两个系数的测量精度有可能同时达到海森伯极限。

此外, 基于这些新型的非高斯纠缠态, 还可以发展超越经典测量极限的量子器件, 如高精度重力仪^[79]、磁力计^[80]、陀螺仪^[81,82]、纠缠原子钟^[83–85]等。虽然这些工作目前仍处于实验研发阶段, 但是已显现出巨大的实用前景和研究价值。

5 总结与展望

综上所述, 基于非高斯纠缠态的量子精密测量是一个正在稳步发展的研究方向。其中, 基于超冷原子系综的绝热量子相变与多体量子干涉实施量子精密测量是一种有广泛应用前景的探索。利用跨越量子相变临界点的绝热过程可成功制备超冷原子系综的非高斯纠缠态(如自旋猫态和 GHZ 态)。基于多体量子干涉, 输入所制备的非高斯纠缠态, 可实现超越标准量子极限的高精度测量。这些都为基于超冷原子系综实施超越标准量子极限的精密测量给出了一条可行的新途径。当然, 在实际应用中还面临许多挑战, 如实验中各个过程都可能存在退相干效应, 非高斯纠缠态在环境中会变得脆弱, 对最终测量精度产生影响; 针对不同的非高斯输入态, 需要设计合适的探测过程等。针对这些挑战, 还需要进行更深入的理论分析与实验探索。

参考文献

- [1] Giovannetti V, Lloyd S, Maccone L 2011 *Nat. Photon.* **5** 222
[2] Giovannetti V, Lloyd S, Maccone L 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 010401
[3] Giovannetti V, Lloyd S, Maccone L 2004 *Science* **306** 1330
[4] Pezzè L, Smerzi A, Oberthaler M, Schmied R, Treutlein P 2018 *Rev. Mod. Phys.* **90** 035005
[5] Zhou L, Long S, Tang B, Chen X, Gao F, Peng W, Duan W, Zhong J, Xiong Z, Wang J, Zhang Y, Zhan M 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 013004
[6] Williams J, Chiow S, Yu N, Müller H 2016 *New J. Phys.* **18** 025018
[7] Dickerson S, Hogan J, Sugabaker A, Johnson D, Kasevich M 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 083001
[8] Graham P, Hogan J, Kasevich M, Rajendran S 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 171102
[9] Müntinga H, Ahlers H, Krutzik M, Wenzlawski A, Arnold S, Becker D, Bongs K, Dittus H, Duncker H, Gaaloul N, Gherasim C, Giese E, Grzeschik C, Hänsch T, Hellmig O, Herr W, Herrmann S, Kajari E, Kleinert S, Lämmerzahl C, Lewoczko-Adamczyk W, Malcolm J, Meyer N, Nolte R, Peters A, Popp M, Reichel J, Roura A, Rudolph J, Schiemangk M, Schneider M, Seidel S, Sengstock K, Tamme V, Valenzuela T, Vogel A, Walser R, Wendrich T, Windpassinger P, Zeller W, Zoest T, Ertmer W, Schleich W, Rasel E 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 093602
[10] Dolde F, Fedder H, Doherty M, Nöbauer T, Rempp F, Balsubramanian G, Wolf T, Reinhard F, Hollenberg L, Jelezko F, Wrachtrup J 2011 *Nat. Phys.* **7** 459
[11] Cooper J, Hallwood D, Dunningham J 2010 *Phys. Rev. A* **81** 043624
[12] Boto A, Kok P, Abrams D, Braunstein S, Williams C, Dowling J 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 2733
[13] Ockeloen C, Schmied R, Riedel M, Treutlein P 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 143001
[14] Georgescu I 2014 *Nat. Phys.* **10** 474
[15] Wasilewski W, Jensen K, Krauter H, Renema J, Balabas M, Polzik E 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 133601
[16] Ke Y, Huang J, Zhuang M, Lu B, Lee C 2018 *Phys. Rev. A* **98** 053826
[17] Riedel M, Böhi P, Li Y, Hänsch T, Sinatra A, Treutlein P 2010 *Nature* **461** 1170
[18] Gross C, Zibold T, Nicklas E, Estève J, Oberthaler M 2010 *Nature* **464** 1165
[19] Wineland D 2013 *Rev. Mod. Phys.* **85** 1103
[20] Blatt R, Wineland D 2008 *Nature* **453** 1008
[21] Leibfried D, DeMarco B, Meyer V, Rowe M, Ben-Kish A, Britton J, Itano W, Jelenković B, Langer C, Rosenband T, Wineland D 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 247901
[22] Huver S, Wildfeuer C, Dowling J 2008 *Phys. Rev. A* **78** 063828
[23] Afek I, Ambar O, Silberberg Y 2010 *Science* **328** 879
[24] Fang K, Acosta V, Santori C, Huang Z, Itoh K, Watanabe H, Shikata S, Beausoleil R 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 130802
[25] Simmons S, Jones J, Karlen S, Ardavan A, Morton J 2010 *Phys. Rev. A* **82** 022330
[26] Nie X, Huang J, Li Z, Zheng W, Lee C, Peng X, Du J 2018 *Sci. Bull.* **63** 469
[27] Nie X, Li J, Cui J, Luo Z, Huang J, Chen H, Lee C, Peng X, Du J 2015 *New J. Phys.* **17** 053028
[28] Pham L, Bar-Gill N, Belthangady C, Le Sage D, Cappellaro P, Lukin M, Yacoby A, Walsworth R 2012 *Phys. Rev. B* **86** 045214
[29] Demkowicz-Dobrzański R, Kołodyński J, Gut Ł M 2012 *Nat. Commun.* **3** 1063
[30] Escher B, de Matos Filho R, Davidovich L 2011 *Nat. Phys.* **7** 406
[31] Braunstein S 1992 *Phys. Rev. Lett.* **69** 3598
[32] Braunstein S, Caves C 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 3439
[33] Huang J, Wu S, Zhong H, Lee C 2014 Annual Review of Cold Atoms and Molecules (Vol. 2) (World Scientific) p365
[34] Lücke B, Scherer M, Kruse J, Pezzè L, Deuretzbacher F, Hyllus P, Topic O, Peise J, Ertmer W, Arlt J, Santos L, Smerzi A, Klempt C 2011 *Science* **334** 773
[35] Luo X, Zou Y, Wu L, Liu Q, Han M, Tey M, You L 2017 *Science* **355** 620
[36] Zou Y, Wu L, Liu Q, Luo X, Guo S, Cao J, Tey M, You L 2018 *PNAS* **115** 6381
[37] Strobel H, Muessel W, Linnemann D, Zibold T, Hume D, Pezzè L, Smerzi A, Oberthaler M 2014 *Science* **345** 424
[38] Wang X, Sanders B 2001 *Phys. Rev. A* **65** 012303
[39] Ma J, Wang X, Sun C, Nori F 2011 *Phys. Rep.* **509** 89

- [40] Kitagawa M, Ueda M 1993 *Phys. Rev. A* **47** 5138
- [41] Lee C, Huang J, Deng H, Dai H, Xu J 2012 *Front. Phys.* **7** 109
- [42] Estève J, Gross C, Weller A, Giovanazzi S, Oberthaler M 2008 *Nature* **455** 1216
- [43] Berrada T, Frank S, Bücker R, Schumm T, Schaff J, Schmiedmayer J 2013 *Nat. Commun.* **4** 2077
- [44] Davis E, Bentsen G, Schleier-Smith M 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 053601
- [45] Fröwis F, Sekatski P, Dür W 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 090801
- [46] Linnemann D, Strobel H, Muessel W, Schulz J, Lewis-Swan R, Kheruntsyan K, Oberthaler M 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 013001
- [47] Hosten O, Krishnakumar R, Engelsen N, Kasevich M 2016 *Science* **352** 1552
- [48] Lee C 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 150402
- [49] Lee C 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 070401
- [50] Hu Y, Feng M, Lee C 2012 *Phys. Rev. A* **85** 043604
- [51] Luo C, Huang J, Zhang X, Lee C 2017 *Phys. Rev. A* **95** 023608
- [52] Zhuang M, Huang J, Lee C 2018 *Phys. Rev. A* **98** 033603
- [53] Ma J, Huang Y, Wang X, Sun C 2011 *Phys. Rev. A* **84** 039907
- [54] You L 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 030402
- [55] Huang J, Qin X, Zhong H, Ke Y, Lee C 2015 *Sci. Rep.* **5** 17894
- [56] Huang J, Zhuang M, Lu B, Ke Y, Lee C 2018 *Phys. Rev. A* **98** 012129
- [57] Lau H, Dutton Z, Wang T, Simon C 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 090401
- [58] Dooley S, Spiller T P 2014 *Phys. Rev. A* **90** 012320
- [59] Tanaka T, Knott P, Matsuzaki Y, Dooley S, Yamaguchi H, Munro W, Saito S 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 170801
- [60] Molmer K, Sørensen A 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 1835
- [61] Bhaktavatsala Rao D, Bar-Gill N, Kurizki G 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 010404
- [62] Gerry C, Grobe R 1997 *Phys. Rev. A* **56** 2390
- [63] Gerry C, Grobe R 1998 *Phys. Rev. A* **57** 2247
- [64] Recamier J, Castanos O, Jauregui R, Frank A 2000 *Phys. Rev. A* **61** 063808
- [65] Inoue R, Tanaka S, Namiki R, Sagawa T, Takahashi Y 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 163602
- [66] Opatrný T, Molmer K 2012 *Phys. Rev. A* **86** 023845
- [67] Kok P, Lee H, Dowling J 2002 *Phys. Rev. A* **65** 052104
- [68] Nielsen A, Molmer K 2007 *Phys. Rev. A* **75** 063803
- [69] Chen Y, Bao X, Yuan Z, Chen S, Zhao B, Pan J 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 043601
- [70] Lombardo D, Twamley J 2015 *Sci. Rep.* **5** 13884
- [71] Signoles A, Facon A, Grossi D, Dotsenko I, Haroche S, Raimond J, Brune M, Gleyzes S 2014 *Nat. Phys.* **10** 715
- [72] Huang J, Zhuang M, Lee C 2018 *Phys. Rev. A* **97** 032116
- [73] Lee C, Fu L, Kivshar Y 2008 *EPL* **81** 60006
- [74] Xing H, Wang A, Tan Q, Zhang W, Yi S 2016 *Phys. Rev. A* **93** 043615
- [75] Yukawa E, Milburn G, Nemoto K 2018 *Phys. Rev. A* **97** 013820
- [76] Hatomura T 2018 *New J. Phys.* **20** 015010
- [77] Dunningham J, Burnett K 2004 *Phys. Rev. A* **70** 033601
- [78] Campos R, Gerry C, Benmoussa A 2003 *Phys. Rev. A* **68** 023810
- [79] Savas D, Peter W G, Jason M H, Mark A K 2008 *Phys. Rev. D* **78** 122002
- [80] Auzinsh M, Budker D, Kimball D F, Rochester S M, Stalnaker J E 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 173002
- [81] Helm J, Billam T, Rakonjac A, Cornish S, Gardiner S 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 063201
- [82] Nolan S, Sabbatini J, Bromley M, Davis M, Haine S 2016 *Phys. Rev. A* **93** 023616
- [83] Kessler E, Kónárá P, Bishof M, Jiang L, Sørensen A, Ye J, Lukin M 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 190403
- [84] Dorner U 2012 *New J. Phys.* **14** 043011
- [85] Weinstein J, Belyov K, Derevianko A 2010 *Phys. Rev. A* **81** 030302(R)

SPECIAL TOPIC—Cold atoms and molecules

Non-Gaussian entangled states and quantum metrology with ultracold atomic ensemble^{*}

Lu Bo¹⁾²⁾ Han Cheng-Yin¹⁾²⁾ Zhuang Min¹⁾²⁾ Ke Yong-Guan¹⁾²⁾
Huang Jia-Hao¹⁾²⁾ Lee Chao-Hong^{1)2)[†]}

1) (*Laboratory of Quantum Engineering and Quantum Metrology, School of Physics and Astronomy,
Sun Yat-Sen University (Zhuhai Campus), Zhuhai 519082, China*)

2) (*State Key Laboratory of Optoelectronic Materials and Technologies, Sun Yat-Sen
University (Guangzhou Campus), Guangzhou 510275, China*)

(Received 26 January 2019; revised manuscript received 20 February 2019)

Abstract

Quantum metrology is the interdisciplinary of investigating how to utilize the principles of quantum mechanics to perform parameter estimation and improve the measurement precision by quantum effects. With the experimental developments of ultracold atoms, ultracold atomic ensemble provides an excellent platform for implementing quantum metrology. Attributed to well-developed techniques of quantum control, one can prepare several exotic non-Gaussian multi-particle entangled states in the ensembles of ultracold atoms. Based on many-body quanum interferometry, and using these non-Gaussian entangled states as probe, the high-precision measurement beyond the standard quantum limit can be realized. This article introduces the background and advancement of this field.

Keywords: quantum metrology, non-Gaussian entangled states, ultracold atomic ensemble, many-body quanum interferometry

PACS: 03.75.Dg, 03.75.Gg, 03.67.Bg, 03.75.Mn

DOI: [10.7498/aps.68.20190147](https://doi.org/10.7498/aps.68.20190147)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11874434, 11574405, 11704420).

† Corresponding author. E-mail: lichaoh2@mail.sysu.edu.cn

基于量子Fisher信息的量子计量进展

任志红 李岩 李艳娜 李卫东

Development on quantum metrology with quantum Fisher information

Ren Zhi-Hong Li Yan Li Yan-Na Li Wei-Dong

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 68, 040601 (2019) DOI: 10.7498/aps.68.20181965

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181965>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于部分测量增强量子隐形传态过程的量子Fisher信息

Enhancement of quantum Fisher information of quantum teleportation by optimizing partial measurements

物理学报. 2018, 67(14): 140304 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180330>

光和原子关联与量子计量

Quantum metrology with atom and light correlation

物理学报. 2018, 67(16): 164204 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180895>

核磁共振量子信息处理研究的新进展

New research progress of nuclear magnetic resonance quantum information processing

物理学报. 2018, 67(22): 220301 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180754>

超冷原子系综的非高斯纠缠态与精密测量

Non-Gaussian entangled states and quantum metrology with ultracold atomic ensemble

物理学报. 2019, 68(4): 040306 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190147>

表面等离激元量子信息应用研究进展

Recent progress of the application of surface plasmon polariton in quantum information processing

物理学报. 2017, 66(14): 144202 <https://doi.org/10.7498/aps.66.144202>

专题：冷原子-分子物理

基于量子 Fisher 信息的量子计量进展*

任志红 李岩 李艳娜 李卫东[†]

(山西大学, 理论物理研究所, 量子光学与光量子器件国家重点实验室, 极端光学协同创新中心, 太原 030006)

(2018年11月6日收到; 2019年1月18日收到修改稿)

量子计量是超冷原子气体研究中的一个热点领域。超冷原子体系独特的量子性质(量子纠缠)和量子效应有助于大幅度提高待测物理量的测量精度, 这已经成为量子精密测量中的共识。量子 Fisher 信息对该领域的发展起了非常重要的作用。本文首先介绍量子 Fisher 信息的基本概念和量子计量的主要内容; 然后简要回顾这些理论在提高测量精度方面的应用, 特别是多粒子量子纠缠态的产生及其判定; 再介绍线性和非线性原子干涉仪的相关进展; 最后论述量子测量过程中的统计方法的研究进展。

关键词: 量子计量, 超冷原子, 量子 Fisher 信息, 量子纠缠

PACS: 06.20.Dk, 03.75.Dg, 03.67.-a, 03.65.Ud

DOI: 10.7498/aps.68.20181965

1 量子计量简介

量子计量研究如何利用量子属性、量子效应来提高物理量的测量精度, 以期突破散粒噪声极限(shot noise limit, SNL)(或者标准量子极限(standard quantum limit, SQL)), 趋近海森伯极限(Heisenberg limit, HL)。大多数需要精密测量的物理量(如电磁场场强、微弱惯性力以及时间频率标准等)都能被投影到相位上, 而这些相位可以利用干涉仪进行推断估计。因此, 干涉仪的设计是量子计量中的核心内容之一。由于没有与相位对应的厄米算符, 因此其不能直接被实验测量, 只能通过估计的方法获取。因此, 相位估计(phase estimation)就成为精密测量(量子计量)中的一个重要内容。一个完整的相位估计过程(如: 引力波测量、原子钟以及重力测量仪等)一般由如下几部分组成: N 粒子探测态制备、相位(θ)累积、可测物理量(M)的测量以及相位(Θ)估计(如图1所示)。

换言之, 量子计量的目的就是研究如何在探测粒子数(N)给定、相互作用(相位累积)时间有限的前提下, 尽可能获得精确(小涨落 $\Delta\theta$)的参数估计。噪声(noise)是决定 $\Delta\theta$ 大小的重要因素, 通常可分为经典噪声和量子噪声^[1]。一般地讲, 经典噪声是非本质的, 总是可以被克服(或抑制), 而量子噪声由量子力学的基本原理决定^[2], 是本质的、不可克服的。目前双模式的原子干涉仪的测量精度已经接近标准量子极限, 即 $\Delta\theta_{SQL} = 1/\sqrt{N}$, 其中 N 是探测态中非关联的粒子数^[3]。标准量子极限来源于测量的统计属性, 是中心极限定理的直接结论^[4,5]。早期的理论研究表明, 标准量子极限是可以被突破的^[6–8]。利用超冷原子系统的量子特性, 实验上已经在突破标准量子极限的方向上取得了显著的进展(见图2)。如何在有限的量子资源下突破标准量子极限、趋近海森伯极限是量子计量学研究的核心问题之一^[9–21]。

基于量子力学原理的物质波干涉仪的发明是量子计量中的一个重要进展。继电子、中子干涉仪

* 国家重点研发计划(批准号: 2017YFA0304500, 2017YFA0304203)、国家自然科学基金(批准号: 11874247)、国家“111”计划(批准号: D18001)、山西省百人计划(2018)和量子光学与光量子器件国家重点实验室计划(批准号: KF201703)资助的课题。

† 通信作者。E-mail: wdli@sxu.edu.cn

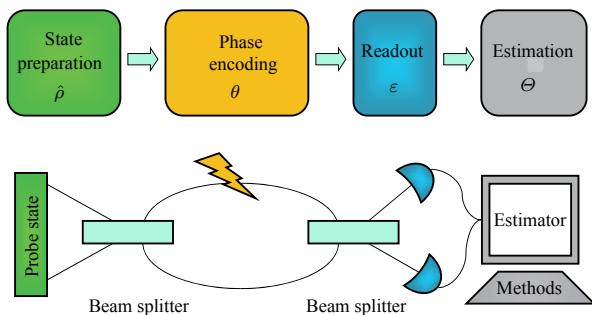


图 1 相位估计的流程示意图 (1) 探测量子初态 $\hat{\rho}$ 的制备; (2) 待测相位 θ 的编码, 量子初态演化为 $\hat{\rho}(\theta)$; (3) 正定的测量算符 (POVM) 对末态进行测量; (4) 待测相位的统计估计 Θ . 图的下部分是马赫曾德 (Mach-Zehnder, MZ) 干涉仪的应用实例. 图取自文献 [4]

Fig. 1. Here we schematically plot the elements of complete phase estimation: (1) the preparation of prob state $\hat{\rho}(0)$; (2) the encoding of phase shift θ , which transform the probe state to $\hat{\rho}(\theta)$; (3) the readout measurement of the POVM and finally (4) the mapping from the measurement results to the phase provided by the estimator Θ . The phase sensitivity crucially depends on all these operations. The lower panel shows the application to Mach-Zehnder interferometry. Adapted from Ref. [4].

之后, 原子干涉仪也已经发展了 20 多年. 特别是随着对超冷原子的操控与测量技术的进步, 原子干涉仪在近十年来有了非常快速的发展 [22]. 目前原子干涉仪在重力 [23–26]、惯性力 [27–34] 等方面的测量已经到了很高的精度. 国内的相关进展, 可参见近期《物理学报》关于“精密测量的专题”[35].

利用原子的内部能级作为双模干涉仪的模式, 通过 Ramsey 干涉仪技术 [36] 对原子跃迁频率的测量是近代原子钟频率基准的核心技术之一 [37,38]. 超冷原子系统不仅在推动精密测量方面具有非常重要的意义, 而且对深入理解量子力学的基本问题(比如: 量子力学非定域性、量子纠缠等)也有重要的促进作用 [39](某种意义上也促进了对量子理论基本问题的进一步思考, 比如: 量子力学诠释问题的重新讨论 [39]). 传统的量子计量存在一些缺点: 一方面, 量子计量原则上要求多粒子(通常成百上千)组成的量子态作为探测态, 但是对这些粒子同时进行单独测量是非常困难的; 另一方面, 多粒子量子态重构所要求的独立测量次数呈指数形式增加, 这也是一个难以克服的困难. 因此, 需要发展一种全新的、基于有限次测量的多粒子量子纠缠态刻画的理论方法. 目前, 对多粒子量子体系的操作(或测量)基本上都是同时的集体 (collective) 操作(或测量), 新方法需能够从集体操作过程中汲取多

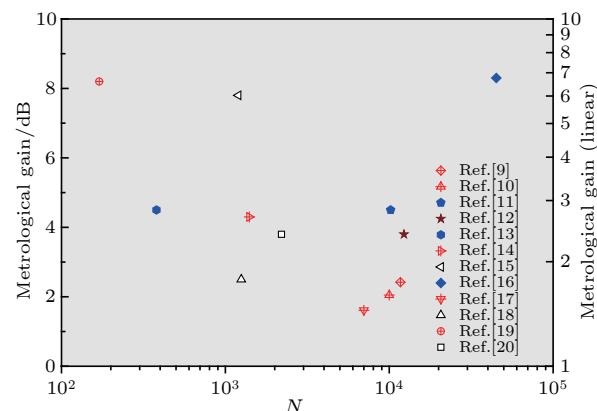


图 2 近年来利用超冷原子体系取得的超越标准量子极限的实验进展. 对数增益(左): $10 \log_{10}(\Delta\theta_{SQL}/\Delta\theta)^2$ 和对应的线性增益(右): $(\Delta\theta_{SQL}/\Delta\theta)^2$, 其中 $(\Delta\theta)^2 = \xi_R^2/N$ 或者 $(\Delta\theta)^2 = 1/F_Q$, ξ_R^2 为自旋压缩参数, F_Q 为量子 Fisher 信息. 空心图标为净增益, 即去除测量误差的增益; 实心图标为可能增益, 即实验纠缠态的可能增益; 十字交叉图标为干涉仪增益, 即通过干涉仪验证的增益. N 为实验中所用的总粒子数目(或平均数目). 图取自文献 [5]

Fig. 2. Gain of phase sensitivity over the standard quantum limit $\Delta\theta_{SQL} = 1/\sqrt{N}$ achieved from recent Bose-Einstein condensates experiments. The logarithmic gain is shown in left, $10 \log_{10}(\Delta\theta_{SQL}/\Delta\theta)^2$ and the linear gain is in right, $(\Delta\theta_{SQL}/\Delta\theta)^2$. The measured phase precision is obtained by spin-squeezing parameter ξ_R^2 , i.e., $(\Delta\theta)^2 = \xi_R^2/N$, or from F_Q , i.e., $(\Delta\theta)^2 = 1/F_Q$. Open patterns are inferred values, being obtained after subtraction of detection noise; Filled patterns report witnesses of metrologically useful entanglement measured on experimentally generated states, representing potential improvement in sensitivity; Cross patterns show the measured phase sensitivity gain obtained from a full interferometer sequence. Here N is the total number of particles (or mean total) used in experiments. Adapted from Ref. [5].

粒子量子关联的信息.

近年来, 基于量子 Fisher 信息的基本概念, 我们小组以冷原子系统为对象, 较为系统地开展了量子计量相关的研究工作. 本文以时间频率测量为主线, 简要回顾量子计量的历史进程; 介绍基于量子 Fisher 信息的量子计量的主要内容; 阐述在此基础上发展的多粒子量子纠缠态的产生及其判据; 简析新型原子干涉仪工作原理以及相位估计过程中新的、可控量子过程的设计思路.

1.1 历史回顾

早在 1873 年, Maxwell(麦克斯韦) [40] 就提议将波长为长度单位的光波的振动周期作为时间单位. 但是当时的技术水平无法测量如此短的时间周

期。一直到 1937 年, 一系列新发明和技术进步(如: O. Stern 改进了分子束控制技术和 Stern-Gerlach 实验^[41]) 才使得原子内部能级的跃迁频率作为时间标准成为可能^[37]。同年, Rabi(拉比)^[42]首次观测到中性分子的磁共振效应, 并建议利用这种效应发展时间频率标准。1939 年, 实验上首次观测到了分子内部能级磁共振现象^[41]。这些工作为后来原子束磁共振频率钟的研究奠定了基础^[37]。1945 年, 第一台原子钟研制成功, 尽管其精度不如同时期的机械(Mechanical) 钟和石英(Quartz) 钟, 但是由于原子内部能级具有稳定性和一致性, 所以对原子钟的研究并未停止。随着 1949 年 Ramsey 干涉仪原理的揭示^[36], 实现原子钟道路上的最后一个科学堡垒终于被攻克了。1967 年, 对铯-133 原子的基态超精细能级(钟能级) 跃迁频率的测量已经可以精确到约 10^{-10} , 较机械钟和石英钟的 10^{-8} 提高了近 2 个数量级。因此, 铯-133 原子钟的跃迁周期被重新定义为秒的国际单位^[43], 这真正意义上完成了利用量子系统(或量子效应) 实现时间标准的设想。从一定意义上讲, 对频率(时间) 测量精度的不断追求推动了量子计量的发展^[44], 时间测量精度提高的进程与量子计量发展的过程密不可分。目前所有的可测物理量中, 时间测量的精度最高^[43]。事实上, 得益于时间测量的超高精确度, 对相关物理量的测量(长度、速度以及电压等) 也可以达到非常高的精度。

关于量子计量的综述文献有很多^[4,36,37], 下面简要回顾量子计量理论发展过程中几个里程碑式的重要进展: 1981 年, Caves^[45]指出在光学 Michelson-Morley 干涉仪的闭置端输入压缩真空态可以突破标准量子极限; 随后的二十年里, 人们逐步认识到将探测的量子态改为具有一定量子关联的非经典态可以大幅增加测量的精度, 突破散粒噪声(标准量子) 极限^[4,7,46]。近些年 的研究^[3]表明突破标准量子极限需要将探测态改为量子纠缠态。然而, 并非所有的量子纠缠态都对提高量子计量的测量精度有益, 只有那些可以被量子 Fisher 信息识别、对量子计量有用的多粒子量子纠缠态才可以真正地增强量子测量的测量精度^[5,47,48]。因此, 如何甄别和利用量子态(特别是多粒子量子纠缠态的量子属性^[5]和其他量子效应^[49]) 来提高量子测量的测量精度, 成为了量子计量的重要研究内容。本文将针对这些内容进行介绍。需要指出的是, 量子 Fisher 信息作

为甄别幺正操作下量子态纠缠特性的重要基本概念, 在量子相变等其他热点问题中也有广泛的应用^[50–59], 但这部分内容不在本文的讨论范围之内。

如前所述, 本文主要以量子干涉仪为模型进行讨论。一方面, 物理学的进步某种程度上得益于人们对物理量的精密测量, 而量子纠缠态是进一步提高测量精度并且研发下一代高灵敏探测仪器的关键; 另一方面, 量子干涉仪是研究量子力学基本问题的重要模型之一。

1.2 相关的基本概念

统计估计的精度到底是多少? 是否存在一个基本的极限? 这是统计推断(statistical inference)中的核心问题之一。早在 20 世纪 40 年代, Rao^[60], Cramér^[61]以及 Fréchet^[62]就分别独立证明了对于单变量的统计估计存在一个最低的极限(随后由 Darmois^[63]将上述结果推广到多变量情况)。这个极限就是 Cramer-Rao 下界(Cramer-Rao lower bound, CRB), 其与 Fisher^[64]早些年提出的 Fisher 信息有直接关系(在相位估计理论中, 还存在许多其他极限。特别是在有限测量次数时, 有些比 CRB 更为严格, 本文将在第四部分简单介绍)。因此, Fisher 信息是相位估计理论中的核心概念。考虑所有可能的量子测量条件, Fisher 信息的最大值被称为量子 Fisher 信息^[1,65]。相应地可定义量子 Cramer-Rao 下界(quantum Cramer-Rao lower bound, QCRB)^[2,66,67]。

本节首先对 Fisher 信息和量子 Fisher 信息的定义、基本性质以及与此相关的相位估计理论进行简单的介绍。关于 Fisher 信息和量子 Fisher 信息的相关综述可以参阅文献[68,69]。在介绍和证明 QCRB 之前, 先介绍似然(likelihood) 函数和估计子。

1) 似然函数和估计子。如图 1 所示, 一个完整的相位估计单元包括: 初始的探测态 $\hat{\rho}$ 的制备; 一种可参数(实数 θ)化的、对探测态的操作(如: 干涉仪的转动操作, 参见第三部分内容); 利用末态(输出态) $\hat{\rho}(\theta)$ 获得可测物理量的测量值(ε); 对待测参数 θ 的估计(通过对多次测量结果的统计分析而获得)。这里的测量结果既可以是分离变量(如 MZ 干涉仪中的粒子数), 也可以是连续变量(如双缝干涉仪中的干涉条纹)。一般地, 量子测量用一个正定的测量算符(positive-operator valued measure, POVM) 表示(测量理论中的算符在一定

程度上具有测度的意义, 因为它不只是一个力学量, 同时还将概率算符与测度相联系. 因此, 严格地说此算符为测度算符). POVM 算符 ($\hat{E}(\varepsilon)$) 是一个厄米算符, 需满足两个基本要求: 1) 概率测量值非负; 2) $\sum_{\varepsilon} \hat{E}(\varepsilon) = \mathbb{I}$. 给定 θ 时, 获得测量值为 ε 的条件概率分布函数 (亦被称为似然函数) 定义为

$$P(\varepsilon|\theta) = \text{Tr}[\hat{E}(\varepsilon)\hat{\rho}(\theta)]. \quad (1)$$

一般情况下, 系统由关联的子系统组成, 此时的测量需是具有一定关联的测量. 如果考虑探测态由 m 个独立的子系统组成, 对每个子系统进行统计独立地测量, 得到的 m 个不同的测量值表示为 $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m\}$. 此时, 可将 (1) 式改写为 $P(\varepsilon|\theta) = \text{Tr}[\hat{E}(\varepsilon)\hat{\rho}(\theta)]$. 探测初态的组成成份之间没有量子关联时, 称为经典可分的初态, 可以表示为

$$\hat{\rho}(0) = \hat{\rho}^{(1)}(0) \otimes \hat{\rho}^{(2)}(0) \otimes \hat{\rho}^{(3)}(0) \otimes \dots \otimes \hat{\rho}^{(m)}(0). \quad (2)$$

而未能写为 (2) 式的量子态, 则称为量子纠缠态. 在局域操作的作用下, 末态可以写为 $\hat{\rho}(\theta) = \hat{\rho}^{(1)}(\theta) \otimes \hat{\rho}^{(2)}(\theta) \otimes \hat{\rho}^{(3)}(\theta) \otimes \dots \otimes \hat{\rho}^{(m)}(\theta)$, 选用统计独立的 m 次 POVM 测量

$$\hat{E}(\varepsilon) = \hat{E}^{(1)}(\varepsilon_1) \otimes \hat{E}^{(2)}(\varepsilon_2) \otimes \hat{E}^{(3)}(\varepsilon_3) \otimes \dots \otimes \hat{E}^{(m)}(\varepsilon_m). \quad (3)$$

显然, 似然函数可以简单地表示为单次测量似然函数的乘积

$$P(\varepsilon|\theta) = \prod_{i=1}^m P_i(\varepsilon_i|\theta), \quad (4)$$

其中 $P_i(\varepsilon_i|\theta) = \text{Tr}[\hat{E}^{(i)}(\varepsilon_i)\hat{\rho}^{(i)}(\theta)]$. 显然, 该分布函数满足归一化条件 $\sum_{i=1}^m P_i(\varepsilon_i|\theta) = 1$. 计算中, 通常采用对数似然 (log-likelihood) 函数

$$L(\varepsilon|\theta) = \ln P(\varepsilon|\theta) = \sum_{i=1}^m \ln P_i(\varepsilon_i|\theta). \quad (5)$$

对于给定的测量结果 ε 而言, 估计子 $\Theta(\varepsilon)$ 表示从测量结果 ε 到参数空间的映射, 换言之, 它表示测量结果与估计相位 Θ 之间的函数关系. 这种关系当然要仔细地选取, 以便估计的相位 Θ 与真实的未知参数 θ 尽可能相同. 如 (105) 式所示, 最大似然估计就是一个常用的估计子. 由于测量过程中不可避免地存在干扰, 测量结果 ε_i 是由真实值决定的随机数. 因此, 估计结果也必然是一个与待测参数 θ 相关、满足一定分布的随机数, 通常可以用其平均值

$$\langle \Theta \rangle_{\theta} = \sum_{\varepsilon} P(\varepsilon|\theta) \Theta(\varepsilon), \quad (6)$$

和涨落

$$(\Delta\Theta)_{\theta}^2 = \sum_{\varepsilon} P(\varepsilon|\theta) (\Theta(\varepsilon) - \langle \Theta \rangle_{\theta})^2, \quad (7)$$

来描述统计估计的情况, 其中 $\langle \dots \rangle$ 表示统计平均.

2) 无偏差估计和一致估计. 如果估计子的统计平均值与参数的真实值完全相等, 称为无偏差估计 (unbiased estimator), 即 $\langle \Theta(\varepsilon) \rangle_{\theta} = \theta, \forall \theta$. 显然, 对于无偏差估计, 有 $\frac{\partial \langle \Theta \rangle_{\theta}}{\partial \theta} = 1$. 如果一个估计只对于某些 θ 是无偏差的, 称之为局域无偏差估计 (locally unbiased) (特别地, 如果无偏差估计在 θ_0 处是局域无偏差的, 则 $\frac{\partial \langle \Theta \rangle_{\theta}}{\partial \theta}|_{\theta=\theta_0} = 1$). 进而对于 m 次测量, 可对应地构造相应的估计子 $\Theta(\varepsilon_1), \Theta(\varepsilon_1, \varepsilon_2), \dots, \Theta(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m)$. 如果

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \text{Pr}(|\Theta(\varepsilon) - \theta| > \delta) = 0, \quad (8)$$

其中 δ 是任意小量, 则该估计子被称为一致估计子.

1.3 Fisher 信息 和 Cramer-Rao lower bound (CRB)

CRB 是相位估计理论中一个非常重要的概念, 其受中心极限定理的保证. 对于任意的估计子 $\Theta(\varepsilon)$ 而言, 其涨落 ((7) 式) 存在如下极限

$$(\Delta\Theta)_{\theta}^2 \geq (\Delta\Theta_{\text{CR}})^2 \equiv \frac{\left(\frac{\partial \langle \Theta \rangle}{\partial \theta}\right)^2}{F(\theta)}, \quad (9)$$

其中 $F(\theta)$ 就是 Fisher 信息

$$F(\theta) = \left\langle \left(\frac{\partial L(\varepsilon|\theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right\rangle_{\theta} = \sum_{\varepsilon} \frac{1}{P(\varepsilon|\theta)} \left(\frac{\partial P(\varepsilon|\theta)}{\partial \theta} \right)^2, \quad (10)$$

其中求和是对所有可能的测量值进行求和. (9) 式是 CRB 的一般表达式. 对于无偏差估计而言, 即 $\frac{\partial \langle \Theta \rangle}{\partial \theta} = 1$, CRB 表明测量的涨落与 Fisher 信息成反比. CRB 可以通过考虑涨落的定义 (7) 式、似然函数的归一化条件和柯西-施瓦茨 (Cauchy-Schwartz) 不等式来证明, 详细过程参见附录 A1.

需要提醒的是, 推导过程中, 假设实验测量值与待测相位 θ 无函数依赖关系, 即 $\partial \varepsilon_i / \partial \theta = 0$. 如果存在一个估计子可以达到 CRB 定义的最低限, 或者使 Fisher 信息取极大值, 称之为有效估计. 需要注意的是, 在测量次数有限时, 并不能保证存

在这种有效估计. 有效估计与所讨论问题的统计分布函数相关. 但是, 在测量次数趋于无穷时, 则至少存在一个有效估计存在, 即最大似然估计.

由附录 A1 的推导可知, 有效估计需要满足

$$\frac{\partial L(\varepsilon|\theta)}{\partial \theta} = \lambda_\theta (\Theta(\varepsilon) - \langle \Theta \rangle_\theta), \forall \varepsilon, \quad (11)$$

其中 $\lambda_\theta = F(\theta)/(\partial \langle \Theta \rangle_\theta / \partial \theta)$. 遗憾的是, (11) 式仅能作为检验有效估计的重要条件, 但对如何构建有效估计并无明确的帮助.

1.4 量子 Fisher 信息与量子 CRB

1) 量子 Fisher 信息. 对所有可能的 POVMs 而言, Fisher 信息 ((10) 式) 的最大值就定义为量子 Fisher 信息 [1](本文将视情况使用不同的记号: 如果只是计算 Fisher 信息, 由于对所有测量值进行了求和, 此时 Fisher 将只是参数 θ 的函数, 记为 $F(\theta)$; 而由于概率分布函数或是条件概率函数也与末态 $\hat{\rho}(\theta)$ 以及 POVMs $\{\hat{E}(\varepsilon)\}$ 相关, 强调这些关系时, 记为 $F[\hat{\rho}(\theta), \{\hat{E}(\varepsilon)\}]$)

$$F_Q[\hat{\rho}(\theta)] = \max_{\hat{E}(\varepsilon)} F[\hat{\rho}(\theta), \{\hat{E}(\varepsilon)\}]. \quad (12)$$

1967 年 Helstrom^[66] 证明量子 Fisher 信息可表示为

$$F_Q[\hat{\rho}(\theta)] = \text{Tr}[\hat{\rho}(\theta) \hat{L}_\theta^2], \quad (13)$$

其中厄米算符 $\hat{L}(\theta)$ 为对称对数导数 (symmetric logarithmic derivative, SLD), 满足下面的方程式

$$\frac{\partial \hat{\rho}(\theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{2} \left(\hat{\rho}(\theta) \hat{L}_\theta + \hat{L}_\theta \hat{\rho}(\theta) \right). \quad (14)$$

考虑 (9) 式和 (12) 式, 得到如下的连续不等式

$$(\Delta \Theta)_\theta^2 \geq (\Delta \Theta_{\text{CR}})_\theta^2 \geq (\Delta \Theta_{\text{QCR}})_\theta^2, \quad (15)$$

其中 $(\Delta \Theta_{\text{QCR}})_\theta^2 = \frac{\left(\frac{\partial \langle \Theta \rangle}{\partial \theta} \right)^2}{F_Q[\hat{\rho}(\theta)]}$. 需要强调的是 (15) 式中等号成立的条件为

$$\Re(\text{Tr}[\hat{\rho}(\theta) \hat{L}_\theta \hat{E}(\varepsilon)]) = 0, \forall \varepsilon, \quad (16)$$

$$\hat{\rho}(\theta) \left(\mathbb{M} - \lambda_{\theta, \varepsilon} \hat{L}_\theta \right) \hat{E}(\varepsilon) = 0, \forall \varepsilon, \quad (17)$$

其中, $\lambda_{\theta, \varepsilon} = \text{Tr}[\hat{\rho}(\theta) \hat{E}(\varepsilon)] / \text{Tr}[\hat{\rho}(\theta) \hat{L}_\theta \hat{E}(\varepsilon)]$. (17) 式是由柯西-施瓦茨不等式得到的, 具体的证明过程见附录 A2.

量子 Fisher 信息的最大值 ((13) 式) 与具体的

测量算符并无明显的依赖关系. 对于所有可能的 POVMs 而言, 至少存在一个 POVM 同时满足条件 (16) 式和 (17) 式, 使得 Fisher 信息取最大值. 如果 $\hat{\rho}(\theta)$ 是可逆的, 对所有的 ε 而言, 两条件可以等价为 $(\mathbb{M} - \lambda_{\theta, \varepsilon} \hat{L}_\theta) \hat{E}(\varepsilon) = 0$, $\lambda_{\theta, \varepsilon}$ 为实数; 而如果 $\hat{\rho}(\theta)$ 是不可逆的, 则 $(\mathbb{M} - \lambda_{\theta, \varepsilon} \hat{L}_\theta) \hat{E}(\varepsilon) = 0$ 是条件 (17) 式成立的充分但不必要条件. 如果考虑 \hat{L}_θ 是厄米算符, 则存在一组完备的量子态 $\{|\varphi_l\rangle\}$, 使得 $\hat{L}_\theta |\varphi_l\rangle = \gamma_l |\varphi_l\rangle$, 其中 γ_l 是实数. 如果选取由 $\{|\varphi_l\rangle\langle\varphi_l|\}$ 组成的 POVM, 显然当 $\lambda_\theta = 1/\gamma_l$ 时条件 (17) 式成立, 同时 $\text{Tr}[\hat{\rho}(\theta) \hat{L}_\theta \hat{E}(\varepsilon)] = \gamma_l \langle \varphi_l | \hat{\rho}(\theta) | \varphi_l \rangle$ 为实数, 即 (16) 式也成立. 这就证明了至少存在一个可以用 $\hat{L}(\theta)$ 的正交归一基底组成的 POVM, 可以使 Fisher 信息取到最大值, 即量子 Fisher 信息. 如 (15) 式所示, 即使对最优化的 POVM, Fisher 信息和量子 Fisher 信息一样, 都是与 θ 相关的. 这在某种程度上产生了矛盾, 因为要找到一个优化的 POVM 使 Fisher 信息取最大, 需要事先知道未知参量 θ 的准确值, 这看起来是不可能的. 但是, 文献 [70] 表明, 可以利用一种渐近的方法来克服这个困难. 最近的研究 [71] 也表明, 在一定条件下, 最优测量是不依赖于待测参数的.

2) Fisher 信息的凸性 (convexity). 考虑某种量子态 $\hat{\rho}(\theta) = \sum_k \gamma_k \hat{\rho}_k(\theta)$, 其中 $\gamma_k > 0$ 且 $\sum_k \gamma_k = 1$. 显然, $\text{Tr}[\hat{E}(\varepsilon) \hat{\rho}(\theta)] = \sum_k \gamma_k \text{Tr}[\hat{E}(\varepsilon) \hat{\rho}_k(\theta)]$, 也就是

$$P(\varepsilon|\theta) = \sum_k \gamma_k P_k(\varepsilon|\theta). \quad (18)$$

因此, 可以证明 [4,72]

$$F(\theta) \leq \sum_k \gamma_k F_k(\theta), \quad (19)$$

其中 $F_k(\theta) = \sum_\varepsilon \frac{1}{P_k(\varepsilon|\theta)} \left(\frac{dP_k(\varepsilon|\theta)}{d\theta} \right)^2$ 是第 k 个组成成份的 Fisher 信息. (19) 式展示了 Fisher 信息的凸性. 类似地, 量子 Fisher 也具有同样的凸性, 即

$$F_Q \left[\sum_k \gamma_k \hat{\rho}_k(\theta) \right] \leq \sum_k \gamma_k F_Q(\hat{\rho}_k(\theta)). \quad (20)$$

这个性质 ((20) 式) 表明, 将量子态进行线性混合并不能增加已获得的测量精度.

3) Fisher 信息的可加性. 如果系统由 m 个统计独立的子系统组成, 且就独立测量而言, Fisher 信息

(10) 式可以写为(由(5)式可知) $\left\langle \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right)^2 \right\rangle = \sum_{\varepsilon} P(\varepsilon_1 | \theta) \dots P(\varepsilon_m | \theta) \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial \theta} \log P(\varepsilon_i | \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \log P(\varepsilon_j | \theta)$, 其中 ε 是对所有可能的测量结果进行求和. 要证明(21)式, 可以将求和项分为 $i=j$ 和 $i \neq j$. 对于 $i=j$ 的情况, 有 $P(\varepsilon_i | \theta) \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log P(\varepsilon_i | \theta) \right)^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{\varepsilon_i} P(\varepsilon_i | \theta) \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log P(\varepsilon_i | \theta) \right)^2 = \sum_{i=1}^m F_i(\theta)$, 和 $i \neq j$ 时, $\sum_{i,j=1}^m \sum_{i \neq j} P(\varepsilon_1 | \theta) \dots P(\varepsilon_m | \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \log P(\varepsilon_i | \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \log P(\varepsilon_j | \theta) = \sum_{i,j=1}^m \sum_{i \neq j} \sum_{\varepsilon_i} \frac{\partial P(\varepsilon_i | \theta)}{\partial \theta} \sum_{\varepsilon_j} \frac{\partial P(\varepsilon_j | \theta)}{\partial \theta} = 0$. 最后的等号是考虑了概率分布的归一化条件)

$$F(\theta) = \sum_{i=1}^m F_i(\theta), \quad (21)$$

其中 $F_i(\theta) = \sum_{\varepsilon_i} \frac{1}{P(\varepsilon_i | \theta)} \left(\frac{\partial P(\varepsilon_i | \theta)}{\partial \theta} \right)^2$ 是第 i 个子系统的 Fisher 信息, 求和是对该子系统所有可能的测量结果 ε_i 进行的. 如果组成的子系统是全同系统, 且采用相同的 POVMs, 则有

$$F(\theta) = mF'(\theta), \quad (22)$$

相应的 CRB((9)式) 可以写为

$$(\Delta \Theta_{\text{CR}})^2 = \frac{\left(\frac{\partial \langle \vartheta \rangle}{\partial \theta} \right)^2}{mF'(\theta)}, \quad (23)$$

其中

$$F'(\theta) = \sum_{\varepsilon} \frac{1}{P(\varepsilon | \theta)} \left(\frac{\partial P(\varepsilon | \theta)}{\partial \theta} \right)^2. \quad (24)$$

4) 量子 Fisher 信息的可加性. 下面将证明量子 Fisher 信息也具有可加性. 考虑(2)式和(14)式, 对称对数导数可以表示为 $\hat{L}_\theta = \sum_{i=1}^m \hat{L}_\theta^{(i)}$, 其中 $\hat{L}_\theta^{(i)}$ 满足方程式 $2\partial_\theta \hat{\rho}^{(i)}(\theta) = \hat{L}_\theta^{(i)} \hat{\rho}^{(i)}(\theta) + \hat{\rho}^{(i)}(\theta) \hat{L}_\theta^{(i)}$ (由式(2)式, 可以有 $\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \theta} = \frac{\partial \hat{\rho}^{(1)}}{\partial \theta} \otimes \hat{\rho}^{(2)} \dots \otimes \hat{\rho}^{(m)} + \hat{\rho}^{(1)} \otimes \frac{\partial \hat{\rho}^{(2)}}{\partial \theta} \dots \otimes \hat{\rho}^{(m)} + \dots = \frac{\left(\sum_{i=1}^m \hat{L}_\theta^{(i)} \right) \hat{\rho} + \hat{\rho} \left(\sum_{i=1}^m \hat{L}_\theta^{(i)} \right)}{2}$).

考虑(14)式, 有 $\hat{A}\hat{\rho} + \hat{\rho}\hat{A} = 0$, 其中 $\hat{A} = \sum_{i=1}^m \hat{L}_\theta^{(i)} - \hat{L}_\theta$. 在密度矩阵的本征态空间中, 可看到 $(p_k + p_{k'} A_{k,k'}) = 0$ 和 $A_{kk'} = \langle k | \hat{A} | k' \rangle$. 因此, 只有在 $p_k + p_{k'} = 0$ 时, 才可能有 $A_{kk'} \neq 0$. 此时(或此子空间内), \hat{L}_θ 对量子 Fisher 信息没有贡献). 再考虑 $\text{Tr}[\hat{L}_\theta^{(i)} \hat{\rho}^{(i)}(\theta)] = 0$, 量子 Fisher 信息可以重写为

$$F_Q[\hat{\rho}(\theta)] = \sum_{i=1}^m F_Q[\hat{\rho}^{(i)}(\theta)], \quad (25)$$

其中 $F_Q[\hat{\rho}^{(i)}(\theta)] = \text{Tr} \left[\hat{\rho}^{(i)}(\theta) \left(\hat{L}_\theta^{(i)} \right)^2 \right]$ 为第 m 个子系统的量子 Fisher 信息, 优化的 POVM($\{\hat{E}^{(i)}(\varepsilon_i)\}$) 需满足条件(16)式和(17)式. 如果各个子系统是全同的 $\hat{\rho}^{(i)}(\theta) = \hat{\rho}'(\theta)$, 则 $F_Q[\hat{\rho}(\theta)] = mF_Q[\hat{\rho}'(\theta)]$.

5) 混合态与纯态的量子 Fisher 信息(由于量子 Fisher 信息的重要性, 它本身的计算也是一个研究课题^[2]). 下面利用密度矩阵的本征基矢, $\hat{\rho}(\theta) = \sum_k p_k |k\rangle\langle k|$, 给出量子 Fisher 信息的表达形式. 显然, 有 $p_k \geq 0$ 且, $\sum_k p_k = 1$ (为简化记号, 没有在 p_k 和态矢量 $|k\rangle$ 中写出对 θ 的依赖关系). 在这个本征基下面, 单量子态的 Fisher 信息可以写为

$$F_Q[\hat{\rho}(\theta)] = \sum_{k,k'} p_k |\langle k | \hat{L}_\theta | k' \rangle|^2 = \sum_{k,k'} \frac{p_k + p_{k'}}{2} |\langle k | \hat{L}_\theta | k' \rangle|^2. \quad (26)$$

因此, 需要知道 $\langle k | \hat{L}_\theta | k' \rangle$ 在条件 $p_k + p_{k'} > 0$ 条件下的具体表达式. 利用 SLD 的定义表达式(14)式可以得到 $\langle k | \hat{L}_\theta | k' \rangle = 2\langle k | \partial_\theta \hat{\rho}(\theta) | k' \rangle / (p_k + p_{k'})$. 代入(26)式, 就得到了混合态的量子 Fisher 信息

$$F_Q[\hat{\rho}(\theta)] = \sum_{k,k'} \frac{2}{p_k + p_{k'}} |\langle k | \partial_\theta \hat{\rho}(\theta) | k' \rangle|^2. \quad (27)$$

(27)式中的求和, 需将 $p_k + p_{k'} = 0$ 的情况排除在外. 首先考虑

$$\begin{aligned} \partial_\theta \hat{\rho}(\theta) &= \sum_k (\partial_\theta p_k) |k\rangle\langle k| + \sum_k p_k |\partial_\theta k\rangle\langle k| \\ &\quad + \sum_k p_k |k\rangle\langle \partial_\theta k|, \end{aligned}$$

利用 $\partial_\theta \langle k | k' \rangle = \langle \partial_\theta k | k' \rangle + \langle k | \partial_\theta k' \rangle = 0$, 可以得到

$$\langle k | \partial_\theta \hat{\rho}(\theta) | k' \rangle = (\partial_\theta p_k) \delta_{k,k'} + (p_k - p_{k'}) \langle \partial_\theta k | k' \rangle.$$

这样, 混态的 SLD 和量子 Fisher 信息分别可以表示为^[1]:

$$\hat{L}_\theta = \sum_k \frac{\partial_\theta p_k}{p_k} |k\rangle\langle k| + 2 \sum_{k,k'} \frac{p_k - p_{k'}}{p_k + p_{k'}} |k\rangle\langle \partial_\theta k | k' \rangle\langle k'|, \quad (28)$$

和

$$F_Q[\hat{\rho}(\theta)] = \sum_k \frac{(\partial_\theta p_k)^2}{p_k} + 2 \sum_{k,k'} \frac{(p_k - p_{k'})^2}{p_k + p_{k'}} |\langle \partial_\theta k | k' \rangle|^2. \quad (29)$$

对于非满秩的密度矩阵, (29)式存在奇点, 将造成求解的困难. 此时, 量子 Fisher 信息仍存在严格的求解方法^[73–75]. 对称对数导数在量子 Fisher 信息的计算中起重要的作用, 因而对称对数导数的

本征态又与最优测量有密切的关系^[76].

对于纯态 $|\psi(\theta)\rangle$ 而言, 有 $\mathbb{I} = |\psi(\theta)\rangle\langle\psi(\theta)| + \sum_{k_\perp} |k_\perp\rangle\langle k_\perp|$, 其中 $\{k_\perp\}$ 表示在希尔伯特空间中与 $|\psi(\theta)\rangle$ 垂直的基矢. 因此, 密度矩阵可以写为 $\hat{\rho}(\theta) = |\psi(\theta)\rangle\langle\psi(\theta)| + \sum_{k_\perp} p_{k_\perp} |k_\perp\rangle\langle k_\perp|$. 由于是纯态, 所以事实上, $p_{k_\perp} = 0, \forall k_\perp$. 故而 (28) 式和 (29) 式 (利用纯态的性质 $\hat{\rho}^2(\theta) = \hat{\rho}(\theta)$, 可以有 $\hat{L}_\theta = 2\partial_\theta \hat{\rho}$, 与 (30) 式相同. 再考虑量子 Fisher 信息的定义 (13) 式以及 $\partial_\theta\langle\psi(\theta)|\psi(\theta)\rangle = \langle\partial_\theta\psi(\theta)|\psi(\theta)\rangle + \langle\psi(\theta)|\partial_\theta\psi(\theta)\rangle = 0$, 可以直接得到 (31) 式) 可以分别写为

$$\hat{L}_\theta = 2|\psi(\theta)\rangle\langle\partial_\theta\psi(\theta)| + 2|\partial_\theta\psi(\theta)\rangle\langle\psi(\theta)|, \quad (30)$$

和

$$F_Q[|\psi(\theta)\rangle] = 4(\langle\partial_\theta\psi(\theta)|\partial_\theta\psi(\theta)\rangle - |\langle\partial_\theta\psi(\theta)|\psi(\theta)\rangle|^2). \quad (31)$$

需要指出的是, 纯态的量子 Fisher 信息 (31) 式还可以利用在探测初态与其垂直空间的投影测量, 在 $\theta \rightarrow 0$ 下, 渐近地得到. 具体证明见文献 [4].

6) 幺正演化下的量子 Fisher 信息. 考虑如下的幺正演化算符:

$$\hat{\rho}(\theta) = e^{-i\hat{H}\theta} \hat{\rho}_0 e^{+i\hat{H}\theta}, \quad (32)$$

其中厄米算符 \hat{H} 是某种对初始量子态 $\hat{\rho}_0$ 的相互作用 (或是操作的变换的生成元). (32) 式是通常情况下将待测参数 θ 耦合到初始态 (测量态) $\hat{\rho}_0$ (比如 (68) 式描述的干涉仪等) 的一般表示形式. 为简单起见, 采用密度矩阵的对角化表象, 即 $\hat{\rho}_0 = \sum_k p_k |k\rangle\langle k|$, 进行计算. 这样得到 $\hat{\rho}(\theta) = \sum_k p_k e^{-i\hat{H}\theta} |k\rangle\langle k| e^{i\hat{H}\theta}$. 注意幺正演化不改变密度矩阵的本征值. 同时, SLD 可以表示为 $\hat{L}_\theta = e^{-i\hat{H}\theta} \hat{L}_0 e^{+i\hat{H}\theta}$. 由 (14) 式可知, \hat{L}_0 满足

$$\{\hat{\rho}_0, \hat{L}_0\} = 2i[\hat{\rho}_0, \hat{H}]. \quad (33)$$

可见, \hat{H} 确实在量子演化过程中起到哈密顿量的作用. 由定义 (14) 式知道, \hat{L}_0 与密度算符的动力学演化相关. 最后得到关于量子 Fisher 信息的表达式

$$F_Q[\hat{\rho}_0, \hat{H}] = (\Delta \hat{L}_0)^2. \quad (34)$$

有意思的是, (34) 式并不显含 θ . 换而言之, 测量的精度与系统的初态 $\hat{\rho}_0$ 有明显的依赖关系, 同时也与待测参数与探测态的耦合哈密顿量 \hat{H} (操作) 关系密切, 但是与测量算符 POVM 的依赖性

并不显然, 与 θ 的依赖关系仍在测量算符中体现. 在此情况下, 混合态的 SLD 以及量子 Fisher 信息可以表示为:

$$\hat{L}_0 = 2i \sum_{k,k'} \frac{p_k - p_{k'}}{p_k + p_{k'}} |k\rangle\langle k| \hat{H} |k'\rangle\langle k'|, \quad (35)$$

和

$$F_Q[\hat{\rho}_0, \hat{H}] = 2 \sum_{k,k'} \frac{(p_k - p_{k'})^2}{p_k + p_{k'}} |\langle k|\hat{H}|k'\rangle|^2, \quad (36)$$

求和仍要求遍历所有满足 $p_k + p_{k'} \neq 0$ 的态. 对纯态而言,

$$\hat{L}_0 = 2i|\psi_0\rangle\langle\psi_0| \hat{H} - 2i\hat{H}|\psi_0\rangle\langle\psi_0|, \quad (37)$$

和

$$F_Q[|\psi_0\rangle, \hat{H}] = 4(\Delta \hat{H})^2. \quad (38)$$

如果幺正变换中哈密顿算符 \hat{H} 与待测参数相关, 量子 Fisher 信息的求解变得复杂. 原则上, 可通过引入对参数的无穷小变化得到相应的量子 Fisher 信息, 细节见文献 [77,78]. 最近, 有研究人员还研究了量子 Fisher 信息在不同退相干模型下的动力学行为^[79].

7) 测量极限. 考虑某个任意对角矩阵 $\hat{M} = \sum_\mu c_\mu |\mu\rangle\langle\mu|$, 其中 $\{|\mu\rangle\}$ 为一组正交完备基底, $\{c_\mu\}$ 可以是复数. 这样, Fisher 信息存在如下极限

$$F(\theta) \geq \frac{|\frac{d\langle\hat{M}\rangle}{d\theta}|^2}{\sum_\mu |c_\mu - f(\theta)|^2 P(\mu|\theta)}, \quad (39)$$

其中 $f(\theta)$ 是关于 θ 的任意函数, 而 $\langle\hat{M}\rangle = \text{Tr}[\hat{M}\hat{\rho}(\theta)] = \sum_\mu c_\mu P(\mu|\theta)$.

如果算符 \hat{M} 是厄米算符, 此时 c_μ 为实数. 若相位 θ 通过幺正算符 $e^{-i\hat{H}\theta}$ 作用在探测初态 $\hat{\rho}_0$ 上, 则由 Ehrenfest 定理, 可以得到 $i\partial_\theta\langle\hat{M}\rangle/d\theta = \langle[\hat{M}, \hat{H}]\rangle$. 此时, 选取 $f(\theta) = \langle\hat{M}\rangle$, 则有

$$F(\theta) \geq \frac{|\langle[\hat{M}, \hat{H}]\rangle|^2}{(\Delta \hat{M})^2}. \quad (40)$$

另一个特例是, 如果 $\hat{M} = \sum_\mu e^{i\mu} |\mu\rangle\langle\mu|$ 且 $f(\theta) = 0$, (39) 式可以写为

$$F(\theta) \geq |\frac{d\langle\hat{M}\rangle}{d\theta}|^2 = |\langle[\hat{H}, \hat{M}]\rangle|^2. \quad (41)$$

8) 最大似然估计子. 最大似然估计子 (maximum likelihood estimator, MLE) 是指与测

量值 ε 相关的似然分布函数的最大值所对应的相位值: $\Theta_{\text{MLE}}(\varepsilon) = \arg[\max_{\theta} P(\varepsilon|\theta)]$. 当测量的次数 m 趋于无穷时, 最大似然算子的估计值满足以真实值为中心的高斯分布, 且其方差为 Fisher 信息的倒数:

$$P(\Theta_{\text{MLE}}|\theta) = \sqrt{\frac{mF(\theta)}{2\pi}} e^{-\frac{mF(\theta)}{2}(\theta-\Theta_{\text{MLE}})^2}. \quad (42)$$

因此, 最大似然估计子是渐近无偏的, 它的方差总是可以达到 CRB, $\Delta\theta_{\text{MLE}} = 1/\sqrt{mF(\theta)}$. 中心极限定理保证了最大似然估计子比其他的估计子都要好.

9) 矩估计方法. 矩估计方法是指利用平均值和方差来刻画关于待测参量 θ 的统计分布函数的整体性质. 利用 $\bar{\mu} = (1/m) \sum_{i=1}^m \mu_i$ 来定义对于 m 次测量结果 μ_1, \dots, μ_m 的平均值. 这种方法要求 $\bar{\mu}$ 是关于待测参数 θ 的单调函数, 或者至少在估计参数的局域区间内是单调的. 此估计方法的精度可以由误差传递公式 (对估计值在真实值处作泰勒级数展开, $\bar{\mu}_m \approx \bar{\mu} + (\bar{\mu}/d\theta)(\Theta_{\text{mom}} - \theta)$). 当 $m \gg 1$, 显然可以有 (43) 式. 因为 $\bar{\mu}_m - \bar{\mu} \approx \Delta\mu/\sqrt{m}$, 且 $\Theta_{\text{mom}} - \theta \approx \Delta\theta_{\text{mom}}$ 给出:

$$\Delta\theta_{\text{mom}} = \frac{\Delta\mu}{\sqrt{m}|d\bar{\mu}/d\theta|}. \quad (43)$$

正如文献 [47] 所表明的, 通常情况下 (43) 式并不是最佳的, 即 $\Delta\theta_{\text{mom}} \leq \Delta\theta_{\text{CRB}}$, 即使在中心极限定理条件下, 也不一定可以达到 CRB. 只有当统计分布函数为高斯型时,

$$P(\mu|\theta) = \frac{e^{-(\mu-\bar{\mu})^2/[2(\Delta\mu)^2]}}{\sqrt{2\pi(\Delta\mu)^2}}, \quad (44)$$

且 $d(\Delta\mu)/d\theta \ll d\bar{\mu}/d\theta$ 时才可相等, 也就是说, 统计分布函数的主要特性都由它的平均值及其方差来刻画 [4]. 另外, 也有研究表明, 误差传播公式在经典和量子情况下可以分别达到 CRB 和 QCRB^[80,81]. 鉴于其形式简单、意思明了, (43) 式在文献中被大量使用. 但是, 仍然有一些需要注意的地方, 具体请参见文献 [5].

2 多粒子量子纠缠态的制备与判别

利用量子 Fisher 信息与待测物理量测量精度的关系, 基于量子 Fisher 信息的多粒子量子纠缠判据已经得到了广泛的应用, 比如连续变量的纠缠判定^[82]. 本节首先解释为何多粒子量子纠缠态可

以提高量子计量的测量精度. 在上节介绍的量子 Fisher 信息基本概念的基础上, 给出一个关于多粒子(分离变量)量子纠缠态的判据, 进而给出对提高量子计算精度有用的多粒子量子纠缠态的定义. 利用条件概率分布函数, 介绍一种可以直接从实验数据中提取 Fisher 信息的方法; 利用实验结果对所提出的方法进行验证. 最后, 介绍一种利用光与原子相互作用产生不同自由度量子纠缠的新方案.

2.1 统计距离与相位精度

被映射在量子态中的参数估计(或是相位估计)问题, 在很大程度上等价于如何有效区分参数空间中相邻量子态的能力^[1,83]. 因此, 从这个角度来讲, 干涉仪的相位估计精度可以认为是其对可能的最小相位差导致的输出量子态 $\hat{\rho}(\theta)$ 与初始探测态 $\hat{\rho}(0)$ 的分辨能力. 这个性质可以通过定义在统计空间中的量子态的统计距离(statistical distance)来描述^[84]

$$d_{\text{H}}^2(P_0, P_\theta) = 2 \sum_{\mu} \left(\sqrt{P(\mu|0)} - \sqrt{P(\mu|\theta)} \right)^2, \quad (45)$$

或者, 也可以表示为^[5]

$$d_{\text{H}}^2(P_0, P_\theta) = 1 - \mathcal{F}_{\text{cl}}(P_0, P_\theta). \quad (46)$$

(46) 式被称为海林格统计距离(Hellinger distance), 其中 $\mathcal{F}_{\text{cl}}(P_0, P_\theta) = \sum_{\mu} \sqrt{P(\mu|0)P(\mu|\theta)}$ 是经典统计保真度(fidelity), 或是两个统计分布的重叠度, 亦或是 Bhattacharyya 系数^[5]. 注意 d_{H} 是非负的, 即 $0 \leq d_{\text{H}} \leq 1$. 在 θ 非常小的情况下, 其相应的泰勒级数展开为

$$d_{\text{H}}^2(P_0, P_\theta) = \frac{F(0)}{8}\theta^2 + \mathcal{O}(\theta^3). \quad (47)$$

(47) 式表明, Fisher 信息可以理解为某种统计速度 $v_{\text{H}} = \partial d_{\text{H}}/\partial\theta = \sqrt{F(0)/8}$ 或者在最优测量条件下写为 $\sqrt{F_Q(\hat{\rho}_0)/8}$. 它反映了统计分布函数在 $\theta = 0$ (或者 $\theta = \theta_0$) 时随参数 θ 变化的某种速率. 必须指出的是, 在所有分析量子测量极限的问题中, 条件概率分布函数 $P(\mu|\theta)$ 是一个共同的出发点^[85]. 实验上, 固定待测参数 (θ_0), 对测量量子态进行多次测量, 原则上可以得到在给定参数条件 ($\theta = \theta_0$) 下测量值空间中的分布函数 $P(\mu|\theta_0)$, 如图 3 所示. 对待测参数进行改动 $\theta = \theta_0 + \delta\theta$, 重复之前的测量过程, 可以得到以 θ_0 为参考点的邻近条件统计分布函数 $P(\mu|\theta_0 + \delta\theta)$. 因此, 原则上 (47) 式提供了一

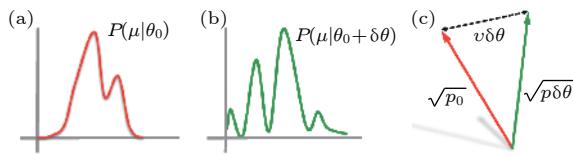


图 3 统计区分度和统计速度的示意图. 在给定 θ_0 的条件下, 分析测量数据可得分布函数 $p(\mu|\theta_0)$ (图 (a) 红线) 和调节 $\theta_0 + \delta\theta$ 后得分布函数 $p(\mu|\theta_0 + \delta\theta)$ (图 (b) 绿线). 图 (c) 示意由 $\sqrt{p_0} = \sqrt{p(\mu|\theta_0)}$ 和 $\sqrt{p_{\delta\theta}} = \sqrt{p(\mu|\theta_0 + \delta\theta)}$ 定义的态矢量及其欧几里得距离 (统计距离) $d_H = 2\|\sqrt{p_0} - \sqrt{p_{\delta\theta}}\|$, 其中 $v = v_H$ 是衡量统计区分度的统计速度. 图取自文献 [84]

Fig. 3. Here we give the sketch of statistical distinguishability and statistical speed. The probability distribution $p(\mu|\theta_0)$ is obtained by collecting the measurement results μ for different values of the parameter, here chosen to be θ_0 (red line) (a) and $\theta_0 + \delta\theta$ (green line)(b). (c) to quantify the statistical distinguishability between the two distributions we introduce unit vectors $\sqrt{p_0} = \sqrt{p(\mu|\theta_0)}$ (red) and $\sqrt{p_{\delta\theta}} = \sqrt{p(\mu|\theta_0 + \delta\theta)}$ (green), then we obtain the Euclidean distance between them: $d_H = 2\|\sqrt{p_0} - \sqrt{p_{\delta\theta}}\|$. Here the $v = v_H$ denotes the statistical speed. Adapted from Ref. [84].

种直接从实验数据中获取 Fisher 信息的方法 [13,84]. 显而易见, (45) 式和 (46) 式与具体的测量方式相关, 因此会有不同的统计距离定义. 比如, 也可利用信息论中描述两个邻近统计分布关系的物理量 [86] 来表示, 即 Kullback-Leibler(KL) 熵

$$D_{KL} \equiv \sum_{\mu} P(\mu|\theta_0) \ln \frac{P(\mu|\theta_0)}{P(\mu|\theta_0 + \delta\theta)}, \quad (48)$$

不难证明, 对 (48) 式中的 $\delta\theta$ 作小量展开, 也能得到与 (47) 式相似的关系式, $D_{KL} \propto F(\theta_0)/2\delta\theta^2$. 因此, 也可以作为一种从实验数据中获取 Fisher 信息的有效办法. 有意思的是, 两者可以以一种有效的、互相辅助的方式来提高获取 Fisher 信息的准确程度 [86], 如图 4 所示. 特别地, 当实验数据不是很完美时, 如实验的对比度不是很高 (见条件 (65) 式) 或 $\delta\theta$ 较大, 通过考虑高阶项的影响, (45) 式和 (48) 式也可以作为一种有效的手段来获得 Fisher 信息 [86].

对所有可能的测量方式 (所有可能的 POVM) 的统计距离 $d_H^2(P_0, P_\theta)$ 取最大值, 定义为 Bures 距离 [5]

$$d_H^2(\hat{\rho}_0, \hat{\rho}_\theta) = 1 - \mathcal{F}_Q(\hat{\rho}_0, \hat{\rho}_\theta), \quad (49)$$

其中 $\mathcal{F}_Q(\hat{\rho}_0, \hat{\rho}_\theta) = \text{Tr}[\sqrt{\sqrt{\hat{\rho}_\theta}\hat{\rho}_0\sqrt{\hat{\rho}_\theta}}]$ 被称为平移概率 (transition probability) 或是量子保真度 (fidelity)

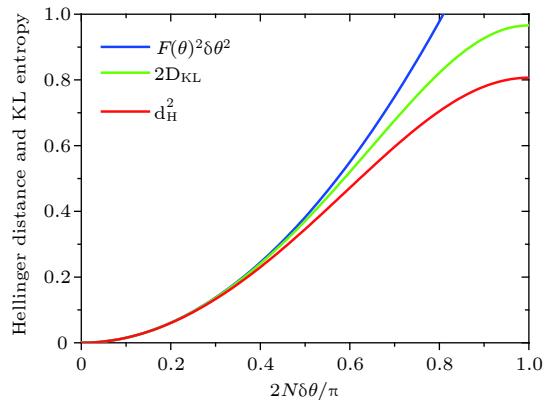


图 4 海林格距离 d_H^2 (红线) 和 KL 熵 $2D_{KL}$ (绿线), 以及他们共同的二阶展开项 $F(\theta)\delta\theta^2$ (蓝线) 的比较. 图取自文献 [84]

Fig. 4. Hellinger distance, d_H^2 (red line), KL entropy, $2D_{KL}$ (green line), and their common low-order approximation, $F(\theta)\delta\theta^2$ (blue line), as a function of θ . Adapted from Ref. [84].

(参见文献 [5] 及其参考文献). 有意思的是, 保真度与量子 Fisher 信息具有明确的关系. 因此, 保真度也提供了一种给出 Fisher 信息的方法 [87,88]. Uhlmann 定理告诉我们 $\mathcal{F}_Q(\hat{\rho}, \hat{\rho}_\sigma) = \max_{|\psi\rangle, |\phi\rangle} |\langle\psi|\phi\rangle|$, 其中最大化对所有相关量子态 $\hat{\rho}$ 和 $\hat{\sigma}$ 的纯化波函数 $|\psi\rangle$ 和 $|\phi\rangle$ 进行. 对于纯态而言, $\mathcal{F}_Q(|\psi\rangle, |\phi\rangle) = |\langle\psi|\phi\rangle|$. 量子 Fisher 信息还被证明与动力学压缩因子 (dynamical susceptibility) 有直接的对应关系 [4], 因此, 在与凝聚态物理相关的问题中也成为一个有用的概念 [50,51–55], 这部分内容超出本文的范围, 此处不再讨论.

利用统计距离从实验中读取量子 Fisher 信息囚禁的离子体系, 由于其与周围环境很好地隔离, 可以成功地实现诸如相干控制、独立寻址和高效率量子态测量等操作, 是成功产生与探索多粒子纠缠态的重要系统之一. 由于篇幅所限, 这里不作详细介绍, 有兴趣的可以参考文献 [5,89,90]. 这里采用 6 个 ${}^9\text{Be}^+$ [91] 和 14 个 ${}^{40}\text{Ca}^+$ [92] 离子的最大纠缠态 (薛定谔猫态)

$$|\Psi_{N,\text{cat}}\rangle = \frac{|\uparrow\rangle^{\otimes N} + |\downarrow\rangle^{\otimes N}}{\sqrt{2}} \quad (50)$$

的实验结果, 利用上述方法读取量子 Fisher 信息. 利用自旋转动操作 $\exp(-i\theta\hat{J}_z)$, 初态 (50) 式被演化为 $|\Psi_{N,\text{cat}}\rangle = (\exp(i\theta N/2)|\uparrow\rangle^{\otimes N} + \exp(-i\theta N/2)|\downarrow\rangle^{\otimes N})/\sqrt{2}$. 显然, $|\uparrow\rangle^{\otimes N}$ 与 $|\downarrow\rangle^{\otimes N}$ 之间的相对相位差为 $N\theta$. 这个态可以通过将其绕 x 轴进行 $\pi/2$ 转动来实现对它的测量. 对于离子实验而言, 可以用高灵敏

的荧光探测方法获得不同量子态上的离子数信息^[5]: 处于 $|\uparrow\rangle$ 态上的粒子数 N_{\uparrow} 的概率为 $(N_{\uparrow}|N, \theta) = P2^{-N} \binom{N}{N_a} \{1 + (-1)^{N_{\uparrow}} \cos[N(\theta + \pi/2)]\}$, 显然在 $|\downarrow\rangle$ 上的粒子数为 $N_{\downarrow} = N - N_{\uparrow}$. 由于布局率 $P(N_{\uparrow}|N, \theta)$ 随粒子数 N 快速振荡, 因此, 与此态相关的可测物理量都将呈现出这种快速振荡的特性^[93,94]. 实验上, 在量子计量的研究中(50)式的特性可以通过对宇称性(parity)的测量^[92]来获得. 图5(a)为一个典型的关于8离子的宇称性的测量结果^[92], 其条件概率分布函数满足

$$P(\pm|\theta) = \frac{1 \pm V \cos N\theta}{2}, \quad (51)$$

其中 \pm 代表宇称测量结果为 ± 1 , $0 \leq V \leq 1$ 是振荡

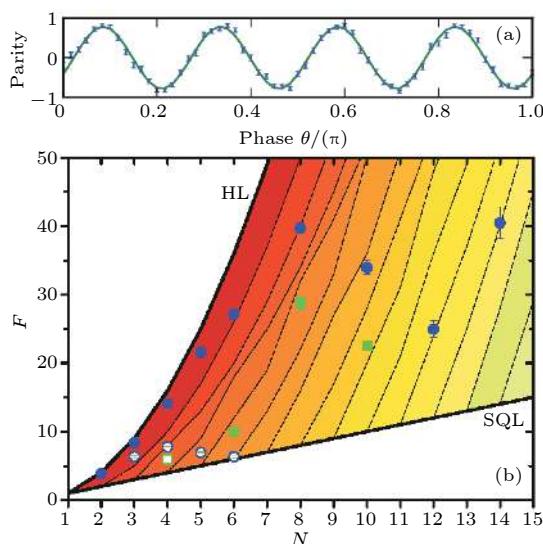


图5 宇称振荡的测量结果和提取的 Fisher 信息 (a) GHZ($N = 8$) 的宇称测量图, 周期为 $2\pi/8$, 取自文献 [92]; (b) 基于近期实验结果得到的 Fisher 信息与总粒子数 N 的关系 $F = V^2 N^2$, 其中 V 为实验中的对比度. 上边界粗线为海森堡极限, 即 $F = N^2$, 下边界黑色粗线代表标准量子极限, $F = N$. 图中其他的细线分别表示 k 粒子纠缠的边界, 即方程 (60). 其中 $N = 10$ 的圆圈表明 4 粒子纠缠. 图取自文献 [84]

Fig. 5. Experimental results based on parity measurement and extracted Fisher information: (a) Typical parity oscillations obtained with cat states. The period is $2\pi/8$. Adapted from [92]; (b) summary of the experimental achievements, ions (circle) and photons (square). Here we show the Fisher information as a function of the number of qubits N , $F = V^2 N^2$, obtained from the extracted experimental visibilities V . The upper thick line is the Heisenberg limit $F = N^2$, the lower thick line is the standard quantum limit, $F = N$. The different lines are bounds for useful k -particle entanglement, Eq. (60). For instance, the filled circle at $N = 10$ reveals useful 4-particle entanglement. Adapted from Ref. [84].

曲线的可见度 (visibility), 与测量的误差或是系统的噪声相关. 容易验证, 与测量分布函数 (51) 式对应的 Fisher 信息 (由于宇称测量为一种最优测量^[94], 因此, 此 Fisher 信息即为量子 Fisher 信息) 为

$$F(\theta) = \frac{V^2 N^2 \sin^2 N\theta}{1 - V^2 \cos^2 N\theta}. \quad (52)$$

显然, 当 $\sin N\theta = \pm 1$ 时, (52) 式取极大值 $V^2 N^2$. 如前所述, 以图 5(a) $N = 8$ 的离子实验为例, 为获取可以区分多粒子纠缠的量子 Fisher 信息值, 取 $\theta_0 = \pi/(2 \times 8)$ 为参考点, 在其附近取 $\theta = \theta_0 \pm j\delta\theta$, 其中 $\delta\theta = \pi/(4 \times 16)$, $j = \pm 1, \pm 2$. 如果有原始的实验数据 (原则上, 对于每一个给定的 θ , 需重复 ν 次的独立实验测量 $P_\nu(+|\theta)$), 这些实验测量数据满足如图 5(a) 所示的误差分布 (即图中所示的平均值和误差). 在我们的数值模拟中, 由于没有直接的实验数据, 我们利用高斯分布的假定, 产生相应的随机数据, 并利用 (45) 式或 (48) 式得到它们的统计距离或是统计熵. 之后, 在参数空间 (θ) 中, 对得到的统计距离 (熵) 在 θ_0 附近作二阶或高阶拟合, 所得的参数即视为相应的量子 Fisher 信息. 图 5(b) 即为利用所述方法, 对多个实验结果进行分析得到的结果. 这个方法最早由 Fisher 本人提出, 量子计量中首次采用该方法分析了 Fisher 信息与自旋压缩参数在多粒子纠缠态判据中的应用^[4]. 我们将该方法推广, 分析了离子^[91,92,95]、光子^[96,97]等实验结果^[84]. 关于利用 Fisher 信息对多粒子量子纠缠态进行判定的讨论将在下一小节中给出.

2.2 量子纠缠与相位精度

1) 多粒子纠缠. 考虑多粒子 (标记为 $l = 1, 2, \dots, N$) 组成的系统, 每一个粒子可实现一个量子比特 (可视为自旋). 如果系统的量子态是可区分的纯态 (从粒子的角度来看), 则可以写为

$$|\Psi_{\text{sep}}\rangle = |\Psi^{(1)}\rangle \otimes |\Psi^{(2)}\rangle \otimes \cdots \otimes |\Psi^{(N)}\rangle, \quad (53)$$

其中 $|\Psi^{(l)}\rangle$ 是第 l 个粒子的量子比特. 如果是一个可区分的混合态, 则可以写为直积态的混合形式^[98]

$$\hat{\rho}_{\text{sep}} = \sum_q p_q |\Psi_{\text{sep},q}\rangle \langle \Psi_{\text{sep},q}|, \quad (54)$$

其中 $p_q \geq 0$ 且 $\sum_q p_q = 1$. 不可以写成如上直积形式的量子态被称为纠缠态 (entangled)^[99–114]. 如果是两个粒子组成的系统, 则系统只能是两者之一.

而如果粒子数多于两个, 则量子态有多种不同的量子纠缠方式^[102](由于多粒子纠缠态在量子计量、量子信息以及新的量子技术中有重要应用, 对其量子纠缠的形式的区分或者判定是一个非常重要的课题). 多粒子的纠缠态可以用最多不可分的粒子数来进行量化 (quantified). 与 (53) 式相似, 一个纯的 N 粒子态, 如果有 k 可分的 (或是 k 重直积的), 可以写成

$$|\Psi_{k\text{sep}}\rangle = |\Psi_{N_1}\rangle \otimes |\Psi_{N_2}\rangle \otimes \cdots \otimes |\Psi_{N_M}\rangle, \quad (55)$$

其中 $|\Psi_{N_l}\rangle$ 是由一个 $N_l \leq k$ 个粒子组成的量子态, 且 $\sum_{i=1}^M N_l = N$. 类似地, 混合态^[103]可以定义为

$$\hat{\rho}_{k\text{sep}} = \sum_q p_q |\Psi_{k\text{sep},q}\rangle \langle \Psi_{k\text{sep},q}|. \quad (56)$$

一个可以写为 k 重可分而不能写为 $(k-1)$ 重的量子态, 称为 k 粒子纠缠态, 它至少包含一个具有 k 粒子的量子纠缠态; 同样地, 量子态的纠缠性亦可用纠缠深度 (entanglement depth) 来度量, 为比 $(k-1)$ 大的纠缠深度. 显然, 对于 N 粒子组成的纠缠态, 其最大的纠缠粒子数为 N , 即 $k = N$. 最后, 由于量子态具有凸性, 因此 k 可分的量子态中可含有 $k' < k$ 的可分态^[99].

2) 非纠缠态的相位精度与标准量子极限. Pezzè 和 Smerzi^[47] 在 2009 年证明, 对任意由 N 粒子组成的可分态, 即非量子纠缠态, 其量子 Fisher 信息存在一个上界

$$F_Q[\hat{\rho}_{\text{sep}}, \hat{J}_n] \leq N, \quad (57)$$

其中 \hat{J}_n 为 (68) 式中定义的集体自旋. 该不等式考虑了量子 Fisher 信息的凸性和可加性, 并同时考虑了 $4(\Delta\sigma_n)^2 \leq 1$ ^[4]. 这样利用 (9) 式, 并考虑无偏估计以及 m 次完全独立的测量, 就得到标准量子极限(或者散粒噪声极限)的表达式

$$\Delta\theta_{\text{SQL}} = \frac{1}{\sqrt{mN}}. \quad (58)$$

该极限与测量的估计子、测量方法等无关, 但是受限于对系统中各粒子的局域操作. 有意思的是, (58) 式中测量次数 m 与探测态中粒子数 N 有相似的作用, 只使用一个粒子作为探测态重复 N 次相同的测量, 与使用具有 N 个粒子作为探测态测量一次有着相同的测量精度. 这实际上是另一种与量子纠缠无关的量子增强测量理论的核心理念^[49].

3) 有用的量子纠缠态. 如果某量子态 $\hat{\rho}$ 在 (68) 式描述的操作下所得到的量子 Fisher 信息不

满足 (57) 式, 也就是说

$$F_Q[\hat{\rho}, \hat{J}_n] > N, \quad (59)$$

则表明该量子态具有多粒子量子纠缠特性, 因此, (59) 式是量子态是多粒子量子纠缠的充分条件. 更准确地讲, (59) 式可以作为判定有利于量子计量精度提高的量子纠缠态的一个充分必要条件: 对于一个满足条件 (59) 的量子态 $\hat{\rho}$ 而言, 如果利用它作为探测态对某个小的相位 θ 进行估计, 假定该相位 θ 通过某种干涉仪的相互作用 $e^{-i\hat{J}_n\theta}$ ((68) 式) 引入, 所能得到的测量精度将超过标准量子极限 (58) 式. 这也意味着, 并非所有的量子纠缠态都对提高测量精度或是超越标准量子极限有用^[47]. 而对测量精度提高不大的多粒子量子纠缠态可能有助于其他量子技术. 实际上, 量子技术依赖于对量子态的测量, 即依赖于对量子态自由度的操控. 同时, 即使是对测量有用的量子纠缠态, 对测量精度的提高也不尽相同: 具有较大量子 Fisher 信息的量子态, 同时也具有更深的纠缠深度. 对于 k 组份的纠缠态 ((56) 式), 其量子 Fisher 信息满足如下不等式^[100]

$$F_Q[\hat{\rho}_{k\text{sep}}, \hat{J}_n] \leq sk^2 + r^2, \quad (60)$$

其中 $s = [N/k]$ 为 N/k 的整数部分, $r = N - sk$ (显然, 如果 N 可以被 k 整除, 则 $sk^2 + r^2 = Nk$). 如果不满足 (60) 式, 则探测态含有对测量有用的 $(k+1)$ 部分纠缠态, 也就是说, 如果用此态作为探测态, 将有可能获得较任何 k 可分态更好的测量精度. 有意思的是, (60) 式随部分纠缠粒子数 k 的增加而单调增加, 如图 6 所示, 其中 $F_Q[\hat{\rho}_{k\text{sep}}, \hat{J}_n] \leq Nk$.

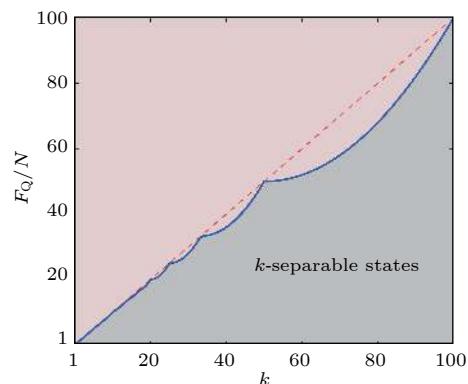


图 6 有利于量子计量的 k 粒子纠缠判据. 图中蓝色的实线由方程 (60) 给出: k 粒子纠缠态的量子 Fisher 信息. 虚线为 $F_Q/N = k$, 其中粒子数 $N = 100$. 该图取自文献 [100]

Fig. 6. Useful k -particle entanglement for quantum metrology. k -separable states have a quantum Fisher information bounded by the solid line, Eq. (60). The dashed line is $F_Q/N = k$. Here $N = 100$. Adapted from Ref. [100].

如文献 [47] 所证明的, 对于 N 粒子组成的量子态而言, 最大的纠缠态(被称之为 genuine N 粒子纠缠态)的量子 Fisher 信息存在上界

$$F_Q[\hat{\rho}_{k\text{sep}}, \hat{J}_n] \leq N^2. \quad (61)$$

同样地, 由 CRB(9) 式可知, 测量精度满足

$$\Delta\theta_{\text{HL}} = \frac{1}{N\sqrt{m}}. \quad (62)$$

因此, (61) 式确定了由量子理论决定的相位测量的新极限 [3], 称之为海森堡极限 (Heisenberg limit, HL)(海森伯极限最早在 1993 年由 Holland 和 Burnett^[105] 引入, 纪念海森伯不确定关系, 将它用在粒子数与相位的测不准关系中 $\Delta\theta\Delta N \geq 1$. 这里所说的海森伯极限特指 $\Delta\theta = \mathcal{O}(N^{-1})$ (也可以将输入干涉仪的粒子数 N 与独立测量的次数 m 一起进行优化^[85,106,107]. 这样可将海森伯极限写为 $1/N_T$, 其中 $N_T = m_{\text{opt}}N$, m_{opt} 是在给定测量粒子数 N 时, 使测量精度最大的最优测量次数. 由于该测量次数可能与测量态粒子数相关, 因此, 尽管可能测量态的 Fisher 较 N 大, 但其测度精度较标准极限 $1/\sqrt{N_T}$ 好). 不难看出, (58) 式与 (62) 式对 N 的依赖关系不同, 相差 $1/\sqrt{N}$ 倍, 并且这个差别是不可能通过经典关联(或是可分)态来克服的. 但需要注意的是, 克服标准量子极限 (58) 式还可采用 Multi-round 的方法^[3,5].

3) 多粒子纠缠判据与量子 Fisher 信息. 自旋压缩态是指一类量子态, 它在沿某一给定方向上的自旋测量值的涨落较小, 同时, 在垂直方向上的自旋测量值具有较大的涨落, 但是, 两者的乘积满足海森堡测不准关系. 自旋压缩态是一类已经被证明在突破标准量子极限方面非常有用的量子纠缠态. 通常用 Wineland 等^[7,46] 在 1992 年左右提出的自旋压缩因子

$$\zeta_R^2 = \frac{N(\Delta\hat{J}_\perp)^2}{\langle \hat{J}_s \rangle^2}, \quad (63)$$

来刻画量子态的压缩程度. 其中 \perp 表示 Bloch 球上面与转轴 \mathbf{n} 、平均自旋 \mathbf{s} 垂直的方向矢量. 由定义 (63) 式可知, 自旋压缩系数可以直接从实验测量的数据中获得, 具有非常好的实验友善性(见图 2 中的部分实验结果). 自旋压缩因子 ζ_R^2 已经被证明可作为充分条件 ($\zeta_R^2 < 1$), 用于识别对提高测量结果的精度有利的多粒子量子纠缠态, 进而, 一个有利

于提高量子测量精度的量子态的纠缠深度越高, 它的自旋压缩因子 ζ_R^2 就越小^[104]. 2009 年, Smerzi 证明了自旋压缩因子与量子 Fisher 信息有如下关系:

$$\frac{N}{F_Q[\hat{\rho}, \hat{J}_n]} \leq \zeta_R^2, \quad (64)$$

其中 $F_Q[\hat{\rho}, \hat{J}_n]$ 是对量子探测态 $\hat{\rho}$ 进行么正操作 $e^{-i\hat{J}_n\theta}$ 下的量子 Fisher 信息. 依据文献 [7,46], 如果 $\zeta_R^2 < 1$, 那么该量子态为具有量子计量意义上的自旋压缩态, 沿 \perp 方向的自旋可用于超越标准量子极限的测量. 由 (64) 式不难看出, 这个条件与量子 Fisher 信息对纠缠量子态的判别条件 (59) 式完全等价. 即可以利用自旋压缩因子识别的多粒子量子纠缠态, 也可以利用量子 Fisher 信息进行识别. 但是, 反过来却并不一定成立, 即有一些可以利用量子 Fisher 信息识别的量子纠缠态, 利用自旋压缩因子是不能识别的, 至少对于部分非高斯型的量子态如此^[13]. 从某种意义上讲, 自旋压缩态只是一类有利于提高测量精度或有益于量子计量的多粒子量子纠缠态. 因此, 在多粒子量子纠缠态判别上, 我们认为量子 Fisher 信息具有较自旋压缩因子更广泛的适用性.

利用直接从实验数据中获得的量子 Fisher 信息值, 以及关于有利于量子计量的 k 组份的多粒子量子纠缠判据 (60) 式, 我们得到了图 5. 图中黑色的圆点为从实验中获得的宇称性测量结果的量子 Fisher 信息值^[92]. 依据我们的计算, 这个实验结果声称得到了 14 个离子的多粒子纠缠态, 从量子 Fisher 信息的多粒子纠缠判据的角度来看, 它大约得到了 6 个离子的纠缠态. 有意思的是, 随后实验小组利用 Bell 测量判据给出了新的判断, 表明他们也只得到了与我们结果相同的 6 离子纠缠态^[108]. 利用 (52) 式可以看到, N 粒子量子纠缠态的量子 Fisher 信息识别, 对测量值的对比度也有要求, 即

$$V^2 > \left(1 - \frac{1}{N}\right)^2 + \frac{1}{N^2}. \quad (65)$$

这就在一定程度上表明, 退相干因素也是提高量子测量精度需要克服的因素. 最后需指出, 有一些具有纠缠性质的量子态(比如 W 态), 不能利用线性操作下的量子 Fisher 信息进行识别^[5].

2.3 多原子量子纠缠态的制备

如前所述, 多粒子量子纠缠态是进一步提高量

子测量精度,甚至是关乎所有量子新技术的关键。因此,如何有效地产生多粒子量子纠缠态是目前量子物理中的一个关键问题和技术。由于粒子之间的纠缠,本质上是粒子的量子态(某种意义上是标记量子态的自由度的量子数,或者好量子数的某种纠缠,亦或可理解为是一些自由度之间的纠缠)之间的纠缠,因此,控制粒子的量子态(或自由度)之间的相互作用是有效产生多粒子量子纠缠态的核心要素。光学晶体中的光学非线性相互作用,即自发参量下转换(spontaneous parametric down-conversion, SPDC)方法,是实现纠缠光子对(实现对偏振或模式的控制)以及压缩光场的重要手段,其中光子双数态以及连续变量的压缩光都是已经被证明的、有利于量子计量的量子纠缠资源。图2表明冷原子物理必将是一种在量子计量及量子信息中起重要作用的新量子资源(作为与光子完全不一样的量子体系正在引起人们的注意:1)静止质量;2)与外环境隔离比较彻底;3)可控的自由度高;4)已经在一些重要的测量方面取得相当大的成绩,如时间标准、重力测量等)。超冷原子体系中可控的原子间弹性碰撞相互作用、囚禁外势是在其内态或是空间模式间产生量子纠缠的重要手段^[5],比如:玻色约瑟夫森结的纠缠基态^[20]以及非自旋压缩的量子纠缠态^[13]等;超冷原子体系中的自旋相互作用是产生超冷原子对或是大量原子之间量子纠缠的重要手段(原子的双数态^[9,109]和自旋压缩态^[17,19]等);原子与光场的相互作用也可产生非定域原子之间的量子纠缠关联;利用里德堡原子偶极-偶极相互作用产生异核原子量子纠缠^[110]等。另外,在离子体系中,静电相互作用和离子与光场的相互作用也是目前多离子体系产生多粒子量子纠缠态的有效方法^[92],相关的综述可见文献[111–115]。

1) 原子双数态与量子相变。在大多数的原子体系中,多原子量子纠缠态的产生依赖于系统的动力学特性,即:通过初态制备并严格控制动力学演化时间来得到所需的多粒子(原子)纠缠态。近年来,考虑超冷原子系统的多体量子能谱特征,可以通过系统参数的绝热调节,实现系统在不同量子基态的转变(即量子相变)进而实现多粒子量子纠缠态的制备(明显的优点:1)产生可预知确切的量子态;2)一种全新的纠缠态制备方法)。以自旋为S=1的超冷自旋原子气体为例,相应的哈密顿量^[116,117]可写为

$$\hat{H}_{\text{SM}} = [q + \lambda (\hat{N}_0 - 1)] (\hat{N}_{+1} + \hat{N}_{-1}) + 2\lambda (\hat{a}_{-1}^\dagger \hat{a}_{+1}^\dagger \hat{a}_0 \hat{a}_0 + \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_{-1} \hat{a}_{+1}), \quad (66)$$

(66)式中忽略了磁守恒(即假设 $\hat{N}_{+1} + \hat{N}_{-1} = 0$)和与总粒子相关的部分。这里定义 $q = (\delta E_1 + \delta E_{-1})/2$ 为有效二阶塞曼能(quadratic Zeeman),与磁场强度的平方成正比,可通过磁场强度(或近共振微波缀饰)来调节,λ表示自旋作用允许的s波碰撞相互作用能(详见文献[5])。研究发现,(66)式描述的系统基态由二阶塞曼能和自旋依赖的二体碰撞相互作用能的竞争决定。在反铁磁条件($\lambda < 0$)下,存在两个不同的、序参量可用 \hat{N}_0 来表示的量子相:当 $q > 4N|\lambda|$ 时,系统的基态为 $|0\rangle_{-1}|N\rangle_0|0\rangle_{+1}$ (此时, $N_0 = N$,原子全部布居在 $m_f = 0$ 的能级上,处于极化相(polar phase));当 $q < 4N|\lambda|$ 时,系统的基态为 $|N/2\rangle_{-1}|0\rangle_0|N/2\rangle_{+1}$ (此时, $N_0 = 0$,原子平均布居在 $m_f = \pm 1$ 的能级上,处于破缺反对称相(broken asymmetry phase))。换而言之,极化相时,系统处在纯的Fock态,而破缺反对称相时,系统处在原子的双数态上^[116]。Zou等^[9]第一次实验证明了虽然存在一定原子损失和绝热调节参数上的困难,但上述相变过程可以用来制备多原子数的双数态,如图7所示。实验上第一次利用该相变过程,实现了 $s = \pm 1$ 上约

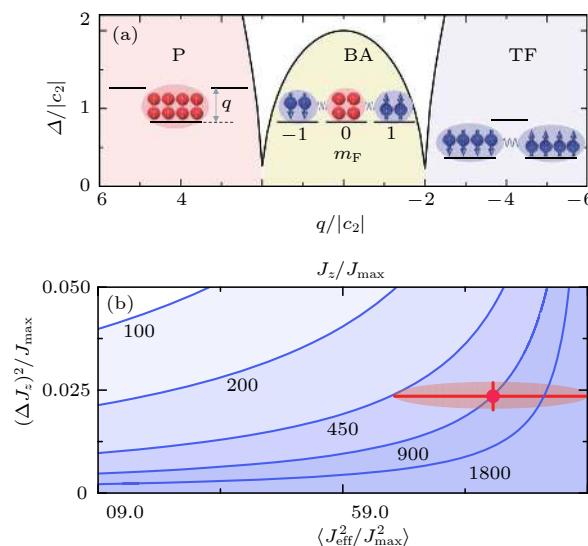


图7 (a) 量子相变产生双数态过程;(b) 纠缠宽度分析表明双数态纠缠宽度约为 910^{+9900}_{-450} 原子。图取自文献[109]

Fig. 7. (a) Generation of twin-Fock state by quantum phase transition; (b) analysis of entanglement breadth for the Twin-Fock state samples, and it shows the entanglement breadth is at least 910^{+9900}_{-450} atoms. Adapted from Ref. [109].

96% ± 2% 的高转化率、高相干性、高纠缠深度(约 910 个原中有超过 450 个原子处于纠缠)和 $\zeta_N^2 = -10.7 \text{ dB}$ 的双数态的制备。在随后的实验^[9]中, 他们绝热制备了 $s = 0$ 的原子 Dicke 态, 同时利用它对 Rabi 转动进行了测量, 得到了 2.42 dB 的测量结果, 超过标准量子极限, 详细介绍见文献 [118]。受这些工作的启发, 人们发现了第二个时间较短的、可用来产生突破海森伯极限的量子纠缠态制备方法^[119]。利用超冷原子的自旋特性, 通过对其相变过程量子 Fisher 信息的分析, 给出一种新的、确定性的多原子纠缠态的制备方案^[120]。

2) 不同自由度的非定域特性。原子系统中多粒子量子纠缠态的研究不仅局限于多粒子量子纠缠态的产生, 而且在理解诸如 Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) 关联或是 Bell 非定域性方面也有重要的意义^[5]。Bell 不等式是甄别粒子间关联特性的重要判据, 不满足其要求的量子态之间的关联被称为最强量子关联^[121]。量子体系中这种非定域的关联特性是发展量子信息和量子计量等量子新技术的核心要素。相同自由度之间的量子纠缠或者非定域特性是一个被研究了很长时间的问题, 特别是在光子体系中取得了非常大的进步。近年来, 由于不同自由度之间的量子纠缠(非定域)特性在量子信息等领域中的重要作用, 比如增加通讯的容量或增强量子通讯能力等, 引起了人们的广泛注意^[122]。有意思的是, 寻求不同自由度之间的相互作用不仅是量子计量, 而且也是凝聚态物理中的重要课题。这在一定程度上促进了超冷原子体系中的另一个研究热点, 人造量子规范势相关问题的量子模拟^[123,124]。因此, 产生不同自由度量子态的量子纠缠的关键是要寻找连续自由度(动量)和分离自由度(自旋)之间的相互作用。

$$|\downarrow, \mathbf{P}_\downarrow\rangle \rightarrow \alpha |\downarrow, \mathbf{P}_\downarrow\rangle + \beta |\uparrow, \mathbf{P}_\uparrow\rangle, \quad (67)$$

其中, $|i, \mathbf{P}\rangle$ 表明粒子的量子态需用两种不同自由度来标记, 且 $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ 。 $|i\rangle$ 与 \mathbf{P} 分别表示分离自由度自旋(这里 $i = \uparrow$ 或 \downarrow)和连续自由度动量。事实上, 上述相互作用在光学、原子和离子的体系中并不难找到^[122]。利用光与原子相互作用中双光子拉曼过程, 我们建议在原子系统中, 实现上述过程(值得一提的是, 超冷原子体系中的人造规范势也可以利用相同的原理产生)。另一方面, 利用复合的光学器件, 也可以实现光子不同偏振与传播方向

的耦合), 进而实现不同自由度的双原子非定域关联, 如图 8 所示。从量子力学角度看, (67) 式定义了一个类似分光镜一样的光学器件。利用这个器件, 并结合 Yurke 早年提出的在两个事先没有任何关联的粒子间产生非定域量子关联的方法, 我们提出了一种可以有效实现两个原子之间非定域关联的实验方案^[122]。由于相互作用耦合的可控性, 某种意义上讲, 这个方案也是对 Yurke 方案在更广泛

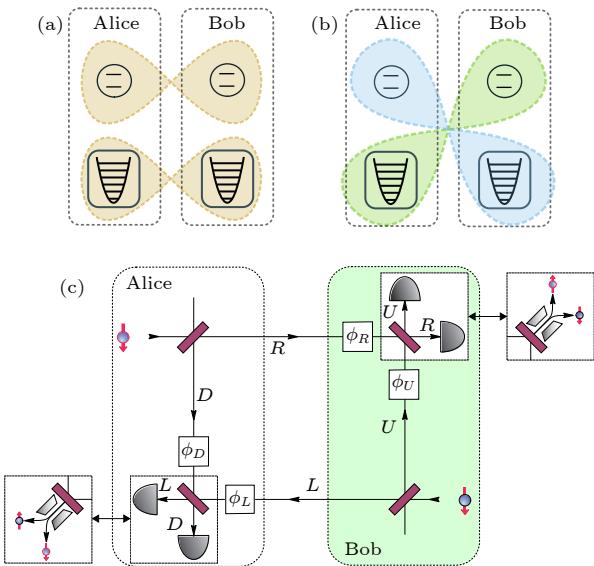


图 8 两空间分离的粒子的相同自由度(a)和不同自由度(b)之间的非定域关联(Bell 关联);(c)产生和验证自由度间非定域关联的实验方案。Alice 和 Bob 各自制备自旋态为 $|\downarrow\rangle$ 的原子并使其通过混合分束器。分束器的两个输出分别与本地和对方的分析仪器相连。第二个混合分束器作为各自的分析仪器的一部分, 将所得信号组合, 在两个粒子的不同自由度中产生了非定域关联。通过 CHSH 不等式来区别, 此时两探测器的信号同时响应。图取自文献 [122]

Fig. 8. (a) Hypernonlocality represents the simultaneous presence of Bell correlations among more than one DOF of two spatially separated particles; (b) hybrid nonlocality identifies Bell correlations among the discrete DOF of one particle and the continuous DOF of another distant particle; (c) experimental scheme for the generation and verification of inter-DOF entanglement. Alice and Bob both prepare one particle in a spin- $|\downarrow\rangle$ state and submit it to a hybrid beam splitter. One of the output ports is sent to their local laboratory while the other is sent to the opposite party. By mixing the local and the received copy using a second hybrid beam splitter, the desired correlations are established. Both parties now measure either spin or external d.o.f of their received particles, as depicted by the interchangeable measurement devices (white boxes). The recorded data from the events in which both parties receive exactly one particle violate a suitable CHSH inequality, independently of the measured DOF Adapted from Ref. [122].

意义上的一个推广, 对在实物粒子中开展量子非定域的研究有重要意义.

3 量子增强的原子干涉仪

即使不考虑多原子体系中的量子纠缠特性, 利用超冷原子体系作为量子计量的载体, 就已经充分利用了它的一个基本量子属性——全同性. 因此一定意义上实现了具有量子增强的量子计量: 由于全同的超冷原子体系本身就是一个非常难得的、与参数测量要求完全相同的多粒子统计初态^[49]. 利用其完成一次测量所获得测量精度的提高与系统中原子数的根号成正比(频率或时间测量中利用光格子将原子分开, 亦是相同道理). 这也是利用超冷原子气体的原子干涉仪进行重力、微磁场以及时间频标或者原子钟等进行计量研究的一个原因. 无论在光子还是原子体系中, 对精密测量而言, 干涉仪都是一个非常重要的工作框架. 因此, 本小节将简要回顾有关 SU(2) 干涉仪的工作原理, 再对我们建议的多模式原子干涉进行简要介绍.

3.1 SU(2) 干涉仪

讨论利用由 N 个二能级粒子(原子)组成的探测初态, 实现对微小相位 θ 进行估计的问题. 本节将讨论利用(32)式定义的幺正变换, 将参量 θ 耦合到探测态的过程. 形象地讲, 这个过程可以理解为将初始量子态在 Bloch 球上绕给定方向 \mathbf{n} 进行一个 θ 角的转动

$$\hat{U}_{\mathbf{n}}(\theta) = e^{-i\theta \hat{J}_{\mathbf{n}}}, \quad (68)$$

其中 $\hat{J}_{\mathbf{n}} = \sum_{i=1}^N \hat{\sigma}_{\mathbf{n}}^{(i)} / 2$ 为集体 (collective) 线性转动算符, $\hat{\sigma}_{\mathbf{n}}^{(i)}$ 是第 i 个原子的泡利矩阵. 干涉仪对于探测初态的作用可以等价为对赝(集体)自旋算符 $\hat{J} \equiv (\hat{j}_x, \hat{j}_y, \hat{j}_z)$ 沿给定方向 \mathbf{n} 在 Bloch 球上转动 θ 角. 这个角度 θ 就是要进行估计的参量, 通常与待测物理参数有确定的函数关系. 如文献[4]中证明的, 利用(68)式, 可以将大多数在冷原子物理中无损耗的线性双模干涉仪, 包括 Ramsey 型、麦克尔逊以及常用的 MZ 干涉仪(是重力、时间频率以及引力波测量的工作原理)等, 理解为在一个抽象的三维空间中, 对具有角动量特征的态矢量进行的转动操作^[125].

一个标准的线性、无损的 SU(2) 干涉仪通常有

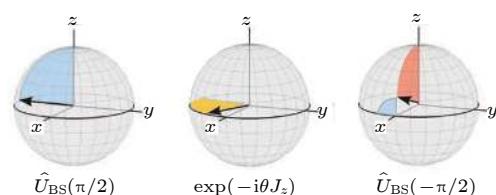


图 9 广义 Bloch 球上马赫-曾德干涉仪和拉姆齐干涉仪对集体自旋的操作. 图取自文献 [5]

Fig. 9. Representation of Mach-Zehnder and Ramsey interferometer operations as rotations of the collective spin on the generalized Bloch sphere. Adapted from Ref. [5].

两个输入和两个输出端口, 可用下面的矩阵运算来表示

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_{\text{out}} \\ \hat{b}_{\text{out}} \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} \hat{a}_{\text{in}} \\ \hat{b}_{\text{in}} \end{pmatrix}, \quad (69)$$

其中转动矩阵 \mathbf{M} 可一般地表示为

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} e^{-i\phi_t} \cos \frac{\vartheta}{2} & -e^{-i\phi_r} \sin \frac{\vartheta}{2} \\ e^{i\phi_r} \sin \frac{\vartheta}{2} & e^{i\phi_t} \cos \frac{\vartheta}{2} \end{pmatrix}, \quad (70)$$

其中 $0 \leq \vartheta \leq \pi$, $0 \leq \phi_r, \phi_t \leq 2\pi$. 这样的 SU(2) 干涉仪可通过引入变换(一个非常通用的变换, 在许多领域中都有类似的应用, 本身对 Bose 子或 Fermi 子没有特别要求)

$$\mathbf{J} \equiv \begin{pmatrix} \hat{J}_x \\ \hat{J}_y \\ \hat{J}_z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{b}^\dagger \hat{a} \\ -i(\hat{a}^\dagger \hat{b} - \hat{b}^\dagger \hat{a}) \\ \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{b}^\dagger \hat{b} \end{pmatrix}, \quad (71)$$

将双模干涉仪的输入与输出端口的量子态与算符 \mathbf{J} 对应起来. 不难证明, 由(71)式定义的算符 \mathbf{J} 满足与角动量算符相同的对易关系 $[\hat{J}_k, \hat{J}_l] = i\varepsilon_{k,l,m} \hat{J}_m$, 因此可以视为赝角动量算符, 其中 \hat{J}_z 具有明显的物理意义, 表示两个端口的粒子数差. 自旋的大小由系统的总粒子数来决定, $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{b}^\dagger \hat{b}$, 对应于 Bloch 球的半径. 与 SU(2) 和 SO(3) 群表示一样, 算符 $\hat{J}_{x,y,z}$ 表示沿三个转轴方向的转动生成元. 由于干涉仪是无损的, 因此角动量算符的顶点就在空间中画出一个球(Bloch 球). 因此, 一般的 SU(2) 干涉仪的操作可以用类似自旋(角动量)转动形式写为

$$\mathbf{J}_{\text{out}} = e^{+i\theta \hat{J}_{\mathbf{n}}} \mathbf{J}_{\text{in}} e^{-i\theta \hat{J}_{\mathbf{n}}}, \quad (72)$$

其中待测的小角度 θ 与(70)式中的 ϑ , ϕ_r 和 ϕ_t 存在某种函数关系. (72)式是双模干涉仪在海森伯表象下的表示形式. 在薛定谔表象下, 可以等价地表

示为

$$|\psi_{\text{out}}\rangle = e^{-i\theta \hat{J}_n} |\psi_{\text{in}}\rangle. \quad (73)$$

1) 对称分束器. 对于一个完全对称的分束器, 对两个不同输入态有完全相同的作用, 可以利用(69)式来表示. 其对称矩阵(70)式中的两个角度分别为 $\phi_r = 0$, $\phi_t = -\pi/2$,

$$M_{\text{BS}} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -i \sin \frac{\theta}{2} \\ -i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (74)$$

对于50–50的分束器而言, 可令(74)式中的 $\theta = \pm\pi/2$, 相应的变换矩阵可以写为

$$\begin{pmatrix} \hat{J}_x \\ \hat{J}_y \\ \hat{J}_z \end{pmatrix}_{\text{out}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{J}_x \\ \hat{J}_y \\ \hat{J}_z \end{pmatrix}_{\text{in}}. \quad (75)$$

此时, 该分束器被视为绕 x 轴作 θ 角的转动操作, 即 $\hat{U}_{\text{BS}} = e^{-i\theta \hat{J}_x}$.

2) Mach-Zehnder 和 Ramsey 干涉仪. 将一个双模态(光子或是原子)通过一个50–50的对称分束器, 一个相位 θ 累积过程再经过一个50–50的对称分束器就组成了一个标准的 MZ 干涉仪. 由(69)式可以写出它所对应的操作矩阵 M :

$$M_{\text{MZ}} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (76)$$

类似地 SU(2) 表示为

$$\begin{pmatrix} \hat{J}_x \\ \hat{J}_y \\ \hat{J}_z \end{pmatrix}_{\text{out}} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{J}_x \\ \hat{J}_y \\ \hat{J}_z \end{pmatrix}_{\text{in}}. \quad (77)$$

显然, (77)式表示绕 y 轴作 θ 角的转动操作. 不难证明(76)式可以等价地理解为下面的连续转动操作

$$\hat{U}_{\text{MZ}} = e^{i\frac{\pi}{2}\hat{J}_x} e^{-i\theta\hat{J}_z} e^{-i\frac{\pi}{2}\hat{J}_x} = e^{-i\theta\hat{J}_y}.$$

推导过程中已经考虑了(75)式. 进而, 如果将50–50分束器与 Ramsey 干涉仪中的 $\pi/2$ 脉冲光等价, 易知 Ramsey 干涉仪也可以用(77)式同样的操作来表示, 也就是说 Ramsey 干涉仪与 MZ 干涉仪在 SU(2) 的表示下, 具有相同的数学结构. 需要提醒的是, Ramsey 干涉仪的双模一般为原子的两个内态, 而 MZ 干涉仪的双模通常为两个可空间

分开的空间运动模式^[4].

3.2 原子干涉仪

相较于光学、电子以及中子干涉仪, 原子干涉仪具有原子种类多, 光学散射截面大, 对电、磁环境灵敏度高和易于测量等特点. 从上世纪70年代开始, 在对原子的波动特性和其质心运动的相干控制有了一定积累之后, 对原子干涉仪^[22]的相关研究取得了长足的进步. 目前原子干涉仪已经成为基础量子理论、精密测量以及原子分子物理研究中的重要手段^[22,126]. 原子干涉仪的实验实现一定意义上展现了人们对原子波动性相干操控的能力. 关于它的相关研究和综述很多, 有兴趣的读者请参考文献^[22,126,127]. 本文扼要介绍其工作原理以及一些主要进展.

1) 主要组成过程. 基于上述 SU(2) 干涉仪的原理, 原子干涉仪是将原子特定量子态(内态或动量态)上累积相位精确读出的仪器, 主要由以下几部分组成: I) 初态(长寿命内态或是动量态)的选取; II) 相干原子分束, 通过光栅衍射方法实现; III) 自由演化阶段, 即相位差累积过程(在这个过程中, 将待测量的物理量与原子内态或动量态进行耦合); V) 相干复合过程, 将不同路径上的原子进行态叠加; VI) 测量过程, 通过测量不同态上的粒子数, 获得干涉条纹并读取相位差信息. 需要注意的是, 依赖于不同测量物理量的原子干涉仪进行相干操控的量子态并不相同, 比如: 测量时间频率标准时, 关注的量子态为原子的内态; 而在重力等惯性力的测量中, 则是其平动量子态(动量态)^[22,126].

2) 相干原子分束. 通过降温和速度选择等方法, 原则上可以得到具有较好空间分布的原子初态. 根据不同原子干涉仪的用途, 还需对原子云进行进一步的操作以获得理想的原子初态. 一般来讲, 原子相干分束通过衍射(diffract)过程来实现. 早期的原子衍射选用特定的晶体或微纳结构的光栅器件来实现^[22]. 近年来, 光与原子相互作用成为原子相干分束的主要手段, 下面对其中的两类相互作用进行简单介绍: Raman-Nath 近似的光格子作用和速度选择的受激拉曼跃迁作用. 在原子束与光场的相互作用中观察到原子的衍射现象^[128,129]以后, 原子与光的相互作用才被认为是一种相干原子分束的有效手段^[22], 即光格子对原子束也可起

到光学镜片对光一样的作用。一个两能级原子与光场的相互作用的有效势函数可以写为

$$U(\mathbf{x}) = \frac{\hbar\Omega_1^2}{4\Delta + i2\Gamma} \propto \frac{I(\mathbf{x})}{2\Delta + i\Gamma}, \quad (78)$$

其中 $\Delta = \omega_{\text{laser}} - \omega_{\text{atom}}$ 是光场与原子的失谐量, Ω_1 为拉比频率, 由光场强度与原子的偶极常数决定, Γ 是原子衰减率, $I(\mathbf{x})$ 是光场的强度分布。一般地, 依据光场与原子失谐情况, 对原子的相互作用分为三种: 共振光场, 相对于原子来说 贡献吸收结构; 大失谐光场提供一个真实的势函数分布, 单纯起相位控制的作用; 近共振光场兼有这两种作用。目前, 最典型的光场是两束对打激光形成的驻波光场。由于其与电子所处的周期外势相似, 也被称为光格子势, 其空间倒格矢量为 $\mathbf{G} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$, $\mathbf{k}_{1,2}$ 为形成驻波场的两束激光的波矢量。根据不同的光场参数, 光学格子也有许多不同的分类, 本文所关心的典型相互作用见图 10。如果原子束与光场远失谐, 并且满足 Raman-Nath 条件, 即相互作用时间 τ 较短 ($\tau < 1/2\sqrt{\Omega_R E_G/\hbar}$, $\Omega_R = \sqrt{|\Omega_1|^2 + \Delta^2}$ 和 $E_G = \hbar^2 G^2 / 2m = 4\hbar\omega_{\text{rec}}$), 此时光场只起一个薄的相位光栅作用, 光栅的参数为 $d = \lambda_{\text{ph}}/2$, 该作用也被称为 Kapitza-Dirac (KD) 衍射。此相互作用下, 原子束被重新分布到不同的动量态 $n\hbar\mathbf{Q}$, 分布概率为 $J_n^2(\Omega_1^2\tau/2\Delta)$, 其中 J_n 为 N 阶贝塞尔函数。当光场与原子能级共振时, 原子会吸收或者放出光子, 同时伴随着与光场的动量交换过程。根据动量

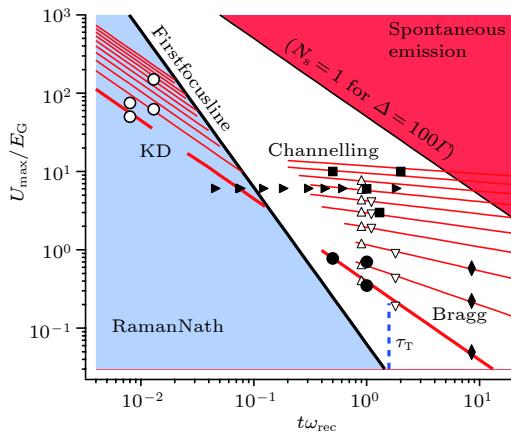


图 10 无量纲参数下的原子衍射图: KD 衍射和 Bragg 衍射所满足的条件. 图取自文献 [22]

Fig. 10. Dimensionless parameter space for atom diffraction, KD labels curves corresponding to conditions that maximize Kapitza-Dirac diffraction, and Bragg indicates curves that correspond to conditions for Bragg reflection. Adapted from Ref. [22].

守恒, 原子吸收(放出)一个光子时, 其动量改变量为 $\delta\mathbf{p} = -(+)\hbar\mathbf{k}$, 称之为光场的反冲动量。利用这样一束光去激发原子时, 就将原子的内态与其动量态相干耦合在一起, 实际上就实现了 (67) 式定义的过程。对于两个长寿命的原子内态来讲, 这样的激发过程就是一个双光子的拉曼过程。

3) 受激拉曼型的原子干涉仪。由于上述的双光子拉曼过程对原子平动动量有一个小的改动, 因此这个过程也被称为与速度依赖的拉曼转移过程。将这个过程用来对超冷原子进行相干分束、复合等操作, 就是目前原子重力干涉仪的工作原理 [44,126,130]。如图 11 所示, 简单地说, 利用第一束 $\pi/2$ 拉曼光, 将处于 $|1, \mathbf{p}\rangle$ 的初态原子平均分束为 $|1, \mathbf{p}\rangle$ 和 $|2, \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}\rangle$; 经过 T 时间的自由飞行, 再利用一个 π 脉冲将两个内态上的原子进行交换, 即 $|1, \mathbf{p}\rangle \rightleftharpoons |2, \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}\rangle$; 再经过相同的自由飞行时间 T , 两原子团将回到相同的地方, 再进行另一个 $\pi/2$ 拉曼光作用, 即完成了该原子干涉仪的基本过程。上述相同的自由飞行时间 T 可以在原子喷泉中得到保证。利用原子干涉仪还可以实现微观粒子弱等效原理检验 [131–138]。

3.3 多模式原子干涉仪

为了进一步提高原子干涉仪的测量精度, 除将量子初态制备为量子纠缠态之外, 还可以考虑一些其他的量子效应, 达到提高量子测量精度的目的。但是, 这种精度的增加, 仍然受到标准量子极限的限制, 而远未达到海森伯极限的量级。本小节将介绍利用 Kaptiza-Dirac(KD) 方法对原子进行相干分束操作, 同时介绍利用谐振子运动的特性而发展的一种新的多模式原子干涉仪 [140]。

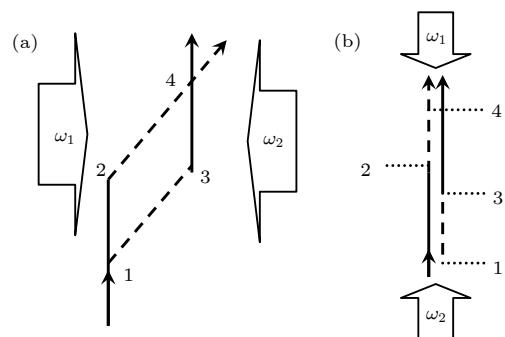


图 11 (a) 马赫-曾德原子干涉仪示意图; (b) 重力计原理示意图. 图取自文献 [139]

Fig. 11. (a) Schematic plot of Mach-Zehnder atom interferometry; (b) schematic plot of Gravimeter configuration. Adapted from Ref. [139].

1) 多模式干涉仪. 标准量子极限 (58) 式表明, 增加统计独立的测量次数 m 或者增加参与测量初态的粒子数 N 均可以有效地提高测量的精度. 在光学干涉仪中, 还可以通过提高入射激光的功率来提高测量精度 (已经在 LIGO 的引力波测量中被提及, 当然也特别采用了非经典光来提高测量精度), 因为激光功率增加相当于输入了更多的光子. 相较于提高光子数目, 在实验中增加原子初态的原子数目就没那么容易了. 有别于输入非经典态或量子纠缠态, 利用多模式或是多通道干涉仪的方法来提高测量精度也逐步引起人们的注意 [141,142]. 在光学干涉仪中, 通过多模式的分束器、或是多路的干涉光源, 已经发现类似 $1/M$ 的测量精度的提高, 其中 M 是模式或者光源的数目 [142]. 这样的测量精度的提高虽与突破散粒噪声极限无关, 但是由于比多原子量子纠缠态稳定、易操作, 还是受到人们的关注 [49]. 利用光格子囚禁的超冷原子气体, 也被建议用来实现 M 模式的原子干涉仪 [143], 此时 M 为囚禁冷原子的光格子的数目. 处在不同格点位置的原子, 自然成为探测不同点重力参数 g 的探针, 计算表明其测量的精度可以达到 $\Delta g \propto 1/(\sqrt{mN} \times (M - 1))$.

2) Kaptiza-Dirac 多模式原子干涉仪. 如前所述, KD 光脉冲提供了一种将超冷原子在不同动量态上进行重新相干分布的方法. 同时, 虽然光与原子的作用时间相对短, 但是 KD 效应已经在很多实验室被观察到, 如图 11 所示. 在原子喷泉实验 [144] 中, 要保证更多的原子处于完全相同的动量初态, 原则上也需要更低的实验温度. 相对较长的作用时间也在一定程度上增加了原子量子相干性保持的难度. 特别是原子的扩散过程, 会造成有效原子数目的减少. 综合考虑上述原因, 我们在 2014 年建议了一种新的多模式原子干涉仪的实验方案, 特别考虑了 KD 光与原子相互作用的特性以及在谐振势中粒子运动的特点. 如图 12 所示, 利用谐振势中粒子运动的周期性, 可以有效减少由于光脉冲相互作用导致的光子数损失.

2) 主要过程: I) 初态制备, 处于谐振势中的超冷原子气体 (无相互作用); II) KD 相互作用的原子分束器, 纯相位器件; III) 自由演化, 多路的相位累积过程, 相邻两路之间的相位差设为相同 (θ); IV) 在时刻 π/ω (ω 为谐振子势阱的囚禁频率), 加另一束 KD 光相干叠加不同路径的原子; V) 在 $3\pi/2\omega$ 测量, 处于不同动量态的原子数的测量. 由

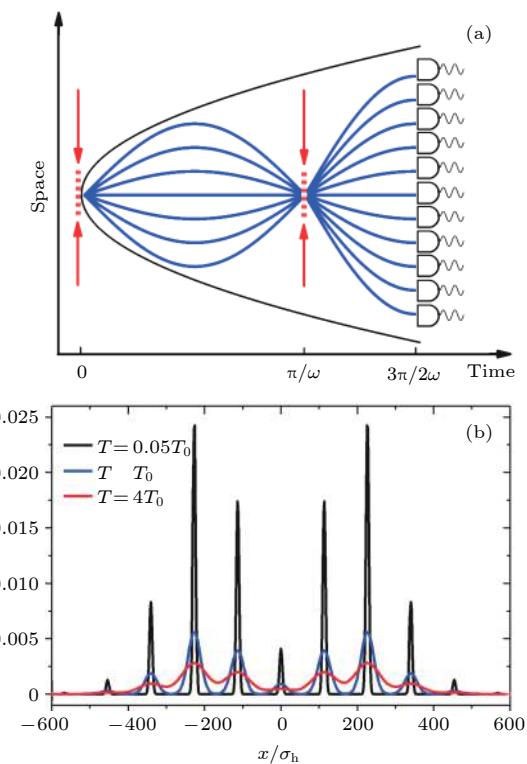


图 12 (a) 多模式 KD 干涉仪. $t = 0$ 时, 第一束 KD 脉冲将谐振势中原子复制多个原子波包. $t = \pi/\omega$ 时, 第二束 KD 脉冲对这些波包进行复合, 并在 $t = 3\pi/2\omega$ 时进行检测; (b) 测量时刻不同温度下原子的密度分布. 图取自文献 [140]

Fig. 12. (a) Multimodes Kapitza-Dirac interferometer. The first Kapitza-Dirac pulse at $t = 0$ creates several modes consisting of atomic wave packets evolving under the harmonic confinement and an external perturbing field. The second Kapitza-Dirac pulse at $t = \pi/\omega$ mixes the modes which are eventually detected in output at $t = 3\pi/2\omega$; (b) density profiles of the output wave function at temperatures below (dark line), equal (blue line), or above (red line) the crossover temperature T_0 . Adapted from Ref. [140].

于初始原子之间并无相互作用, 该动力学过程可以精确求解. 利用量子 Fisher 信息的计算, 可以得到对于相位 θ 的估计精度 [145] 为

$$\Delta\theta = \frac{1}{\sqrt{2V}} \frac{1}{|\sin(\theta/2)|} \frac{1}{\sqrt{mN}} \simeq \frac{\sqrt{2}}{|\sin(\theta/2)|} \frac{1}{M-1} \frac{1}{\sqrt{mN}}, \quad (79)$$

其中 V 是 KD 脉冲的强度, M 为 KD 脉冲下原子分布的有效模式数. 具体考虑将该干涉仪用于对重力参数的测量, 此时相邻路径上的相位差正比于重力参数, (79) 式可以写为

$$\frac{\Delta g}{g} \simeq \frac{\sqrt{2}}{8\pi} \frac{\omega^2 \lambda}{g} \frac{1}{M-1} \frac{1}{\sqrt{mN}}, \quad (80)$$

其中 λ 为 KD 脉冲光的波长.

3) 条件和可能达到的精度.“非重叠条件”要求 $\sigma_0/\lambda \gg 1$, 也即初始原子波包比光格子大很多. 这样, 原子被测量的时候波包是可以完全分开的, 同时, 也保证了足够大的空间对足够多的波包进行测量; 另一方面, 所能获得的测量精度原则上在较大范围内与温度无关. 如果原子初始波包比光格子的尺寸大, 即 $\lambda_{dB}/\lambda \gg 1$, 原则上给出一个有效的温度上限. 考虑当前的实验条件, $\omega = 2\pi \times 5\text{Hz}$, KD 光脉冲 $\lambda = 532 \times 10^{-9}\text{m}$, 反冲能量约为 5.33×10^{-30} 焦耳, KD 作用时间控制在 $2 \times 10^{-6}\text{s}$, 考虑 10^5 个 ^{88}Sr 原子, 对重力参数的测量可以达到约为 10^{-9} 的相对误差^[145]. 较利用 Bloch 振荡取得的实验结果 10^{-7} ^[146] 精度更高.

3.4 非局域相互作用的原子干涉仪

1) 非局域相互作用. 通常情况下原子干涉仪与待测物理量之间的耦合相互作用都是局域的, 或者与粒子数成正比, 是线性关系, 可用幺正变换(68)式来表示. 但在一些特定情况下, 粒子间的非线性或非局域相互作用也起重要的作用, 此时, 相位测量精度与探测态中粒子数 N 之间的关系, 与这些非线性相互作用的大小与形式均相关, 可以满足不同于 $1/N^\alpha$ 的关系, 其中 $\alpha = 1/2$ (SQL) 或是 1 (HL)^[147–153]. 需要指出的是, 尽管非线性或非局域相互作用可以导致测量精度与粒子之间新的幂次关系, 但仍然满足标准量子极限和海森伯极限(参见文献[5]及其参考文献)(本质上讲, 由于这些非线性或非局域相互作用也是产生纠缠或增加 Fisher 信息的主要原因, 因此, 我们认为在累积相位的过程中也增加了测量初态的量子 Fisher 信息或量子纠缠; 另外, 线性相互作用不会造成量子 Fisher 信息的增加或量子纠缠).

2) 一维光格子中的二能级原子. 考虑 N 个自旋 $1/2$ 的超冷原子组成的系统, 可用处于一维光晶格中的二能级原子来实现^[154]. 一般情况下, 系统的哈密顿量 \hat{H} 可以表示为

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{int}} = \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i}{2} \boldsymbol{\sigma}_m^{(i)} + \sum_{i,j=1}^N \frac{V_{ij}}{4} \boldsymbol{\sigma}_n^{(i)} \boldsymbol{\sigma}_n^{(j)}, \quad (81)$$

其中第一项 \hat{H}_0 是格点(或是局域)操作, $\boldsymbol{\sigma}_m^{(i)}$ 表示第 i 个原子的 Pauli 矩阵, \mathbf{m}, \mathbf{n} 为 Bloch 球上的单位方向矢量, α_i ($0 \leq \alpha_i \leq 1$, $i = 1, 2, 3, \dots, N$) 为同一晶格中原子的格点能. 第二项 \hat{H}_{int} 表示不同晶

格中原子之间的(非局域)相互作用, $V_{ij} = V_{ji}$ 为相互作用强度. 如果只考虑近邻相互作用, (81) 式就是通常的 Ising 模型; 如果考虑长程均匀相互作用, 则为更为一般的 Lipkin-Meshkov-Glick (LMG) 模型.

将线性幺正变换矩阵(68)式中的线性操作 \hat{H} 换为(81)式, 就得到了所谓非线性(非局域)原子干涉仪. 该干涉仪的相位测量精度, 可通过对(81)式的量子 Fisher 信息分析得到. 纯态情况下, 系统的量子 Fisher 信息为 $F_Q[\langle \psi_{\text{sep}} \rangle, \hat{H}] = 4\Delta\hat{H}^2$ ^[84], 即

$$F_Q[\langle \psi_{\text{sep}} \rangle, \hat{H}] = f_0^2 + f_1^2 + f_2^2, \quad (82)$$

其中, $f_{0,1}$ 分别为局域哈密顿 \hat{H}_0 和非局域哈密顿 \hat{H}_1 的量子 Fisher 信息,

$$f_0^2 = 4 \left(\Delta\hat{H}_0 \right)^2 = \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 (1 - \langle \boldsymbol{\sigma}_m^{(i)} \rangle^2), \quad (83)$$

$$f_1^2 = 4 \left(\Delta\hat{H}_1 \right)^2 = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{V_{ij}^2}{2} [1 - \langle \boldsymbol{\sigma}_n^{(i)} \rangle^2 \langle \boldsymbol{\sigma}_n^{(j)} \rangle^2] \\ + \sum_{\substack{i,j,l=1 \\ i \neq j \neq l}}^N V_{ij} V_{il} [1 - \langle \boldsymbol{\sigma}_n^{(i)} \rangle^2] \langle \boldsymbol{\sigma}_n^{(j)} \rangle \langle \boldsymbol{\sigma}_n^{(l)} \rangle, \quad (84)$$

而第三项 f_2 为它们的协同(convariant)量子 Fisher 信息(产生原因为两种不同的相互作用, 这里即 $\hat{H}_{0,1}$. 特别是由这两种相互作用之间的不对易导致. 类似的式子也在多变量估计等问题中出现)

$$f_2^2 = 4(\langle \{\hat{H}_0, \hat{H}_1\} \rangle - 2\langle \hat{H}_0 \rangle \langle \hat{H}_1 \rangle) \\ = 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N V_{ij} \alpha_i [\mathbf{n} \cdot \mathbf{m} - \langle \boldsymbol{\sigma}_n^{(i)} \rangle \langle \boldsymbol{\sigma}_m^{(i)} \rangle] \langle \boldsymbol{\sigma}_n^{(j)} \rangle. \quad (85)$$

为简单起见, 以均匀体系的两种非线性(非局域)相互作用说明这些相位计量精度与非线性相互作用强度的依赖关系. 因此, 选择 $\alpha_i = 1$, $\forall i$, 这种情况对应于线性原子干涉仪(68)式. 同时, 将格点相互作用强度并入到相位 θ 中, 此时非局域相互作用的贡献实际上由其与线性或是局域相互作用量的比值 γ 决定.

3) Ising 型的原子干涉仪. 考虑近邻相互作用且外场与格点自旋方向相同(顺场 Ising), 即 $V_{ij} = \gamma(\delta_{j,i+1} + \delta_{j,i-1})/2$ 和 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = 1$. 考虑量子 Fisher 信息的定义, 使(82)式取最大值的、可分的量子纯态可写成^[84]

$$|\psi_{\text{sep}}\rangle = \bigotimes_{i=1}^N \left(\sqrt{\frac{1+\langle\sigma_n^{(i)}\rangle}{2}} |\uparrow\rangle_i + e^{-i\varphi_i} \sqrt{\frac{1-\langle\sigma_n^{(i)}\rangle}{2}} |\downarrow\rangle_i \right), \quad (86)$$

这里 $|\uparrow, \downarrow\rangle$ 是格点自旋 σ_n 的本征矢; φ_i 是不同本征态的任意相对相位. 通过数值计算, 可以发现不同格点上自旋平均值 $\langle\sigma_n^{(i)}\rangle$ 随 γ 变化的关系, 如图13(a)所示. 不难看出: 当近邻相互作用强度 γ 小于某个临界参数 $\gamma_c = 0.7302$ 时, 不同格点自旋取相同的常数. 特别是当 $\gamma \ll 1$ 时, 如图13(b)所示, 量子 Fisher 信息 $F_Q[|\psi_{\text{sep}}\rangle, \hat{H}] \approx N(1 + \frac{5}{4}\gamma^2 + O(\gamma^4))$. 当 γ 大于临界值 $\gamma_c = 0.7302$ 时, 系统呈现反铁磁序, 不同格点的自旋平均值依次取 $1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$, 如图13(a)所示. 图13的计算中, 选取 $N = 20$. 当 $\gamma \gg \gamma_c$ 时, 其量子 Fisher 信息为 $F_Q[|\psi_{\text{sep}}\rangle, \hat{H}] = N(\frac{1}{2} + \gamma + \frac{1}{2}\gamma^2)$, 即图13(b)中右边的蓝线. 有意思的是, 如果分别对(83)式-(85)式进行最大化, 可以得到图13(b)中红色的虚线. 显然, 量子 Fisher 信息的上限为

$$F_Q[|\psi_{\text{sep}}\rangle, \hat{H}] \leq N + \gamma \frac{N}{2} + \gamma^2 \frac{N}{2}. \quad (87)$$

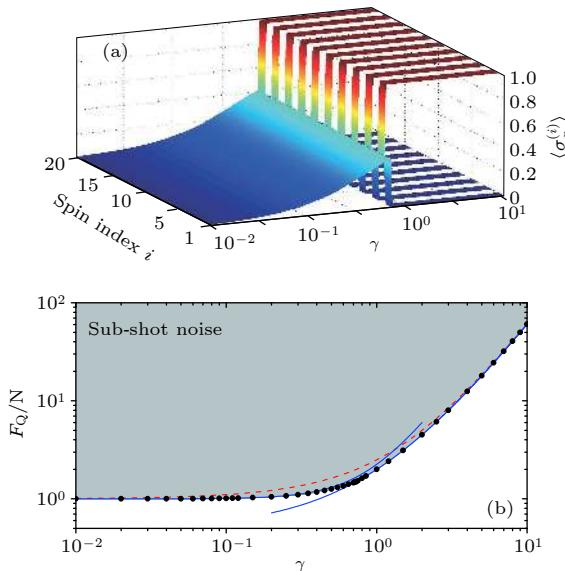


图 13 (a) 在 Ising 模型中, 平均自旋 $\langle\sigma_n^{(i)}\rangle$ 随 γ 的变化情况; (b) F_Q/N 随 γ 的变化情况, 以及标准量子极限和亚散粒噪声极限的边界, 同时其也是判定有用量子纠缠态的边界 [84]. 灰色区域为亚散粒噪声区域. 图取自文献 [84]

Fig. 13. we show the $\langle\sigma_n^{(i)}\rangle$ with respect to γ ; (b) F_Q/N with respect to the γ and give the boundary between standard quantum limit and sub-shot noise, which also witnesses the useful entanglement in Ref. [84]. The gray region denotes the sub-shot noise region. Adapted from Ref. [84].

图 13 及 (87) 式表明: 近邻相互作用下, 量子 Fisher 信息随相互作用强度的变化呈单调关系. 尽管在 $\gamma > \gamma_c$ 时呈现非线性关系, 但是, 仍可作为判断多粒子量子纠缠的判据, 详细可参见文献 [84]. 同时考虑 (87) 式以及 CRB(15) 式可以知道, 相位测量精度将依赖于非局域相互作用强度 γ , 即 $(\Delta\theta)^2_{\text{CR}} \approx 1/(\gamma^2 N)$.

4) LMG 型的原子干涉仪. 另一种极限情况为, (81) 式中的任意两个格点之间存在相等的非局域相互作用, 即 $V_{ij} = \gamma$, 同时 $n \cdot m = 1$. 该模型最早在核物理研究中提出 [155–157], 近些年在量子纠缠 [158–160]、自旋压缩 [113,161] 以及量子计量方面 [162] 都有较为广泛的应用. 与 Ising 情况不同, 对于任意给定的耦合强度 γ , 不同格点上的自旋平均值相等, 即 $\langle\sigma_n^{(i)}\rangle = a$ (图 14(a)), 使 (82) 式最大. 也就是说, 系统的量子 Fisher 信息 (82) 式可以写为 [84]

$$\frac{F_Q}{N} = (1 - a^2) + 2\tilde{\gamma}a(1 - a^2) + \tilde{\gamma}^2 \frac{1 + 2(N-2)a^2 - (2N-3)a^4}{2(N-1)}, \quad (88)$$

其中 $\tilde{\gamma} = \gamma(N-1)$. 这样, 系统的量子 Fisher 信息

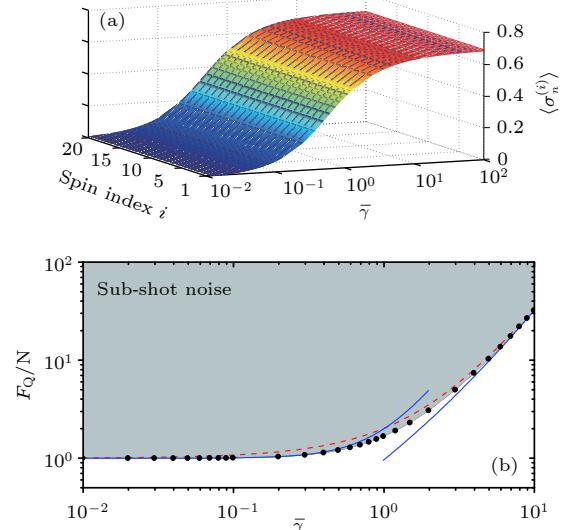


图 14 (a) 在 LMG 模型中, 平均自旋 $\langle\sigma_n^{(i)}\rangle$ 随 γ 的变化情况; (b) F_Q/N 随 γ 的变化情况, 以及标准量子极限和亚散粒噪声极限的边界, 同时其也是判定有用量子纠缠态的边界 [84]. 图取自文献 [84]

Fig. 14. (a) We show the $\langle\sigma_n^{(i)}\rangle$ with respect to γ in LMG model; (b) F_Q/N with respect to the γ and give the boundary between standard quantum limit and sub-shot noise, which also witnesses the useful entanglement in Ref. [84]. The gray region denotes the sub-shot noise region. Adapted from Ref. [84].

值可以通过对 a 的最优化得到。考虑非局域相互作用很小，即 $\tilde{\gamma} \ll 1$ 时，只保留一阶项，有 $a = \tilde{\gamma} + O(\tilde{\gamma}^2)$ 。此时，量子 Fisher 信息为

$$\frac{F_Q}{N} = 1 + \frac{2N-1}{2(N-1)}\tilde{\gamma}^2 + O(\tilde{\gamma}^4), \quad (89)$$

当非局域相互作用起主要作用时， $\tilde{\gamma} \gg 1$ ，忽略零阶项，有 $a = \sqrt{\frac{N-2}{2N-3}}$ 。此时，

$$\frac{F_Q}{N} = 2\tilde{\gamma}\frac{N-1}{2N-3}\sqrt{\frac{N-2}{2N-3}} + \tilde{\gamma}^2\frac{(N-1)}{2(2N-3)}. \quad (90)$$

图 14(b) 蓝色实线为 (89) 式和 (90) 式给出的量子 Fisher 信息与非局域相互强度 $\tilde{\gamma}$ 的关系。此时，系统的量子 Fisher 信息也存在上限

$$\frac{F_Q}{N} \leq 1 + \frac{4}{3\sqrt{3}}\tilde{\gamma} + \frac{(N-1)}{2(2N-3)}\tilde{\gamma}^2, \quad (91)$$

由对 Fisher 信息 (82) 式中各项分别最大化得到，如图 14(b) 中红色的虚线表示。显然，在给定非局域相互作用以及原子数的条件下，LMG 型原子干涉仪可以进一步提高相位测量的精度，因为 $F_Q \approx N\tilde{\gamma}^2$ 。利用这种量子 Fisher 信息与粒子数的单调关系可以区分不同多粒子量子纠缠态的纠缠特性 [84]。

4 量子计量中的统计方法

相位估计是量子计量，甚至是量子精密测量中的核心环节之一，也是经典统计推断 (statistical inference) 中的一个重要分支。如果待测参数在测量过程中不随时间变化，这类参数估计问题为静态参数估计问题 [163]，比如重力、引力常数等；当然还存在测量过程中变化的参数估计，此类问题不在本文讨论的范围（典型的问题应为时间频率标准中的估计，此类问题被称为 warm-function 估计）。对于第一类问题，即待测参数在测量过程中为常数，通常有两类不同的估计方法：一种称为贝叶斯 (Bayesian) 估计，另一类称为频率 (frequentist) 论估计或 Fisher 估计，也被称为非贝叶斯估计。由于两种估计方法处理数据的出发点完全不同，因此，不同的方法可能导致不同的结论甚至悖论式的结论。相位估计所处理的数据都具有随机数的特性，它的主要任务是要从这些具有随机特性的实验数据中，将所关心的待测物理量高精度地估计出来。一般将测量数据的随机性归结为噪声 (noise)。有

两类完全不同的噪声：一类为经典噪声；另一类为量子噪声。其中第一类噪声是固有的，由仪器或操作的不完善造成，是可以压缩到零的；而第二类噪声是本质的，由量子力学原理所决定，是不可克服的 [164]。

4.1 频率论估计

1) 频率论观点。频率论观点认为待估计参数 θ_0 本身是固定的未知参数 [163]。待测相位是通过对估计子 (estimator) $\theta_{\text{est}}(\mu)$ 的统计平均求得的。如果统计分布数据是通过最大似然估计的方法获得，则简单地选用该分布函数的极大值对应的参数值作为估计值，即 $\theta_{\text{est}}(\mu)$ 为使似然函数为极值的相位角 (如 (105) 式所示)。故而，该相位值本身也具有随机的性质。随着独立测量次数的增加，与待测相位对应的测量值出现的几率 (概率) 为最大，因此，相位平均值就会趋向于待测值 θ_0 。

测量数据 μ 的统计涨落反映了估计子的统计不确定程度，利用其与平均值 $\langle \theta_{\text{est}} \rangle_{\mu|\theta_0} = \sum_{\mu} \theta_{\text{est}}(\mu)P(\mu|\theta_0)$ 的方差

$$(\Delta^2 \theta_{\text{est}})_{\mu|\theta_0} = \sum_{\mu} (\theta_{\text{est}}(\mu) - \langle \theta_{\text{est}} \rangle_{\mu|\theta_0})^2 P(\mu|\theta_0), \quad (92)$$

来刻画这种不确定度，其中求和是对所有可能的测量结果 μ 进行的。 $P(\mu|\theta_0)$ 为给定待测参数时，进行 m 次独立测量所得到的条件分布函数。在最大似然条件下， $P(\mu|\theta_0) = \prod_i^m P(\mu_i|\theta_0)$ 。局域无偏差的估计子 [165] 是一类在给定待测物理量 θ_0 处满足无偏差估计条件的算子。此时，无偏差估计条件为 $\langle \theta_{\text{est}} \rangle_{\mu|\theta_0} = \theta_0$ 和 $\frac{d\langle \theta_{\text{est}} \rangle_{\mu|\theta_0}}{d\theta}|_{\theta=\theta_0} = 1$ 。当且仅当该算子在所有考虑的相位区间上都是局域无偏差估计时，我们说该估计为无偏差估计。

估计子的好坏可以通过其平均方差 (mean square error, MSE)

$$\text{MSE}(\theta_{\text{est}})_{\mu|\theta_0} = \sum_{\mu} (\theta_{\text{est}}(\mu) - \theta_0)^2 P(\mu|\theta_0), \quad (93)$$

来评估 [166]。注意 (93) 式中，待测量相位值 θ_0 并不事先可知，因此，与 (92) 式比较就有

$$\text{MSE}(\theta_{\text{est}})_{\mu|\theta_0} = (\Delta^2 \theta_{\text{est}})_{\mu|\theta_0} + (\langle \theta_{\text{est}} \rangle_{\mu|\theta_0} - \theta_0)^2. \quad (94)$$

从这个角度上讲，(92) 式更具有实验的可操作性。对于无偏差的估计子而言，(92) 式和 (94) 式是等价的。由于 (94) 式中 $(\langle \theta_{\text{est}} \rangle_{\mu|\theta_0} - \theta_0)^2 \geq 0$ ，所以

有 $\text{MSE}(\theta_{\text{est}})_{\mu|\theta_0} \geq (\Delta^2 \theta_{\text{est}})_{\mu|\theta_0}$. 也就是说, 任何小于方差 $(\Delta^2 \theta_{\text{est}})_{\mu|\theta_0}$ 的极值, 必然是均方差 $\text{MSE}(\theta_{\text{est}})_{\mu|\theta_0}$ 的极值. 反之, 不一定正确.

2) Barankin 极限. 经典统计理论给出 (92) 式的方差存在一个极限, 称为 Barankin 极限^[167,168]

$$\begin{aligned} (\Delta^2 \theta_{\text{est}})_{\mu|\theta_0} &\geq \Delta^2 \theta_{\text{BB}} \\ &\equiv \sup_{\theta_i, a_i, n} \frac{\left\{ \sum_{i=1}^n a_i [\langle \theta_{\text{est}} \rangle_{\mu|\theta_i} - \langle \theta_{\text{est}} \rangle_{\mu|\theta_0}] \right\}^2}{\sum_{\mu} \left[\sum_{i=1}^n a_i \mathcal{L}(\mu|\theta_i, \theta_0) \right]^2 P(\mu|\theta_0)}, \end{aligned} \quad (95)$$

其中 $\mathcal{L}(\mu|\theta_i, \theta) = P(\mu|\theta_i)/P(\mu|\theta)$ 称为似然比率. \sup 表示考虑所有 N 个任意实参数 $a_i \in \mathbb{R}$ 以及参数区间内的相位 θ_i 对 $(\Delta^2 \theta_{\text{est}})_{\mu|\theta_0}$ 取最大值. 不难证明, 无论对于多少次独立测量 m 该极限总是可以达到的 (这与 CRB 完全不同, CRB 需要无穷的测量次数, 是中心极限定理的结果). 由于 (95) 式中参数数目过多且与估计子相关, 因而实际意义不明显, 但具有非常重要的理论意义. 对于无偏差的估计, 即 $\langle \theta_{\text{est}} \rangle_{\mu|\theta_i} = \theta_i \quad (\forall i)$, 可把 Barankin Bound (BB)(95) 式重写为

$$\begin{aligned} (\Delta^2 \theta_{\text{est}})_{\mu|\theta_0} &\geq \Delta^2 \theta_{\text{BB}}^{\text{ub}} \\ &\equiv \sup_{\theta_i, a_i, n} \frac{\left\{ \sum_{i=1}^n a_i [\theta_i - \theta_0] \right\}^2}{\sum_{\mu} \left[\sum_{i=1}^n a_i \mathcal{L}(\mu|\theta_i, \theta_0) \right]^2 P(\mu|\theta_0)}. \end{aligned} \quad (96)$$

需要注意的是, (96) 式与估计子无关. 关于 (96) 式的具体推导在附录 A3 中可以找到.

有意思的是, 通过选择不同的参数的个数, 可以得到如下的连续不等式

$$\begin{aligned} (\Delta^2 \theta_{\text{est}})_{\mu|\theta_0} &\geq \Delta^2 \theta_{\text{BB}} \geq \Delta^2 \theta_{\text{EChRB}} \\ &\geq \Delta^2 \theta_{\text{ChRB}} \geq \Delta^2 \theta_{\text{CRB}}, \end{aligned} \quad (97)$$

这里 $\Delta^2 \theta_{\text{CRB}}$ 是 (9) 式的 CRB. 取两个参数 $n = 2$, $a_1 = 1, a_2 = -1$, $\theta_1 = \theta_0 + \lambda$, $\theta_2 = \theta_0$, (96) 式可以写为 Hammersley–Chapman–Robbins 极限 (ChRB) $\Delta^2 \theta_{\text{ChRB}}$ ^[169,170]. 可以严格证明, CRB 是该情况下取 $\lambda \rightarrow 0$ 的极值; 取三个参数 $n = 3$, $a_1 = 1, a_2 = A, a_3 = -1$, $\theta_1 = \theta_0 + \lambda_1, \theta_2 = \theta_0 + \lambda_2$, 和 $\theta_3 = \theta_0$, 得到 extended Hammersley–Chapman–Robbins 极限 ($\Delta^2 \theta_{\text{EChRB}}$)^[164]. 连续不等式 (97) 式表明, 随着参数数目的增加, 极限越严格或者越大. 因此, 原则上 Barankin 极限为频率分析中的最大极限.

4.2 贝叶斯估计

1) 贝叶斯观点. 贝叶斯观点认为待估计参数

θ_0 本身是随机且满足确定的统计分布的未知参数^[163]. 根据贝叶斯–拉普拉斯定理 (Bayes–Laplace theorem): 对于任意的随机数 μ 和 θ 满足的联合概率分布函数 $P(\mu, \theta)$, 总有 $P(\mu, \theta) = P(\mu|\theta)P(\theta) = P(\theta|\mu)p(\mu) = P(\theta, \mu)$, 其中 $P(\theta)$ 和 $P(\mu)$ 是边缘分布 (marginal distribution), $P(\mu|\theta)$ 和 $P(\theta|\mu)$ 是条件概率. 该定理表明: 两个随机变量 μ 和 θ 在联合概率中是对称的. 边缘分布可以通过联合概率 $P(\mu, \theta)$ 对 μ 或 θ 的积分得到.

由此可见, 似然函数 $P(\mu|\theta_0)$ 就是在给定待测物理量或估计相位 θ_0 下, 得到测量结果 μ 的条件概率分布函数. 由贝叶斯–拉普拉斯定理, 引入一个随机变量 θ , 得到后验概率 (posterior probability)

$$P_{\text{post}}(\theta|\mu) = \frac{P(\mu|\theta)P_{\text{pri}}(\theta)}{P_{\text{mar}}(\mu)}. \quad (98)$$

后验概率分布函数 $P_{\text{post}}(\theta|\mu)$ 是考虑了测量数据 μ 之后, 对 $\theta = \theta_0$ 的新条件分布函数. 相应地, (98) 式中的 $P_{\text{pri}}(\theta)$ 叫先验概率分布, 反映了测量之前对待估计相位 θ 已有分布信息的了解程度, $P(\mu|\theta)$ 就是实验测量数据所满足的似然函数 $P(\mu|\theta_0)$. 边缘分布通过对后验分布函数归一化得到, $P_{\text{mar}}(\mu) = \int_a^b d\theta P(\theta, \mu)$, 此处 a 和 b 定义了待测相位的分布区间.

需要指出的是, 后验分布函数对先验分布函数有非常强的依赖性. 如果对待估计参数 θ_0 一无所知, 那么选取一个合适的先验分布函数并不是一件容易的事情. 也就是说, 并非简单选择一个常数作为分布函数即可, 详细的讨论参见文献 [164]. 但是, 如果得到 (98) 式的后验分布函数, 可以利用找极值的方法得到估计的 θ_0 : $\theta_{\text{BL}}(\mu) = \arg \max_{\theta} P_{\text{post}}(\theta|\mu)$. 当先验分布为常数时, 此法与最大似然估计相同, 也可以通过对后验分布求平均值 $\theta_{\text{BL}}(\mu) = \int_a^b d\theta P_{\text{post}}(\theta|\mu)$ 来获得估计值.

与频率估计方法不同, 利用贝叶斯估计方法, 可以得到一个关于估计值的置信区间 (confidence interval) (在测量次数很大时, 它与涨落具有相似的含义)

$$(\Delta^2 \theta_{\text{BL}}(\mu))_{\theta|\mu} = \int_a^b d\theta P_{\text{post}}(\theta|\mu) (\theta - \theta_{\text{BL}}(\mu))^2. \quad (99)$$

(99) 式给出了在测量结果为 μ 时, 估计值 $\theta_{\text{BL}}(\mu) = \theta_0$ 在区间 $[a, b]$ 上的可信程度^[171]. 换句话说, $(\Delta^2 \theta_{\text{BL}}(\mu))_{\theta|\mu}$ 描述了估计值 $\theta_{\text{BL}}(\mu)$ 的统计

涨落.

2) Ghosh 极限. 1993 年, Ghosh^[172] 证明 (99) 式存在下限

$$\Delta^2\theta_{\text{GB}}(\mu) = \frac{(f(\mu, a, b) - 1)^2}{\int_a^b d\theta \frac{1}{P_{\text{post}}(\theta|\mu)} \left(\frac{dP_{\text{post}}(\theta|\mu)}{d\theta} \right)^2}, \quad (100)$$

其中 $f(\mu, a, b) = bP_{\text{post}}(b|\mu) - aP_{\text{post}}(a|\mu) - \theta_{\text{BL}}(\mu)(P_{\text{post}}(b|\mu) - P_{\text{post}}(a|\mu))$, 与后验概率在边界处的取值有关. (100) 式所示的极限与具体测量结果 μ 和后验概率 Fisher 信息 $\left(\int_a^b d\theta \frac{1}{P_{\text{post}}(\theta|\mu)} \left(\frac{dP_{\text{post}}(\theta|\mu)}{d\theta} \right)^2 \right)$ 相关. 等式 (100) 成立的充要条件为

$$\theta - \theta_{\text{BL}}(\mu) = \lambda_\mu \frac{d \log P(\theta|\mu)}{d\theta}, \quad (101)$$

其中 λ_μ 不依赖于相位 θ , 但可以与测量值 μ 相关.

3) 似然平均 (Likelihood-Averaged)Ghosh 极限. 由于 (100) 式所示的 Ghosh 极限与测量值 μ 有关, 自然地, 如果对 $(\Delta^2\theta_{\text{BL}}(\mu))_{\theta|\mu}$ 用似然分布函数 $p(\mu|\theta_0)$ 求平均, 就可以得到一个与测量值 μ 无关的极限, 这就是似然平均 Ghosh 极限

$$\begin{aligned} (\Delta^2\theta_{\text{BL}})_{\mu,\theta|\theta_0} &= \sum_\mu (\Delta^2\theta_{\text{BL}}(\mu))_{\theta|\mu} P(\mu|\theta_0) \\ &= \sum_\mu \int_a^b d\theta P(\theta, \mu|\theta_0) (\theta - \theta_{\text{BL}}(\mu))^2. \end{aligned} \quad (102)$$

因为 $P(\theta, \mu|\theta_0) = P_{\text{post}}(\theta|\mu)P(\mu|\theta_0)$, 所以, (99) 式也可认为是对贝叶斯方差的平均值. 类似地, 对 (100) 式用似然分布函数求平均, 就可以得到 (99) 式的极限^[4]

$$\Delta^2\theta_{\text{aGB}} = \sum_\mu \frac{(f(\mu, a, b) - 1)^2}{\int_a^b d\theta \frac{1}{P_{\text{post}}(\theta|\mu)} \left(\frac{\partial P_{\text{post}}(\theta|\mu)}{\partial\theta} \right)^2} P(\mu|\theta_0). \quad (103)$$

4.3 数值验证

1) 最大似然分布函数. 下面采用与离子实验^[92] 相关的宇称测量结果 (51) 说明前两节中提到的各种统计极限. 考虑 N 离子的 GHZ 纠缠态, $|GHZ\rangle = (|0\rangle^{\otimes N} + |1\rangle^{\otimes N})/\sqrt{2}$, 作为初态, 再对其进行 (68) 式描述的 θ 的转动操作. 对于转动相位 θ , 通过对宇称性 ($\mu = (-1)^{N_0}$, N_0 为在 $|0\rangle$ 上的粒子数) 的测量来估计. 测量值 $\mu = \pm 1$ 的条件概率函数由 (51) 式给出, 因此, 经过 m 次独立测量所得到的似然函

数为

$$\begin{aligned} P(\mu|\theta_0) &= \prod_{i=1}^m P(\mu_i|\theta_0) \\ &= \left(\frac{1 + \cos(N\theta_0)}{2} \right)^{m_+} \left(\frac{1 - \cos(N\theta_0)}{2} \right)^{m_-}, \end{aligned} \quad (104)$$

其中 m_\pm 为测量结果为 ± 1 的总数, 显然 $m = m_+ + m_-$. 在下面的数值模拟的计算中, 将着重讨论 $N = 2$, $\theta_0 = \pi/4$ 的情况.

2) 最大似然频率估计与无偏差估计. 在最大似然估计中, 相位估计值取使似然函数 (104) 式取极大值的值, 即

$$\theta_{\text{MLE}}(\mu) \equiv \arg \max_{\theta_0} \{P(\mu|\theta_0)\}. \quad (105)$$

中心极限定理^[4,166,173] 告诉我们, 随着独立测量样本数 m 的增加, 最大似然估计值渐进地满足如下高斯分布:

$$P(\theta_{\text{MLE}}|\theta_0) = \sqrt{\frac{mF(\theta_0)}{2\pi}} e^{-\frac{mF(\theta_0)}{2}(\theta_0 - \theta_{\text{MLE}})^2} \quad (m \gg 1). \quad (106)$$

(106) 式说明 $\theta_{\text{MLE}}(\mu)$ 的统计平均值为待测相位 θ_0 , 其方差由 Fisher 信息的倒数决定. 给定待测值 $\theta_0 = \pi/4$, 利用蒙特卡罗方法获得按 (104) 式所示的最大似然分布的测量值序列 μ_i . 最大似然估计值通过 $\theta_{\text{MLE}}(\mu) = \frac{1}{2} \arccos(\frac{m_+ - m_-}{m_+ + m_-})$ 获得. 注意该问题的 Fisher 信息为 $F(\theta_0) = N^2$, 与待测相位 θ_0 无关. 图 15(a) 给出了偏差 $(\langle \theta_{\text{MLE}} \rangle_{\mu|\theta_0} - \theta_0)$ (绿色圆点) 随独立测量次数 m 的变化关系, 其中误差 (红色曲线) 由 $\pm \Delta\theta_{\text{CRB}}$ 给出. 当 m 足够大时, (106) 式的确描述了最大似然估计值的行为. 同时图 15(b) 表明, 随着 m 的增加, 最大似然估计子, 逐渐趋于无偏差估计, 即 $d\langle \theta_{\text{est}} \rangle_{\mu|\theta_0}/d\theta|_{\theta=\theta_0} = 1$.

3) 贝叶斯极限与频率论极限. 在上述产生测量值的数值过程中, 考虑待测相位 θ_0 满足如下先验分布函数

$$P_{\text{pri}}(\theta) = \frac{2}{\pi} \frac{e^{\alpha \sin(2\theta)^2} - 1}{e^{\alpha/2} I_0(\alpha/2) - 1}, \quad (107)$$

其中 $I_0(\alpha)$ 是第一类修正的贝塞尔函数. 当 (107) 式取不同值时, 此先验函数可以表示对 θ_0 的不同了解程度: 从完全无知 ($\alpha = -100$) 到非常好地了解 ($\alpha = 10$), 见图 16 中的小插图. 对未知的 θ_0 的估计采用了 $\theta_{\text{BL}}(\mu) = \int_a^b d\theta \theta P_{\text{post}}(\theta|\mu)$. 图 16 中给出了

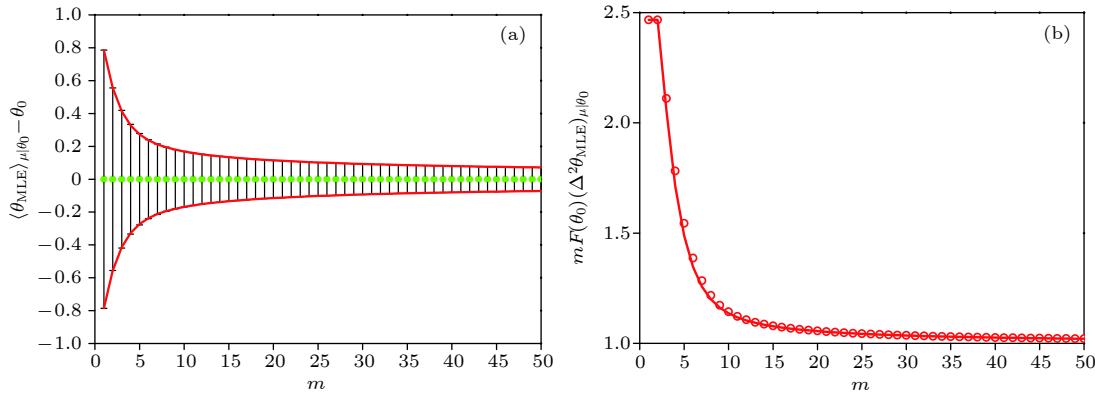


图 15 (a) 最大似然估计偏差 ($\langle \theta_{MLE} \rangle_{\mu|\theta_0} - \theta_0$) 随独立测量次数 m 的变化 , 误差为 $(\Delta\theta_{MLE})_{\mu|\theta_0}$; (b) $mF(\theta_0)(\Delta^2\theta_{MLE})_{\mu|\theta_0}$ (空心红圈) 随 m 的变化 . 红色实线为 $(d\langle \theta_{MLE} \rangle_{\mu|\theta_0}/d\theta_0)^2$. 图取自文献 [164]

Fig. 15. (a) Bias $\langle \theta_{MLE} \rangle_{\mu|\theta_0} - \theta_0$ (green dots) as function of m with error bars $(\Delta\theta_{MLE})_{\mu|\theta_0}$. The red lines are $\pm \Delta\theta_{CRB} = \pm |d\langle \theta_{MLE} \rangle_{\mu|\theta_0}/d\theta_0|/\sqrt{mF(\theta_0)}$; (b) variance of the maximum likelihood estimator multiplied by the Fisher information, $mF(\theta_0)(\Delta^2\theta_{MLE})_{\mu|\theta_0}$ (red circles), as a function of the sample size m . It is compared to the bias $(d\langle \theta_{MLE} \rangle_{\mu|\theta_0}/d\theta_0)^2$ (red line). We recall that $\theta_0 = \pi/4$ and $F(\theta_0) = 4$ here. Adapted from Ref. [164].

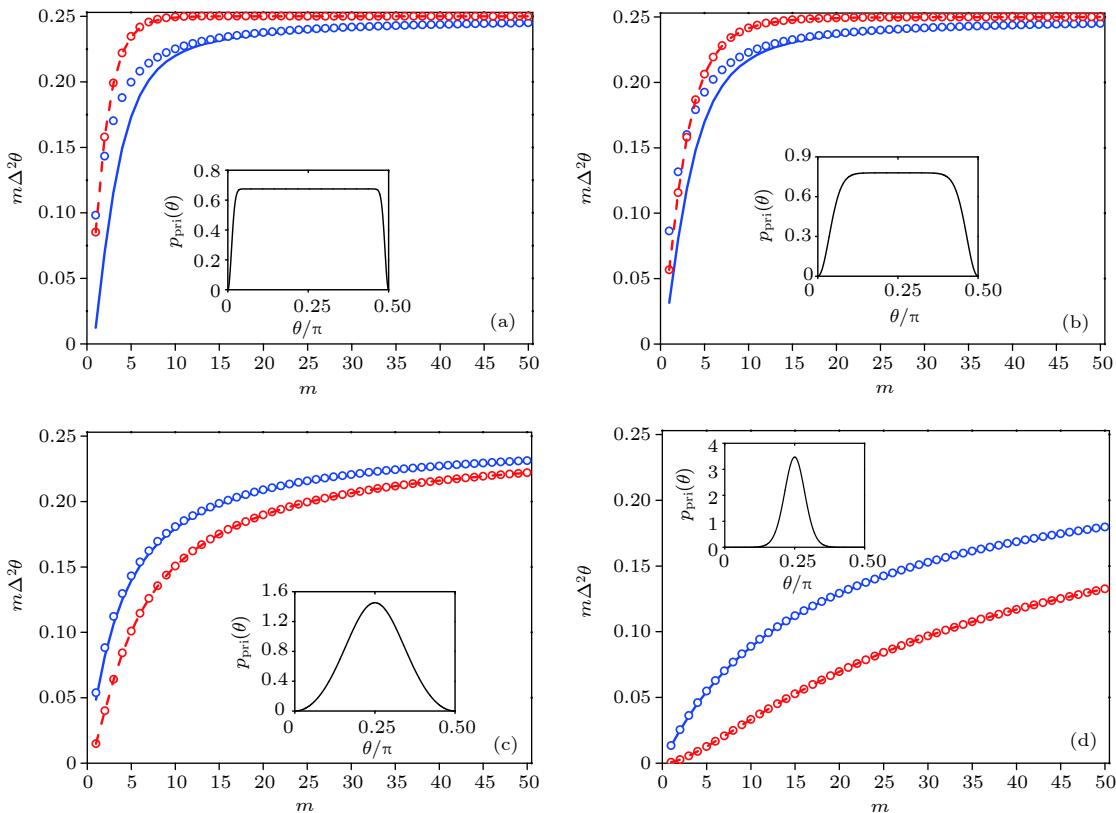


图 16 不同先验概率下, 频率论方法得到相位估计值的方差 ($m(\Delta^2\theta_{BL})_{\mu|\theta_0}$, 红色圆圈) 及其边界 CRB ($m\Delta^2\theta_{CRB}$, 红色虚线), 和贝叶斯相位估计的方差 ($m(\Delta^2\theta_{BL})_{\mu,\theta|\theta_0}$, 蓝色圆圈) 及其边界 ($m\Delta^2\theta_{aGB}$, 蓝色实线) 随样本 m 的变化 (a) $\alpha = -100$; (b) $\alpha = -10$; (c) $\alpha = 1$; (d) $\alpha = 10$. 每张图中内嵌的图是先验概率 $p_{pri}(\theta)$ 的分布图. 图取自文献 [164]

Fig. 16. Comparisons of phase estimation variance as a function of the sample size for Bayesian and frequentist data analysis under different prior distributions: (a) $\alpha = -100$; (b) $\alpha = -10$; (c) $\alpha = 1$; (d) $\alpha = 10$. In all figures, Red circles (frequentist) are $m(\Delta^2\theta_{BL})_{\mu|\theta_0}$, the red dashed line is the CRB. $m\Delta^2\theta_{CRB}$, Eq. (124). Blue circles (Bayesian) are $m(\Delta^2\theta_{BL})_{\mu,\theta|\theta_0}$, the blue solid line is the likelihood-averaged Ghosh bound $m\Delta^2\theta_{aGB}$, Eq. (103). The inset in each panel is $p_{pri}(\theta)$. Adapted from Ref. [164].

对不同先验概率分布条件下得到的数据进行贝叶斯与频率论分析的结果. 后验方差 $(\Delta^2 \theta_{BL})_{\mu, \theta| \theta_0}$ ((99) 式) 是蓝色的圆圈, 蓝色的实线是似然平均的 Ghosh 极限 ((103) 式). 采用频率方法得到的方差 $(\Delta^2 \theta_{BL})_{\mu| \theta_0} = \sum_{\mu} (\theta_{BL}(\mu) - \langle \theta_{BL} \rangle_{\mu| \theta_0})^2 p(\mu| \theta_0)$ 用红色的点标记, 与此对应的 CRB $\Delta^2 \theta_{CRB} = |d\langle \theta_{BL} \rangle_{\mu| \theta_0} / d\theta_0|^2 / (mF(\theta_0))$ 为红色实线. 此处需要注意的是当先验概率分布越窄时, $(\Delta^2 \theta_{BL})_{\mu| \theta_0}$ 值越小, 与此同时, 待估计值的偏差也变得更大, 即 $|d\langle \theta_{BL} \rangle_{\mu| \theta_0} / d\theta_0|^2$ 变得更小.

由图 16 不难看出, 当独立测量次数 m 趋于无穷时, 贝叶斯以及频率论的极限都将趋于 0.25(频率论下的 CRB). 但是, 当 m 较小时, 贝叶斯的后验方差和其边界 $(m(\Delta^2 \theta_{BL})_{\mu, \theta| \theta_0}$ 和 $m\Delta^2 \theta_{aGB}$) 会低于频率论的结果, 即图 16(a) 和图 16(b). m 越小, 这种偏差越大. 我们知道 CRB 是最小的统计极限, 因此, 这些结果显得有些奇怪. 唯一合理的解释是, CRB 作为最小的极限只有 m 很大时, 即中心极限定理成立的条件下, 才成立. 当 m 较小时, 两种不同的统计观点可能导致这种偏差. 这也表明, 两种情况下的统计极限没有可比性.

另一方面, 贝叶斯极限在 m 趋向无穷时的渐近行为, 是由 Laplace–Bernstein–von Mises 定理 [4,166] 保证的. 也就是说, 在 m 很大时, 后验分布函数将趋于如下的高斯分布函数:

$$P_{\text{post}}(\theta|\mu) = \sqrt{\frac{mF(\theta_0)}{2\pi}} e^{-\frac{mF(\theta_0)}{2}(\theta-\theta_0)^2} \quad (m \gg 1), \quad (108)$$

因而, 估计值的方差将为 Fisher 信息的倒数, 即 $1/(mF(\theta_0))$.

5 总结与展望

利用超冷原子系统突破标准量子极限是一个充满生机与挑战的多学科交叉研究领域. 在实验方面, 已经完成了若干利用多粒子纠缠态提高测量精度、趋近海森堡极限的验证性实验, 未来的研究可能集中到将其扩展到具体的物理参数测量的系统中. 理论方面, 基于量子 Fisher 信息的多粒子量子纠缠态判据以及相关的量子计量基本理论仍需进一步发展, 同时也需要关注相关的量子效应, 以提高物理量的测量精度. 由于该领域发展很快, 这里简单介绍一下最近在理论方面的几个进展.

1) 连续变量纠缠判据. 量子 Fisher 信息已成功地应用在分离变量的量子系统中的多粒子纠缠判据和量子参数估计中 [4,174]. 考虑到 Fisher 信息与测量物理量测量精度之间的关系 ((9) 式), Fisher 信息已经被推广到连续变量的纠缠判定 [82,175]. 考虑一个 N 模式的连续变量系统 $\hat{\rho}_{\Lambda} = \sum_{\gamma} p_{\gamma} \hat{\rho}_{\mathcal{A}_1}^{(\gamma)} \otimes \cdots \otimes \hat{\rho}_{\mathcal{A}_M}^{(\gamma)}$, 其中密度矩阵定义在相空间. 相应的算符矢量为 $\hat{r} = (\hat{r}_1, \dots, \hat{r}_{2N}) = (\hat{x}_1, \hat{p}_1, \dots, \hat{x}_N, \hat{p}_N)$. 对于高斯态, 其 Fisher 信息定义为

$$F_Q[\hat{\rho}, \hat{q}(\mathbf{g})] = \mathbf{g}^T \boldsymbol{\Omega}^T \boldsymbol{\Omega}_{\hat{\rho}}^{-1} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{g}, \quad (109)$$

其中 $\boldsymbol{\Omega} = \bigoplus_{i=1}^N \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; 协方差矩阵 $\boldsymbol{\Omega}_{\hat{\rho}}$ 的矩阵元为 $(\boldsymbol{\Omega}_{\hat{\rho}})_{ij} = \frac{1}{2} (\langle \hat{r}_i \hat{r}_j + \hat{r}_j \hat{r}_i \rangle_{\hat{\rho}} - \langle \hat{r}_i \rangle_{\hat{\rho}} \langle \hat{r}_j \rangle_{\hat{\rho}})$; $\boldsymbol{\Omega}_{\hat{\rho}}^{-1}$ 表示 $\boldsymbol{\Omega}_{\hat{\rho}}$ 的逆矩阵; 多模式的正交矢量 $\hat{q}(\mathbf{g}) = \mathbf{g} \cdot \hat{r}$, $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_{2N})$ 为任意的实向量. 研究表明, 任意 $\mathcal{A}_1 | \dots | \mathcal{A}_M$ 分离的量子态的 Fisher 信息满足

$$F_Q[\hat{\rho}_{\Lambda}, \hat{q}(\mathbf{g})] \leq 4 \mathbf{g}^T \boldsymbol{\Omega}_{\Pi_{\Lambda}(\hat{\rho}_{\Lambda})} \mathbf{g}, \quad (110)$$

其中 $\boldsymbol{\Pi}_{\Lambda}(\hat{\rho}_{\Lambda}) = \bigotimes_{l=1}^M \hat{\rho}_{\mathcal{A}_l}$, $\hat{\rho}_{\mathcal{A}_l}$ 是 $\hat{\rho}_{\Lambda}$ 关于 \mathcal{A}_l 的约化密度矩阵. 进而引入多模式的压缩系数 $\zeta_{\Lambda}^2(\hat{\rho})$

$$\zeta_{\Lambda}^2(\hat{\rho}) := \min_{\mathbf{g}} 4(\mathbf{g}^T \boldsymbol{\Omega}^T \boldsymbol{\Omega}_{\Pi_{\Lambda}(\hat{\rho})} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{g})(\mathbf{g}^T \boldsymbol{\Omega}_{\hat{\rho}} \mathbf{g}). \quad (111)$$

对于可分离量子态, 总是满足

$$\zeta_{\Lambda}^{-2}(\hat{\rho}_{\text{sep}}) \leq 1. \quad (112)$$

因此 (110) 式及 (112) 式就是连续变量条件下的多粒子纠缠判据. 该判据的有效性, 已经得到利用 2–4 不同组份压缩光实验结果的证实 [176].

2) 多变量参数估计. 前面关于标准量子极限、海森堡极限的进展是基于单参数的相位估计理论. 同时对多个参数估计的研究才刚刚开始, 由于其在量子成像和探测等方面有重要应用前景, 多变量的相位估计正在引起人们的关注 [177–180]. 在多变量的参数估计问题中, 要考虑对一个 d 维的矢量 $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d\}$ 进行估计. 此时要讨论的条件概率分布函数也是多变量的, $P(\mathbf{m}\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^m P(k_i|\boldsymbol{\theta})$, 即测量结果与待测矢量 $\boldsymbol{\theta}$ 相关. 此时无偏估计子满足 $\bar{\Theta}(\mathbf{m}\boldsymbol{\theta}) = \sum_{\mathbf{m}\boldsymbol{\theta}} P(\mathbf{m}\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\theta}$ 且 $d\bar{\Theta}(\mathbf{m}\boldsymbol{\theta})/d\theta_l = 1$, ($l = 1, 2, \dots, d$). 相应的 CRB 写为

$$\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}) \geq \frac{[\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta})]^{-1}}{m} \geq \frac{[\mathbf{F}_Q(\boldsymbol{\theta})]^{-1}}{m}, \quad (113)$$

其中, 多变量的方差由协方差矩阵 $[\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})]_{l,m} =$

$\sum_{\mu} P(\mathbf{m}\boldsymbol{\theta})[\Theta(\mathbf{m}\boldsymbol{\theta}) - \boldsymbol{\theta}]_l[\Theta(\mathbf{m}\boldsymbol{\theta}) - \boldsymbol{\theta}]_m$ 表示, 显然, 其对角元素为通常的单变量方差 $(\Delta\theta_l)^2$. 相应的 Fisher 信息亦为对称 Fisher 信息矩阵

$$[\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta})]_{l,m} = \sum_{\mu} \frac{\partial_l P(\mathbf{m}\boldsymbol{\theta}) \partial_m P(\mathbf{m}\boldsymbol{\theta})}{P(\mathbf{m}\boldsymbol{\theta})}, \quad (114)$$

其中 $\partial_l = \partial/\partial\theta_l$. 形式上讲, (113) 式给出了多变量估计时的极限, 其与测量的量子态、相位演化等都有关系. 但是, 寻找一种使 (113) 式中等号成立的量子测量是一个长期的问题, 文献 [178] 给出了这样的一个充要条件, 证明了存在一种投影测量使 (113) 式中等号成立. 进而, 他们进一步证明, 在多模式干涉仪中, 增加模式之间的量子纠缠有助于使多相位估计的精度达到多变量海森堡极限 [179].

3) 含时参数估计问题. 在测量时间内, 如果待测物理量是随时间变化的, 那么是否存在一个测量极限? 如果存在的话, 它是多少? 随时间变化的待估计相位在引力波测量、磁场力、光力系统等过程中都是常见的, 因此, 近几年引起了人们的关注(参见文献 [181], 及其参考文献). 随时间变化的相位也被称为波形 (waveform) 问题, 连续的测量才可能提取其随时间变化的信息. Tsang 等 [181] 2011 年将 Bayesian 分析方法引入到含时问题的估计中, 并给出一个量子 CRB. 需要指出的是, 对光频率钟的测量过程中也存在相应的问题. 由于钟激光不可避免地存在随时间的频率变化, 因此, 如何对其随时间的变化进行测量是对其实现稳定性控制的关键问题. 一般地, 含时待测物理参数更具有普遍性, 如何发展具有普适性的、严格的计量理论仍是一个开放的问题.

4) 关于统计方法. 由前面的讨论可以知道, 在有限次测量的条件下, 要达到统计允许的最佳测量精度是比较困难的, 或者说对测量数据的分析方法有较强的依赖性. 对实验测量数据的统计分析有很多种方法, 不同的统计方法可能导致不同的边界. 如何在统一的标准量子极限或海森堡极限下理解这些极限, 也是一个有挑战的研究课题. 如前所述, 若测量算符为有偏差测量时, 上述极限原则上不正确, 需要更一般的讨论 [182]. 近年来, 非高斯情况下的统计特性逐渐成为研究的热点, 与此相关的量子 Ziv-zakai 边界是其中的热点之一 [183]. 在考虑非渐近的体系时, 则需要考虑 Weiss-Weinstein 边界 [184].

简而言之, 超冷原子体系中的量子计量不只是

一个技术问题, 还与许多基本的量子效应、甚至量子理论的基本概念息息相关. 因此, 它是一个非常有活力的研究领域, 是下一代精密测量仪器产生的源泉.

感谢山西省百人计划专家、意大利科学院光学研究所 Smerzi 研究员, 山西省百人计划青年学者、意大利科学院光学研究所 Pezze 博士, 以及意大利科学院光学研究所 Gessner 博士的讨论与建议.

附录 A1

关于 CRB 的证明: 在给定未知相位 θ 的条件下, 对可观测量 ε 进行测量, 得到其概率分布函数为 $P(\varepsilon|\theta)$, 进而可以得到待估计值的平均值为 $\langle\Theta\rangle_{\theta} = \sum_{\varepsilon} P(\varepsilon|\theta)\Theta(\varepsilon)$, 对其求偏导, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial\langle\Theta\rangle}{\partial\theta} &= \frac{\partial}{\partial\theta} \sum_{\varepsilon} P(\varepsilon|\theta)\Theta(\varepsilon) = \sum_{\varepsilon} P(\varepsilon|\theta)\Theta(\varepsilon) \frac{\partial L(\varepsilon|\theta)}{\partial\theta} \\ &\equiv \left\langle \Theta \frac{\partial L(\varepsilon|\theta)}{\partial\theta} \right\rangle. \end{aligned} \quad (A1)$$

根据概率的归一性, 即 $\sum_{\varepsilon} P(\varepsilon|\theta_0) = 1$, 有

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \sum_{\varepsilon} P(\varepsilon|\theta) = \sum_{\varepsilon} P(\varepsilon|\theta) \frac{\partial L(\varepsilon|\theta)}{\partial\theta} = \left\langle \frac{\partial L(\varepsilon|\theta)}{\partial\theta} \right\rangle = 0. \quad (A2)$$

在推导 (A1) 式和式 (A2) 时, 假定对 ε 的求和独立于相位 θ , 所以在求偏导时, 将微分移到求和里面. 考虑 (A1) 和式 (A2) 式, 可以得到

$$\left(\frac{\partial\langle\Theta\rangle}{\partial\theta} \right)^2 = \left\langle (\Theta(\varepsilon) - \langle\Theta\rangle) \frac{\partial L(\varepsilon|\theta)}{\partial\theta} \right\rangle^2. \quad (A3)$$

利用柯西-施瓦茨不等式, $\langle A \rangle^2 \langle B \rangle^2 \geq \langle AB \rangle^2$, $A = \Theta - \langle\Theta\rangle$, $B = \partial L(\varepsilon|\theta)/\partial\theta$, 得到

$$\langle (\Theta - \langle\Theta\rangle)^2 \rangle \left\langle \left(\frac{\partial L(\varepsilon|\theta)}{\partial\theta} \right)^2 \right\rangle \geq \left(\frac{\partial\langle\Theta\rangle}{\partial\theta} \right)^2, \quad (A4)$$

式中等号成立的条件是 $B = \lambda A$, λ 独立于测量值 ε . 结合 $(\Delta\Theta)^2 = \langle (\Theta - \langle\Theta\rangle)^2 \rangle$ 就证明了 CRB, 即 (9) 式.

附录 A2

关于量子 CRB 的证明: 对条件概率 $P(\varepsilon|\theta)$ 求偏导, 得到 $\partial_{\theta} P(\varepsilon|\theta) = \text{Tr} [\hat{E}(\varepsilon) \partial_{\theta} \hat{\rho}(\theta)]$, 代入 Fisher

信息的定义式 (10) 式有

$$F[\hat{\rho}(\theta), \hat{E}(\epsilon)] = \sum_{\epsilon} \frac{\text{Tr}[\hat{E}(\epsilon)\partial_{\theta}\hat{\rho}(\theta)]^2}{\text{Tr}[\hat{E}(\epsilon)\hat{\rho}(\theta)]}, \quad (\text{A5})$$

利用对称对数导数的关系式 (14) 式, 得到

$$\text{Tr}[\hat{E}(\epsilon)\partial_{\theta}\hat{\rho}(\theta)] = \Re(\text{Tr}[\hat{\rho}(\theta)\hat{L}_{\theta}\hat{E}(\epsilon)]), \quad (\text{A6})$$

式中利用了迹的循环性质, 以及算符 \hat{L}_{θ} , $\hat{E}(\epsilon)$, $\hat{\rho}(\theta)$ 的厄米性质. 即 $\text{Tr}[\hat{\rho}(\theta)\hat{L}_{\theta}\hat{E}(\epsilon)]^* = \text{Tr}[\hat{L}_{\theta}\hat{\rho}(\theta)\hat{E}(\epsilon)]$, 这样有下列不等式关系:

$$\begin{aligned} \Re(\text{Tr}[\hat{\rho}(\theta)\hat{L}_{\theta}\hat{E}(\epsilon)]) &\leq |\text{Tr}[\hat{\rho}(\theta)\hat{L}_{\theta}\hat{E}(\epsilon)]|^2 \\ &\leq \text{Tr}[\hat{\rho}(\theta)\hat{E}(\epsilon)]\text{Tr}[\hat{E}(\epsilon)\hat{L}_{\theta}\hat{\rho}(\theta)\hat{L}_{\theta}], \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

其中第一个不等式利用了 $\Re(x)^2 = |x|^2 - \Im(x)^2 \leq |x|^2$, 等号当且仅当满足文中 (16) 式和 (17) 式时成立. 结合 (A6) 式和 (A7) 式得到

$$\frac{(\text{Tr}[\hat{E}(\epsilon)\partial_{\theta}\hat{\rho}(\theta)])^2}{\text{Tr}[\hat{\rho}(\theta)\hat{E}(\epsilon)]} \leq \text{Tr}[\hat{E}(\epsilon)\hat{L}_{\theta}\hat{\rho}(\theta)\hat{L}_{\theta}], \quad (\text{A8})$$

利用 POVM 的归一化性质 $\sum_{\epsilon} \hat{E}(\epsilon) = \mathbb{I}$, 得到

$$\begin{aligned} F[\hat{\rho}(\theta), \hat{E}(\epsilon)] &\leq \sum_{\epsilon} \text{Tr}[\hat{E}(\epsilon)\hat{L}_{\theta}\hat{\rho}(\theta)\hat{L}_{\theta}] \\ &= \text{Tr}[\hat{\rho}(\theta)\hat{L}_{\theta}^2] = F_Q[\hat{\rho}(\theta)], \end{aligned} \quad (\text{A9})$$

这样

$$(\Delta\Theta_{\text{QCR}})^2 = \frac{\left(\frac{\partial \langle \Theta \rangle}{\partial \theta}\right)^2}{F_Q[\hat{\rho}(\theta)]}, \quad (\text{A10})$$

得证.

附录 A3

Barankin 极限推导, 假定 θ_{est} 是关于相位 θ 的任意估计值, 其平均值为

$$\langle \theta_{\text{est}} \rangle_{\mu|\theta} = \sum_{\mu} \theta_{\text{est}}(\mu) P(\mu|\theta). \quad (\text{A11})$$

当且仅当其为无偏差估计时, 平均值 $\langle \theta_{\text{est}} \rangle_{\mu|\theta} = \theta$. 引入似然比率

$$\mathcal{L}(\mu|\theta_i, \theta_0) = \frac{P(\mu|\theta_i)}{P(\mu|\theta_0)}, \quad (\text{A12})$$

可以得到

$$\sum_{\mu} \theta_{\text{est}}(\mu) L(\mu|\theta_i, \theta_0) P(\mu|\theta_0) = \langle \theta_{\text{est}} \rangle_{\mu|\theta_i}, \quad (\text{A13})$$

对于系列的相位值, $\theta_1, \dots, \theta_n$, 有

$$\sum_{\mu} \mathcal{L}(\mu|\theta_i, \theta_0) P(\mu|\theta_0) = \sum_{\mu} P(\mu|\theta_i) = 1, \quad (\text{A14})$$

(A14) 式的两边同时乘以 $\langle \theta_{\text{est}} \rangle_{\mu|\theta_0}$ 并且减去 (A13) 式, 得到

$$\begin{aligned} &\sum_{\mu} (\theta_{\text{est}}(\mu) - \langle \theta_{\text{est}} \rangle_{\mu|\theta_0}) \mathcal{L}(\mu|\theta_i, \theta_0) P(\mu|\theta_0) \\ &= \langle \theta_{\text{est}} \rangle_{\mu|\theta_i} - \langle \theta_{\text{est}} \rangle_{\mu|\theta_0}, \end{aligned} \quad (\text{A15})$$

接下来选择 N 个系数 a_1, \dots, a_n , 由 (A15) 式得到

$$\begin{aligned} &\sum_{\mu} (\theta_{\text{est}}(\mu) - \langle \theta_{\text{est}} \rangle_{\mu|\theta_0}) \left(\sum_{i=1}^n a_i \mathcal{L}(\mu|\theta_i, \theta_0) \right) P(\mu|\theta_0) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i (\langle \theta_{\text{est}} \rangle_{\mu|\theta_i} - \langle \theta_{\text{est}} \rangle_{\mu|\theta_0}), \end{aligned} \quad (\text{A16})$$

利用柯西-施瓦茨不等式得到

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{i=1}^n a_i (\langle \theta_{\text{est}} \rangle_{\mu|\theta_i} - \langle \theta_{\text{est}} \rangle_{\mu|\theta_0}) \right)^2 \\ &\leq (\Delta^2 \theta_{\text{est}})_{\mu|\theta_0} \left(\sum_{\mu} \left(\sum_{i=1}^n a_i \mathcal{L}(\mu|\theta_i, \theta_0) \right)^2 P(\mu|\theta_0) \right), \end{aligned} \quad (\text{A17})$$

$$(\Delta^2 \theta_{\text{est}})_{\mu|\theta_0} = \sum_{\mu} (\theta_{\text{est}}(\mu) - \langle \theta_{\text{est}} \rangle_{\mu|\theta_0})^2 P(\mu|\theta_0), \quad (\text{A18})$$

这样 (95) 式得证.

参考文献

- [1] Braunstein S L, Caves C M 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 3439
- [2] Helstrom C W 1976 *Quantum Detection and Estimation Theory* (New York: Academic Press)
- [3] Giovannetti V S, Lloyd S, Maccone L 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 010401
- [4] Pezzè L, Smerzi A 2014 *Atom Interferometry, Proceedings of the International School of Physics, "Enrico Fermi" Course 188, Varenna*, p691
- [5] Pezzè L, Smerzi A, Oberthaler M K, Schmied R, Treutlein P 2018 *Rev. Mod. Phys.* **90** 035005
- [6] Caves C M 1981 *Phys. Rev. D* **23** 1693
- [7] Wineland D J, Bollinger J J, Itano W M, Heinzen D J 1994 *Phys. Rev. A* **50** 67
- [8] Yurke B, McCall S L, Klauder J R 1986 *Phys. Rev. A* **33** 4033
- [9] Zou Y Q, Wu L N, Liu Q, Luo X Y, Guo S F, Cao J H, Tey M K, You L 2018 *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **115** 6381

- [10] Kruse I, Lange K, Peise J, Lütke B, Pezzè L, Arlt J, Ertmer W, Lisdat C, Santos L, Smerzi A, Klempert C 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 143004
- [11] Muessel W, Strobel H, Linnemann D, Zibold T, Juliá-Díaz B, Oberthaler M K 2015 *Phys. Rev. A* **92** 023603
- [12] Muessel W, Strobel H, Linnemann D, Hume D B, Oberthaler M K 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 103004
- [13] Strobel H, Muessel W, Linnemann D, Zibold T, Hume D B, Pezze L, Smerzi A, Oberthaler M K 2014 *Science* **345** 424
- [14] Ockeloen C F, Schmied R, Riedel M F, Treutlein P 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 143001
- [15] Berrada T, Van Frank S, Bücker R, Schumm T, Schaff J F, Schmiedmayer J 2013 *Nat. Commun.* **4** 2077
- [16] Hamley C D, Gerving C S, Hoang T M, Bookjans E M, Chapman M S 2012 *Nat. Phys.* **8** 305
- [17] Lütke B, Scherer M, Kruse J, Pezzè L, Deuretzbacher F, Hyllus P, Topic O, Peise J, Ertmer W, Arlt J, Santos L, Smerzi A, Klempert C 2011 *Science* **334** 773
- [18] Riedel M F, Böhi P, Li Y, Hänsch T W, Sinatra A, Treutlein P 2010 *Nature* **464** 1170
- [19] Gross C, Zibold T, Nicklas E, Estève J, Oberthaler M K 2010 *Nature* **464** 1165
- [20] Estève J, Gross C, Weller A, Giovanazzi S, Oberthaler M K 2008 *Nature* **455** 1216
- [21] Giovannetti V, Lloyd S, Maccone L 2004 *Science* **306** 1330
- [22] Cronin A, Schmiedmayer J, Pritchard D E 2009 *Rev. Mod. Phys.* **81** 1051
- [23] Peters A, Chung K Y, Chu S 1999 *Nature* **400** 849
- [24] Peters A, Chung K Y, Chu S 2001 *Metrologia* **38** 25
- [25] Zhou L, Xiong Z Y, Yang W, Tang B A, Peng W C, Wang Y B, Xu P, Wang J, Zhan M S 2011 *Chin. Phys. Lett.* **28** 013701
- [26] Hu Z K, Sun B L, Duan X C, Zhou M K, Chen L L, Zhan S, Zhang Q Z, Luo J 2013 *Phys. Rev. A* **88** 043610
- [27] Gustavson T L, Bouyer P, Kasevich M A 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 2046
- [28] Geiger R, Menort V, Stern G, Zahzam N, Cheinet P, Batelier B, Villing A, Moron F, Lours M, Bidel Y, Bresson A, Landragin A, Bouyer P 2011 *Nat. Commun.* **2** 474
- [29] Ekstrom C R, Schmiedmayer J, Chapman M S, Hammond T D, Pritchard D E 1995 *Phys. Rev. A* **51** 3883
- [30] Fixler J, Foster G, McGuirk J, Kasevich M A 2007 *Science* **315** 74
- [31] Lamporesi G, Bertoldi A, Cacciapuoti L, Prevedelli M, Tino G M 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 050801
- [32] Bouchendira R, Clade P, Guellati-Khelifa S, Nez F, Biraben F 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 080801
- [33] Rosi G, Sorrentino F, Cacciapuoti L, Prevedelli M, Tino G M 2014 *Nature* **510** 518
- [34] Parker R H, Yu C H, Zhong W C, Estey B, Müller H 2018 *Science* **360** 191
- [35] Ye Z H 2018 *Acta Phys. Sin.* **67** 16 (in Chinese) [叶朝辉 2018 物理学报 **67** 16]
- [36] Ramesy N F 1949 *Phys. Rev.* **76** 996
- [37] Ramesy N F 2005 *Metrologia* **42** S01
- [38] Lin Y G, Fang Z J 2018 *Acta Phys. Sin.* **67** 160604 (in Chinese) [林弋戈, 方占军 2018 物理学报 **67** 160604]
- [39] Sun C P 2017 *Physics* **46** 481 (in Chinese) [孙昌璞 2017 物理 **46** 481]
- [40] Maxwell J C 1873 *Treatise on Electricity and Magnetism* (Oxford: Clarendon)
- [41] Ramesy N F 1956 *Molecular Beams* (Oxford: Oxford University Press)
- [42] Rabi I I 1937 *Phys. Rev.* **51** 652
- [43] Riehle F 2004 *Frequency Standards: Basics and Applications* (Wiley-VCH Verlag GmbH Co. KGaA)
- [44] Guan H, Huang Y, Li C B, Gao K L 2018 *Acta Phys. Sin.* **67** 164202 (in Chinese) [管桦, 黄垚, 李承斌, 高克林 2018 物理学报 **67** 164202]
- [45] Caves C M 1981 *Phys. Rev. D* **23** 1693
- [46] Wineland D J, Bollinger J J, Itano W M, Morel F L, Heinzen D J 1992 *Phys. Rev. A* **46** R6797
- [47] Pezzè L, Smerzi A 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 100401
- [48] Toth G 2012 *Phys. Rev. A* **85** 022322
- [49] Braun D, Adesso G, Benatti F, Floreanini R, Marzolino U, Mitchell M W, Pirandola S 2018 *Rev. Mod. Phys.* **90** 035006
- [50] Zanardi P, Paris M G A, Venuti L C 2008 *Phys. Rev. A* **78** 042105
- [51] Invernizzi C, Korbman M, Venuti L C, Paris M G A 2008 *Phys. Rev. A* **78** 042106
- [52] Ma J, Wang X G 2009 *Phys. Rev. A* **80** 012318
- [53] Wang T L, Wu L N, Yang W, Jin G R, Lambert N, Nori F 2014 *New J. Phys.* **16** 063039
- [54] Gabbrielli M, Smerzi A, Pezzè L 2018 *Sci. Rep.* **8** 15663
- [55] Hauke P, Heyl M, Tagliacozzo L, Zoller P 2016 *Nat. Phys.* **12** 778
- [56] Pezzè L, Gabbrielli M, Lepori L, Smerzi A 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 250401
- [57] Sun Z, Ma J, Lu X M, Wang X G 2010 *Phys. Rev. A* **82** 022306
- [58] Liu W F, Ma J, Wang X G 2013 *J. Phys. A: Math. Theor.* **46** 045302
- [59] Huang Y X, Zhong W, Sun Z, Wang X G 2012 *Phys. Rev. A* **86** 012320
- [60] Rao C R 1945 *Bull. Calcutta Math. Soc.* **37** 81
- [61] Camer H 1946 *Mathematical Methods of Statistics* (Princeton: Princeton University Press)
- [62] Frechet M 1943 *Rev. Internat. Stat. Inst.* **11** 182
- [63] Darmois G 1945 *Rev. Internat. Stat. Inst.* **13** 9
- [64] Fisher R A 1922 *Proc. R. Soc. Edinburgh* **42** 321
- [65] Braunstein S L Caves C M, Milburn G J 1996 *Ann. Phys. (N. Y.)* **247** 135
- [66] Helstrom C W 1967 *Phys. Lett. A* **25** 101
- [67] Holevo A S 1982 *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory* (Amsterdam: North-Holland)
- [68] Paris M G A 2009 *Int. J. Quantum Inf.* **7** 125
- [69] Wiseman H M, Milburn G J 2010 *Quantum Measurement and Control* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [70] Barndorff-Nielsen O E, Gill R D 2000 *J. Phys. A* **33** 4481
- [71] Zhong W, Huang Y X, Wang X G, Zhu S L 2017 *Phys. Rev. A* **95** 052304
- [72] Cohen M L 1968 *IEEE Trans. Inf. Theory* **14** 591
- [73] Liu J, Jing X X, Wang X G 2013 *Phys. Rev. A* **88** 042316
- [74] Zhang Y M, Li X W, Yang W, Jin G R 2013 *Phys. Rev. A* **88** 043832
- [75] Liu J, Jing X X, Zhong W, Wang X G 2014 *Commun. Theor. Phys.* **61** 45
- [76] Liu J, Chen j, Jing X X, Wang X G 2016 *J. Phys. A* **49** 275302
- [77] Pang S S, Brun T A 2014 *Phys. Rev. A* **90** 022117
- [78] Liu J, Jing X X, Wang X G 2015 *Sci. Rep.* **5** 8565
- [79] Zhong W, Sun Z, Ma J, Wang X G, Nori F 2013 *Phys. Rev. A* **87** 022337
- [80] Uys H, Meystre P 2007 *Phys. Rev. A* **76** 013804
- [81] Zhong W, Lu X M, Jing X X, Wang X G 2014 *J. Phys. A: Math. Theor.* **47** 385304

- [82] Gessner M, Pezze L, Smerzi A 2016 *Phys. Rev. A* **94** 020101
[83] Wootters W K 1981 *Phys. Rev. D* **23** 357
[84] Pezzè L, Li Yan, Li Weidong, Smerzi A 2016 *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.* **113** 11459
[85] Braunstein S L, Lane A S, Caves C M 1992 *Phys. Rev. Lett.* **69** 2153
[86] Li Y, Li W D 2018 *Physica A* **514** 606
[87] Liu J, Xiong H N, Song F, Wang X G 2014 *Physica A* **410** 167
[88] Tommaso M, Augusto S, Luca P 2016 *Phys. Rev. A* **94** 010102(R)
[89] Wineland D J 2013 *Rev. Mod. Phys.* **85** 1103
[90] Leibfried D, Blatt R, Monroe, Wineland D J 2003 *Rev. Mod. Phys.* **75** 281
[91] Leibfried D, et. al. 2005 *Nature* **438** 639
[92] Monz T, Schindler P, Barreiro J T, Chwalla M, Nigg D, Coish W, Harlander M H W, Hennrich M, Blatt R 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 130506
[93] Bollinger J J, Wayne M Itano, Wineland D J, Heinzen D J 1996 *Phys. Rev. A* **54** R4649
[94] Gerry C C, Minim J 2010 *Contemp. Phys.* **51** 497
[95] Leibfried D, et. al. 2004 *Science* **304** 1476
[96] Walther P, et al. 2004 *Nature* **429** 158
[97] Gao W B, et al. 2010 *Nat. Phys.* **6** 331
[98] Wemer R F 1989 *Phys. Rev. A* **40** 4277
[99] Gühne O, Tóth G 2009 *Phys. Rep.* **474** 1
[100] Hyllus P, Laskowski W, Krischek R, Schwemmer C, Wieczorek W, Weinfurter H, Pezzè L, Smerzi A 2012 *Phys. Rev. A* **85** 022321
[101] Horodecki R, Horodecki P, Horodecki M, Horodecki K 2009 *Rev. Mod. Phys.* **81** 865
[102] Dur W, Vidal G, Cirac J I 2000 *Phys. Rev. A* **62** 062314
[103] Gühne O, Tóth G, Briegel H J 2005 *New. J. Phys.* **7** 229
[104] Sørensen A S, Kolmer K 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 4431
[105] Holland M J, Burnett 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 1355
[106] Lane A S, Braunstein S L, Caves C M 1993 *Phys. Rev. A* **47** 1667
[107] Pezzè L, Smerzi A 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 163604
[108] Barreiro J T, et al. 2013 *Nat. Phys.* **9** 559
[109] Luo X Y, Zou Y Q, Wu L N, Liu Q, Fan M F, Tey M K, You L 2017 *Science* **355** 620
[110] Zeng Y, Xu P, He X, Liu Y Y, Liu M, Wang J, Papoular D J, Shlyapnikov G V, Zhan M S 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 160502
[111] Horodecki R, Horodecki P, Horodecki M, Horodecki K 2009 *Rev. Mod. Phys.* **81** 865
[112] Amico L, Fazio R, Osterloh A, Vedral V 2008 *Rev. Mod. Phys.* **80** 517
[113] Ma J, Wang X, Sun C P, Nori F 2011 *Phys. Rep.* **509** 89
[114] Pan J W, Chen Z B, Lu C Y, Weinfurter H, Zeilinger A, Żukowski M 2012 *Rev. Mod. Phys.* **84** 777
[115] Gühne O, Tóth G 2009 *Phys. Rep.* **474** 1
[116] Zhang Z, Duan L M 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 180401
[117] Zhang W, Zhou D L, Chang M S, Chapman M S, You L 2005 *Phys. Rev. A* **72** 013602
[118] Tey M K, You L 2018 *Acta Phys. Sin.* **67** 160303 (in Chinese) [郑盟锟, 尤力 2018 物理学报 **67** 160303]
[119] Feldmann P, Gessner M, Gabbielli M, Klemp C, Santos L, Pezze L, Smerzi A 2018 *Phys. Rev. A* **97** 032339
[120] Pezze L, Gessner M, Feldmann P, Klemp C, Santos L, Smerzi A 2017 *arXiv: quant-ph/1712.03864v1*
[121] Brunner N, Cavalcanti D ironio S, Scarani V, Wehner S 2014 *Rev. Mod. Phys.* **86** 419
[122] Li Y, Gessner M, Li Weidong, Smerzi A 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 050404
[123] Galitski V, Spielman I B 2013 *Nature* **494** 49
[124] Zhai H 2015 *Rep. Prog. Phys.* **78** 026001
[125] Yurke B 1986 *Phys. Rev. Lett.* **56** 1515
[126] Zhou M, Duan X, Chen L, Luo Q, Xu Y, Hu Z 2015 *Chin. Phys. B* **24** 050401
[127] Gabbielli M, Pezzè L, Smerzi A 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 163002
[128] Moskowitz P, Gould P, Altas S, Pritchard D 1983 *Phys. Rev. Lett.* **51** 370
[129] Ovchinikov Y B, Muller J H, Doery M R, Vredenbregt E J D, Helmerson K, Rolston S L, Phillips W D 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 284
[130] Feng X T, Yuan C H, Chen L Q, Chen J F, Zhang K Y, Zhang W P 2018 *Acta Phys. Sin.* **67** 164204 (in Chinese) [冯啸天, 袁春华, 陈丽清, 陈洁菲, 张可烨, 张卫平 2018 物理学报 **67** 164204]
[131] Fray S, Diez C A, Hansch T W, Weitz M 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 240404
[132] Schlippert D, Hartwig J, Albers H, Richardson L L, Schubert C, Roura A, Schleich W P, Ertmer W, Rasel E M 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 203002
[133] Tarallo M G, Mazzoni T, Poli N, Sutyrin D V, Zhang X, Tino G M 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 023005
[134] Zhou L, Long S T, Tang B, Chen X, Gao F, Peng W C, Duan W T, Zhong J Q, Xiong Z Y, Wang J, Zhang Y Z, Zhan M S 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 013004
[135] Barrett B, Antoni-Micollier L, Chichet L, Battelier B, Leveque T, Landragin A, Bouyer P 2016 *Nat. Commun.* **7** 13786
[136] Duan X C, Deng X B, Zhou M K, Zhang K, Xu W J, Xiong F, Xu Y Y, Shao C G, Luo J, Hu Z K 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 023001
[137] Rosi G, D'Amico G, Cacciapuoti L, Sorrentino F, Prevedelli M, Zych M, Brukner Č, Tino G M 2017 *Nat. Commun.* **8** 15529
[138] Wang J, Zhan M S 2018 *Acta Phys. Sin.* **67** 160402 (in Chinese) [王谨, 詹明生 2018 物理学报 **67** 160402]
[139] Kasevich M, Chu S 1992 *Appl. Phys. B* **54** 321
[140] Li W, He T, Smerzi A 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 023003
[141] Zernike F 1950 *J. Opt. Soc. Am.* **40** 326
[142] D'Ariano G M, Paris M G A 1997 *Phys. Rev. A* **55** 2267
[143] Chwedenczuk J, Piazza F, Smerzi A 2013 *Phys. Rev. A* **87** 033607
[144] Wang Q, Wei R, Wang Y Z 2018 *Acta Phys. Sin.* **67** 163202 (in Chinese) [王倩, 魏荣, 王育竹 2018 物理学报 **67** 163202]
[145] Cheng R, He T, Li W, Smerzi A 2016 *J. Mod. Phys.* **7** 2043
[146] Ferrari G, Poli N, Sorrentino F, Tino G M 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 060402
[147] Luis A 2004 *Phys. Lett. A* **329** 8
[148] Boixo S, Datta A, Flammia S T, Shaji A, Bagan E, Caves C M 2008 *Phys. Rev. A* **77** 012317
[149] Boixo S, Datta A, Davis M J, Flammia S T, Shaji A, Caves C M 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 040403
[150] Woolley M J, Milburn G J, Caves C M 2008 *New J. Phys.* **10** 125018
[151] Roy S M, Braunstein S L 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 220501
[152] Napolitano M, Mitchell M W 2010 *New J. Phys.* **12** 093016
[153] Napolitano M, Koschorreck M, Dubost B, Behbood N, Sewell R J, Mitchell M W 2011 *Nature* **471** 486
[154] Schaub P, et al. 2015 *Science* **347** 1455
[155] Lipkin H J, Meshkov N, Glick A J 1965 *Nucl. Phys.* **62** 188

- [156] Meshkov N, Glick A J, Lipkin H J 1965 *Nucl. Phys.* **62** 199
[157] Glick A J, Lipkin H J, Meshkov N 1965 *Nucl. Phys.* **62** 211
[158] Dusuel S, Vidal J 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 237204
[159] Dusuel S, Vidal J 2005 *Phys. Rev. B* **71** 224420
[160] Wichterich H, Vidal J, Bose S 2010 *Phys. Rev. A* **81** 032311
[161] Ma J, Wang X 2009 *Phys. Rev. A* **80** 012318
[162] Salvatori G, Mandarino A, Paris M G A 2014 *Phys. Rev. A* **90** 022111
[163] VanTrees H L, Bell K L, Tian Z 2013 *Detection, Estimation and modulation theory* (WILEYINTERSCIENCE A JOHN WILEY and SONS, INC., PUBLICATION)
[164] Li Y, Pezzè L, Gessner M, Ren Z H, Li W D, Smerzi A 2018 *Entropy* **20** 628
[165] Hayashi M 2005 *Asymptotic Theory of Quantum Statistical Inference, Selected Papers* (Singapore:World Scientific Publishing)
[166] Lehmann E L, Casella G 1998 *Theory of Point Estimation* (Berlin: Springer)
[167] Barankin E W 1949 *Ann. Math. Stat.* **20** 477
[168] Mcaulay R J, Hofstetter E M 1971 *IEEE Trans. Inf. Theory* **17** 669
[169] Hammersley J M 1950 *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B* **12** 192
[170] Chapman D G, Robbins H 1951 *Ann. Math. Statist.* **22** 581
[171] Sivia D S, Skilling J 2006 *Data Analysis: A Bayesian Tutorial* (London: Oxford University Press)
[172] Ghosh M 1993 *Stat. Prob. Lett.* **17** 173
[173] Kay S M 1993 *Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory*(Volume I) (New Jersey: Prentice Hall)
[174] Gessner M, Pezzè , Smerzi A 2016 *Phys. Rev. A* **94** 020101
[175] Gessner M, Pezze L, Smerzi A 2017 *Quantum* **1** 17
[176] Qin Z Z, Gessner M, Ren Z H, Deng X, Han D, Li W D, Su X L, Smerzi A, Peng K C 2019 *npj Quantum Inf.* **5** 3
[177] Suzuki J 2016 *J. Math. Phys.* **57** 042201
[178] Pezzè L, Ciampini M A, Spagnolo N, Humphreys P C, Datta A, Walmsley I A, Barbieri M, Sciarrino F, Smerzi A 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 130504
[179] Gessner M, Pezze L, Smerzi A 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 130503
[180] Zhuang M, Huang J, Lee C H 2018 *Phys. Rev. A* **98** 033603
[181] Tsang M, Wiseman H M, Caves C M 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 090401
[182] Liu J, Yuan H D 2016 *New J. Phys.* **18** 093009
[183] Tsang M 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 230401
[184] Lu X M, Tsang M 2016 *Quantum Sci. Technol.* **1** 015002

SPECIAL TOPIC—Cold atoms and molecules

Development on quantum metrology with quantum Fisher information*

Ren Zhi-Hong Li Yan Li Yan-Na Li Wei-Dong[†]

(Institute of Theoretical Physics, State Key Laboratory of Quantum Optics and Quantum Optics Devices, Collaborative Innovation

Center of Extreme Optics, Shanxi University, Taiyuan 030006, China)

(Received 6 November 2018; revised manuscript received 18 January 2019)

Abstract

Quantum metrology is one of the hot topics in ultra-cold atoms physics. It is now well established that with the help of entanglement, the measurement sensitivity can be greatly improved with respect to the current generation of interferometers that are using classical sources of particles. Recently, Quantum Fisher information plays an important role in this field. In this paper, a brief introduction on Quantum metrology is presented highlighting the role of the Quantum Fisher information. And then a brief review on the recent developments for i) criteria of multi-particle entanglement and its experimental generation; ii) linear and non-linear atomic interferometers; iii) the effective statistical methods for the analysis of the experimental data.

Keywords: quantum metrology, ultra-cold atoms, quantum Fisher information, quantum entanglement

PACS: 06.20.Dk, 03.75.Dg, 03.67.-a, 03.65.Ud

DOI: 10.7498/aps.68.20181965

* Project supported by the National Key R&D Program of China (Grant Nos. 2017YFA0304500, 2017YFA0304203), the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11874247), the 111 Plan of China (Grant No. D18001), the Hundred Talent Program of Shanxi Province, China (2018), and the Program of State Key Laboratory of Quantum Optics and Quantum Optics Devices, China (Grant No. KF201703).

† Corresponding author. E-mail: wdli@sxu.edu.cn

超冷极性分子

鹿博 王大军

Ultracold dipolar molecules

Lu Bo Wang Da-Jun

引用信息 Citation: [Acta Physica Sinica](#), 68, 043301 (2019) DOI: 10.7498/aps.68.20182274

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.68.20182274>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于方波脉冲外场的超冷原子-分子绝热转化

Adiabatic conversion of ultracold atoms into molecules via square-shaped pulse field

物理学报. 2018, 67(20): 203701 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180908>

超冷铯分子0u+(6P3/2)长程态的高灵敏光缔合光谱研究

High sensitive photoassociation spectroscopy investigation on 0u+ (6P3/2) long-range state of ultracold cesium molecules

物理学报. 2015, 64(15): 153303 <https://doi.org/10.7498/aps.64.153303>

超冷原子系综的非高斯纠缠态与精密测量

Non-Gaussian entangled states and quantum metrology with ultracold atomic ensemble

物理学报. 2019, 68(4): 040306 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190147>

超冷铯(6D5/2)2 Rydberg分子的双色光缔合光谱

Two-color photoassociation spectra of ultra-cold Cs (60D5/2)2 Rydberg molecule

物理学报. 2018, 67(23): 233201 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20181743>

超冷铯Rydberg原子的Autler-Townes分裂

Autler-Townes splitting of ultracold cesium Rydberg atoms

物理学报. 2017, 66(21): 213201 <https://doi.org/10.7498/aps.66.213201>

专题：冷原子-分子物理

超冷极性分子*

鹿博¹⁾ 王大军^{2)†}

1) (中山大学物理与天文学院, 量子工程与精密测量实验室, 珠海 519082)

2) (香港中文大学物理系, 香港)

(2018年12月26日收到; 2019年2月15日收到修改稿)

目前对超冷原子的研究已经从最初的原子分子物理扩展到了物理的很多分支。极性分子可以将电偶极相互作用引入到超冷体系，同时分子又与原子类似，可以灵活地被光和其他电磁场操控，因而很多理论工作者都预言了超冷极性分子在超冷化学、量子模拟和量子信息等领域会有重要的应用。但由于超冷基态分子的制备非常困难，如何把超冷物理从原子发展到分子还是一个方兴未艾的课题。过去的10年间，各种分子冷却技术都取得了很大突破，本文回顾了这些进展，并着重介绍了基于异核冷原子的磁缔合结合受激拉曼转移这一技术，该技术在制备高密度的基态碱金属超冷极性分子上取得了较大的成功。本文也总结了超冷极性碱金属分子基本碰撞特性研究的一些实验结果。

关键词：超冷极性分子, 电偶极相互作用, 超冷化学反应, 量子模拟

PACS：33.15.-e, 33.80.-b, 34.50.-s, 82.30.Cf

DOI: 10.7498/aps.68.20182274

1 引言

超冷(温度 $T < 1 \mu\text{K}$)稀薄原子气体中的玻色爱因斯坦凝聚体(Bose-Einstein Condensation, BEC)在1995年第一次实现之后不久，原子、分子和光物理领域的研究者们就认识到可以BEC为载体来构建与多体体系类似的哈密顿量，从而模拟和理解这些体系的物理内容^[1]。基于冷原子体系没有杂质和缺陷的特性及其非常灵活的调控能力，过去十几年，冷原子量子模拟、量子信息^[2]等方向已经取得了巨大的成功，特别是冷原子和光晶格的完美结合，开辟了利用原子分子体系研究凝聚态体系的道路，实现了不同物理分支之间的交叉和融合，大大地加深了我们对量子强相互作用体系的理解。

原子间的相互作用通常是很弱且短程的范德瓦耳斯作用，即使Feshbach共振技术可以对相互作用强度进行任意调控^[3]，也并不能改变这一特性。

原子间相互作用的这些特性带来了一些限制，很多凝聚态体系中非常重要的问题，目前在超冷原子体系中还很难实现。比如量子磁性问题，由于原子间相互作用强度太小，为了在光晶格中实现和观测磁性相变，需要远远低于现有超冷技术能达到的温度。目前，很多研究组还在持续探索在超冷原子中获得更低温度的方法。另一方面，如果可以找到一种更强的、长程的相互作用，也可以帮助解决这一问题。超冷极性分子间的电偶极相互作用就可以满足这样的要求^[4-11](一些特殊的镧系和过渡金属元素，包括铬^[12]、铒^[13]和镝^[14]，有很大的磁偶极矩，因而可以有磁偶极相互作用；磁性原子也是超冷物理研究的热点之一，但不在本文讨论范围之内)。

本文讨论的极性分子是指最简单的由两种不同原子结合形成的异核中性双原子分子，比如钠(²³Na)原子和铷(⁸⁷Rb)原子。由于两种原子对电子的亲和力不同，对整个分子而言，电荷的分布是不对称的，导致分子中的正负电荷中心不重合，因

* 国家重点基础研究发展计划(批准号: 2014CB921403)和香港研究资助局GRF(批准号: CUHK14301815)资助的课题。

† 通信作者。E-mail: djwang@cuhk.edu.hk

而产生了一个沿着分子轴向的永久电偶极矩。需要注意的是，由于电偶极算符是奇宇称的，在没有外加电场的情况下，极性分子在实验室坐标系中的电偶极矩的期望值为零，因而分子间电偶极相互作用平均值为零。外加电场可以将分子内部不同宇称的状态混合，或者说将分子极化，从而诱导出沿着电场方向的有效电偶极矩 μ ，使得分子间可以有电偶极相互作用。例如，钠铷($^{23}\text{Na}^{87}\text{Rb}$)分子的永久电偶极矩为3.2 Debye，图1所示为处于最低振动能级 $v=0$ 的几个转动能级上($J=0$ 和 $J=1$)的 $^{23}\text{Na}^{87}\text{Rb}$ 分子的有效电偶极矩随外加电场 E 的变化，这里 v 和 J 分别是分子的振动和转动量子数， M_J 为转动能级沿外电场方向的投影量子数。可见 μ 随着 E 的增强而增大，逐渐趋近于饱和值，也就是3.2 Debye。需要说明的是，图1所示的几条曲线，包含了转动能级 J 从0到10的贡献。由于电场可引起不同转动能级之间的耦合，严格来讲 J 在非零电场时不再是一个好量子数。

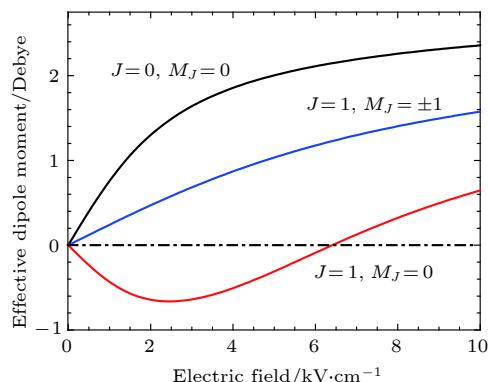


图1 电场诱导 $^{23}\text{Na}^{87}\text{Rb}$ 分子产生的有效电偶极矩

Fig. 1. The induced effective dipole moments of the first two rotational states versus the electric field ($^{23}\text{Na}^{87}\text{Rb}$).

如图2所示，两个在电场中被极化的极性分子间的相互作用可以表示为^[8]

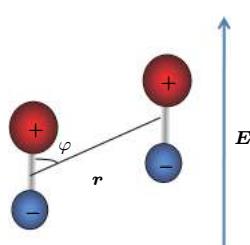


图2 极性分子在电场中可以产生电偶极相互作用

Fig. 2. Dipole-dipole interaction between polar molecules in an external electric field.

$$U_{dd}(r, \varphi) = \frac{\mu^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - 3\cos^2\varphi}{r^3}, \quad (1)$$

其中 μ 为有效电偶极矩， $r = |\vec{r}|$ 是两个电偶极矩间的距离， φ 为 \vec{r} 与电场 \vec{E} 之间的夹角。和正比于 $1/r^6$ 的范德瓦耳斯作用相比，正比于 $1/r^3$ 的电偶极相互作用随 r 的衰减更慢，因而是长程力，而且它是各向异性的，随 φ 的不同，电偶极相互作用可以是排斥势，也可以是吸引势，同时 U_{dd} 的强度也可以通过电场调节 μ 来进行操控^[15](图1)。

相比范德瓦耳斯作用， U_{dd} 的强度要大很多。例如，把 $\mu = 1$ Debye 的极性分子并排装载到晶格常数为532 nm 的光晶格中，处于相邻格点的分子间偶极排斥作用约为1 kHz，而次近邻格点间的相互作用还有350 Hz。因此，这是一个真正的多体系统，所有的格点间都有很强的关联。同时，和原子光晶格类似，超冷分子光晶格系统哈密顿量的所有参数，包括分子在格点间的隧穿能量和偶极相互作用的强度和方向也都是可操控的。理论工作已经提出，通过调节这些参数的相对关系，可以实现很多有趣的多体量子相，比如超固相^[16]。而利用分子的转动能级作为赝自旋，偶极相互作用也可以用来实现自旋交换，在同时有微波和直流电场的情况下，就可以实现XXZ自旋磁性模型^[17]。而且，由于这种自旋交换实际是通过角动量在格点间转移实现的，所以会自然地带来自旋和轨道自由度的耦合^[18]。最近，在类似的体系中，一些文献中也提出了利用多个微波操控来实现拓扑相的方法^[19]。

总之，对超冷极性分子体系的理论研究目前已经进行得非常深入，但实验研究却大大滞后。造成这种状况的原因主要有两个：1) 基态超冷极性分子非常难制备；2) 基态分子间的碰撞也比预期的复杂很多。下面几个部分，我们将围绕这两个问题，对过去10年间的一些进展进行总结。

需要指出的是，目前实验上已经有很多不同制备基态冷分子的方法。近年，分子的直接冷却，特别是对一些特殊的自由基分子的直接激光冷却，取得了长足的进步^[20–24]，但目前得到的分子样品温度还没有达到 μK 以下，因而这一方向研究的焦点是如何得到温度更低、密度更高的分子样品。而利用超冷原子的磁缔合技术^[3,25]，已经可以制备出量子简并的分子样品^[26]。虽然由此制备的分子种类仅局限于异核碱金属双原子分子，但目前已经可以用这些样品开展一些对超冷分子基本碰撞性质的

研究。结合作者的工作经验，本文重点介绍后一种方法，而对分子的直接冷却只做简单的归纳。

2 基态极性冷分子的制备

2.1 研究现状

目前实验中用到的超冷原子，都是首先通过激光冷却然后再进行蒸发冷却来获得的。由于原子的能级结构简单，比较容易找到接近闭合的两能级体系，在它们之间进行连续的光子散射，可以很快把原子从高温冷却到 mK 以下，然后装载到磁阱或光阱中进行蒸发冷却。由于磁阱和光阱的阱深都很浅，必须经过激光冷却之后原子才能被囚禁住。分子的情况就复杂得多，由于分子有很多振动和转动能级，一般来讲，不存在闭合的两能级体系，因此每一个基态分子吸收和散射几个光子之后，就会转移到暗态，导致其与冷却光的作用停止。由于散射的光子数目太少，不会使分子的温度显著降低，以致磁阱和光阱无法囚禁。

为了克服这一问题，过去的 20 年间，很多研究组已经进行了不同的尝试，也发展了几种技术。大体上讲，可以将这些技术分为两大类：1) 对已经存在的基态分子直接用各种方法冷却；2) 用间接的方法，从超冷原子开始，利用光或者磁缔合技术合成超冷分子^[27,28]。

2.1.1 基态分子直接冷却

在自然状态下，绝大多数分子都处于基态，因此只要将它们的温度降低就可以获得冷分子。在各种冷却技术中，由 Harvard 大学 Doyle 研究组^[29]发展的缓冲气体冷却 (buffer gas cooling) 是一种通用的技术，可以对各种分子进行冷却，但这种技术得到的温度由缓冲气体决定，一般在 4 K 左右 (液氦)，对这些分子直接进行保守势阱装载并进一步蒸发冷却仍很困难。另一方面，利用这种技术可以很快地冷却大量的处于最低振转能级的分子，将它们引出缓冲气体冷却装置后，可以获得亮度很高的分子束^[30]，为冷分子光谱提供了非常好的条件。其他实验如直接激光冷却，通常也需要先以此对分子进行预冷却。目前，国内华东师范大学和浙江大学的两个研究组已经掌握了这一技术，并成功制备了基态 MgF^[31] 和 BaF^[32] 冷分子。

另一项研究得很广泛的技术是 Stark(斯

克) 减速技术^[33]。这种技术利用与分子束运动同步的交变高电场产生随时间变化的 Stark 效应来降低分子的运动速率，因而只对极性分子有效。由于这一方法涉及对高电场的快速操控，技术上很有挑战性。利用这一技术，目前分子的温度可以达到几十 mK 量级，而样品的密度还较低^[34]。国内华东师范大学的研究组在这一方向做了多年的理论和实验工作，取得了一系列成果^[35,36]。南通大学的研究组近期也开始了这方面的探索^[37]。

最近几年，对一些特殊分子的直接激光冷却这一方向发展非常迅猛。如 SrF, YO, CaF 等自由基分子，可以找到与振动基态 ($v'' = 0$) 闭合性很高的分子振动激发态 (Franck-Condon 因子在 95% 以上)，因而在光子散射后，分子从激发态经自发辐射回到基态只占据少数几个振动态^[38]；另一方面，对处于振动基态的第一激发转动态 ($J'' = 1$) 的分子，由于角动量的选择定则，冷却跃迁 $J'' = 1 \leftrightarrow J = 0$ 对转动能级是完全闭合的，即基态 $J'' = 1$ 的分子被光子激发到 $J = 0$ 后，自发辐射只能回到基态 $J'' = 1$ ^[39]。由于这两个原因，对这些特殊分子，只需利用少数几个回泵激光，就可以获得准闭环系统，使分子能够散射足够多的光子，从而实现冷却。

分子的直接激光冷却最早是由 Yale 大学的 DeMille 研究组^[20] 实现的。目前已经有很多研究组在这个方向开展工作，包括美国的 JILA^[24], Harvard^[23]，以及英国的 Imperial College London^[40] 等的研究组最近都取得了很多突破。例如在最新发表的文章中，Harvard 大学的研究组已经可以将 CaF 分子的温度冷却到 20 μ K 并实现了光阱的装载^[41]。虽然由于分子数目的限制，样品的密度还比较低，但距离实现超冷高密度分子已经没有基本原理上的限制^[23]。国内的两个研究组最近也开始了在这一方向的探索，其中华东师范大学的研究组选择的分子为 MgF^[31]，浙江大学的研究组选择的分子为 BaF^[32]，目前他们已经获得了一些初步的分子冷却信号。

2.1.2 利用超冷原子缔合获得超冷分子

由于超冷原子的制备技术非常成熟，结合光或者磁缔合技术，就可以合成超冷分子^[27]。其中光缔合技术非常适合用于进行超精细分子光谱的研究^[42]，国内山西大学的研究组多年来在此方向做了很多的工作^[43,44]。光缔合之后的自发辐射可以形成电

子基态的分子,但这些分子一般分布在很多个振动态,难以进行分子态的纯化.而利用磁缔合技术形成的分子都处于同一能级,因而更加适合进行后续的研究.利用磁缔合技术获得的分子温度等于超冷原子的温度,而且分子密度也较高,但分子处于弱束缚态,需要用受激拉曼过程才能转移到基态.目前,从相空间密度的角度(即最高密度和最低温度),超冷原子磁缔合结合受激拉曼转移是最成功的制备基态超冷极性分子的方法^[45].利用这一方法,最近JILA的研究组已经成功实现了钾铷(⁴⁰K⁸⁷Rb)分子的费米简并^[26,45],而奥地利的Innsbruck(⁸⁷Rb¹³³Cs)^[46],英国的Durham(⁸⁷Rb¹³³Cs)^[47],美国麻省理工学院(MIT)(²³Na⁴⁰K)^[48],德国马普研究所(MPQ)(²³Na⁴⁰K)^[49],以及中国的香港中文大学(²³Na⁸⁷Rb)^[50]和中国科学技术大学(²³Na⁴⁰K)^[51]都已经成功地实现了基态超冷极性分子的制备.下面我们将以²³Na⁸⁷Rb分子为例对这一方法进行更详细的讨论.

2.2 Feshbach 共振和磁缔合

两个碰撞原子间的Feshbach共振通常可按图3(a)所示的两通道模型来理解.对碱金属,这里的通道对应于两种原子的超精细能级的不同组合.如果在不同通道中的两个原子以及它们形成的分子对磁场的响应不同,在一定的磁场下,在通道1中的两个原子的散射阈值就有可能和通道2的束缚态能级交叉,从而引起共振散射,即Feshbach共振.在共振磁场 B_0 附近,散射长度 a 随磁场 B 的变化为^[3]

$$a = a_{\text{bg}} \left(1 - \frac{\Delta B}{B - B_0} \right), \quad (2)$$

其中 a_{bg} 为远离共振时的背景散射长度, ΔB 为共振的宽度.通过调节散射长度改变冷原子间的相互作用是Feshbach共振最重要的应用之一.

Feshbach共振的另一个重要应用是磁缔合.如图3(b)所示,磁缔合可以用Landau-Zener过程来理解.在共振附近,由于两个通道之间的耦合,在能量交叉处产生了一个劈裂,劈裂的大小由耦合强度决定,一般和Feshbach共振的性质有关.如果初始时磁场处于共振之上,当把磁场绝热地扫描经过共振后,两个原子就会缔合为一个Feshbach分子.注意在共振的两端,散射长度的符号相反,分子处于散射长度为正的一端.磁缔合是一种非常强大的技术,它可以将各种相同或不同的玻色子、费米子及其混合物缔合为分子,特别是在两分量的费米子中, $a > 0$ 和 $a < 0$ 两端分别对应BEC(两个费米子合成的分子为玻色子)和BCS(Bardeen-Cooper-Schrieffer)区,可以用来研究BEC和BCS crossover(跨接效应)的相关物理.

就超冷分子的研究而言,磁缔合需要在两种原子的混合气体中进行,这是一个很复杂的过程,目前还很难达到很高的转换效率.比如在²³Na⁸⁷Rb分子的实验中,初始时²³Na和⁸⁷Rb原子的数目都约为 2×10^5 ,而经过磁缔合后获得的Feshbach分子只有 10^4 ,对应的转换效率只有5%.其他类似实验上得到的转换效率也都在5%到10%^[45-49].如何提高转换效率,从而得到更多的分子是一个有待解决的问题.另外,剩余的原子可以和分子发生碰撞,从而引起分子的损耗,因而必须尽快把它们从光阱中移除.

²³Na和⁸⁷Rb之间的Feshbach共振位于347.75 G附近^[52,53],磁场从高到低扫描经过共振后,一部分原子被缔合为分子,如图4(a)所示.利用分子和原子对磁场的相互作用不同,可以加一个磁场梯度将剩余的原子从阱中移除,而分子则不受影响.探测是在磁场关断后,对原子进行吸收成像.在实验中,为了确认磁场扫描共振后形成了Feshbach分子,可以用如图4(a)所示的时序,在把剩余的原

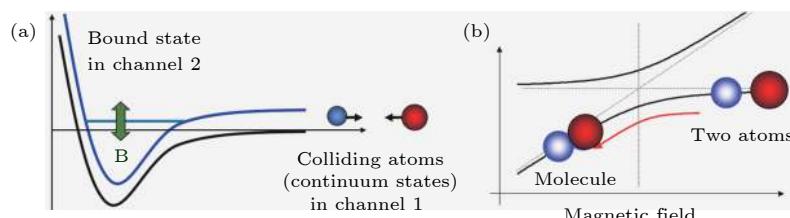


图3 (a)Feshbach共振的两通道模型;(b)利用Feshbach共振进行磁缔合产生弱束缚分子

Fig. 3. (a) Two-channel model for a Feshbach resonance; (b) formation of a weakly bound Feshbach molecule by magnetoassociation.

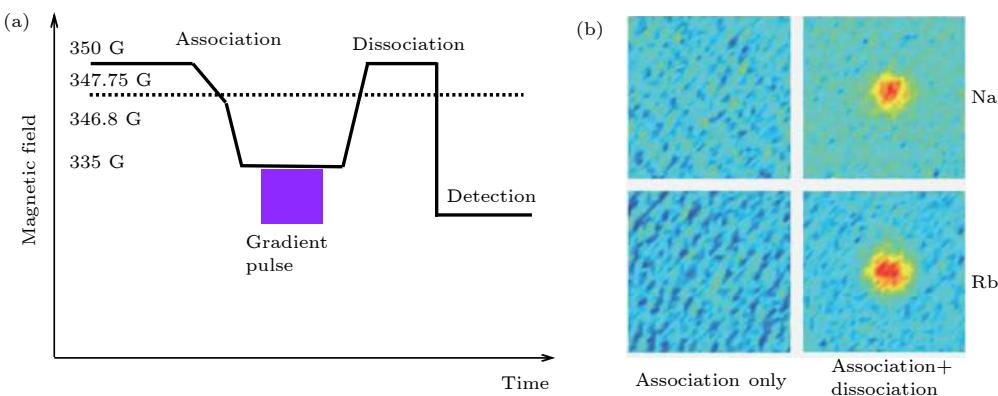
图 4 利用磁缔合制备 $^{23}\text{Na}^{87}\text{Rb}$ Feshbach 分子 (a) 磁场改变的时序; (b) 分别在离解和不离解的情况下探测钠和铷原子^[52]

Fig. 4. Creation of $^{23}\text{Na}^{87}\text{Rb}$ Feshbach molecule via magnetoassociation: (a) The magnetic field sequence; (b) absorption images of ^{23}Na and ^{87}Rb with and without dissociation procedure^[52].

子移除后直接关掉磁场, 利用吸收成像探测看不到信号, 这是由于探测光是与原子跃迁共振的, Feshbach 分子对它的散射截面很小。只有当再做一个反向的磁场扫描, 把不能直接探测到的分子离解成原子后, 才能重新看到信号, 如图 4(b) 所示, 这样就证明磁缔合形成了 Feshbach 分子。

在共振附近, Feshbach 分子的结合能随磁场失谐的增大而增加。一般而言, 对于两通道耦合较强的共振, 亦即所谓的宽共振, Feshbach 分子的结合能 E_b 随散射长度的变化可以近似地表示为

$$E_b = \hbar^2 / ma^2, \quad (3)$$

其中 $m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ 为分子的约化质量, m_1 和 m_2 为两个原子的质量。这种情况下, 分子的波函数具有较多的原散射通道 (open channel) 成分。对于通道间耦合较弱的共振, 如图 5 所示 $^{23}\text{Na}^{87}\text{Rb}$ Feshbach 分子的情况, 只有在很接近共振时 E_b 才可以用 (3) 式来描述, 远离共振时, 结合能迅速增大, 而分子的波函数也具有较多的第二个通道 (closed channel) 的成分。

通过磁缔合形成的 Feshbach 分子处于分子的最低电子能态, 但处于振转能级的高激发态。比如 $^{23}\text{Na}^{87}\text{Rb}$ 分子的电子基态, $X^1\Sigma^+$ 态的势能曲线深度为 5030 cm^{-1} ($1 \text{ cm}^{-1} \approx 30 \text{ GHz}$), 而 Feshbach 分子的结合能很小时仅为几个 MHz(图 5)。因此 Feshbach 分子的两个原子核的间距很大, 两个原子的电子云分布和单独的原子区别不大, 正负电荷的中心重合, 分子也就几乎没有永久电偶极矩, 因此异核 Feshbach 分子不是极性分子。如图 6 所示, 只有在接近势能曲线底部, 两个原子核距离很近时, 分子才有大的永久电偶极矩。而且一般认为非振转

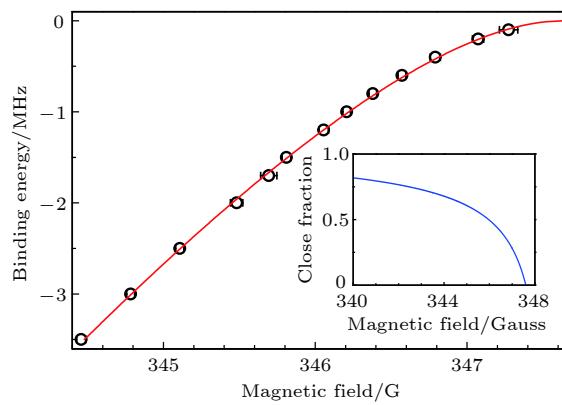
图 5 $^{23}\text{Na}^{87}\text{Rb}$ Feshbach 分子的结合能随磁场的变化, 插图表示离共振越远, 分子的 closed channel 成分越多^[52]

Fig. 5. Binding energy of $^{23}\text{Na}^{87}\text{Rb}$ Feshbach molecules versus magnetic field near 347.7 Gauss. The inset shows the closed-channel fraction of the Feshbach molecule versus magnetic field^[52].

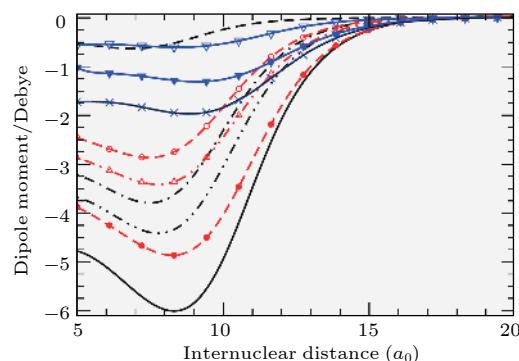
图 6 异核碱金属双原子分子的电偶极矩和核间距 (a_0 为玻尔半径) 的关系, 图中红色空心三角为 $^{23}\text{Na}^{87}\text{Rb}$ 分子

Fig. 6. Electric-dipole moment of heteronuclear molecules as a function of internuclear distance (a_0 is the Bohr radius). The red up-pointing triangle is $^{23}\text{Na}^{87}\text{Rb}$ molecule.

基态的分子会受振转弛豫影响而不稳定, 所以需要把 Feshbach 分子转移到振转基态 ($v = 0, J = 0$)。

2.3 受激拉曼转移的方案选择及分子光谱研究

以 $^{23}\text{Na}^{87}\text{Rb}$ 分子为例, 图7(a)为其相关能态的势能曲线, 其中Feshbach分子和振转基态分子的结合能差约为 5000 cm^{-1} , 为了在完成转态的同时把这部分能量带走, 通用的方法是利用一个以Feshbach分子和基态分子为初态 $|i\rangle$ 和末态 $|g\rangle$ 的双光子受激拉曼过程, 而中间态 $|e\rangle$ 为分子的电子激发态的特定振转能级。

考虑到分子初末态的一些性质, 中间态能级的选取需要满足以下条件: 1) 基于Franck-Condon原理, 分子能级跃迁强度正比于上下能级振动波函数重叠的平方 $|\langle v''|v'\rangle|^2$, 即Franck-Condon因子, 由于Feshbach分子的波函数 $|v\rangle$ 分布范围很大, 而基态分子的波函数 $|v''\rangle$ 只位于很窄的范围内, 中间态必须与它们都有足够的重叠才能在有限的激光功率下获得足够大的拉比频率; 2) 由于实验中用的Feshbach分子具有较多的三重态 $a^3\Sigma^+$ 的成分, 而基态分子为纯的单重态 $X^1\Sigma^+$, 中间态必须为单重态和三重态的混合态; 3) 由于原子有核自旋, 每

个振转能级还有更细小的超精细结构。首先超精细结构间的跃迁有一定的选择定则, 其次超精细结构不可分辨时, 受激拉曼转移涉及多个能级, 对转移的效率会产生影响。因此在选择中间态时, 最好是有一定的三重态成分, 使得超精细结构劈裂可以被充分分辨。基于以上几个原则, 可以发现图7(a)中 $A^1\Sigma^+/b^3\Pi$ 势能曲线的底部, 或 $2^3\Sigma^+/1^1\Pi$ 势能曲线的顶端都可能找到符合条件的能级, 目前已有的实验也确实都是用这两种方案实现的^[54]。

方案确定之后就需要进行分子光谱的研究以及找到具体的能级位置。用超冷分子做光谱实验可以达到极高的分辨率, 包括所有跃迁定则允许的超精细结构(图7(b)), 这是之前的传统分子光谱学无法达到的。但如果已经有一些其他方法获得的分子光谱数据和理论计算, 对加快这一十分耗时的步骤有很大帮助。另外, 原则上可以从自由原子开始, 用光缔合技术研究激发态的光谱, 但Feshbach分子的束缚-束缚跃迁更强, 找到能级信号更快。

找到可能的中间态之后, 就可以利用Autler-Townes效应来确定振转基态的能级位置。首先将耦合Feshbach分子和中间态的pump光(抽运

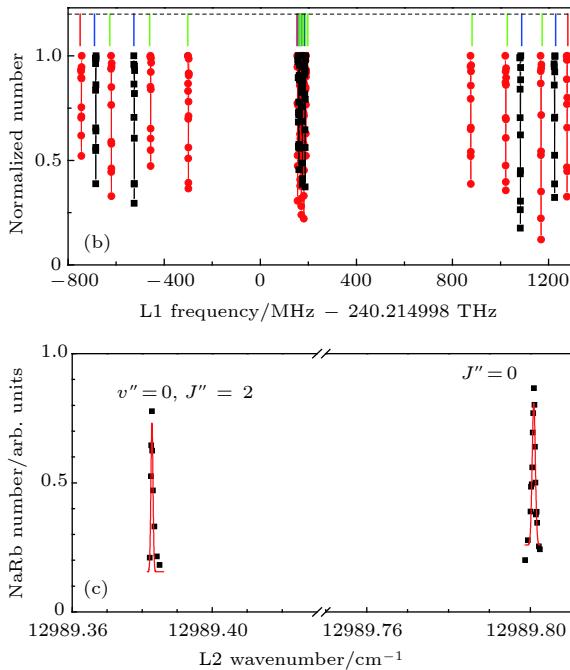
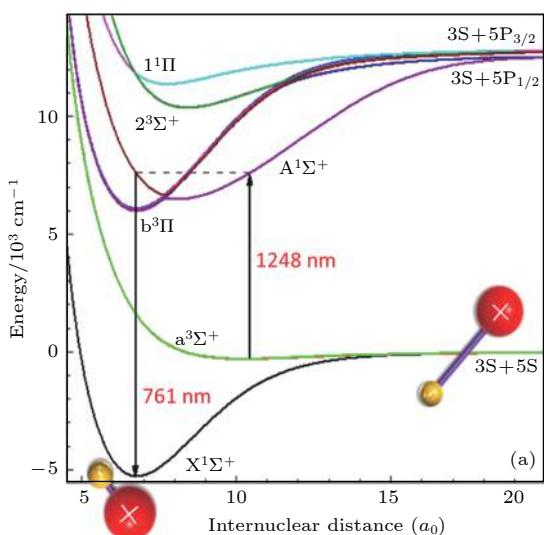


图7 (a) $^{23}\text{Na}^{87}\text{Rb}$ 分子的相关势能曲线; (b)分子中间激发态的超高分辨率光谱; (c)基态转动能级; 其中 $X^1\Sigma^+$ 和 $a^3\Sigma^+$ 为电子的最低单重态和三重态, Feshbach分子处于这两个态的离解极限附近, 而振转基态则处于 $X^1\Sigma^+$ 态的底部; 作为受激拉曼转移中间态的能级为电子单重态 $A^1\Sigma^+$ 和三重态 $b^3\Pi$ 的混合态, 其超精细结构的劈裂可以被完全分辨

Fig. 7. (a) $^{23}\text{Na}^{87}\text{Rb}$ molecule potential energy curves and the two-photon Raman process for population transfer, $X^1\Sigma^+$ and $a^3\Sigma^+$ are the lowest singlet and triplet state respectively; (b) high resolution one-photon spectrum of the transition from the Feshbach state to the intermediate level (singlet and triplet mixed vibrational levels of $A^1\Sigma^+$ and $b^3\Pi$), which hyperfine structure can be resolved; (c) two-photon spectroscopy of the $^{23}\text{Na}^{87}\text{Rb}$ vibrational ground state with two rotational states resolved.

光)保持共振,这时应该看到Feshbach分子的损耗,然后同时打开链接中间态和基态的dump光(倾泻光),并扫描其频率.当dump光与基态振动能级共振时,如果其光强较大,由于AC-Stark效应,会导致激发态能级产生劈裂,从而使pump光失谐.在这种情况下,基态能级的信号表现为Feshbach分子损耗的减少(图7(c)).

2.4 窄线宽激光器和受激拉曼转移

在超精细结构完全可分辨的情况下,图7(a)所示的受激拉曼转移过程是一个标准的由 $|i\rangle$, $|e\rangle$, $|g\rangle$ 构成的3能级体系.假设激发态 $|e\rangle$ 的自发辐射率为 γ ,在两束光都为共振的情况下,以 $|i\rangle$, $|e\rangle$, $|g\rangle$ 为基矢,系统的哈密顿量为

$$H = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 & \Omega_{\text{pump}}(t) & 0 \\ \Omega_{\text{pump}}(t) & -i\gamma & \Omega_{\text{dump}}(t) \\ 0 & \Omega_{\text{dump}}(t) & 0 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

其中 Ω_{pump} 和 Ω_{dump} 分别为pump跃迁和dump跃迁的拉比频率.

在超冷分子中实现态转移,目前通用的技术为受激拉曼绝热通道(stimulated Raman adiabatic passage, STIRAP),这种受激拉曼技术需要对 Ω_{pump} 和 Ω_{dump} 进行时间上的操控.如图8(b)所示,转移过程开始时,先打开dump光,之后在关断dump光的同时将pump光打开.在此过程中,分子总是处于系统的暗态,

$$|\phi\rangle = \cos\theta|i\rangle + \sin\theta|g\rangle, \quad (5)$$

其中 $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\Omega_{\text{pump}}(t)}{\Omega_{\text{dump}}(t)}\right)$.可以看到,在初始时分子处于Feshbach能级,不与dump光直接作用,在转移完成后,分子处于基态,不与pump光作用,而且在整个过程中,分子都不会处于中间态 $|e\rangle$,因而在理想情况下,整个STIRAP过程都没有分子损耗,Feshbach分子可以被100%转移到振转基态.

为了实现高效率(接近100%)的分子转移,STIRAP过程必须满足绝热条件.这需要双光子的有效拉比频率 $\Omega_{\text{eff}} = \sqrt{\Omega_{\text{pump}}^2 + \Omega_{\text{dump}}^2}$ 和转移时间 $\Delta\tau$ 的乘积满足 $\Omega_{\text{eff}}\Delta\tau > 10$ 的条件^[55].由于前面所讨论的Franck-Condon因子的关系,在有限的激光功率下, Ω_{pump} 和 Ω_{dump} 通常只能达到MHz量级,因此要使用比较长的 $\Delta\tau$ 才能满足绝热条件,在目前的实验中用到的 $\Delta\tau$ 一般为十到几十微秒.

由于 $\Delta\tau$ 较长,如果在转移过程中,受激光噪

声的影响,两束激光的相对相位发生变化,就会降低转移效率.注意这里并不要求两束激光的相对相位完全锁定,只要求在STIRAP过程中,也就是在 $\Delta\tau$ 这一时间内,相对相位不发生抖动,因此只要将两束激光的线宽都压窄到kHz左右就可以了.利用Pound-Drever-Hall(PDH)技术将两束激光锁定到精细度为5000左右,线宽为100kHz左右的超稳光学腔上,就可以满足这一要求^[56].在 $^{23}\text{Na}^{87}\text{Rb}$ 实验中,两束激光的波长分别为761nm和1248nm,超稳光学腔为双色镀膜,在每个波长附近的精细度都>20000,最后获得的激光器线宽估计都在几百Hz^[57].

图8为利用STIRAP技术从Feshbach分子开始制备 $^{23}\text{Na}^{87}\text{Rb}$ 基态分子的过程.这里的实验探测手段为标准的吸收成像技术,由于散射截面过小,这一技术不能直接探测基态分子,因此所有的信号都是通过探测Feshbach分子获得的.如图8(a)所示,初始时全部分子都处于Feshbach能级,这时打开dump光对分子数没有影响,但在dump光关断的同时打开pump光时,Feshbach分子数随之减少,直到为零.这是由于分子被转移到了基态,不能被吸收成像探测到.而之后再进行一个逆过程,将分子从基态转移回Feshbach能级,就可以看到分子数大部分恢复了.一般可以假设两个过程的转换效率一样,因此可以从初始的分子数 N_0 和

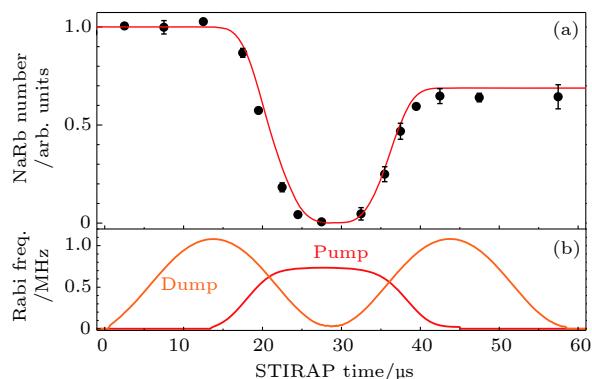


图8 利用STIRAP制备 $^{23}\text{Na}^{87}\text{Rb}$ 基态分子 (a) STIRAP过程中Feshbach分子数目随时间的变化;(b)同一实验中pump和dump激光器的拉比频率随时间的变化;为了探测基态分子,需要一个逆过程将分子从基态转移回Feshbach能级^[50]

Fig. 8. Creation of $^{23}\text{Na}^{87}\text{Rb}$ molecules in the rovibrational ground state via STIRAP: (a) Time evolution of the $^{23}\text{Na}^{87}\text{Rb}$ Feshbach molecule number during a round-trip STIRAP, the reversed STIRAP is necessary for detection; (b) the pump and dump beam Rabi frequency during the STIRAP pulse sequence^[50].

恢复的分子数 N 估计出单次的转移效率和基态分子数分别为 $\sqrt{N/N_0}$ 及 $\sqrt{N \times N_0}$.

目前已知的几个实验中, STIRAP 的单次转移效率都在 90% 以上^[46–48, 50]. 转换效率没有达到 100% 的原因可能是由于激光器的一些没有被压制的噪声, 例如在普遍采用的半导体激光器中, 增益介质的背景频谱很宽, 不能被反馈完全压制. 没有被转移到基态的 10% 左右的分子, 有可能是在转移过程中被激发到了中间态, 通过自发辐射, 这部分分子会分布到电子基态的很多振转能级. 实验上已经证实, 这一小部分分子对基态分子的动力学并不产生可观测的影响, 因此 90% 以上的转换效率, 已经完全可以接受.

3 基态分子基本参数的测量和内态操控

当分子被转移到基态后, 就可以对其极化率、永久电偶极矩等基本参数进行测量, 也可以进行振动和超精细能级之间的操控.

3.1 极化率

改变制备和探测这两个 STIRAP 过程中间的时间, 记录分子在光阱中的质心位置变化, 就可以测量基态分子在光阱中的振荡频率, 如图 9 所示. 再结合光阱的光强, 就可以计算出在光阱波长下基态分子的极化率^[58], 并与 *ab initio* 计算结果比较.

3.2 永久电偶极矩

另外一个非常重要的参数是基态分子的永久电偶极矩, 它可以通过测量基态分子在电场中的 Stark 效应来获得. 在 $^{23}\text{Na}^{87}\text{Rb}$ 实验中, 电场是由一对加在真空玻璃腔外有 ITO 镀膜的导电玻璃平板电极提供的. 由于 Feshbach 分子的电偶极矩为零, 其能级不随电场变化, 基态分子的 Stark 频移就表现为 pump 和 dump 光频率差的变化. 图 10 所示为 NaRb 分子在电场中从 0 到 1.5 kV/cm 的 Stark 频移, 由拟合得到的永久电偶极矩为 3.2(1) Debye. 另外也可以看到, 在 1.5 kV/cm 时, 有效电偶极矩已经达到了 1.06 Debye.

3.3 振动和超精细能级操控

由于 $X^1\Sigma^+$ 态的电子自旋和轨道角动量都为

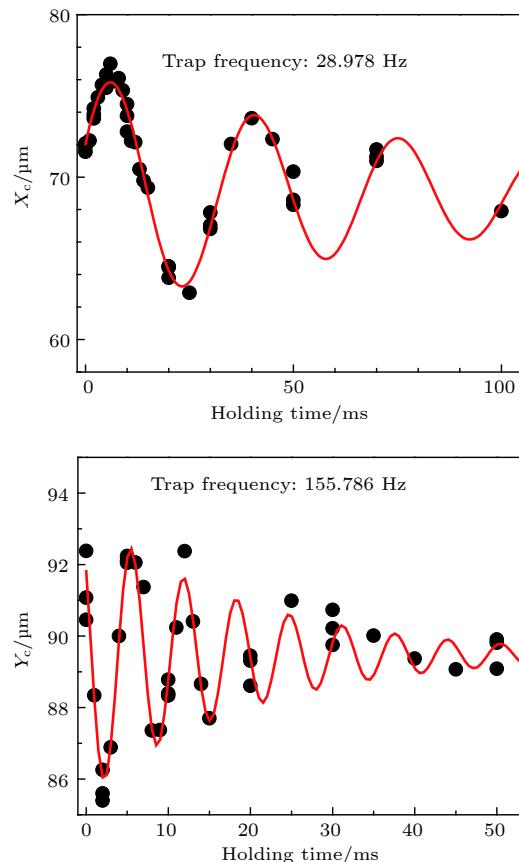


图 9 通过质心振荡运动测量基态 $^{23}\text{Na}^{87}\text{Rb}$ 分子的囚禁频率

Fig. 9. Center-of-mass motion of the absolute ground-state molecules along the horizontal direction (X_c) and the vertical direction (Y_c) in the optical dipole trap.

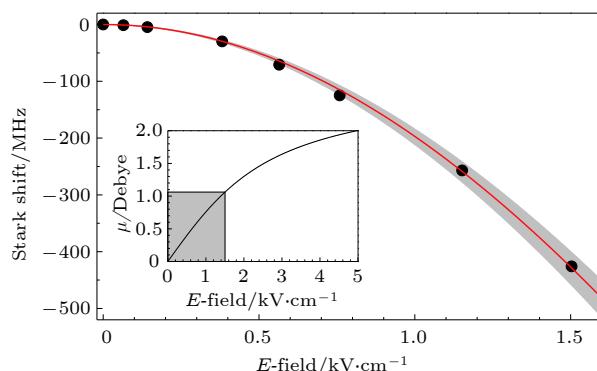


图 10 基态 $^{23}\text{Na}^{87}\text{Rb}$ 分子在直流电场中的 Stark 频移. 红色曲线为对数据点的拟合. 插图为有效电偶极矩和电场的关系^[50]

Fig. 10. Stark shift of the rovibrational ground state $^{23}\text{Na}^{87}\text{Rb}$ molecule in electric field. The red curve is the fit to a model including contributions from several higher rotational levels. The inset shows the induced dipole moment vs the electric field with the currently accessible region marked by the shading area^[50].

零, 基态分子的电子总角动量和磁偶极矩也为零,

但构成分子的两个原子都有核自旋，在磁场中就会带来很小的核自旋的超精细能级劈裂。例如在 $^{23}\text{Na}^{87}\text{Rb}$ 分子中 ^{23}Na 和 ^{87}Rb 的核自旋分别为 $I_{\text{Na}} = 3/2$ 及 $I_{\text{Rb}} = 3/2$ ，每个核自旋的磁量子数可以取从 $-3/2$ 到 $3/2$ 的值，在磁场中的Zeeman能级共有 $(2I_{\text{Na}} + 1)(2I_{\text{Rb}} + 1) = 16$ 个。如图11(a)所示，由于核自旋和磁场的作用很小，在几百Gauss的磁场中，所有能级的劈裂也只有几个MHz，而相邻能级间的间距更小。这种情况为制备单一量子态的基态分子带来了一定的困难，虽然Feshbach分子是处于一个单量子态，即全同的分子，如果STIRAP过程的分辨率不够，就有可能使制备的基态分子占据多个超精细能级，即非全同的分子。

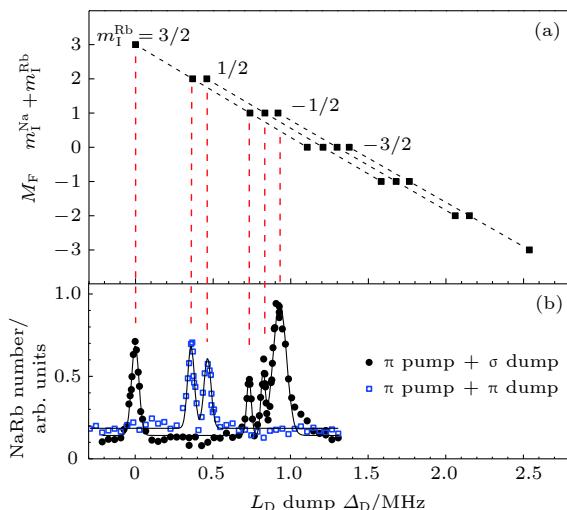


图11 (a) 基态 $^{23}\text{Na}^{87}\text{Rb}$ 分子在340 Gauss磁场中的超精细结构，其中 m_I^{Na} 和 m_I^{Rb} 分别为 ^{23}Na 和 ^{87}Rb 原子核自旋的磁量子数，能量最低的超精细结构为 $m_I^{\text{Na}} = m_I^{\text{Rb}} = 3/2$ 的态(最右端)；(b) 利用仔细选择的STIRAP参数，可以充分分辨跃迁允许的所有超精细结构，从而实现处于单一超精细能级分子的制备^[50]

Fig. 11. (a) The calculated hyperfine Zeeman structures of the lowest rovibrational level of NaRb molecule at 340 Gauss, m_I^{Na} and m_I^{Rb} are nuclear spin projection of ^{23}Na and ^{87}Rb respectively; (b) two-photon spectrum obtained by dark resonance spectroscopy with six of the 16 hyperfine levels fully resolved^[50].

在 $^{23}\text{Na}^{87}\text{Rb}$ 分子实验中，由于使用的磁场较高，再加上光偏振和跃迁选择定则的限制，能量最低的超精细结构和相邻能级间的劈裂有几百kHz，如图11(b)所示。在两束拉曼激光的拉比频率都为1MHz左右时，实验中获得的双光子跃迁的半高宽为200kHz，足以分辨这些能级从而制备100%纯度的绝对基态分子(即处于最低电子、振动、转

动、和超精细能级的分子)。

在后续实验中，经常需要制备处于转动激发态 $J = 1$ 的分子或者 $J = 1$ 和 $J = 0$ 的叠加态。在目前的几个实验中，由于选择定则的限制，STIRAP过程不能直接制备 $J = 1$ 的分子，这一问题可以通过微波操控来解决。对极性分子而言，从 $J = 0$ 到 $J = 1$ 能级间的跃迁是由微波的电场和分子的永久电偶极矩直接作用来驱动的，具有较高的跃迁强度，因而用标准的微波器件就可以获得较大的拉比频率。在 $^{23}\text{Na}^{87}\text{Rb}$ 分子中， $J = 0$ 到 $J = 1$ 的能量差为4.179 GHz，对应的微波信号可以方便地用一个信号发生器和标准的微波天线获得。

微波的另外一个重要应用是操控分子的超精细结构。一般而言，由于核自旋与微波磁场的作用很微弱，微波操控核自旋需要很大的微波功率。但如图12所示，由于电子四极矩作用以及核自旋和

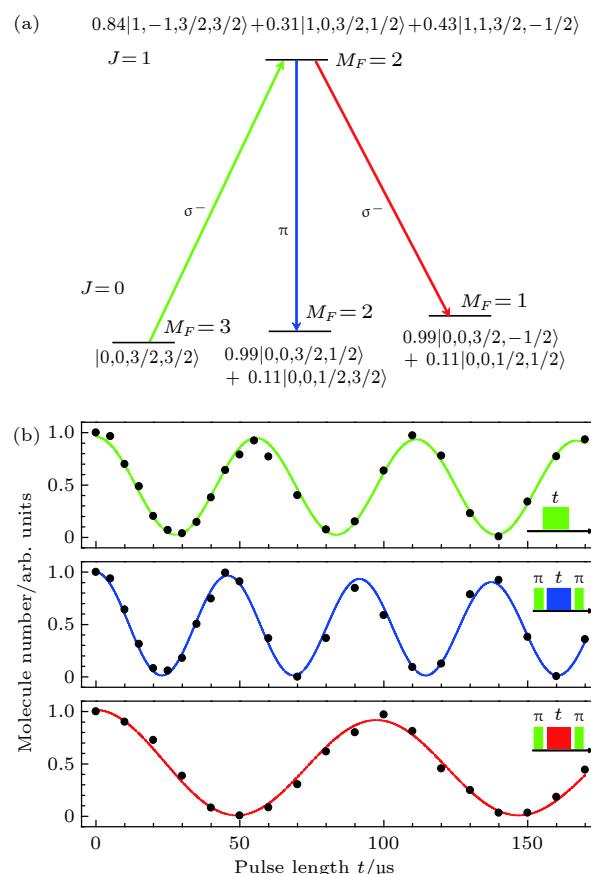


图12 (a) $^{23}\text{Na}^{87}\text{Rb}$ 分子的 $J = 0$ 和 $J = 1$ 转动能级具有不同核自旋态的成分；(b) 利用单光子微波(上)，和双光子微波(中和下)操控，可以实现对转动能级和核自旋的操控^[50]

Fig. 12. (a) $^{23}\text{Na}^{87}\text{Rb}$ molecule rotational states with $J = 0$, 1 consist of different nuclear spin components; (b) coherent manipulation with microwave pulses shows the observed Rabi oscillations for the three microwave transitions in (a)^[50].

转动角动量的耦合,使得不同的 $|J, m_J, m_I^{\text{Na}}, m_I^{\text{Rb}}\rangle$ 态之间都有一定比例的混合,因此通过操控转动能级,也可以实现核自旋操控.在实验中,可以施加一个频率的微波信号将分子转移到 $J = 1$ 态的不同 m_J 和 $m_I^{\text{Na}}, m_I^{\text{Rb}}$ 组合;也可以增加另外一个频率,利用微波的双光子跃迁实现 $J = 1$ 的核自旋改变.注意 $J = 1$ 态的超精细结构比 $J = 0$ 要复杂得多,共有 $(2I_{\text{Na}} + 1)(2I_{\text{Rb}} + 1)(2J + 1) = 48$ 个能级.

4 基态超冷极性分子的碰撞研究

4.1 超冷基态分子的稳定性

如前所述,超冷原子到 Feshbach 分子磁缔合的效率不高,这就导致虽然初始原子混合物的相空间密度很高,甚至是两团气体都为量子简并,由此产生的 Feshbach 分子和基态分子的相空间密度还是远低于量子简并.因此,为了获得量子简并的超冷极性分子,需要进一步降低温度和增加密度,这些要求只能通过分子的蒸发冷却来实现.

蒸发冷却需要通过分子间的两体碰撞来进行.与原子的情况类似,分子的碰撞也可分为好的弹性碰撞和坏的非弹性碰撞,只有弹性碰撞才可能在损耗粒子数目的同时增加相空间密度,而非弹性碰撞在损耗粒子数目的同时有加热效应(anti-evaporation effect),因此并不能引起相空间密度的增加.一般而言,在超冷气体中,弹性和非弹性碰撞总是同时存在,但只要弹性碰撞对非弹性碰撞的比值足够大,高效率的蒸发冷却就可以进行.

基于这样的认识,在超冷分子实验的早期,研

究者们就已经认识到分子必须被制备到绝对基态才可能避免由于激发态弛豫引起的非弹性损耗,可能的过程包括激发态振动、转动能级的弛豫以及超精细能级弛豫.绝对基态的分子没有这些可能的损耗通道,但 2008 年超冷基态极性分子第一次在 JILA 的 ${}^{40}\text{K} {}^{87}\text{Rb}$ 实验中被成功制备后,还是发现有很大的损耗.随后的研究表明,虽然对每一个分子来说,绝对基态是其能量的最低点,两个分子却可能发生化学反应.

两个相同的分子 AB 碰撞后,从组合来说,可能发生的过程有以下几种(图 13):



其中 (6a) 式的过程,两个双原子分子 AB 碰撞直接形成一个四原子分子 $A_2 B_2$,由于不能同时满足动量和能量守恒而不可能发生;而 (6b) 式中的两个过程,由于在碱金属体系两种三原子分子 $A_2 B$ 和 AB_2 的基态能量都远高于两个 AB 分子的碰撞阈值,在超冷气体对应的超低碰撞能量下也不可能发生;而两个 AB 分子碰撞形成两个同核分子 A_2 和 B_2 是否可以发生则取决于 (6c) 式两端的能量差,即只有当两个 AB 分子的总结合能小于 A_2 和 B_2 两个分子的结合能之和时化学反应才可以发生.

超冷实验常用的 5 种碱金属原子 ${}^6\text{Li}$, ${}^{23}\text{Na}$, ${}^{40}\text{K}$, ${}^{87}\text{Rb}$, ${}^{133}\text{Cs}$, 可以两两组合出 10 种异核双原子体系. 经过比较它们和 5 种同核分子的基态结合能,可以发现化学反应 (6c) 式可以在 ${}^{40}\text{K} {}^{87}\text{Rb}$ 分子

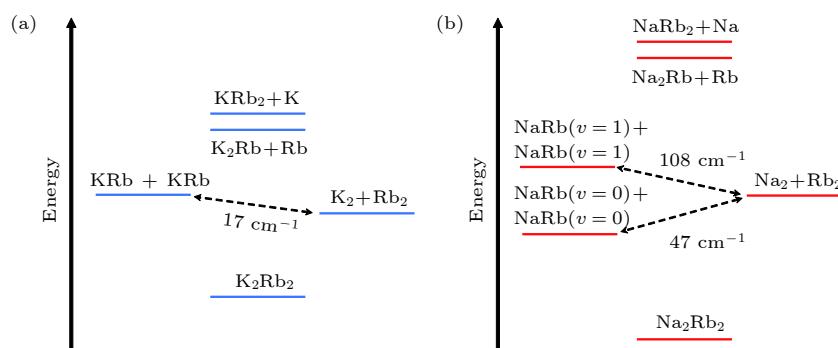


图 13 (a) ${}^{40}\text{K} {}^{87}\text{Rb}$ 分子和 (b) ${}^{23}\text{Na} {}^{87}\text{Rb}$ 分子体系两体反应的相关能级示意图,两个基态 ${}^{40}\text{K} {}^{87}\text{Rb}$ 分子间可以发生 (6c) 式中的化学反应,两个基态 ${}^{23}\text{Na} {}^{87}\text{Rb}$ 分子是化学稳定的,将 ${}^{23}\text{Na} {}^{87}\text{Rb}$ 分子制备到振动激发态,可以允许化学反应发生

Fig. 13. Schematic energy-level diagram for chemical reactivity of (a) ${}^{40}\text{K} {}^{87}\text{Rb}$ molecules and (b) ${}^{23}\text{Na} {}^{87}\text{Rb}$ molecules. The schematic reaction coordinates for the ${}^{40}\text{K} {}^{87}\text{Rb} + {}^{40}\text{K} {}^{87}\text{Rb} \rightarrow {}^{40}\text{K}_2 + {}^{87}\text{Rb}_2$ process is exothermic and thus allowed. But the same process is endothermic for ${}^{23}\text{Na} {}^{87}\text{Rb}$ and thus forbidden. For ${}^{23}\text{Na} {}^{87}\text{Rb}$ in the first excited rovibrational level ($v = 1, J = 0$), the same reaction is already exothermic and thus allowed.

间发生^[60–62], 而不能在 $v = 0$ 态的 $^{23}\text{Na}^{87}\text{Rb}$ 分子间发生.

4.2 费米 $^{40}\text{K}^{87}\text{Rb}$ 分子间的化学反应

如图 13(a) 所示, $^{40}\text{K}^{87}\text{Rb} + ^{40}\text{K}^{87}\text{Rb}$ 的结合能比 $^{40}\text{K}_2 + ^{87}\text{Rb}_2$ 要小约 17 cm^{-1} , 即两个基态 $^{40}\text{K}^{87}\text{Rb}$ 分子碰撞的阈值比基态 $^{40}\text{K}_2 + ^{87}\text{Rb}_2$ 的能量高约 17 cm^{-1} , $^{40}\text{K}^{87}\text{Rb} (v=0) + ^{40}\text{K}^{87}\text{Rb} (v=0) \rightarrow ^{40}\text{K}_2 (v=0) + ^{87}\text{Rb}_2 (v=0)$ 为放热反应, 可以发生.

在 $^{40}\text{K}^{87}\text{Rb}$ 分子的碰撞实验中, 如图 14(a) 所示, 观察到基态分子在光阱中的密度 n 随囚禁时间损耗很快, 而且损耗曲线与两体碰撞速率方程

$$\dot{n} = -\beta n^2 \quad (7)$$

拟合得很好. (7) 式中 β 为损耗速率常数, 其单位为 $\text{cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$. 图 14(b) 所示为从不同温度样品损耗曲线中得到的 β 值. 可以看到, 当样品中为全同分子时, 不管是在超精细能级的基态 $|J=0, m_J=0, m_I^{\text{K}}=-4, m_I^{\text{Rb}}=1/2\rangle$ 还是在非基态 $|0, 0, -4, 3/2\rangle$, 在相同温度样品中测得的 β 值都基本相同, 而且随温度的增加呈线性上升. 而当分子样品为这两个态 50/50 的混合物时, β 则大很多, 而且不随温度的变化而改变.

这些现象可以用超冷化学反应的普适模型 (universal model) 来解释. 由于化学反应涉及反应物分子键的断裂和生成物新分子键的形成, 只能在分子间的距离很短时才能发生, 而分子的碰撞是从

长程开始的. 因此, 如图 15 所示, 一般可将分子的相互作用分为长程和短程区, 分界为两个分子的长程相互作用决定的特征长度, 即范德瓦耳斯长度. 在普适模型中, 当能量允许时, 分子在短程区发生化学反应的概率接近 100%, 因此化学反应的速率是由分子从长程到达短程的速率决定的.

在没有外加电场的情况下, 分子还是通过范德瓦耳斯力作用, 因此在长程区, 两个距离为 r 的分子间的相互作用可以表示为

$$V(r) = -\frac{C_6}{r^6} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}, \quad (8)$$

其中第一项为范德瓦耳斯相互作用; 第二项为两个分子间的相对运动角动量, 即散射分波引起的离心势, 只有在 $l \neq 0$, 即非 s 分波时才不为零; 式中 C_6 为分子间的长程色散常数, m 为两个分子的约化质量.

由于 JILA 的研究组实验中所用的 $^{40}\text{K}^{87}\text{Rb}$ 分子为费米子, 当分子全部在同一量子态时, 它们之间的超冷碰撞只能通过 $l=1$ 的 p 分波进行, 因此如图 15(a) 所示, 在长程会产生一个势垒. 这种情况下, 反应速率由分子对从长程隧穿到短程的速率决定^[64]. 当分子不在同一量子态时, 分子也可以通过 s 分波进行碰撞, 这种情况下, 没有长程的势垒, 这时反应速率由分子到达范德瓦耳斯长度的速率决定.

从图 15(a) 可以看到, 当分子为全同粒子时, p 分波势垒可以一定程度上压制化学反应的速率. 在非全同粒子中, 由于可以通过 s 分波散射, 没有

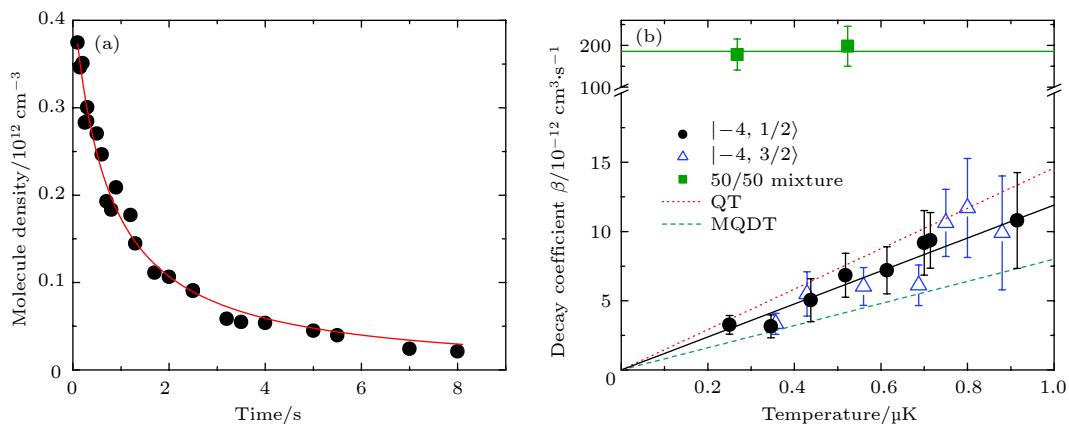


图 14 基态费米 $^{40}\text{K}^{87}\text{Rb}$ 分子的碰撞研究 (a) 分子密度随时间的变化, 红色曲线为用 (7) 式做的两体损耗拟合, 从中可以提取出损耗速率常数 β ; (b) 几种不同情况下样品温度对 β 的影响^[63]

Fig. 14. Inelastic collisions of fermionic $^{40}\text{K}^{87}\text{Rb}$ molecules in the rovibronic ground state: (a) Sample data shows the time dependence of the molecule number density, the solid line is the fit based on a two-body decay model; (b) loss rate coefficient versus temperature^[63].

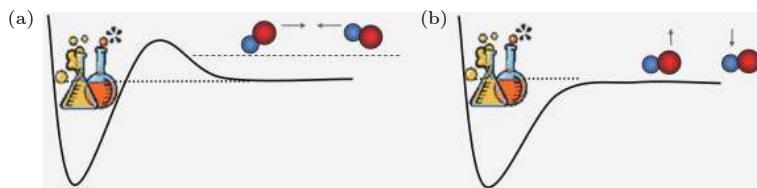


图 15 超冷化学反应的普适模型 (a) 全同费米分子通过 p -波散射, 在长程有一个角动量引起的势垒; (b) 非全同分子或全同玻色分子可以通过 s -波散射, 没有长程势垒

Fig. 15. Universal model of the ultracold molecule reactivity: (a) Identical fermionic molecules react via p -wave scattering and the rate of chemical reactions is determined by the p -wave angular momentum barrier; (b) non-identical fermionic molecules and identical bosonic molecules react via s -wave scattering.

长程势垒, 因此化学反应要快得多. 其中 β 值随温度的变化也和 Wigner 阔值定量的结果 $\beta \propto T^l$ 相符, 在有 s -波通道时, $l = 0$, 因此 β 为常数; 在 p -波散射时, $l = 1$, 因此 $\beta \propto T$. 图 14(b) 中的几条直线展示的是基于这个普适模型 [65, 66] 计算的理论结果, 可以看到和实验的结果基本是符合的.

4.3 玻色 $^{23}\text{Na}^{87}\text{Rb}$ 分子的碰撞

如图 13(b) 所示, 处于 $v = 0$ 态的 $^{23}\text{Na}^{87}\text{Rb} + ^{23}\text{Na}^{87}\text{Rb}$ 的结合能比 $^{23}\text{Na}_2 + ^{87}\text{Rb}_2$ 要大 47 cm^{-1} , $^{23}\text{Na}^{87}\text{Rb} (v = 0) + ^{23}\text{Na}^{87}\text{Rb} (v = 0) \rightarrow ^{23}\text{Na}_2 (v = 0) + ^{87}\text{Rb}_2 (v = 0)$ 为吸热反应, 在超冷分子间由于碰撞能量太低而不可能发生 [67]. 但如图 16(a) 所示, 即便在这种情况下, $^{23}\text{Na}^{87}\text{Rb}$ 分子在光阱中的损耗仍很快, 如果用两体碰撞来进行拟合, 得到的损耗速率常数 β 在 $10^{-10} \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ 量级, 与 s -波有化学反应时接近.

需要注意的是, 在分子损耗的测量中, 可以观察到比较明显的加热效应. 这是由于分子样品大致呈高斯分布, 中心的密度较高, 而碰撞损耗的速率和密度成正比, 因此损耗易于在分子样品的中心发生. 在样品中, 中心部分的分子的能量也是最低的, 当这一部分分子被从光阱中移除后, 剩余分子的平均能量就会上升, 导致加热现象. 这一过程和蒸发冷却正好相反, 因此也被称作反蒸发效应, 这种效应在所有的非弹性散射过程中都是存在的.

由于温度的增加会导致样品体积增大, 密度减小, 因此反蒸发效应对碰撞速率测量的影响不能忽略. 经过简单的推导, 可以得到以下两个耦合的速率方程来描述分子数目 N 和温度 T 随时间的演化 [69–71]:

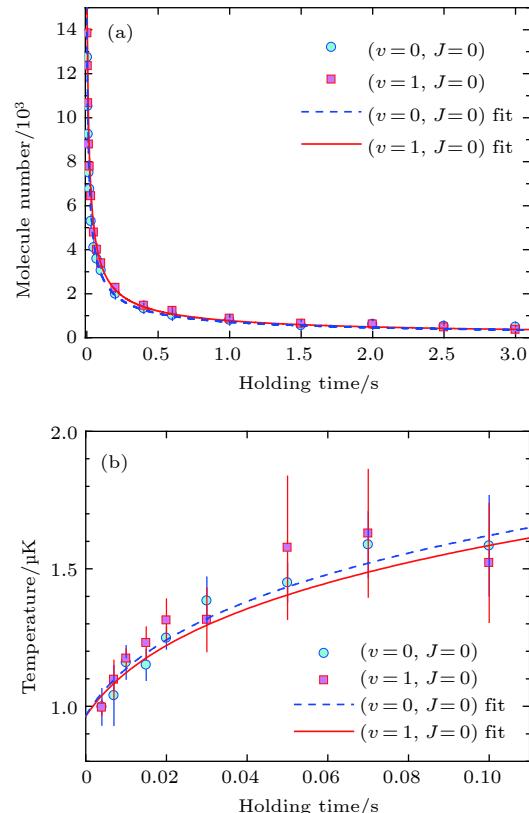


图 16 化学稳定 ($v = 0, J = 0$) 和有化学反应 ($v = 1, J = 0$) 的 $^{23}\text{Na}^{87}\text{Rb}$ 分子在光阱中的损耗 (a) 和加热 (b), 图中的曲线由通过对分子数目和温度同时拟合获得 [68]

Fig. 16. Inelastic collisions with different chemical reactivities of $^{23}\text{Na}^{87}\text{Rb}$ molecules. Time evolutions of (a) molecule numbers and (b) temperatures for both nonreactive ($v = 0, J = 0$) (filled circles) and reactive ($v = 1, J = 0$) (filled squares) samples in optical dipole trap. The blue dashed and red solid curves are fitting results of molecule number and temperature using Eq. (9) [68].

$$\begin{aligned} \frac{dN(t)}{dt} &= -\beta A \frac{N(t)^2}{T(t)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{dT(t)}{dt} &= \frac{\beta A N(t)}{4} \frac{1}{T(t)^{1/2}}, \end{aligned} \quad (9)$$

其中 $A = (m\bar{\omega}/4\pi k_B)^{3/2}$ 为一个常数, 通过 A 和 T 可以确定样品的体积, $\bar{\omega}$ 为分子在光阱中沿三个

方向振荡频率的几何平均. 图 16 中的曲线就是用(9)式同时对 N 和 T 随时间的演化拟合得到的.

为了验证有无化学反应情况下 $^{23}\text{Na}^{87}\text{Rb}$ 分子的损耗是否有区别, 利用 $^{23}\text{Na}^{87}\text{Rb}$ 分子的化学反应活性可以操控的特性, 来打开化学反应通道. 例如, 如图 13(b) 所示, 当 $^{23}\text{Na}^{87}\text{Rb}$ 分子被制备到 $v = 1$ 时, $^{23}\text{Na}^{87}\text{Rb} + ^{23}\text{Na}^{87}\text{Rb}$ 的结合能比 $^{23}\text{Na}_2 + ^{87}\text{Rb}_2$ 要小 108 cm^{-1} , 因此 $^{23}\text{Na}^{87}\text{Rb} (v = 1) + ^{23}\text{Na}^{87}\text{Rb} (v = 1) \rightarrow ^{23}\text{Na}_2 (v = 0) + ^{87}\text{Rb}_2 (v = 0)$ 为放热反应, 可以发生^[72–74]. 在实验中, 制备 $v = 1$ 态的 $^{23}\text{Na}^{87}\text{Rb}$ 分子可以比较容易地通过调节 dump 光的频率来实现.

图 16 中比较了两种化学活性不同的 $^{23}\text{Na}^{87}\text{Rb}$ 分子样品的数目和温度随时间的演化. 让人惊讶的是, 这样两种非常不同的情况下, 分子的损耗和加热几乎看不到区别. 图 17 是由损耗测量得到的 β 和样品温度的关系, 从中可以看到两种情况下, β 都随温度的增加而减小, 这和图 14(b) 中混合态 $^{40}\text{K}^{87}\text{Rb}$ 分子间的 s 波碰撞很不一样.

在超冷温度下, 一般认为粒子的散射应该在 Wigner 区, 即 $\beta \propto T^l$, 对 s 波, $l = 0$, 因而 β 应该是常数. 在 14(b) 中, 随温度的变化, $^{40}\text{K}^{87}\text{Rb}$ 分子的 s 波损耗速率基本保持不变, 这是和 Wigner 区

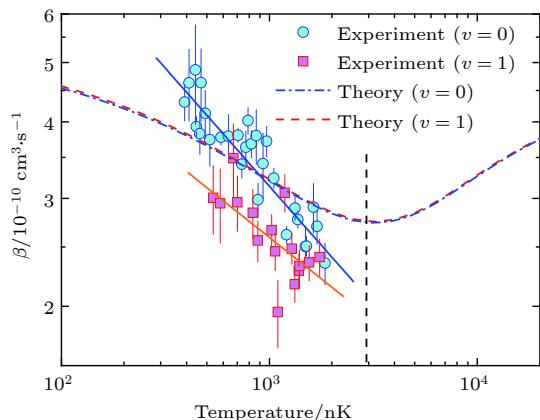


图 17 化学稳定 ($v = 0$) 和有化学反应 ($v = 1$) 的 $^{23}\text{Na}^{87}\text{Rb}$ 分子在光阱中的损耗速率常数 β 与温度的关系, 图中的理论曲线为基于普适模型计算的结果. 在化学稳定的情况下, 可能的损耗通道为形成四体复合物 (four-body complex)^[68]

Fig. 17. Temperature dependence of β for chemical stable ($v = 0$) and chemical reactivity state ($v = 1$) of $^{23}\text{Na}^{87}\text{Rb}$ molecules. Theoretical curve based on the CC calculation are also shown. Four-atom collision complex formation is one of the possible mechanism of molecule loss for non-reactive molecules^[68].

散射符合的, 而图 17 的结果表明 $^{23}\text{Na}^{87}\text{Rb}$ 分子的碰撞不在 Wigner 区. 这种区别是由于基态极性分子间的长程作用常数 C_6 主要是由分子的转动能级跃迁决定的, 其关系为 $C_6 \propto \frac{\mu_0^4}{B_v}$, 其中 B_v 为转动能级常数. 由于 $^{23}\text{Na}^{87}\text{Rb}$ 分子的永久电偶极矩 μ_0 比 $^{40}\text{K}^{87}\text{Rb}$ 分子大很多, 导致 $^{23}\text{Na}^{87}\text{Rb}$ 分子间的 C_6 比 $^{40}\text{K}^{87}\text{Rb}$ 大一个数量级. 相应地, $^{23}\text{Na}^{87}\text{Rb}$ 分子之间散射的特征长度 (范德瓦耳斯长度) $r_6 = \left(\frac{mC_6}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{4}}$ 达到 $720a_0$, 而特征能量 $E_6 = \frac{\hbar^2}{mr_6^2}$ 只有 $3 \mu\text{K}$, 由于 E_6 和温度差不多, 不能满足 Wigner 区散射的条件, 因此才会看到图 17 中的结果.

图 17 的结果还表明, 没有化学反应的分子间的碰撞损耗与温度的关系和有化学反应的情况确实很接近. 在相关的另外一些实验中, 如奥地利 Innsbruck 和英国 Durham 研究组的 $^{87}\text{Rb}^{133}\text{Cs}$ 实验中, 以及 MIT 的 $^{23}\text{Na}^{40}\text{K}$ 实验中, 都观察到没有化学反应的超冷极性分子中有类似的损耗. 这就引出了一个问题, 即在没有化学反应的情况下, 处于绝对基态的分子的损耗通道是什么? 目前, 由于对四原子分子势能曲面的精确计算还很困难, 因此对于这一问题还没有确定的答案.

对于这一问题, 现阶段最流行的解释是损耗是由形成四体复合物 (four-body complex) 引起的^[69,75]. 双原子分子的碰撞在短程涉及到四个原子, 由于系统的自由度较多, 描述它们之间的相互作用需要用到多维的势能曲面, 而且由于体系的质量较大, 势能曲面中的能态数目很大, 一般不能像双原子分子那样精确计算, 只能用态密度 (density of states) 描述. 在双原子分子的碰撞中, 两个分子由长程逐渐接近时, 可能会与很多个这些短程四体态共振, 在这种情况下, 两个分子会有很大的概率停留在一起, 形成一个不稳定的四体结构, 即四体复合物. 由于超冷分子实验的探测对四体复合物不敏感, 它们的形成就表现为分子的损耗. 图 17 中 $v = 0$ 分子损耗的理论曲线, 就是基于这个模型, 可以看出, 理论上这个模型确实和化学反应是一样的.

目前的实验数据和这一模型是符合的, 但实验中并没有直接探测到四体复合物的任何信号, 这主要是由于一般超冷实验中探测手段的限制. 为了更好地回答化学稳定的超冷分子的损耗问题, 需要探测分子碰撞后的直接产物^[76–78], 目前还没有任何

实验装置具备这种能力。最近, Harvard 大学 Ni 研究组^[79,80]利用光镊技术成功地形成了单个分子,如果这一实验可以扩展到两个分子,并能在单分子水平测量分子间的碰撞,也可能为解决这一问题提供很好的答案。

5 总结与展望

超冷极性分子的制备是一项很有挑战性的工
作, 经过将近 20 年的努力, 近几年终于取得了很多突破。目前, 利用超冷原子缔合技术, 几种碱金属双原子分子, 包括费米分子 $^{40}\text{K}^{87}\text{Rb}$ ^[26,45] 和 $^{23}\text{Na}^{40}\text{K}$ ^[48,49], 以及玻色分子 $^{87}\text{Rb}^{133}\text{Cs}$ ^[46, 47, 51] 和 $^{23}\text{Na}^{87}\text{Rb}$ ^[50], 都已经被成功地制备和研究; 而其他如 $^{23}\text{Na}^{133}\text{Cs}$ ^[79] 和 $^6\text{Li}^{40}\text{K}$ ^[81] 等的制备也都进展很快。而基态分子的直接冷却, 特别是激光冷却, 最近两年取得的进展十分令人瞩目, 随着一些技术问题的解决, 相信由这种方法获得的分子很快可以进行蒸发冷却, 以达到 $< 1 \mu\text{K}$ 的超冷温度。分子激光冷却这一技术可以应用于很多的分子, 如 2017 年, Harvard 大学的研究组已经成功展示了对多原子分子的激光冷却^[82]。可以预见, 分子直接激光冷却必将大大丰富超冷极性分子的研究内容。

本文对超冷分子的讨论主要着眼于研究超冷分子在长程作用下多体物理体系中的应用, 因而需要分子样品达到量子简并。虽然 JILA 的研究组已经获得了 KRb 分子的简并样品^[26], 但分子间的化学反应依然存在, 类似的方法是否可以应用到其他分子体系还需要进一步的研究。目前看来, 分子间相互作用的复杂程度远远超出了最初的想象, 特别是化学稳定分子样品的损耗问题, 使得进一步的分子的蒸发冷却变得很困难, 因此下一步的研究重点应该是揭示损耗的微观机理^[83]。特别需要指出的是, 这些损耗机理的研究和化学反应的机理是有深刻联系的。在超冷温度下, 由于分子的碰撞只能通过一个或少数几个分波进行, 化学反应的量子特性可以得到充分的体现, 因而这种极端条件下分子损耗机理的研究自身也是非常有价值的。按照复合物形成模型, 超冷分子的损耗问题有可能是不可避免的, 为了获得长寿命的样品, 可以利用一些方法对损耗进行压制。其中最直接的方法是把分子装载到三维光晶格中, 利用晶格势将分子隔绝开, 使得短程的碰撞不能发生。这种方法已经在 $^{40}\text{K}^{87}\text{Rb}$ 分子

上得到了验证^[84–86]。

不同温度的极性分子在其他方面的应用也同等重要, 一个最重要的例子就是利用极性冷分子进行电子电偶极矩 (eEDM) 的测量。非零的 eEDM 必然违反时间反演对称性 (T-violation), 从而导致违反电荷共轭和宇称对称性 (CP-violation), 也就预示着标准模型之外还有新的物理内容。由于 eEDM 非常小, 要利用光谱技术测量它就需要很大的电场以增强灵敏度, 而极化的极性分子的内部电场可以达到几十个 GV/cm, 因而非常适合用来寻找 eEDM。在 Harvard 大学和 Yale 大学合作的 ACME 项目中, 利用缓冲气体冷却技术得到的 ThO 分子束, 已经可以界定 eEDM 小于 $1.1 \times 10^{-29} \text{ e}\cdot\text{cm}$ ^[87]。目前, 已经有理论工作指出^[88], 利用温度更低的分子, 例如激光冷却的分子, 可以进一步界定 eEDM 的值, 从而验证是否有超越标准模型的新物理内容。

总之, 超冷分子还是一个较新的研究方向, 随着分子冷却技术的成熟, 可用的、适合研究不同物理内容的超冷分子样品会越来越多。虽然目前已经利用极性分子做了一些非常重要的工作, 但也只是超冷分子潜力的很小一部分, 因此这一方向未来还是大有可为的。

参考文献

- [1] Bloch I, Dalibard J, Zwerger W 2008 *Rev. Mod. Phys.* **80** 885
- [2] Gross C, Bloch I 2017 *Science* **357** 995
- [3] Chin C, Grimm R, Julienne P, Tiesinga E 2010 *Rev. Mod. Phys.* **82** 1225
- [4] Bohn J, Rey A, Ye J 2017 *Science* **357** 1002
- [5] Baranov M, Dalmonte M, Pupillo G, Zoller P 2012 *Chem. Rev.* **112** 5012
- [6] Moses S, Covey J, Miecnikowski M, Jin D, Ye J 2017 *Nat. Phys.* **13** 13
- [7] DeMille D 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 067901
- [8] Lahaye T, Menotti C, Santos L, Lewenstein M, Pfau T 2009 *Rep. Prog. Phys.* **72** 126401
- [9] Trefzger C, Menotti C, Capogrosso-Sansone B, Lewenstein M 2011 *J. Phys. B* **44** 193001
- [10] André A, DeMille D, Doyle J, Lukin M, Maxwell S, Rabl P, Schoelkopf R, Zoller P 2006 *Nat. Phys.* **2** 636
- [11] Carr L, DeMille D, Krems R, Ye J 2009 *New J. Phys.* **11** 055049
- [12] Griesmaier A, Werner J, Hensler S, Stuhler J, Pfau T 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 160401
- [13] Aikawa K, Frisch A, Mark M, Baier S, Rietzler A, Grimm R, Ferlaino F 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 210401
- [14] Lu M, Burdick N, Youn S, Lev B 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 190401
- [15] Ni K, Ospelkaus S, Wang D, Quéméner G, Neyenhuis B,

- Miranda M, Bohn J, Ye J 2010 *Nature* **464** 1324
- [16] Yi S, Li T, Sun C 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 260405
- [17] Gorshkov A, Manmana S, Chen G, Ye J, Demler E, Lukin M, Rey A 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 115301
- [18] Yao N, Gorshkov A, Laumann C, Läuchli A, Ye J, Lukin M 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 185302
- [19] Manmana S, Stoudenmire E, Hazzard K, Rey A, Gorshkov A 2013 *Phys. Rev. B* **87** 081106
- [20] Shuman E, Barry J, DeMille D 2010 *Nature* **467** 820
- [21] Hummon M, Yeo M, Stuhl B, Collopy A, Xia Y, Ye J 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 143001
- [22] Norrgard E, McCarron D, Steinecker M, Tarbutt M, DeMille D 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 063004
- [23] Anderegg L, Augenbraun B, Bao Y, Burchesky S, Cheuk L, Ketterle W, Doyle J 2018 *Nat. Phys.* **14** 890
- [24] Collopy A, Ding S, Wu Y, Finneran I, Anderegg L, Augenbraun B, Doyle J, Ye J 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 213201
- [25] Köhler T, Góral K, Julienne P 2006 *Rev. Mod. Phys.* **78** 1311
- [26] Marco L, Valtolina G, Matsuda K, Tobias W, Covey J, Ye J 2019 *Science* **aau** 7230
- [27] Aikawa K, Akamatsu D, Hayashi M, Oasa K, Kobayashi J, Naidon P, Kishimoto T, Ueda M, Inouye S 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 203001
- [28] Takekoshi T, Debatin M, Rameshan R, Ferlaino F, Grimm R, Nägerl H, Sueur C, Hutson J, Julienne P, Kotchigova S, Tiemann E 2012 *Phys. Rev. A* **85** 032506
- [29] Weinstein J, de Carvalho R, Guillet T, Friedrich B, Doyle J 1998 *Nature* **395** 148
- [30] Maxwell S, Brahmns N, de Carvalho R, Glenn D, Helton J, Nguyen S, Patterson D, Petricka J, DeMille D, Doyle J 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 173201
- [31] Xu L, Yin Y, Wei B, Xia Y, Yin J 2016 *Phys. Rev. A* **93** 013408
- [32] Chen T, Bu W, Yan B 2017 *Phys. Rev. A* **96** 053401
- [33] Bethlehem H, Berden G, Meijer G 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 1558
- [34] Sawyer B, Stuhl B, Wang D, Yeo M, Ye J 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 203203
- [35] Xia Y, Yin Y, Chen H, Deng L, Yin J 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 043003
- [36] Yin Y, Xu S, Xia M, Xia Y, Yin J 2018 *Phys. Rev. A* **97** 043403
- [37] Huang Y, Xu S, Yang X 2016 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **49** 135101
- [38] Rosa M 2004 *Eur. Phys. J. D* **31** 395
- [39] Stuhl B, Sawyer B, Wang D, Ye J 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 243002
- [40] Williams H, Caldwell L, Fitch N, Truppe S, Rodewald J, Hinds E, Sauer B, Tarbutt M 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 163201
- [41] Cheuk L, Anderegg L, Augenbraun B, Bao Y, Burchesky S, Ketterle W, Doyle J 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 083201
- [42] Jones K, Tiesinga E, Lett P, Julienne P 2006 *Rev. Mod. Phys.* **78** 483
- [43] Liu W, Wu J, Ma J, Li P, Sovkov V, Xiao L, Jia S 2016 *Phys. Rev. A* **94** 032518
- [44] Wu J, Liu W, Wang X, Ma J, Li D, Sovkov V, Xiao L, Jia S 2018 *J. Chem. Phys.* **148** 174304
- [45] Ni K, Ospelkaus S, Miranda M, Pérez A, Neyenhuis B, Zirbel J, Kotchigova S, Julienne P, Jin D, Ye J 2008 *Science* **322** 231
- [46] Takekoshi T, Reichsöllner L, Schindewolf A, Hutson J, Sueur C, Dulieu O, Ferlaino F, Grimm R, Nägerl H 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 205301
- [47] Molony P, Gregory P, Ji Z, Lu B, Köppinger M, Sueur C, Blackley C, Hutson J, Cornish S 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 255301
- [48] Park J, Will S, Zwierlein M 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 205302
- [49] Seeßelberg F, Luo X, Li M, Bause R, Kotchigova S, Bloch I, Gohle C 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 253401
- [50] Guo M, Zhu B, Lu B, Ye X, Wang F, Vexiau R, Bouloufa-Maafa N, Quéméner G, Dulieu O, Wang D 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 205303
- [51] Yang H, Zhang D, Liu L, Liu Y, Nan J, Zhao B, Pan J 2019 *Science* **363** 261
- [52] Wang F, He X, Li X, Zhu B, Chen J, Wang D 2015 *New J. Phys.* **17** 035003
- [53] Wang F, Xiong D, Li X, Wang D, Tiemann E 2013 *Phys. Rev. A* **87** 050702
- [54] Guo M, Vexiau R, Zhu B, Lu B, Bouloufa-Maafa N, Dulieu O, Wang D 2017 *Phys. Rev. A* **96** 052505
- [55] Aikawa K, Akamatsu D, Kobayashi J, Ueda M, Kishimoto T, Inouye S 2009 *New J. Phys.* **11** 055035
- [56] Aikawa K, Kobayashi J, Oasa K, Kishimoto T, Ueda M, Inouye S 2011 *Opt. Express* **19** 14479
- [57] Gregory P, Molony P, Köppinger M, Kumar A, Ji Z, Lu B, Marchant A, Cornish S 2015 *New J. Phys.* **17** 055006
- [58] Vexiau R, Borsalino D, Lepers M, Orbán A, Aymar M, Dulieu O, Bouloufa-Maafa N 2017 *Int. Rev. Phys. Chem.* **36** 709
- [59] Guo M, Ye X, He J, Quéméner G, Wang D 2018 *Phys. Rev. A* **97** 020501
- [60] Lepers M, Vexiau R, Aymar M, Bouloufa-Maafa N, Dulieu O 2013 *Phys. Rev. A* **88** 032709
- [61] Żuchowski P, Kosicki M, Kodrycka M, Soldán P 2013 *Phys. Rev. A* **87** 022706
- [62] Byrd Jr J, Côté R 2010 *Phys. Rev. A* **82** 010502
- [63] Ospelkaus S, Ni K, Wang D, Miranda M, Neyenhuis B, Quéméner G, Julienne P, Bohn J, Jin D, Ye J 2010 *Science* **327** 853
- [64] Krems R 2008 *Phys. Chem. Chem. Phys.* **10** 4079
- [65] Quéméner G, Bohn J 2010 *Phys. Rev. A* **81** 022702
- [66] Quéméner G, Bohn J, Petrov A, Kotchigova S 2011 *Phys. Rev. A* **84** 062703
- [67] Jones K, Maleki S, Bize S, Lett P, Williams C, Richling H, Knöckel H, Tiemann E, Wang H, Gould P, Stwalley W 1996 *Phys. Rev. A* **54** R1006
- [68] Ye X, Guo M, González-Martínez M, Quéméner G, Wang D 2018 *Sci. Adv.* **4** eaao0083
- [69] Guo M, Ye X, He J, González-Martínez M, Vexiau R, G Quéméner, Wang D 2018 *Phys. Rev. X* **8** 041044
- [70] Söding J, Guéry-Odelin D, Desbiolles P, Ferrari G, Dalibard J 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 1869
- [71] Weber T, Herbig J, Mark M, Nägerl H, Grimm R 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 123201
- [72] Seto J, Roy R, Vergès J, Amiot C 2000 *J. Chem. Phys.* **113** 3067
- [73] Pashov A, Docenko O, Tamanis M, Ferber R, Knöckel H, Tiemann E 2005 *Phys. Rev. A* **72** 062505
- [74] Żuchowski P, Hutson J 2010 *Phys. Rev. A* **81** 060703
- [75] Mayle M, Quéméner G, Ruzic B, Bohn J 2013 *Phys. Rev. A* **87** 012709
- [76] Gao B 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 263203
- [77] Idziaszek Z, Julienne P 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 113202
- [78] González-Martínez M, Dulieu O, Larrégaray P, Bonnet L

- 2014 *Phys. Rev. A* **90** 052716
- [79] Liu L, Hood J, Yu Y, Zhang J, Hutzler N, Rosenband T, Ni K 2018 *Science* **360** aar7797
- [80] Liu L, Zhang J, Yu Y, Hutzler N, Liu Y, Rosenband T, Ni K 2018 *Science* **360** 900
- [81] Lam M 2017 Ph.D. Dissertation (Singapore: National University of Singapore)
- [82] Kozryev I, Baum L, Matsuda K, Augenbraun B, Anderegg L, Sedlack A, Doyle J 2017 *Phys. Rev. Lett.* **118** 173201
- [83] González-Martínez M, Bohn J, Quéméner G 2017 *Phys. Rev. A* **96** 032718
- [84] Danzl J, Mark M, Haller E, Gustavsson M, Hart R, Aldegunde J, Hutson J, Nägerl H 2010 *Nat. Phys.* **6** 265
- [85] Doçaj A, Wall M, Mukherjee R, Hazzard K 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 135301
- [86] Chotia A, Neyenhuis B, Moses S, Yan B, Covey J, Foss-Feig M, Rey A, Jin D, Ye J 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 080405
- [87] Andreev V, Ang D, DeMille D, Doyle J, Gabrielse G, Haefner J, Hutzler N, Lasner Z, Meisenhelder C, O'Leary B, Panda C, West A, West E, Wu X 2018 *Nature* **562** 355
- [88] Kozryev I, Hutzler N 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 133002

SPECIAL TOPIC—Cold atoms and molecules

Ultracold dipolar molecules*

Lu Bo¹⁾ Wang Da-Jun^{2)†}

1) (*Laboratory of Quantum Engineering and Quantum Metrology, School of Physics and Astronomy,*

Sun Yat-Sen University (Zhuhai Campus), Zhuhai 519082, China)

2) (*Department of Physics, The Chinese University of Hong Kong, Shatin, Hong Kong, China*)

(Received 26 December 2018; revised manuscript received 15 February 2019)

Abstract

The research field of ultracold atoms has expanded from atomic and molecular physics to a variety of fields. Ultracold polar molecules have long range and anisotropic dipole-dipole interactions, and similar to atoms, can also be conveniently manipulated by laser and other electromagnetic fields. Thus, ultracold molecules offer promising applications such as ultracold chemistry, quantum simulation, and quantum information. However, due to the difficulty in creating ultracold ground state molecules, expanding the horizon of ultracold physics from atoms to molecules is still under development. In the past decade, many research groups have successfully created bi-alkali rovibrational ground state polar molecules using magneto association and stimulated Raman adiabatic passage (STIRAP). This paper presents a review of the recent progress including creating and manipulating ultracold molecules with this method, and the collision property of molecules at ultracold temperature.

Keywords: ultracold dipolar molecule, dipolar interaction, ultracold chemical reactivity, quantum simulation

PACS: 33.15.-e, 33.80.-b, 34.50.-s, 82.30.Cf

DOI: 10.7498/aps.68.20182274

* Project supported by the National Basic Research Program of China (Grant No. 2014CB921403) and the RGC General Research Fund, China (Grant No. CUHK14301815).

† Corresponding author. E-mail: djwang@cuhk.edu.hk

极性分子的激光冷却及囚禁技术

陈涛 颜波

Laser cooling and trapping of polar molecules

Chen Tao Yan Bo

引用信息 Citation: [Acta Physica Sinica](#), 68, 043701 (2019) DOI: 10.7498/aps.68.20181655

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181655>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

激光冷却OH分子的理论研究

Laser cooling of OH molecules in theoretical approach

物理学报. 2017, 66(23): 233101 <https://doi.org/10.7498/aps.66.233101>

基于ab initio的BD+离子激光冷却理论研究

Theoretical investigation of laser cooling for BD+cation by ab initio calculation

物理学报. 2017, 66(16): 163101 <https://doi.org/10.7498/aps.66.163101>

超冷极性分子

Ultracold dipolar molecules

物理学报. 2019, 68(4): 043301 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20182274>

亚微米局域空心光束的产生及其在单原子囚禁与冷却中的应用理论研究

Theoretical research on the generation of a submicron localized hollow beam and its applications in the trapping and cooling of a single atom

物理学报. 2016, 65(11): 114101 <https://doi.org/10.7498/aps.65.114101>

AlH⁺离子5个-S态和10个态的光谱性质以及激光冷却的理论研究

Theoretical study of spectroscopic properties of 5 -S and 10 states and laser cooling for AlH⁺ cation

物理学报. 2018, 67(19): 193101 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180926>

专题：冷原子-分子物理

极性分子的激光冷却及囚禁技术^{*}陈涛 颜波[†]

(浙江大学物理系, 现代光学仪器国家重点实验室, 杭州 310027)

(2018年9月5日收到; 2019年1月7日收到修改稿)

分子由于其不同于原子的特殊性质, 在原子、分子和光物理研究中有其独特的地位。冷分子研究已经开展了二三十年, 取得了很多重大的进展。但是以斯塔克减速器为代表的传统冷却方案遇到瓶颈, 很难进一步提高分子的相空间密度。将原子中成熟的激光冷却技术拓展到极性分子中是本领域近年来的重大突破, 使得冷却和囚禁分子的范围得以大大扩展, 分子的相空间密度也得以提高。本文对国内外激光冷却极性分子的最新成果进行综述, 并以 BaF 分子为例介绍激光冷却极性分子的相关理论和技术, 包括分子能级结构分析及精密光谱测量, 采用缓冲气体冷却进行态制备和预冷却, 以及通过冷分子束研究激光与 BaF 分子间的相互作用。这些为后续开展激光冷却与囚禁实验研究奠定了基础, 也为开展其他新的分子冷却实验提供了参考。

关键词: 激光冷却, 冷分子, 缓冲气体冷却, 光与分子相互作用

PACS: 37.10.De, 37.10.Mn

DOI: 10.7498/aps.68.20181655

1 引言

在过去二三十年里, 激光冷却与囚禁相关实验技术的进步为原子、分子和光物理以及量子物理的发展开启了新的篇章, 深刻地改变了这些学科的面貌。以激光冷却为代表的冷原子技术, 在许多方面找到了重要的科学应用, 包括基于冷原子的喷泉钟^[1]、光钟^[2]、物质波干涉仪^[3]等精密测量, 以及强关联简并量子气体在量子模拟方面^[4]的广泛应用。自从第一次在实验上实现稀薄碱金属原子的玻色-爱因斯坦凝聚 (BEC) 以来^[5-7], 实现量子简并 (BEC 或简并费米气体) 的原子种类已经相当多, 包括碱金属原子的几乎所有同位素, 碱土金属原子和稀土金属原子, 如 Cr^[8,9]、Dy^[10,11]、Er^[12] 原子等。在超冷原子中, 系统的各个自由度可以进行精确的调控, 使得基于超冷原子的量子模拟成为新的热点研究方向。可以说, 冷原子及超冷原子技术的发展已经到

了非常成熟的阶段, 怎么应用和拓展这些技术是今后需要重点考虑的方向。作为原子的直接推广, 分子更加复杂, 应用也更加广泛, 因此冷分子越来越受到重视。如何将激光冷却的技术应用于冷却分子, 一直是人们的梦想。随着一系列理论和实验的研究突破, 直接激光冷却分子快速发展起来, 并激起越来越多研究组的兴趣。

相对于原子而言, 分子具有更加丰富的内在自由度, 多个原子的原子核之间相对运动引入额外的振动自由度与转动自由度。这些复杂的能级结构给分子的冷却带来了很大的挑战, 也使得冷分子在精密测量^[2,13-16] 及多体物理领域的应用^[17-19] 有其独特的优势。比如, 一些重要物理常数的测量^[14-20] 在分子中的精度能够达到更高, 特别是用于检验标准模型的电子电偶极矩 (eEDM) 的测量^[21-24], 以及研究弱相互作用引起的 P-T 对称性^[14-25] 等。另一方面, 极性分子具有较大的电偶极矩且存在偶极-偶极相互作用 (DDI), 很容易通过调节外加电

* 国家重点研发计划(批准号: 2018YFA0307200)、国家自然科学基金(批准号: 91636104)和浙江省自然科学基金(批准号: LZ18A040001)资助的课题。

† 通信作者。E-mail: yanbohang@zju.edu.cn

场来操控。原子中的相互作用通常认为是短程的、各向同性的，而分子中的这种偶极相互作用则是长程的，各向异性的；而且其强度相对于磁性原子的磁偶极相互作用而言大两个量级。长程偶极-偶极相互作用是产生许多新奇量子效应的基础，包括在量子模拟（探索强关联体系中新的量子相变过程^[17]以及分数霍尔效应^[26]等）、量子计算^[27,28]和量子信息处理^[29,30]等方面的应用。另外，冷分子的制备也为研究超冷条件下化学反应过程^[31–33]奠定了基础，包括超冷温度下分子的碰撞性质，以及实现化学反应的可操控性^[34,35]等。可以说，分子，特别是冷分子提供了比原子中更加丰富的研究方向，因此，研究冷分子的制备方法和性质具有广泛的科学价值和应用价值。

获取冷分子的方法粗略地可以分为两大类，我们称之为间接冷却和直接冷却。所谓间接冷却的方案是先用成熟的技术将原子冷却，然后再合成分子。具体而言，首先制备多组分超冷原子气体，然后通过外加磁场或光场的方式缔合形成弱束缚态分子，接着采用受激拉曼绝热布居（STIRAP）方法将分子转移到绝对基态（最低振动态和转动态）^[36]。这种方案形成的冷分子样品的温度能够达到nK量级^[37]，且具有很高的相空间密度^[4]。目前制备的绝对基态极性分子有KRb^[36]、RbCs^[38,39]、NaK^[40]和NaRb^[41]。值得一提的是，KRb分子的相空间密度已经足够用来测量长程的偶极相互作用^[42]，而目前KRb分子被制备到量子简并态是这个领域一个重大的突破^[43]；而NaK分子则由于具有很好的碰撞性质而被广泛关注，即不存在 $2\text{NaK} \rightarrow \text{Na}_2 + \text{K}_2$ 过程^[44]。上述的几种分子均为碱金属双原子分子，是闭壳层分子；另一类通过缔合碱金属原子和碱土金属原子实现开壳层分子的制备实验也在不断发展，比如RbYb^[45–47]、LiYb^[48–52]、RbSr^[53]和CsYb^[54]。特别是最近观察到的Rb-Sr混合气体在磁场下的Feshbach共振现象^[55]给制备这类分子提供了新的思路，但寻找STIRAP路径仍然是一个挑战。

不同于间接冷却，直接冷却方案是先有分子，然后通过各种手段（电场、磁场、光场等）对它进行冷却。这种方案可以应用于更一般更广泛的分子，如OH^[56]、SrF^[57,58]、YbF^[59]、H₂CO^[60]、NH^[61]、LiH^[62]等。早期发展起来的斯塔克减速器是一个经典的方法^[32]。后来还有磁场以及光场减速方案。但

是这些方案难以将分子冷却到<1 mK的区域，而且由于减速作用力均是保守力，无法提高分子的相空间密度^[56,63–65]。既然保守力场有限制，耗散力会是一个好的选择。激光冷却正是利用了光子的耗散力。对于某一类具有较好的弗兰克-康顿系数（Franck-Condon Factor）的双原子分子^[66]，近年来发展起来的直接激光冷却分子技术取得了巨大的成功。SrF和YO分子的激光冷却(<1 mK)分别在耶鲁大学DeMille研究组和JILA叶军研究组实现^[67–69]，后来CaF分子也被激光冷却，并且实现了光学黏团(50 μK)^[70]、磁阱囚禁^[71]和光阱囚禁^[72]，以及横向温度为100 μK的YbF分子束^[73]近期被实现，分子的温度不断被压缩，而且不断有新的技术和理论方案发展起来。而且最近SrF的磁阱^[74]和YO的3D-MOT^[75]也已实现。除了以上提到的研究组，目前国际上很多其他研究组也都开始了这方面的研究，包括哈佛大学(CaF分子，SrOH分子)^[76,77]、哥伦比亚大学(BaH分子)^[78]、德国斯图加特大学等。国内这方面研究也刚刚兴起，除了浙江大学以外，华东师范大学也开展了MgF分子的激光冷却研究^[79]，也期望国内能有更多的研究组加入这个领域。

激光冷却分子的闭合跃迁要求分子富集在较低的几个振动态和转动态^[66]。如何高效地将热分子制备到所需的振转动态形成高质量的冷分子束，是决定激光冷却能够获得的分子数目的重要因素之一，目前主要采用缓冲气体冷却技术来实现这一目标^[80]。缓冲气体冷却是一项通用的技术，适用于各种不同类型分子的冷却，结合缓冲气体冷却和激光冷却的方案已经被广泛认可和采用。极性分子的直接激光冷却方案大体分为如下几个步骤：1) 分子样品的制备，通常通过激光消融或者化学方法产生；2) 缓冲气体冷却进行态制备和预冷却，获得冷分子束；3) 横向冷却，分子束的压缩；4) 分子束的纵向激光减速，获得可观数目的在磁光阱俘获速度附近的分子；5) 分子磁光阱及光学黏团；6) 囚禁与态纯化；7) 协同冷却以实现量子简并。目前我们开展的BaF分子的激光冷却研究尚处在致力于实现分子束的横向压缩阶段，因此接下来我们将以BaF分子为例来详细介绍分子的产生方法、缓冲气体冷却以及闭合跃迁的验证，而对于后续的激光减速和磁光阱实验等则是结合国际上的最新进展做一个简要的概述。在中文文献方面，《物

理》杂志发表的一系列关于冷分子的综述文章是非常好的参考^[81–85], 而本文的重心在激光冷却和囚禁极性分子领域.

2 分子的产生与缓冲气体冷却

目前可以直接激光冷却的分子通常在自然界中不能稳定存在, 需要通过物理或者化学方法生成, 比如激光消融技术. 通过激光消融获得的分子的温度很高, 在约 1000 K 左右. 对于双原子分子, 通常振动态能级间隔用温度来衡量的话, 在几百到上千开尔文的温度之间. 而转动态之间的间隔在几个开尔文的数量级. 根据玻尔兹曼分布, 在这么高的温度下分子大部分处于高能态(几个低振动态, 非常多的转动态上). 如果不进行布居压缩, 能用来进行冷却的分子非常少. 因此对分子进行预冷却很有必要. 缓冲气体冷却技术被证明是一种非常有效的方案, 被广泛用来产生冷分子束^[80]. 通过分子与缓冲气体之间的非弹性碰撞将分子各个自由度都冷却下来^[86–88], 不仅分子的运动速度减小, 还将分

子集中聚集到激光冷却需要的能级上.

实验上常用的产生分子的方法有两种: 直接激光消融^[80] 和化学反应^[89,90]. 激光消融是用高能量的脉冲激光轰击样品产生需要的分子. 化学反应则是通过不同气体混合化学反应产生需要的分子. 从目前的一些实验结果看, 化学反应方法能够更高效的生成分子. 激光消融会产生很多其他分子, 因此产生分子的效率低一些, 好处是相对来说简单一些. 目前我们实验中采用激光消融 BaF₂ 产生 BaF 分子. 关于消融激光的参数设置和 BaF₂ 靶材样品的制作这里不再详述^[91]. 激光消融和吸收光谱的测量在缓冲腔内完成, 如图 1(a). 4 K 缓冲腔的温度由低温装置维持^[91]. 消融激光通过透镜聚焦后作用在置于缓冲腔后壁上 BaF₂ 靶材样品上. 860 nm 探测激光通过缓冲腔, 由一光电管 (PD) 监测其光强. 一旦有 BaF 分子产生, 且 860 nm 激光耦合到 $|X^2\Sigma, v = 0\rangle \leftrightarrow |A^2\Pi_{1/2}, v = 0\rangle$ 中的跃迁, 就会出现吸收现象, 光电管信号会出现一个凹陷. 吸收信号在时间尺度上也能反映 BaF 分子与缓冲气体的碰撞过程. 860 nm 激光由自制的外腔半导体

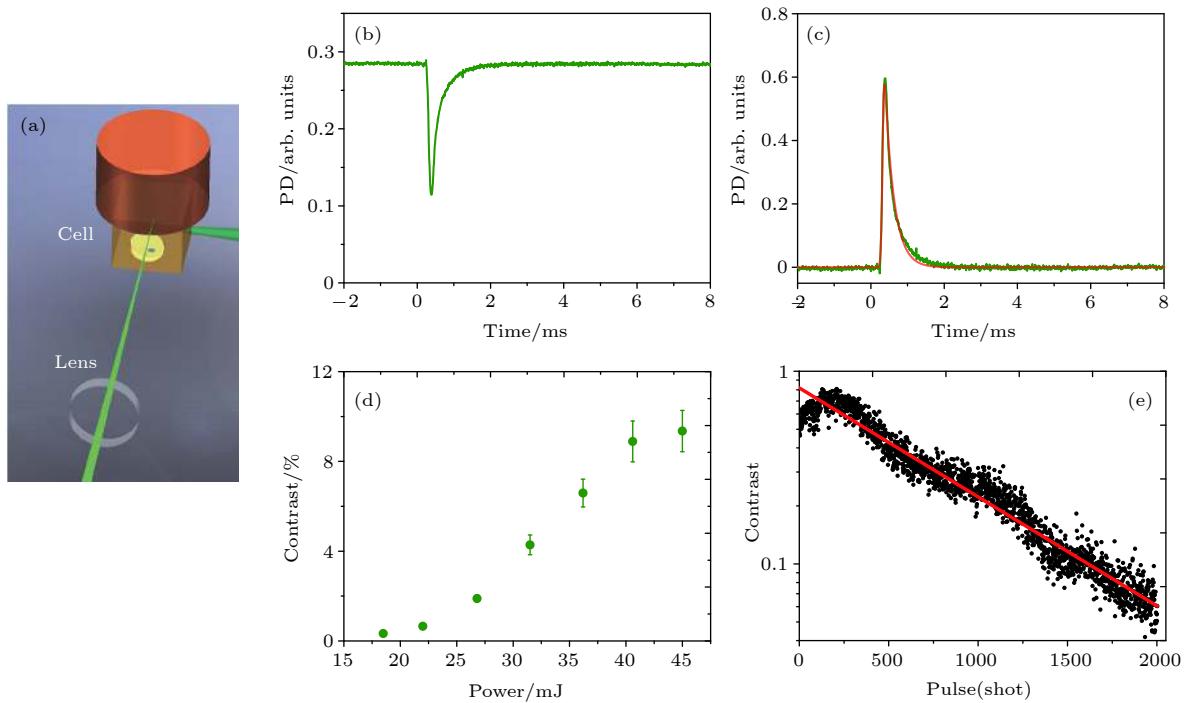


图 1 激光消融示意图及实验数据^[91] (a) 激光消融产生 BaF 分子示意图; (b) 分子吸收信号, 消融激光在 $t = 0$ ms 时打开; (c) 对吸收信号做归一化处理和拟合; (d) 吸收信号与消融激光输出功率的关系; (e) 当消融靶材上固定某一位置处, 消融激光轰击次数越多, 分子吸收信号越差. 消融脉冲频率为 2 Hz, He 气速流为 5 sccm

Fig. 1. Experimental scheme and laser ablation data^[91]. (a) Scheme for the production of BaF molecule via laser ablation; (b) absorption signal; (c) normalizaiton and fit of the absorption signal; (d) the generated molecular number versus the output power of the ablation laser; (e) the dependence of the molecular number on the ablating times when successively ablating a position of the target. The repetition rate of the laser pulse is 2 Hz and the flow rate of the He gas is 5 sccm.

激光器 (EDL) 产生^[92], 采用传递腔方案来实现锁频^[93].

消融激光单次脉冲产生的吸收信号如图 1(b). 为了与分子数目相对应, 首先将吸收信号进行归一化处理, 即 $c = 1 - I_{\text{abs}}/\text{Max}(I_{\text{abs}})$, 并对处理后的信号进行拟合, 如图 1(c) 所示, 拟合函数定义为 $y = Ae^{-(t-t_0)/\tau_d}[1 + e^{-(t-t_0)/\tau_1}]^{-1}$, 其中, τ_1 和 τ_d 分别反映分子的产生速度和在缓冲腔内的衰减速度, 而对比度 A 则反映了产生的分子数目. 图 1(d) 给出了产生分子数与消融光功率间的关系, 可见其在 40 mJ 左右开始饱和. 而且实验中如果单纯地为了获得高的分子数而盲目增大消融光的功率并不可取, 因为从缓冲喷出的冷分子束的速度也会随功率的增大而增大, 不利于开展后续实验. 另一个问题是在消融光一直聚焦在靶材上同一个位置时, 随着脉冲次数的增加, 产生的分子数目会衰减. 如图 1(e), 靶材上单点的消融寿命约为几百次, 对比度与消融脉冲次数呈指数衰减关系. 为了较高效率地产生分子, 实验中需要不断调整消融光的聚焦位置. 另外, 脉冲频率过高, 如 10 Hz, 获得的分子信号较差, 因此, 实验中脉冲激光通常工作在 1 Hz 或 2 Hz.

腔内缓冲气体冷却的效率与分子和 He 的碰撞截面相关. 碰撞截面的大小可以根据腔内吸收信号的衰减常数 τ_d 来估算. 当腔内 He 密度较低时, 即实验中 He 速流小于 5 sccm(标准毫升/分钟) 时, 衰减常数 τ_d 与 He 的密度及碰撞截面均呈正比^[86–94]. 实验中, 通过测量不同速流下的衰减常数, 拟合出 BaF 分子与 He 缓冲气体的碰撞截面 $\sigma_d = 1.4(7) \times 10^{-14} \text{ cm}^2$. 这里误差主要来源于腔内 He 密度的估计以及缓冲腔几何结构参数的估算^[91]. 我们估计的碰撞截面与其他分子(如 SrF^[68]) 和 He 缓冲气体的碰撞截面在数量级上一致, 说明对 BaF 分子进行缓冲气体冷却能够有效地工作.

除了减小分子的运动速度, 缓冲气体预冷却的另一个目的是将分子的布居压缩到较低的振动态和转动态. 通常来说, 两个相邻振动态之间的能级间隔在约 1000 K 量级. 即使在常温下(300 K), 大部分分子仍占据振动态基态. 因此, 振动态的冷却对于激光冷却而言问题不大. 然而, 对于转动态, 能级间隔在 1 K 量级. 在常温下, 分子布居分布在很多高转动态上. 而激光冷却只用到一个或者少数几个低转动态, 分布于低转动态的分子数目过少不

利于开展激光冷却实验. 图 2(a) 给出根据玻尔兹曼分布计算得到的不同温度下各个转动态分子布居数的分布, 可见将分子转动态温度从常温冷却到 4 K, 低转动态分子布居数将提高两个量级. 实际实验中, BaF 分子在缓冲气体冷却之后, 处于低转动态的分子数目确实大大提高, 如图 2(b). 我们通过测量 $P(N)$ 分支跃迁 ($|N, J\rangle \rightarrow |N' = N-1, J' = J-1\rangle$) 的光谱来确定各个转动态的分子布居数. 对于 $N = 0$ 转动态, 我们采用 $Q(0)$ 跃迁的测量结果^[91]. 图 2(b) 给出了采用玻尔兹曼分布拟合的转动态温度为 4.0(7) K, 符合我们的预期. 而缓冲气体冷却对振动态远不如对转动态的冷却效果那么明显^[95]. 理论上, 在 4 K 温度下处于 $v = 1$ 振动态的分子布居很少, 几乎为零, 如图 2(c). 然而, 实验中我们仍然观测到了从 $|X, v = 1\rangle$ 到 $|A, v' = 0\rangle$ 跃迁的吸收信号, 尽管相对 $v = 0$ 的信号来说非常弱, 如图 2(d) 所示. 而且实验中需要进行很长时间的平均来提高信噪比. 根据这两个吸收信号的强度, 我们估计 $v = 1$ 上的分子布居数比 $v = 0$ 小一到两个量级. 至此, 我们完成了制备 BaF 分子源, 并利用缓冲气体冷却技术实现内态的高效压缩.

3 验证准闭合跃迁

由于单个光子所带走的原子或者分子的动量非常少, 一般激光冷却都需要散射很多(10^4 量级)光子数来获得好的冷却效果. 因此能级之间的闭合循环跃迁是激光冷却的必要条件. 如果存在暗态(激光不和这个能态相互作用), 则激光冷却就进行不下去. 不同于原子, 分子包含更多的内在自由度, 需要更多的再泵浦光来消除暗态, 这使得寻找激光冷却所需的闭合跃迁相当困难, 也大大限制了能够进行激光冷却的分子的种类. 通常, 振动态的闭合依赖于对角化分布的弗兰克-康顿系数(FCFs). 根据计算的 $A^2\Pi_{1/2} \rightarrow X^2\Sigma$ 跃迁的 FCFs^[96], 振动态的闭合方案如图 3(a) 所示, 仅需要两束再泵浦光 ($|X, v = 1\rangle \rightarrow |A, v' = 0\rangle$ 和 $|X, v = 2\rangle \rightarrow |A, v' = 1\rangle$). 因为 $|A, v' = 0\rangle \rightarrow |X, v \geq 3\rangle$ 跃迁的 FCFs 为 $q_{03} = 2.7 \times 10^{-5}$, 采用这种方案能够实现约 3×10^4 个光子的散射, 直到分子占据 $|X, v \geq 3\rangle$ 暗态. 这里暂时不考虑 Δ 态的问题. 磁光阱(MOT) 实验中或许有必要增加一束 $|X, v = 3\rangle \rightarrow |A, v' = 2\rangle$ 再泵浦光来散射更多的光子^[68]. 转动态暗态可以根据选择定则来完全消除. 基态 $X^2\Sigma_{1/2}$

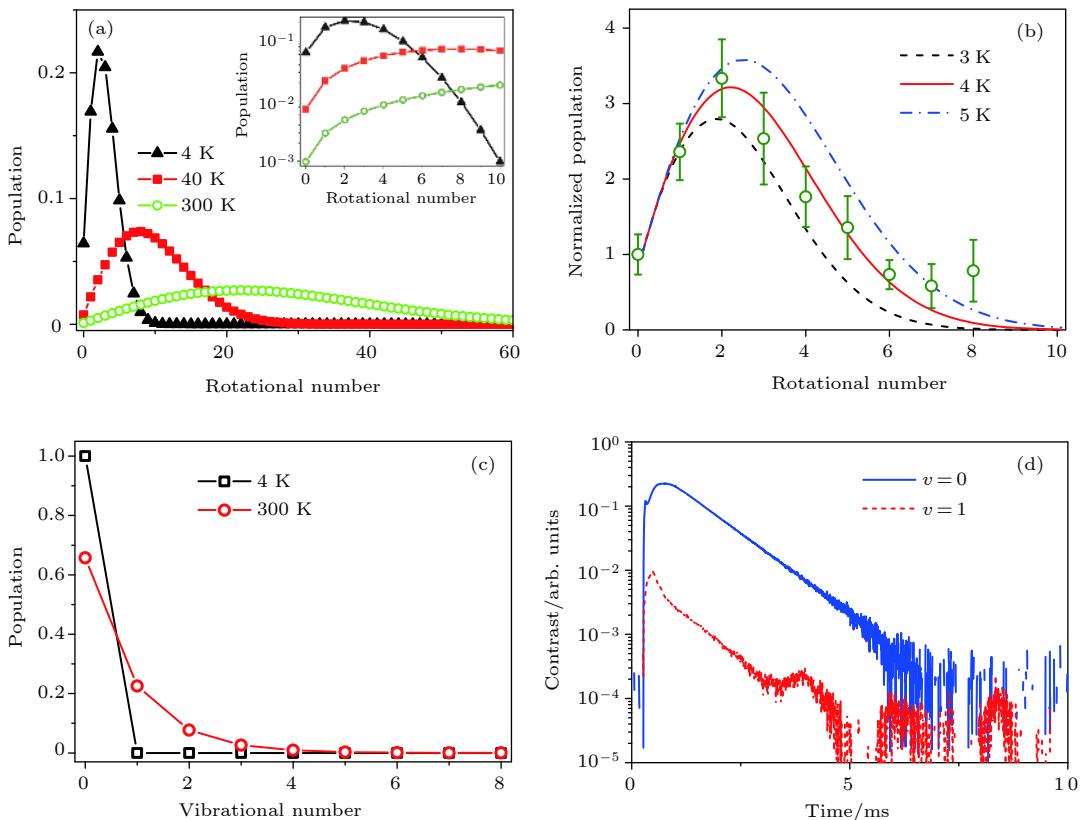


图 2 分子在不同能级的布居分布^[91] (a) 理论上根据玻尔兹曼分布计算不同温度下各个转动态上分子布居数的比例; (b) 转动温度的测量与拟合. 这里各个转动态的布居数均以测量的 $N = 0$ 态的布居数进行归一化; (c) 4 K 和 300 K 温度下振动态布居数的分布; (d) 实验测量的对 $|X, v = 0\rangle \rightarrow |A, v' = 0\rangle$ (蓝色) 和 $|X, v = 1\rangle \rightarrow |A, v' = 0\rangle$ (红色) 跃迁的吸收信号

Fig. 2. Molecular distribution at different states^[91]. (a) Theoretic calculation of the rotational distribution for different temperatures; (b) experimental data for different rotational populations. All data are normalized with $N = 0$ population; (c) theoretic calculation of the vibrational distribution; (d) experimental absorption signal for $v = 0$ and $v = 1$ molecules from laser ablation.

属于洪德情况 b, 转动量子数 N 是好量子数, 电子态波函数是偶宇称的 ($P = +1$), 因此转动态波函数的宇称 $P = (-1)^N$. 激发态 $A^2\Pi_{1/2}$ 满足洪德情况 a, 好量子数为 $J = N + \Omega$, 因此 $|A^2\Pi_{1/2}, J' = 1/2\rangle$ 态具有二重简并结构 (A -doublets), 分别对应于奇宇称 ($\Lambda = -1$) 和偶宇称 ($\Lambda = +1$) 的电子态波函数. 电偶极矩跃迁的宇称选择定则要求跃迁前后的分子态的宇称相反, 而角动量选择定则则要求 $\Delta J = 0, \pm 1$. 于是, 选择 $|X, N = 1, -\rangle \rightarrow |A, J' = 1/2, +\rangle$ 跃迁能完全闭合转动态, 因为处于 $|A, J' = 1/2, +\rangle$ 态的分子只能自发辐射回到奇宇称的 $N = 1$ 转动态, 如图 3(b) 所示.

光泵浦还需要考虑基态和激发态的能级分裂. 激发态 $|J' = 1/2, +\rangle$ 的超精细分裂很小, 在约 MHz 量级, 可认为简并^[97]. 而基态 $|N = 1, -\rangle$ 存在 4 个超精细子能级, 如图 3(b), 冷却光和再泵浦光需要同时覆盖相应的 4 个频率. 实验中通过一共振型电调制器 (EOM) 对激光调制获得这 4 个频率边

带. 调节 EOM 的调制深度, 可以控制各个边带的光强分布, 我们使用一 F-P 腔来监测. 根据超精细能级之间的间隔^[96], EOM 的共振频率设为 38 MHz, 射频信号强度为 15 dBm 时, 得到的 ± 1 和 ± 2 级边带光强接近, 而且 0 级中心频率光强几乎为 0, 如图 3(c) 所示. 为了观察边带调制的效果, 我们在缓冲腔出口下游约 35 cm 处用一雪崩光电管 (APD) 来记录冷分子束 (纵向速度 $u_0 \approx 200$ m/s) 的激光诱导荧光 (LIF) 信号. 在时序上通过连续记录分别在不加调制和加上调制情况下的两个时间飞行 (ToF) 信号, 并进行多次平均来提高信噪比, 如图 3(d), 容易看出增加边带调制后信号峰值增强约 2.5 倍. 这种增强现象容易理解, 因为更多的处于子能级的分子被激发, 散射光子数自然提高.

磁子能级暗态的消除通常有两种方案, 一种是对激光的偏振进行调制^[67], 另一种是加上一个方向与光偏振存在角度的磁场^[57]. 实验中, 我们分别验证了这两种方案对 BaF 分子的可行性. 偏振调

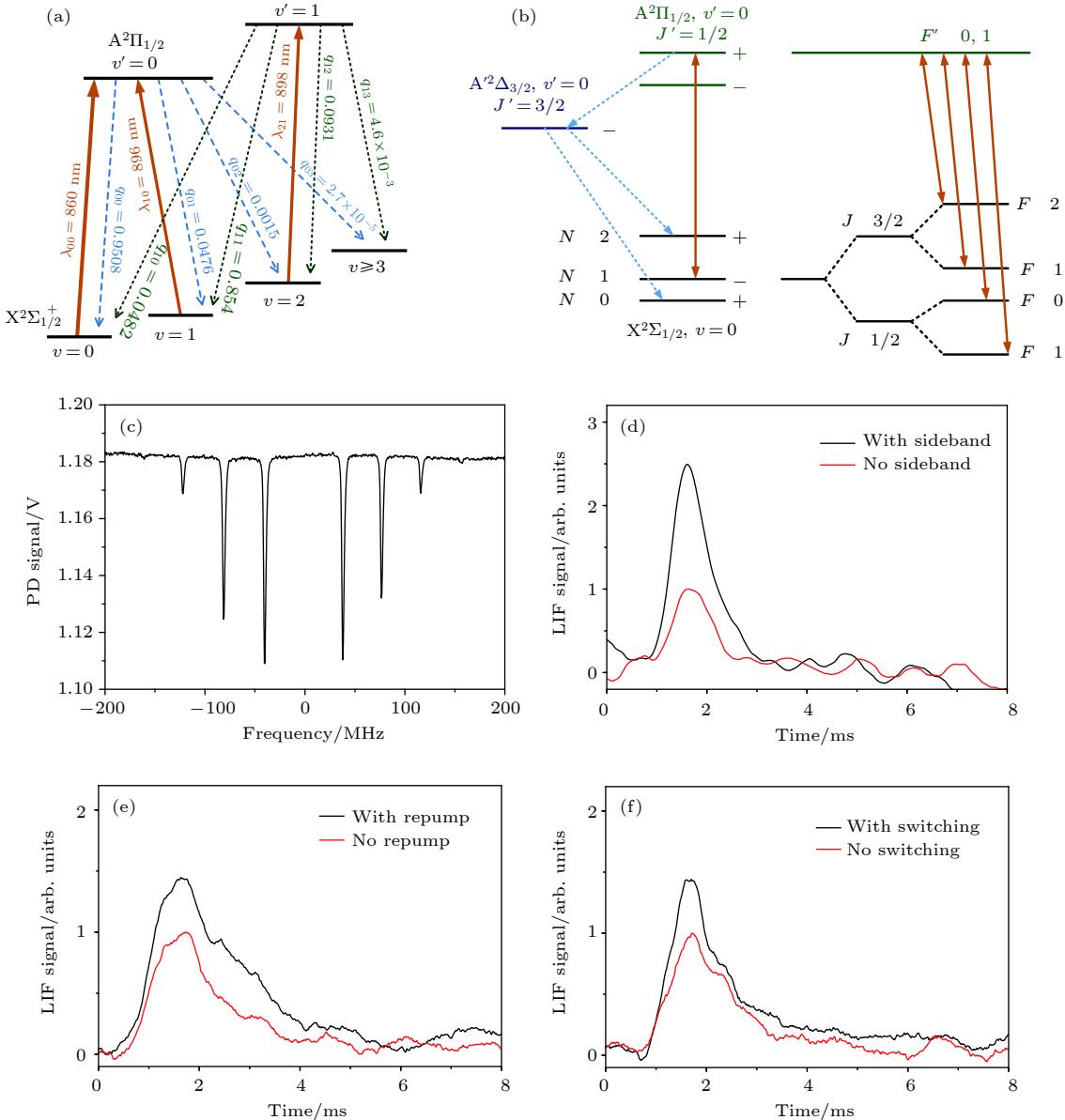


图 3 BaF 能级示意图和暗态消除方案^[98] (a) 振动态能级的闭合方案, 增加 896 nm 和 898 nm 两个再泵浦激光; (b) 转动态能级的闭合及超精细能级分裂示意图; (c) 利用 EOM 调制产生的 4 个频率边带, 图中是调制后的激光用法珀腔测量的信号; (d) 引入边带调制后荧光信号的增强; (e) 进行偏振调制后荧光信号的增强; (f) 增加 $v = 1$ 再泵浦光后荧光信号的增强

Fig. 3. The energy levels of BaF and dark state mixing^[98]. (a) Scheme for closing the vibrational levels; (b) scheme for closing the rotational and hyperfine dark states; (c) sideband modulation via an EOM to generate the four frequency bands to cover the four hyperfine sublevels; (d) LIF enhancement via introducing the sideband modulation; (e) LIF enhancement by introducing the polarization modulation; (f) LIF enhancement when adding the $v = 1$ repump laser.

制通过一普克尔盒来实现。当在普克尔盒两端加上一个周期性调制电压时, 激光的偏振也会被周期地调制。适当调节调制的方波电压的幅度, 可以实现水平偏振-竖直偏振的切换。在普克尔盒后面加上一个 1/4 波片, 即可实现 $\sigma^+ - \sigma^-$ 来回切换。调制方波信号的频率为 1 MHz 时, 我们观察到的 LIF 信号相对于采用线偏振光探测时增强了约 1.5 倍, 如图 3(e)。而且这个增强效果对调制频率

不是很敏感, 提高调制频率, 如 5 MHz, 结果类似。另外, 这个增强效果并没有达到我们的预期, 因为在我们的实验条件下 (激光光斑直径 $d \sim 2$ mm, 860 nm 和 896 nm 激光的功率分别为 160 mW 和 100 mW), 4+13 能级速率方程模型^[98]给出加上偏振调制后散射光子数增加约 3 倍。由于对应的每个边带的饱和因子 $s \approx 300$, 在 $\sim d/u_0 = 10 \mu\text{s}$ 的相互作用时间内 860 nm 激光已经足够将分子泵浦到

$|X, v = 1\rangle$ 态, 速率方程模型给出的散射光子数为约 18, 接近理论极限值约 $1/(1 - q_{00}) \approx 20$. 由此可以推断, 在不加偏振调制时, 单个分子在 $10\text{ }\mu\text{s}$ 作用时间内散射的光子数为约 $18/1.5 = 12$, 远大于速率方程模型给出的 6 个光子. 原因可能在于地磁场也能将塞曼子能级相互耦合起来. 实验中, 我们还验证了第二种混合磁子能级的方法, 即引入一个与激光偏振方向有角度的磁场. 假定分子束的传播方向为 \hat{x} 方向, 激光为线偏振, 偏振方向沿 \hat{z} 方向, 磁场方向在 $\hat{y}-\hat{z}$ 平面 ($B_y = B_z$), 与 \hat{z} 轴夹角为 45 度. 测量不同磁场下 LIF 信号的增强, 发现在最优的磁场大小 $B_z = 3.5\text{ G}$ 时, LIF 信号比不加磁场时也增强约 1.5 倍, 这与偏振调制的结果一致. 在大磁场下, LIF 信号反而不会增强, 可能是由于塞曼分裂增大引起的失谐导致光子散射率降低.

在消除了超精细能级和塞曼子能级暗态之后, 最显著的暗态为 $|X, v = 1\rangle$ 振动态, 为此我们引入 896 nm 再泵浦光, 这束光和 860 nm 激光通过一个双色镜耦合, 在空间上重叠, 然后同时通过 EOM 以及普克尔盒进行边带调制和偏振调制. 同样, 我们通过观察 LIF 信号的增强来判断 $v = 1$ 再泵浦光是否有效. 如图 3(f), 增加 $|X, v = 1\rangle \rightarrow |A, v' = 0\rangle$ 再泵浦光, LIF 信号增强约 1.5 倍, 这意味着在 $10\text{ }\mu\text{s}$ 内分子散射的光子数增加到 $18 \times 1.5 = 27$ 个, 与 4+25 能级模型预期一致^[98].

4 光与分子相互作用研究

在验证了准闭合跃迁的基础上, 增加光与分子的相互作用时间, 可以观察激光对分子束的散射力. BaF 分子通过激光消融产生, 在缓冲腔内经缓冲气体冷却后形成沿 $+\hat{x}$ 方向传播的冷分子束, 接着通过一个 3 mm 小孔进入相互作用区域. 在相互作用区域, 作用于分子束的几束激光束沿 $+\hat{z}$ 方向; 分子与光场的相互作用时间可以通过控制激光光束的数目来控制, 最多通过 8 束激光. 860 nm 泵浦光和 896 nm 再泵浦光通过双色镜在空间上重合, 光斑直径 $d = 2\text{ mm}$, 功率分别为 160 mW 和 100 mW. 在相互作用区域下游 35 cm 处, 我们用 CCD 来荧光成像. 探测光仅包含 860 nm 激光. 在相互作用区域和分子束探测区域中间, 用一束清除 (clean-up) 光 (光斑直径 8 mm, 功率 50 mW) 来将处于 $|X, v = 1\rangle$ 态的分子泵回 $|X, v = 0\rangle$ 态. 这几束激光

均加入 38 MHz 边带调制和 1 MHz 的偏振调制.

我们在相互作用区域加 8 束沿同一方向 ($+\hat{z}$) 传播的偏转光以观测分子束在散射力作用下发生偏转. 图 4(a) 给出了此时分子束的形状. 为了对照, 我们在不加任何偏转光的情况下, 拍到的分子束的形状如图 4(b). 由于偏转光沿 $+\hat{z}$ 方向, 将两种情况下的分子信号沿 \hat{x} 方向积分, 我们得到分子束的横向直径为约 3 cm, 如图 4(c). 而且, 在有偏转光的情况下, 分子束整体沿 $+\hat{z}$ 方向有一个 0.8 mm 的偏移 (见图 4(d)), 且分子束的横向直径几乎保持不变. 实验中, 我们还检验了 896 nm 再泵浦光和清除光的泵浦效果. 当同时不加这两束光时, 经过在相互作用区域泵浦光的作用后, 仅有约 10% 的分子处于 $|X, v = 0\rangle$ 态. 加入这两束光后, 分子信号恢复到约 80%. 这说明泵浦光和再泵浦光作用足够强. 剩余的 20% 的分子损失主要来自 $|X, v \geq 2\rangle$ 和 $A'^2\Delta$ 暗态.

接下来我们根据偏转距离 l 来估计散射光子数 N_{sc} . 分子束纵向速度 $u_0 \sim 200\text{ m/s}$, 而 2D 相互作用区域与 3D 探测区域间隔 $D = 35\text{ cm}$, 因此分子束传播时间为 D/u_0 . 于是, 容易得到分子束横向速度变化为 $\delta u = u_0 l/D$. 单个 $\lambda = 860\text{ nm}$ 光子反冲动量为 $p = h/\lambda$ (h 为普朗克常数). $l \approx 0.8\text{ mm}$ 的偏转距离对应的散射光子数为 $N_{sc} = m\delta u/p \approx 150$, 其中 m 为 BaF 分子的质量. 为了估计光子散射率, 我们测量了散射光子数 N_{sc} 与相互作用时间 t 间的关系. 相互作用时间 $t = n\tau$ 可以简单通过调整相互作用区域偏转光束的数量 n 来控制, $\tau = d/u_0 \sim 10\text{ }\mu\text{s}$ 为单束激光的作用时间. 如图 4(e), 当减少光束的数目, 偏转距离呈线性减小, 相应的散射光子数也线性减小. 线性拟合得到光子散射率 $\Gamma_{sc} = 2\text{ MHz}$, 这与根据 4+25 能级速率方程模型给出的值一致, 见图 4(e) 中的虚线. 但是, 这个值比理论预期的 4+24 多能级体系的最大散射率 $\Gamma_{max} = \Gamma/7 \approx 2.5\text{ MHz}$ ^[90] 要稍小. 因为泵浦光和再泵浦光光强已经足够强, 这主要是存在暗态造成的.

5 极性分子的激光冷却及囚禁

在证明了分子能够与光持续地发生相互作用之后, 一个自然而然的想法就是做激光冷却. 目前我们正致力于实现 BaF 分子的激光冷却, 仍然有一系列的问题需要解决. 这里, 我们结合国际上的

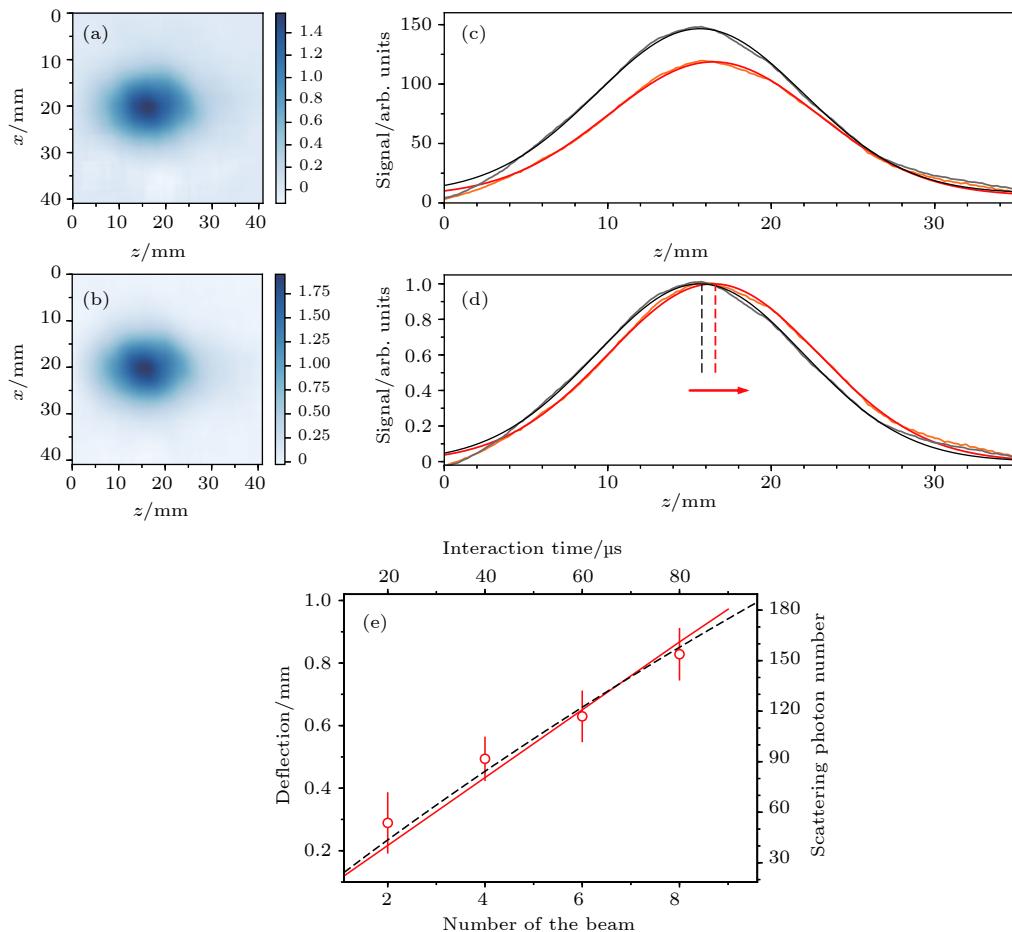


图 4 分子束偏转^[98]. CCD 在 x - z 平面成像 (a) 和 (b) 分别对应在相互作用区域有偏转光和没有偏转光时分子束的形状, (c) 中给出沿 \hat{x} 方向分别对 (a) 和 (b) 做积分后得到信号. 黑色和红色实线分别为两个信号的高斯拟合. (d) 对 (c) 中的信号分别做归一化, 以清晰地展示偏转效果. (e) 偏转距离与偏转光束数量之间的关系, 相应地, 可以推出散射光子数与相互作用时间间的关系. 红色实线为对测量结果的线性拟合. 黑色虚线为根据 4+25 能级速率方程模型计算得到的散射光子数与相互作用时间的关系

Fig. 4. Deflection of the BaF molecular beam with the quasi cycling transitions^[98]. Images are given on the x - z plane of the (a) Deflected and (b) unperturbed molecular beams, respectively. The x direction reflects the width of the probe laser beam, while the z direction gives the transverse profile of the molecular beam. (c) integrated signal of the images in (a) and (b) along the x axis. The black and red lines are Gaussian fits to the unperturbed (light gray) and deflected (light orange) signal, which gives the revival rate of 80%. (d) normalized plot of the signals in (c) to clearly show the deflection effect. (e) deflection distance as a function of the number of the deflection beam, yielding the dependence of the scattering photon number on the interaction time. The red solid line is a linear fit to the measured data, illustrating that the photon scattered linearly increases with the interaction time. The black dashed line is the numerical prediction of the scattering from the 4+25 MLRE model with the switching scheme.

相关进展对后续实验过程做一个概述, 包括分子束的横向压缩、激光减速以及磁光阱的实现、磁阱光阱囚禁等.

5.1 分子束的横向冷却

分子束的横向压缩实验, 包括多普勒冷却、亚多普勒冷却以及二维磁光阱, 已经在多种分子中开展, 诸如 SrF^[57]、YO^[67]、CaF^[100]、SrOH^[77]、YbF^[73]. 首先来看多普勒冷却, 以耶鲁大学 DeMille 小组的 SrF 分子为例. 当冷却光失谐为 -1.5Γ , 即红失谐时, 分子束横向宽度被压缩, 即部分处于某一速

度阈值以下的分子被冷却; 而当失谐变为 $+1.5\Gamma$ 时, 分子束在横向则被加热, 即展宽. 这是多普勒效应的必然结果, 与原子中的结果相似. 这里的失谐是相对于最优的边带调制点的偏移量, 相应的 4 个边带 (如图 3(b)) 的失谐量并不等于这个值. 而且, 由于四个超精细能级同时与激光相互作用, 当对激光做小范围的扫频时, 4 个边带相应于各个能级而言红失谐和蓝失谐会交替出现, 这样从平均的结果来看, 就是冷却和加热交替出现, 实验也证明了这一点. 另外, 实验中采用添加一个与光的偏振方向有一夹角的静态磁场来混合磁子能级暗态, 结果显示

在较大范围内($2 - 8$ G)均有明显的冷却效果,这一点与 BaF 不同,我们认为是与 $A^2\Gamma_{1/2}$ 态的线宽 Γ 有关。较大的线宽允许在较大的塞曼频移下仍然存在冷却效应。

亚多普勒冷却则参考最新的帝国理工大学 YbF 分子的实验结果 [73]。类似于原子的亚多普勒冷却机制,实验中选取的冷却激光的偏振为 $lin\phi$ lin ,即两束对射的偏振方向夹角为 ϕ 的线偏振光,在分子束横向方向产生偏振梯度。这里仍然使用磁场来混合暗态,但实验发现小磁场强度(< 2 G)下冷却效果更好,这与 SrF^[57] 的结论相同。亚多普勒冷却要求激光的失谐为蓝失谐,而红失谐会导致加热,这与多普勒冷却恰好相反,YbF 的实验也证明这一点。同时,实验中发现冷却效应在任意的 ϕ 角下均存在,而最强的位置在 $\phi = \pi/4$ 处。在 $\phi = 0$ 时仍然观察到冷却效应主要是由于磁场的存在,而在 $\phi = \pi/4$ 处最强是由于分子中主要是第二类跃迁,这一点也在理论上被证明。值得一提的是,亚多普勒冷却的俘获速度通常 < 1 m/s,比多普勒冷却小很多。

磁光阱横向压缩实验在 JILA 的 YO 分子^[67] 和哈佛大学 CaF 分子^[100] 中得到证明。二者的实验方案也类似,均采用快速切换冷却光的偏振和梯度磁场方向来抑制暗态的出现。在保持光的偏振切换和磁场方向切换同步的情况下,红失谐冷却,而蓝失谐加热。而且,实验证明^[67-101],由于磁场梯度引入了回复力,磁光阱方案比多普勒冷却的压缩效果更好。

5.2 激光减速

为了实现三维磁光阱的装载,对分子束进行纵向的激光减速很有必要。目前来说,激光减速主要有两类方案,“白光”减速和频率啁啾。“白光”减速在 YO 分子实验中得以应用^[69],即在调制减速激光产生覆盖超精细能级的四个边带的基础上,再添加 10 MHz 的调制边带。这样激光的频谱与一定速度区间的分子的多普勒频移相对应,即在与分子束作用时同时与不同速度的分子共振,这是“白光”减速的基本思想。后来,哈佛大学 CaF 分子的减速实验也采用了这种方法^[102]。

频率啁啾方案应用在早期的 SrF 分子^[101] 和 CaF 分子^[89] 的减速实验中,后来不断得到改进^[99]。啁啾的原理也很简单,即在分子从缓冲腔出射传播

到三维磁光阱捕获区域的这段时间内,不断改变减速激光的频率,使得其失谐量能够补偿分子纵向运动的多普勒频移。这种方案的难点在于如何保证分子束纵向速度变化区间与激光扫频的速度最优地匹配。在 SrF 的实验中^[101],初始出射的分子束纵向速度分布在 175 m/s 附近,选取初始失谐为 -260 MHz,最终在三维磁光阱位置处探测到约 6% 的分子处于 50 m/s 速度之下。应该说,这个减速效果不算高效。

后来的 CaF 分子实验^[99] 研究了不同线性扫频速度下分子最终速度的分布,在最优的控制条件下实现了约 10^6 个分子处于 15 m/s 附近。需要特别指出的是,CaF 实验中并非采用过去的方案,即直接用冷却光 $X^2\Sigma \leftrightarrow A^2\Pi_{1/2}$ 来做减速光,而是用 $X^2\Sigma(N=1) \leftrightarrow B^2\Sigma(N=0)$ 跃迁。这样做有两方面的考虑,一是在再泵浦光不变的情况下散射率会提高两倍,另一个是减速光的波长更短,光子反冲动量更大;如此光与分子相互作用达到的减速效率会提高 5 倍左右。事实也证明,这种频率啁啾方案比“白光”减速效果要好很多,不仅可以更精确地控制最终的速度分布,而且在俘获速度附近的分子数也更多。

5.3 磁光阱、囚禁与态纯化

分子的第一个三维磁光阱(3D MOT)于 2014 年在耶鲁大学 DeMille 小组的 SrF 分子中实现^[68]。由于分子冷却采用的跃迁多数为第二类跃迁,这里实现的第二类磁光阱的囚禁力比通常的第一类磁光阱小两到三个量级,囚禁分子数仅 ~ 300 。而且温度为约 2.5 mK, 远远高于多普勒冷却极限温度(对于 SrF, 约 $160 \mu\text{K}$)。实验测量的磁光阱寿命约 56(4) ms, 也比一般的原子磁光阱小很多。一个有趣的问题是第二类跃迁中产生回复力的光的偏振选择。直观上看,由于上能级 $A^2\Pi_{1/2}(v=0, J=1/2)$ 各个子能级接近简并,即 g 因子很小(对于 SrF, 约 -0.088),光的各个边带的偏振应取决于下能级各个超精细子能级的 g 因子符号。然而,Tarbutt 的理论分析^[103] 表明,第二类跃迁 MOT 光的偏振选择仍然由上能级 g 因子决定,因此,SrF 实验^[68] 中光的偏振应该做一个修正。DeMille 小组据此改进了三维磁光阱实验^[104],获得了更多的分子数和更长寿命的 MOT。

接着, CaF 分子的 3D MOT 分别在帝国理工

大学 Hinds 小组^[105]和哈佛大学 Doyle 小组^[76]实现。Hinds 小组借助双色光囚禁的思想^[106]实现的是直流磁光阱(dc-MOT)，俘获速度约 11 m/s，分子数达到 2×10^4 ，比之前的 SrF 分子高了近 2 个量级，温度也更低(约 730 μK)。而 Doyle 小组则利用快速偏振切换的方法实现交流磁光阱(RF-MOT)，囚禁的分子数达到 $1.0(3) \times 10^5$ ，温度达到 340 μK，接近多普勒极限。另外，SrF 分子和 YO 分子的 3D RF-MOT 也分别在 DeMille 小组^[107]和叶军小组^[75]实现。总的来说，RF-MOT 相比 dc-MOT 具有更长的寿命和更低的温度。为了获得更低的温度，即低于多普勒极限，Hinds 小组将亚多普勒冷却技术应用到 CaF 分子中，得到了 ~ 50 μK 的光学黏团^[70]。实验步骤简单来说包括两步。首先获得 CaF 分子的 dc-MOT，并不断降低 MOT 光的强度以获得更低的温度，这是由于亚多普勒冷却的速度范围较小。然后，改变 MOT 光的偏振，失谐变为蓝失谐，并撤去磁场梯度，实现亚多普勒冷却。

为了实现对分子各个自由度更加精密的操控，将分子装载到磁阱或光阱中十分必要。而且，由于 MOT 中分子处于 $N = 1$ 转动态下 4 个不同的超精细子能级，而我们希望将分子制备到单一内态上，这对实现分子 BEC 而言非常重要。近期，CaF 分子和 SrF 分子的态纯化和磁阱囚禁分别在 Hinds 小组^[71]和 DeMille 小组^[74]开展。态纯化通过光泵浦实现，即通过调节 EOM 的调制深度来控制各个边带的强度将处于其他能级的分子转移到某个子能级上，进而通过微波耦合将分子转移到任意的子能级。对于任意的弱场寻找态，很容易囚禁在磁四极阱中，这里不做讨论。最终，Hinds 小组实现了 5000 个分子的磁阱囚禁，寿命为 2 s，温度约 70(8) μK。另一方面，Doyle 小组在不久前也实现了 CaF 分子的光阱囚禁^[72]，相空间密度达到 2×10^{-9} ，这为实现分子的量子简并奠定了基础。

实现了分子的囚禁后，接下来的实验方向就是协同冷却。目前来看，囚禁的分子数尚且能够满足协同实验要求，如何选择合适的原子来进行有效的碰撞是一个大问题。根据多通道散射理论，有一些小组开展了原子-分子协同冷却的理论研究，如 Li-CaF(Rb-CaF)^[108] 和 Rb-SrF 体系^[109]，试图为实验提供一些指导。但就目前来说，哪种原子好并无定论，仍需要未来实验的尝试和检验。

6 总结与展望

分子的直接激光冷却发展了将近十年的时间，不断取得突破，方兴未艾。随着技术的进步，极性分子的磁光阱、磁阱、光阱相继实现。未来几年，进一步将冷分子向超冷区域推进，利用窄线宽激光冷却，亚多普勒冷却，或者利用超冷原子来协同冷却分子都是可行的方案。科研人员也正朝这些方向努力，相信不久，通过激光冷却这个方案最终获得分子的量子简并可以实现。由于分子的特殊性，将激光冷却拓展到新的分子仍然是一个不小的挑战。我们初步证明了将激光冷却技术应用到新的 BaF 分子的可行性。当然进一步扩展到其他分子，甚至原子数更多的分子还需要更多的实验验证。也希望有更多的研究团队加入这个领域，推动这个方向的发展。

参考文献

- [1] Liu L, Lu D S, Chen W B, Li T, Qu Q Z, Wang B, Li L, Ren W, Dong Z R, Zhao J B, Xia W B, Zhao X, Ji J W, Ye M F, Sun Y G, Yao Y Y, Song D, Liang Z G, Hu S J, Yu D H, Hou X, Shi W, Zang H G, Xiang J F, Peng X K, Wang Y Z 2018 *Nat. Commun.* **9** 2760
- [2] Ludlow A D, Boyd M M, Ye J, Peik E, Schmidt P O 2015 *Rev. Mod. Phys.* **87** 637
- [3] Parker R H, Yu C, Zhong W, Estey B, Muller H 2018 *Science* **360** 191
- [4] Moses S A, Covey J P, Miecnikowski M T, Yan B, Gadway B, Ye J, Jin D S 2015 *Science* **350** 659
- [5] Anderson M H, Ensher J R, Matthews M R, Wieman C E, Cornell E A 1995 *Science* **269** 198
- [6] Davis K B, Mewes M O, Andrews M R, van Druten N J, Durfee D S, Kurn D M, Ketterle W 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 3969
- [7] Bradley C C, Sackett C A, Tollett J J, Hulet R G 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 1687
- [8] Griesmaier A, Werner J, Hensler S, Stuhler J, Pfau T 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 160401
- [9] Lahaye T, Koch T, Fröhlich B, Fattori M, Metz J, Griesmaier A, Giovanazzi S, Pfau T 2007 *Nature* **448** 672
- [10] Lu M, Burdick N Q, Youn S H, Lev B L 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 190401
- [11] Lu M, Burdick N Q, Lev B L 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 215301
- [12] Aikawa K, Frisch A, Mark M, Baier S, Rietzler A, Grimm R, Ferlaino F 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 210401
- [13] Zelevinsky T, Kotochigova S, Ye J 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 043201
- [14] DeMille D, Cahn S B, Murphree D, Rahmlow D A, Kozlov M G 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 023003
- [15] Kotochigova S, Zelevinsky T, Ye J 2009 *Phys. Rev. A* **79** 012504

- [16] Chin C, Flambaum V V, Kozlov M G 2009 *New J. Phys.* **11** 055048
- [17] Baranov M A, Dalmonte M, Pupillo G, Zoller P 2012 *Chem. Rev.* **112** 5012
- [18] Moses S A, Covey J P, Miecnikowski M T, Jin D S, Ye J 2017 *Nat. Phys.* **13** 13
- [19] Bohn J L, Rey A M, Ye J 2017 *Science* **357** 1002
- [20] Murphy M T, Flambaum V V, Muller S, Henkel C 2008 *Science* **320** 1611
- [21] Hudson J J, Sauer B E, Tarbutt M R, Hinds E A 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 023003
- [22] Bickman S R 2007 Ph.D. Dissertation (New Haven: Yale University)
- [23] Baron J, Campbell W C, DeMille D, Doyle J M, Gabrielse G, Gurevich Y V, Hess P W, Hutzler N R, Kirilov E, Kozyryev I, O'Leary B R, Panda C D, Parsons M F, Petrik E S, Spaun B, Vutha A C, West A D 2014 *Science* **343** 269
- [24] Cairncross W B, Gresh D N, Grau M, Cossel K C, Roussy T S, Ni Y, Zhou Y, Ye J, Cornell E A 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 153001
- [25] Altuntas E, Ammon J, Cahn S B, DeMille D 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 142501
- [26] Cooper N R 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 220405
- [27] DeMille D 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 067901
- [28] Croft J F E 2012 Ph.D. Dissertation (Durham: Durham University)
- [29] Andre A, DeMille D, Doyle J M, Lukin M D, Maxwell S E, Rabl P, Schoelkopf R J, Zoller P 2006 *Nat. Phys.* **2** 636
- [30] Micheli A, Brennen G K, Zoller P 2006 *Nat. Phys.* **2** 341
- [31] Krems R V 2008 *Phys. Chem. Chem. Phys.* **10** 4079
- [32] Carr L D, DeMille D, Krems R V, Ye J 2009 *New J. Phys.* **11** 055049
- [33] Ospelkaus S, Ni K K, Wang D, de Miranda M H G, Neyenhuis B, Quéméner G, Julienne P S, Bohn J L, Jin D S, Ye J 2010 *Science* **327** 853
- [34] Rui J, Yang H, Liu L, Zhang D C, Liu Y X, Nan J, Chen Y A, Zhao B, Pan J W 2017 *Nat. Phys.* **13** 699
- [35] Ye X, Guo M, González-Martínez M L, Quéméner G, Wang D 2018 *Sci. Adv.* **4** eaaoq0083
- [36] Ni K K, Ospelkaus S, de Miranda M H G, Pe'er A, Neyenhuis B, Zirbel J J, Kotchigova S, Julienne P S, Jin D S, Ye J 2008 *Science* **322** 231
- [37] Zirbel J J, Ni K K, Ospelkaus S, D'Incao J P, Wieman C E, Ye J, Jin D S 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 143201
- [38] Molony P K, Gregory P D, Ji Z, Lu B, Köppinger M P, Le Sueur C R, Blackley C L, Hutson J M, Cornish S L 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 255301
- [39] Takekoshi T, Reichsöllner L, Schindewolf A, Hutson J M, Le Sueur C R, Dulieu O, Ferlaino F, Grimm R, Nägerl H C 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 205301
- [40] Park J W, Will S A, Zwierlein M W 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 205302
- [41] Wang F, He X, Li X, Zhu B, Chen J, Wang D 2015 *New J. Phys.* **17** 035003
- [42] Yan B, Moses S A, Gadway B, Covey J P, Hazzard K R A, Rey A M, Jin D S, Ye J 2013 *Nature* **501** 521
- [43] Marco L D, Valtolina G, Matsuda K, Tobias W G, Covey J P, Ye J 2018 *Arxiv:1808.00028v1*
- [44] Żuchowski P S, Hutson J M 2010 *Phys. Rev. A* **81** 060703
- [45] Nemitz N 2008 Ph.D. Dissertation (Heinrich-Heine Universität Düsseldorf)
- [46] Tassy S, Nemitz N, Baumer F, Höhl C, Batär A, Görlitz A 2010 *J. Phys. B: At., Mol. Opt. Phys.* **43** 205309
- [47] Vaidya V D, Tiamsuphat J, Rolston S L, Porto J V 2015 *Phys. Rev. A* **92** 043604
- [48] Hansen A H, Khramov A, Dowd W H, Jamison A O, Ivanov V V, Gupta S 2011 *Phys. Rev. A* **84** 011606
- [49] Hansen A H, Khramov A Y, Dowd W H, Jamison A O, Plotkin-Swing B, Roy R J, Gupta S 2013 *Phys. Rev. A* **87** 013615
- [50] Ivanov V V, Khramov A, Hansen A H, Dowd W H, Münchow F, Jamison A O, Gupta S 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 153201
- [51] Hara H, Takasu Y, Yamaoka Y, Doyle J M, Takahashi Y 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 205304
- [52] Khramov A, Hansen A, Dowd W, Roy R J, Makrides C, Petrov A, Kotchigova S, Gupta S 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 033201
- [53] Pasquio B, Bayerle A, Tzanova S M, Stellmer S, Szczepkowski J, Parigger M, Grimm R, Schreck F 2013 *Phys. Rev. A* **88** 023601
- [54] Kemp S L, Butler K L, Freytag R, Hopkins S A, Hinds E A, Tarbutt M R, Cornish S L 2016 *Rev. Sci. Instrum.* **87** 023105
- [55] Barbe V, Ciamei A, Pasquio B, Reichsöllner L, Schreck F, zuchowski P S, Hutson J M 2018 *Nat. Phys.* s41567–018–0169–x
- [56] Bochinski J R, Hudson E R, Lewandowski H J, Meijer G, Ye J 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 243001
- [57] Shuman E S, Barry J F, DeMille D 2010 *Nature* **467** 820
- [58] Shuman E S, Barry J F, Glenn D R, DeMille D 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 223001
- [59] Tarbutt M R, Bethlehem H L, Hudson J J, Ryabov V L, Ryzhov V A, Sauer B E, Meijer G, Hinds E A 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 173002
- [60] Hudson E R, Ticknor C, Sawyer B C, Taatjes C A, Lewandowski H J, Bochinski J R, Bohn J L, Ye J 2006 *Phys. Rev. A* **73** 063404
- [61] van de Meerakker S Y T, Bethlehem H L, Meijer G 2008 *Nat. Phys.* **4** 595
- [62] Skomorowski W, Pawłowski F, Korona T, Moszynski R, Żuchowski P S, Hutson J M 2011 *J. Chem. Phys.* **134** 114109
- [63] Fulton R, Bishop A I, Shneider M N, Barker P F 2006 *Nat. Phys.* **2** 465
- [64] Zeppenfeld M, Motsch M, Pinkse P W H, Rempe G 2009 *Phys. Rev. A* **80** 041401
- [65] Prehn A, Ibrügger M, Glöckner R, Rempe G, Zeppenfeld M 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 063005
- [66] Di Rosa M D 2004 *Euro. Phys. J. D: At. Mol. Opt. Plas. Phys.* **31** 395
- [67] Hummon M T, Yeo M, Stuhl B K, Collopy A L, Xia Y, Ye J 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 143001
- [68] Barry J F, McCarron D J, Norrgard E B, Steinecker M H, DeMille D 2014 *Nature* **512** 286
- [69] Yeo M, Hummon M T, Collopy A L, Yan B, Hemmerling B, Chae E, Doyle J M, Ye J 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 223003
- [70] Truppe S, Williams H J, Hambach M, Caldwell L, Fitch N J, Hinds E A, Sauer B E, Tarbutt M R 2017 *Nat. Phys.* **13** 1173
- [71] Williams H J, Caldwell L, Fitch N J, Truppe S, Rodewald J, Hinds E A, Sauer B E, Tarbutt M R 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 163201
- [72] Anderegg L, Augenbraun B L, Bao Y, Burchesky S, Cheuk L W, Ketterle W, Doyle J M 2018 *Nat. Phys.*

s41567-018-0191-z

- [73] Lim J, Almond J R, Trigatzis M A, Devlin J A, Fitch N J, Sauer B E, Tarbutt M R, Hinds E A 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 123201
- [74] McCarron D J, Steinecker M H, Zhu Y, DeMille D 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 013202
- [75] Collopy A L, Ding S, Wu Y, Finneran I A, Anderegg L, Augenbraun B L, Doyle J M, Ye J 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 213201
- [76] Anderegg L, Augenbraun B L, Chae E, Hemmerling B, Hutzler N R, Ravi A, Collopy A, Ye J, Ketterle W, Doyle J M 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 103201
- [77] Kozyryev I, Baum L, Matsuda K, Augenbraun B L, Anderegg L, Sedlack A P, Doyle J M 2017 *Phys. Rev. Lett.* **118** 173201
- [78] Iwata G Z, McNally R L, Zelevinsky T 2017 *Phys. Rev. A* **96** 022509
- [79] Xu L, Yin Y, Wei B, Xia Y, Yin J 2016 *Phys. Rev. A* **93** 013408
- [80] Hutzler N R, Lu H I, Doyle J M 2012 *Chem. Rev.* **112** 4803
- [81] Yin J P, Xia Y, Deng L Z, Li X J 2018 *Physics* **46** 376 (in Chinese) [印建平, 夏勇, 邓联忠, 李兴佳 2018 物理 **46** 376]
- [82] Hou S Y, Yin Y L, Yin J P, 2018 *Physics* **46** 446 (in Chinese) [侯顺永, 尹亚玲, 印建平 2018 物理 **46** 446]
- [83] Xia Y, Wang H L, Xu L, Yin J P 2018 *Physics* **47** 24 (in Chinese) [夏勇, 汪海玲, 许亮, 印建平 2018 物理 **47** 24]
- [84] Deng L Z, Xia Y, Hou S Y, Yin J P 2018 *Physics* **47** 84 (in Chinese) [邓联忠, 夏勇, 侯顺永, 印建平 2018 物理 **47** 84]
- [85] Wu J Z, Ma J, Jia S T 2018 *Physics* **47** 162 (in Chinese) [武寄洲, 马杰, 贾锁堂 2018 物理 **47** 162]
- [86] Kozyryev I, Baum L, Matsuda K, Olson P, Hemmerling B, Doyle J M 2015 *New J. Phys.* **17** 045003
- [87] Bulleid N E, Skoff S M, Hendricks R J, Sauer B E, Hinds E A, Tarbutt M R 2013 *Phys. Chem. Chem. Phys.* **15** 12299
- [88] Skoff S M, Hendricks R J, Sinclair C D J, Hudson J J, Segal D M, Sauer B E, Hinds E A, Tarbutt M R 2011 *Phys. Rev. A* **83** 023418
- [89] Zhelyazkova V, Cournol A, Wall T E, Matsushima A, Hudson J J, Hinds E A, Tarbutt M R, Sauer B E 2014 *Phys. Rev. A* **89** 053416
- [90] Truppe S, Hambach M, Skoff S M, Bulleid N E, Bumby J S, Hendricks R J, Hinds E A, Sauer B E, Tarbutt M R 2018 *J. Mod. Opt.* **65** 648
- [91] Bu W, Chen T, Lv G, Yan B 2017 *Phys. Rev. A* **95** 032701
- [92] Bu W, Liu M, Xie D, Yan B 2016 *Rev. Sci. Instrum.* **87** 096102
- [93] Wang D, Bu W, Xie D, Chen T, Yan B 2018 *J. Opt. Soc. Am. B* **35** 1658
- [94] Patterson D, Doyle J M 2007 *J. Chem. Phys.* **126** 154307
- [95] Campbell W C, Doyle J M 2009 *Cooling, Trap Loading, and Beam Production Using a Cryogenic Helium Buffer Gas* (CRC Press, Boca Raton)
- [96] Chen T, Bu W, Yan B 2016 *Phys. Rev. A* **94** 063415
- [97] Mulliken R S, Christy A 1931 *Phys. Rev.* **38** 87
- [98] Chen T, Bu W, Yan B 2017 *Phys. Rev. A* **96** 053401
- [99] Truppe S, Williams H J, Fitch N J, Hambach M, Wall T E, Hinds E A, Sauer B E, Tarbutt M R 2017 *New J. Phys.* **19** 022001
- [100] Chae E, Anderegg L, Augenbraun B L, Ravi A, Hemmerling B, Hutzler N R, Collopy A L, Ye J, Ketterle W, Doyle J M 2017 *New J. Phys.* **19** 033035
- [101] Barry J F, Shuman E S, Norrgard E B, DeMille D 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 103002
- [102] Hemmerling B, et al. 2016 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **49** 174001
- [103] Tarbutt M R 2015 *New J. Phys.* **17** 015007
- [104] McCarron D J, Norrgard E B, Steinecker M H, DeMille D 2015 *New J. Phys.* **17** 035014
- [105] Williams H J, Truppe S, Hambach M, Caldwell L, Fitch N J, Hinds E A, Sauer B E, Tarbutt M R 2017 *New J. Phys.* **19** 113035
- [106] Tarbutt M R, Steinle T C 2015 *Phys. Rev. A* **92** 053401
- [107] Norrgard E B, McCarron D J, Steinecker M H, Tarbutt M R, DeMille D 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 063004
- [108] Lim J, Frye M D, Hutson J M, Tarbutt M R 2015 *Phys. Rev. A* **92** 053419
- [109] Morita M, Kosicki M B, Zuchowski P S, Tscherbul T V 2018 *Phys. Rev. A* **98** 042702

SPECIAL TOPIC—Cold atoms and molecules

Laser cooling and trapping of polar molecules^{*}

Chen Tao Yan Bo[†]

(Department of Physics, State Key Laboratory of Modern Optical Instrumentation, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

(Received 5 September 2018; revised manuscript received 7 January 2019)

Abstract

Different from atoms, molecules have unique properties, and play an important role in the research of atomic, molecular and optical physics. Cold molecules have important applications in science and have been studied for more than 20 years. But traditional methods, such as the Stark decelerator, have hit a bottleneck: it is hard to increase the phase space density of molecules. Extending the direct laser-cooling technique to new molecular species has recently been a hot topic and also a big challenge. In this review paper, on one hand, we make a brief review to recent progresses on the direct laser cooling of polar molecules. On the other hand, a demonstration on the feasibility of laser cooling BaF molecule has been experimentally illustrated, including the analysis on the molecular energy levels, measurements of the high-resolution spectroscopy, efficient pre-cooling and state preparation via buffer-gas cooling and detailed investigations on the molecule-light interactions. All these results not only pave the way for future laser-cooling and -trapping experiments, but also serve as a reference for the laser-cooling explorations on new molecular species.

Keywords: laser cooling, cold molecule, buffer-gas cooling, molecule-light interaction

PACS: 37.10.De, 37.10.Mn

DOI: [10.7498/aps.68.20181655](https://doi.org/10.7498/aps.68.20181655)

* Project supported by the National Key R&D Program of China (Grant No. 2018YFA0307200), the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 91636104), the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant No. LZ18A040001), and the Fundamental Research Funds for the Central Universities, China.

† Corresponding author. E-mail: yanbohang@zju.edu.cn

光学微腔中一维费米气的磁性关联特性

冯彦林 樊景涛 陈刚 贾锁堂

Magnetic properties of one-dimensional Fermi gases in an optical cavity

Feng Yan-Lin Fan Jing-Tao Chen Gang Jia Suo-Tang

引用信息 Citation: [Acta Physica Sinica](#), 68, 043702 (2019) DOI: 10.7498/aps.68.20181954

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181954>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

[一维金属光栅嵌入磁性介质纳米结构下的横向磁光克尔效应的增强](#)

Great enhancement of transversal magneto-optical Kerr effect for magnetic dielectric film embedded by one-dimensional metallic grating

物理学报. 2016, 73(14): 147302 <https://doi.org/10.7498/aps.65.147302>

[宽绝对禁带的一维磁性光子晶体结构](#)

One-dimensional magnetic photonic crystal structures with wide absolute bandgaps

物理学报. 2017, 74(1): 014204 <https://doi.org/10.7498/aps.66.014204>

[表层厚度渐变一维耦合腔光子晶体的反射相位特性及其应用](#)

Reflection phase characteristics and their applications based on one-dimensional coupled-cavity photonic crystals with gradually changed thickness of surface layer

物理学报. 2016, 73(7): 074201 <https://doi.org/10.7498/aps.65.074201>

[空气中一维声栅对微粒的声操控](#)

Acoustic manipulation of particles by a resonant one-dimensional grating in air

物理学报. 2017, 74(4): 044301 <https://doi.org/10.7498/aps.66.044301>

[多模1064nm光纤激光器实现一维远失谐光晶格](#)

One-dimensional far-detuned optical lattice realized with a multimode 1064 nm laser

物理学报. 2016, 73(4): 043701 <https://doi.org/10.7498/aps.65.043701>

专题：冷原子-分子物理

光学微腔中一维费米气的磁性关联特性*

冯彦林¹⁾²⁾ 樊景涛¹⁾²⁾ 陈刚^{1)2)†} 贾锁堂¹⁾²⁾

1) (山西大学激光光谱研究所, 量子光学与光量子器件国家重点实验室, 太原 030006)

2) (山西大学极端光学协同创新中心, 太原 030006)

(2018年11月1日收到; 2018年12月4日收到修改稿)

对于准一维两组分费米气与光学微腔耦合的系统, 证明了微腔光子的超辐射可以驱动原子系统的磁性转变, 该磁性转变与原子的失谐以及费米子的填充数密切相关。对于无相互作用原子气, 在超辐射相区内平均场近似合理。基于该近似, 分析了不同的填充和失谐情况下体系的静态自旋结构因子, 由此刻画出腔光子协助的磁性关联转变, 并得到了依赖于微腔参数的相图。最后, 对可行的实验参数做了相关讨论。

关键词: 有效光晶格, 超辐射, 自旋结构因子, 磁性关联

PACS: 37.10.Jk, 37.30.+i, 42.50.Pq, 67.85.-d, 67.85.Lm

DOI: 10.7498/aps.68.20181954

1 引言

近年来, 光学微腔中超冷原子气的量子特性受到了人们广泛的关注与探索^[1–13]。例如, 实验上实现了玻色-爱因斯坦凝聚与光学微腔的耦合^[3], 该耦合诱导出原子间的有效长程相互作用, 这种有效长程相互作用会与原子间的短程碰撞相互作用竞争, 进而给出丰富的量子相^[4–7]。伴随着实验上的进展, 越来越多的理论工作者也投身于该领域, 并致力于新奇物理模型的构建。例如, 理论上发展了包含微腔光子的广义玻色-哈伯德模型^[8–10], 预言了微腔诱导的自旋轨道耦合, 并阐明了与该自旋轨道耦合相关的拓扑特性^[11]。最近, 研究者又建立了周期振荡的腔光晶格模型, 并发现该模型包含着丰富的Floquet动力学特性^[12]。

另一方面, 原子间磁性关联的量子模拟一直以来都是物理学界的热点课题, 近年来, 该方向更是成果斐然。例如, 基于光晶格冷原子系统, 实验上观测到了短程的反铁磁关联^[14–16]、隐藏的反铁磁

关联^[17]、不可约的自旋关联^[18]以及反铁磁长程序^[19]等。理论方面的研究包括, 非相干超冷原子的密度关联效应^[20]、三阱光学超晶格中自旋为1的超冷原子特性^[21]以及周期驱动的费米-哈伯德模型中的磁性量子相变^[22]等。我们注意到, 目前关于冷原子磁性关联的研究大多集中于无动力学反馈的光晶格系统, 而作为原子间相互作用的“中继站”, 微腔光子在原子磁性构建过程中承担何种作用? 对于这个问题, 目前学术界还缺乏系统研究。最近, 在超辐射相区外, 研究者发现了红失谐于原子的微腔光子对原子磁序有重要影响^[23]。然而, 在超辐射相区内, 人们对腔光子-原子相互作用系统的具体磁性关联仍缺乏理解。因此, 本文着重探索超辐射相区内原子的磁性关联问题。

本文的研究对象是一个准一维两组分的无相互作用费米气与光学微腔耦合的系统, 分析了该系统中腔参数、原子的填充和原子的失谐对原子磁性关联的影响。具体地, 对光场自由度取平均场近似, 得到了腔场的超辐射相变, 并计算了原子在 \hat{z} 方向

* 国家重点研发计划(批准号: 2017YFA0304203)、国家自然科学基金(批准号: 11674200, 11804204)、教育部长江学者和创新团队发展计划(批准号: IRT13076)和山西省“1331工程”重点学科建设计划资助的课题。

† 通信作者。E-mail: chengang971@163.com

的自旋结构因子。我们发现，微腔光子的超辐射对原子系统的磁性关联有重要影响，在合适参数条件下甚至会驱动磁性转变。当驱动光与原子蓝失谐时，调节腔参数，系统会由超辐射反铁磁关联度越到超辐射铁磁关联。红失谐的情况则与之完全不同，此时系统始终保持反铁磁关联。最后对可行的实验参数做了简单讨论。

2 模型和腔场的自治平均场计算

我们考虑的系统是装载在准一维背景光晶格中的两组分费米气与高精度光学微腔的耦合。如图 1(a) 所示，准一维背景光晶格沿着腔轴 \hat{x} 排列，原子只沿腔轴方向运动，不仅与线偏振驱动的腔模耦合，且与沿 \hat{z} 方向入射的两束圆偏振的抽运光耦合。如图 1(b) 所示，我们考虑的原子包含四个内态，即两个简并的基态 ($|\uparrow\rangle$ 和 $|\downarrow\rangle$) 与两个激发态 ($|1\rangle$ 和 $|2\rangle$)。 $|\downarrow\rangle \leftrightarrow |1\rangle$ 和 $|\uparrow\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ (蓝色的实线) 的跃迁由量子化的腔场引起且对应的单光子的拉比频率为 g ， $|\uparrow\rangle \leftrightarrow |1\rangle$ 和 $|\downarrow\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ (红色的虚线) 的跃迁由

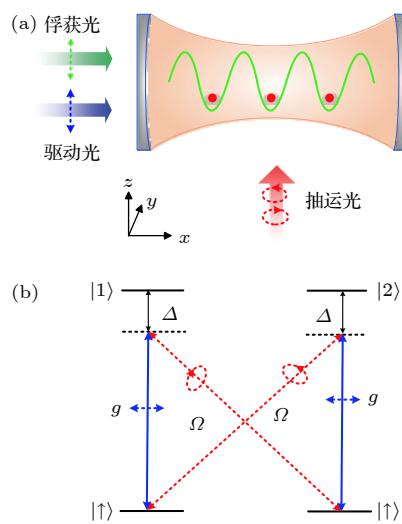


图 1 (a) 超冷费米气沿着腔轴 \hat{x} 方向被俘获在准一维背景光学晶格中，费米气被两束圆偏振的横向（沿着 \hat{z} 方向）抽运激光驱动，腔模由一束线偏振的纵向（沿着 \hat{x} 方向）驱动光驱动；(b) 费米子的能级跃迁图，图中相关的跃迁过程和符号的定义见正文

Fig. 1. (a) The ultracold fermions are trapped in a quasi-one-dimensional background optical lattice along the cavity axis \hat{x} . These fermions are pumped by two circular-polarized transverse (along \hat{z}) lasers and the cavity mode is driven by a linear-polarized longitudinal (along \hat{x}) laser. (b) the atomic energy levels and their transition. See main text for the corresponding transition processes and the definition of the labels.

两束横向的抽运光产生且对应的拉比频率为 Ω ，抽运光和腔模形成两个拉曼过程使 $|\uparrow\rangle$ 和 $|\downarrow\rangle$ 耦合起来。 $\Delta = \omega_p - \omega_a$ 是驱动光与原子的激发态的失谐 (ω_a 为原子激发态的频率)，且满足 $|\Delta| \gg g, \Omega$ ，量子化轴沿 \hat{z} 方向。

在驱动光与原子的失谐为大失谐的条件下，我们绝热地去除掉原子的激发态，并作二次量子化，则系统可以用如下的哈密顿量描述：

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \int dx \hat{\Psi}_{\sigma}^{\dagger}(x) \\ & \times \left[\frac{p_x^2}{2m} + (V_0 + U \hat{a}^{\dagger} \hat{a}) \cos^2(k_R x) \right] \hat{\Psi}_{\sigma}(x) \\ & + \eta_A (\hat{a}^{\dagger} + \hat{a}) \left[\int dx \hat{\Psi}_{\uparrow}^{\dagger}(x) \cos(k_R x) \right. \\ & \left. \times \hat{\Psi}_{\downarrow}(x) + \text{H.c.} \right] - \Delta_c \hat{a}^{\dagger} \hat{a}, \end{aligned} \quad (1)$$

其中， $\hat{\Psi}_{\sigma}(x)$ 是费米子的场算符， \hat{a} 为量子化腔场的湮灭算符， m 为原子的质量， V_0 为背景晶格强度， $U = g^2/\Delta$ 是单光子的光学势阱深度， $\eta_A = g\Omega/\Delta$ 是有效的光与原子耦合强度， $\Delta_c = \omega_p - \omega_c$ 是腔场的失谐， ω_p 为抽运光频率， ω_c 为腔频。我们选择腔场的失谐为红失谐 $\Delta_c < 0$ 。在接下来的讨论中，由于有限的磁场对结果没有影响 [23]，我们不考虑超精细态的 Zeeman 分裂；由于原子失谐 Δ 的正负会影响有效光子数依赖的晶格势的形状，所以我们分别对原子的蓝失谐 ($\Delta > 0$) 和红失谐 ($\Delta < 0$) 两种情况下光场序参量和系统磁性关联进行分析。

当考虑腔场的耗散 κ 存在时，从量子朗之万方程出发我们可以得到光场 \hat{a} 的稳态形式 [2]：

$$\hat{a} = \frac{\eta_A \left[\int dx \hat{\Psi}_{\uparrow}^{\dagger}(x) \cos(k_R x) \hat{\Psi}_{\downarrow}(x) + \text{H.c.} \right]}{\Delta_c + i\kappa - U \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \int dx \hat{\Psi}_{\sigma}^{\dagger}(x) \hat{\Psi}_{\sigma}(x) \cos^2(k_R x)}. \quad (2)$$

当不考虑原子间相互作用时，光场原则上可以用平均场近似来刻画 [2,11,23]，即 $\alpha = \langle \hat{a} \rangle$ ，且结合粒子数方程，得到如下自治方程组：

$$\begin{aligned} \alpha = & \frac{\eta_A \left[\int dx \langle \hat{\Psi}_{\uparrow}^{\dagger}(x) \hat{\Psi}_{\downarrow}(x) \rangle \cos(k_R x) + \text{H.c.} \right]}{\Delta_c + i\kappa - U \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \int dx \langle \hat{\Psi}_{\sigma}^{\dagger}(x) \hat{\Psi}_{\sigma}(x) \rangle \cos^2(k_R x)}, \\ N = & \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \int dx \langle \hat{\Psi}_{\sigma}^{\dagger}(x) \hat{\Psi}_{\sigma}(x) \rangle \end{aligned} \quad (3)$$

通过数值计算，得到光场序参量 α 和对应的化

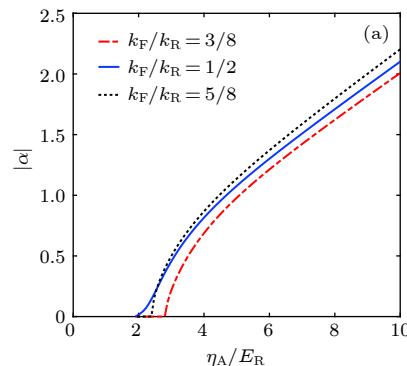
学势 μ , 为了简化以反冲能 $E_R = \hbar^2 k_R^2 / 2m$ 为归一化单位, 其中 k_R 为反冲动量. 我们得到在不同填充下的 α 随有效耦合强度 η_A 的变化 (图 2). 在图 2(a) 中, 考虑蓝失谐的情况 $\Delta > 0$ 下, 不同的晶格填充对超辐射发生的影响, 其中 k_F/E_R 不同的值对应不同的填充 [24], k_F 为费米动量. 可以看出, 在半满填充 $k_F/E_R = 1/2$ 时, 系统与在一维电子—声子模型中的 Peierls 不稳定性 [25,26] 的模型相同, 所以在半满时, 系统更容易趋向能量更低的状态, 超辐射态更容易发生 ($|\alpha| \neq 0$), 所需临界的有效光与原子耦合强度最小. 在图 2(b) 中, 我们考虑红失谐的情况 $\Delta < 0$ 下, 不同的晶格填充对超辐射发生的影响. 同样地, 在半满填充时临界有效的光与原子耦合强度最小.

3 系统的磁性关联

系统的磁性可用静态自旋结构因子来表征, 对应的在 \hat{z} 方向的自旋结构因子可以表示为 [27–30]

$$S_z(k) = \frac{1}{L} \sum_{l,j} e^{ik(l-j)} \langle s_l^z s_j^z \rangle, \quad (4)$$

其中, $s_l^z = \frac{\hbar}{2} \sum_l \hat{c}_{l\uparrow}^\dagger \hat{c}_{l\uparrow} - \hat{c}_{l\downarrow}^\dagger \hat{c}_{l\downarrow}$, l 和 j 分别表示不同的格点; 自旋结构因子 $S_z(k)$ 的峰值表示自旋在 \hat{z} 方向的变化, 在 $k = 0$ 和 $k = \pm\pi$ 分别对应于 \hat{z} 方向上的铁磁关联和反铁磁关联 [27–30]. 接下来我们分别对两种不同原子失谐的情况进行分析.



3.1 蓝失谐的情况

当光场不为零时 (超辐射发生), 假定背景晶格的强度 V_0 远大于腔场引起的拉曼项, 哈密顿量 (1) 中的费米场算符可用单带近似的瓦尼尔函数来表示: $\hat{\Psi}_\sigma = \sum_{i\sigma} \hat{c}_{i\sigma} W(x - x_i)$, 其中 $\hat{c}_{i\sigma}$ 为在格点 i 的原子的湮灭算符, 则在单带近似和紧束缚近似下, 哈密顿量 (1) 可以写为

$$\hat{H} = t_s \sum_{\langle i,j \rangle, \sigma} \hat{c}_{i\sigma}^\dagger \hat{c}_{j\sigma} + \sum_{\langle i,j \rangle} t_{so}(i,j) \left(\hat{c}_{i\uparrow}^\dagger \hat{c}_{j\downarrow} + \text{H.c.} \right) - \Delta_c \hat{a}^\dagger \hat{a}, \quad (5)$$

其中跃迁系数表示为 $t_s = \int dx W^*(x - x_i) \left[\frac{p_x^2}{2m} + (V_0 + U|\alpha|^2) \cos^2(k_R x) \right] W(x - x_j)$ 和 $t_{so}(i,j) = \eta_A (\alpha + \alpha^*) \int dx W^*(x - x_i) \cos(k_R x) W(x - x_j)$. 由于我们选择的原子失谐是蓝失谐, 以及拉曼过程产生的光子数依赖的晶格势的周期是背景晶格的两倍, 则有 $t_{so}(i, i \pm 1) = \pm (-1)^i t_{so}$. 我们使用局域的幺正变换 $\hat{c}_{i\downarrow} = (-1)^i \hat{c}_{i\downarrow}$ [31], 并对场算符作傅里叶变换, 哈密顿量 (5) 在动量空间可以写成如下的形式:

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \sum_k \begin{pmatrix} \varphi_{k\uparrow}^\dagger & \varphi_{k\downarrow}^\dagger \end{pmatrix} \\ & \times \begin{pmatrix} 2t_s \cos(k_R a) & -2it_{so} \sin(k_R a) \\ 2it_{so} \sin(k_R a) & -2t_s \cos(k_R a) \end{pmatrix} \\ & \times \begin{pmatrix} \varphi_{k\uparrow} \\ \varphi_{k\downarrow} \end{pmatrix} - \Delta_c \hat{a}^\dagger \hat{a}, \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $a = \pi/k_R$ 为晶格系数. 从哈密顿量可以看出,

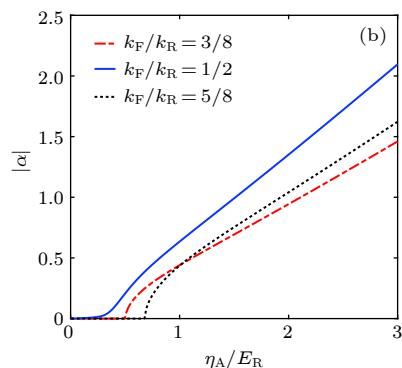


图 2 a) 蓝失谐的情况 $\Delta > 0$, 光场 $|\alpha|$ 在不同的晶格填充下随耦合强度 η_A 的变化. 图中其他参数的选择: $V_0 = 5E_R$, $\kappa = 100E_R$, $\Delta_c = -10E_R$, $k_B T = E_R/200$ 和 $U = 5E_R$; b) 红失谐的情况 $\Delta < 0$, 光场 $|\alpha|$ 在不同的晶格填充下随耦合强度 η_A 的变化. 图中其它参数的选择: $V_0 = -5E_R$, $\kappa = 100E_R$, $\Delta_c = -100E_R$, $k_B T = E_R/200$ 和 $U = -E_R$. 我们考虑的具有 80 个格点的晶格对应不同的填充, 其中 k_F/E_R 不同的值对应不同的填充, k_F 为费米动量

Fig. 2. (a) The cavity field $|\alpha|$ for systems in different fillings with $\Delta > 0$. The plotted parameters are chosen as $V_0 = 5E_R$, $\kappa = 100E_R$, $\Delta_c = -10E_R$, $k_B T = E_R/200$, and $U = 5E_R$. (b) the cavity field $|\alpha|$ for systems in different fillings with $\Delta < 0$. The plotted parameters are chosen as $V_0 = -5E_R$, $\kappa = 100E_R$, $\Delta_c = -100E_R$, $k_B T = E_R/200$, and $U = -E_R$. We consider a lattice of sites 80 with different fillings.

在原子失谐为蓝失谐时可产生腔辅助的自旋轨道耦合。在哈密顿量中, t_s 可以通过晶格参数来调节, 同时也依赖于光场, t_{so} 可以通过 Ω 和 g 进行调节, 则在背景晶格参数固定的条件下, t_s 和 t_{so} 都可以通过 η_A (Ω 和 g) 来进行大范围的调节。

在由平均场方法得到 $|\alpha|$ 的基础上, 为了描述有效的光与原子相互作用对系统的磁性关联的影响, 我们对系统的自旋结构因子进行分析 (图 3)。首先考虑半满填充的情况 (图 3(b)), 当 η_A 取值较小时 (黑色实线), 对应 $|\alpha| = 0$, $S_z(k)$ 在 $k = \pm\pi$ 处有峰值, 此时系统只有跃迁相且处于无能隙的金属态, 具有各向同性的反铁磁关联特性。当 η_A 较大时, 对应 $|\alpha| \neq 0$, 有效光与原子相互作用会驱动自旋发生翻转, 从而使得自旋不守恒, 导致 $S_z(k)$ 在 $k = \pm\pi$ 的反铁磁关联削弱 (峰值降低) 和在 $k = 0$ 处的铁磁关联逐渐增强 (红色点划线), 系统具有反铁磁关联特性, 当超过某一临界点时 (蓝色虚线), 在 $k = \pm\pi$ 的反铁磁关联消失和在 $k = 0$ 处呈现铁磁关联 (峰值增加) (粉色点线), 系统具有铁磁关联的特性。于是, 在有超辐射发生时, 通过调节 η_A 会使系统实现从反铁磁关联到铁磁关联的跃迁。在非半满填充时 (图 3(a) 和 3(c)), 通过调节 η_A , 磁性关联在 $k = 0$ 和 $k = \pm\pi$ 处与半满填充时会有相同的磁性规律, 只是系统实现相变的临界点不同。

3.2 红失谐的情况

当光场不为零 (超辐射发生) 和原子的失谐是

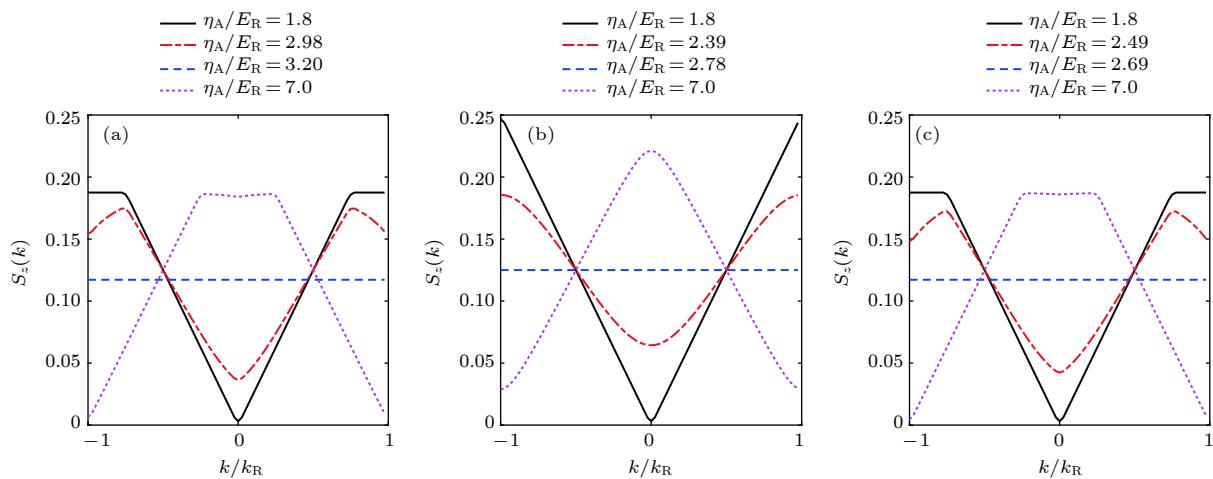


图 3 静态自旋结构因子 $S_z(k)$ (a) $k_F/E_R = 3/8$; (b) $k_F/E_R = 1/2$; (c) $k_F/E_R = 5/8$. (图中对应的其它参数的选择与图 2(a) 中一致)

Fig. 3. The spin structure factors $S_z(k)$ for systems in different fillings: (a) $k_F/E_R = 3/8$; (b) $k_F/E_R = 1/2$; (c) $k_F/E_R = 5/8$ (The plotted parameters are the same as those in Fig. 2(a)).

红失谐 $\Delta < 0$ 时, 在单带近似和紧束缚近似下, 哈密顿量 (1) 可以写为

$$\hat{H} = t_s \sum_{\langle i,j \rangle, \sigma} \hat{c}_{i\sigma}^\dagger \hat{c}_{j\sigma} + \sum_i t_{\text{cd}}(i) \left(\hat{c}_{i\uparrow}^\dagger \hat{c}_{i\downarrow} + \hat{c}_{i\downarrow}^\dagger \hat{c}_{i\uparrow} \right) - \Delta_c \hat{a}^\dagger \hat{a}, \quad (7)$$

其中跃迁系数表示为 $t_s = \int dx W^*(x - x_i) \left[\frac{p_x^2}{2m} + (V_0 + U|\alpha|^2) \cos^2(k_R x) \right] W(x - x_i)$ 和 $t_{\text{cd}}(i) = \eta_A (\alpha + \alpha^*) \int dx W^*(x - x_i) \cos(k_R x) W(x - x_i)$ 。由于我们选择的原子失谐是红失谐, 以及拉曼过程产生的光子数依赖的晶格势的周期是背景晶格的两倍, 所以有 $t_{\text{cd}}(i) = (-1)^i t_{\text{cd}}$ 。同样地, 使用一个局域的幺正变换 $\hat{c}_{i\downarrow} = (-1)^i \hat{c}_{i\downarrow}$, 并对场算符做傅里叶变换, 哈密顿量 (7) 在动量空间可以写成如下的形式:

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \sum_k \begin{pmatrix} \varphi_{k\uparrow}^\dagger & \varphi_{k\downarrow}^\dagger \end{pmatrix} \\ & \times \begin{pmatrix} 2t_s \cos(k_R a) & t_{\text{cd}} \\ t_{\text{cd}} & -2t_s \cos(k_R a) \end{pmatrix} \\ & \times \begin{pmatrix} \varphi_{k\uparrow} \\ \varphi_{k\downarrow} \end{pmatrix} - \Delta_c \hat{a}^\dagger \hat{a}. \end{aligned} \quad (8)$$

从哈密顿量我们可以看出, 在背景晶格参数固定的条件下, t_s 和 t_{cd} 依然要通过 η_A (Ω 和 g) 来进行大范围的调节。

在基于 $|\alpha|$ 自洽求解的前提下, 通过哈密顿量 (8), 我们得到静态的自旋结构因子 $S_z(k)$, 它可以反映红失谐下长程相互作用对系统的磁性关联的影响 (图 4)。我们依然首先考虑在半满填充下的情

$\eta_A/E_R = 1.8$ $\eta_A/E_R = 2.98$ $\eta_A/E_R = 3.20$ $\eta_A/E_R = 7.0$	$\eta_A/E_R = 1.8$ $\eta_A/E_R = 2.39$ $\eta_A/E_R = 2.78$ $\eta_A/E_R = 7.0$	$\eta_A/E_R = 1.8$ $\eta_A/E_R = 2.49$ $\eta_A/E_R = 2.69$ $\eta_A/E_R = 7.0$
--	--	--

$$\eta_A/E_R = 1.8$$

$$\eta_A/E_R = 2.39$$

$$\eta_A/E_R = 2.78$$

$$\eta_A/E_R = 7.0$$

$$\eta_A/E_R = 1.8$$

$$\eta_A/E_R = 2.49$$

$$\eta_A/E_R = 2.69$$

$$\eta_A/E_R = 7.0$$

况(图4(b)), 当 η_A 取值较小(黑色实线), 即 $|\alpha|=0$ 时, 系统处于无能隙的金属态, 与在蓝失谐时相同, $S_z(k)$ 只在 $k=\pm\pi$ 处有峰值且具有反铁磁关联的特性. 当 η_A 逐渐增大, 对应 $|\alpha|\neq 0$ 时, 自旋翻转的有效相互作用会使得 $S_z(k)$ 在 $k=0$ 处铁磁关联逐渐增强(红色点划线和蓝色虚线), 而在 $k=\pm\pi$ 处峰值依然存在, 使得系统呈现反铁磁关联的特性. 当 η_A 很大时, $S_z(k)$ 依然在 $k=\pm\pi$ 时取峰值且呈现反铁磁关联和在 $k=0$ 处的铁磁关联逐渐增强(粉色点线), 这与蓝失谐情况完全不同. 在非半满填充时(图4(a)和4(c)), 通过调节 η_A , 磁性关联

在 $k=0$ 和 $k=\pm\pi$ 处与半满填充时会有相同的磁性规律.

3.3 稳态相图

基于对上述磁性关联在两种不同失谐下的分析, 我们现在可以得到在 $k_F-\eta_A$ 平面上的相图. 我们可以通过 $S_z(k)$ 在 $k=0$ 和 $k=\pm\pi$ 处的峰值来判断不同的磁性, 通过在 $k=0$ 处的峰值与其他处相等时给出磁性的相边界(图5). 图5(a)为蓝失谐情况下的相图, M表示金属相, AF-SR表示的是反铁磁关联的超辐射相, FM-SR表示的是铁磁关联的

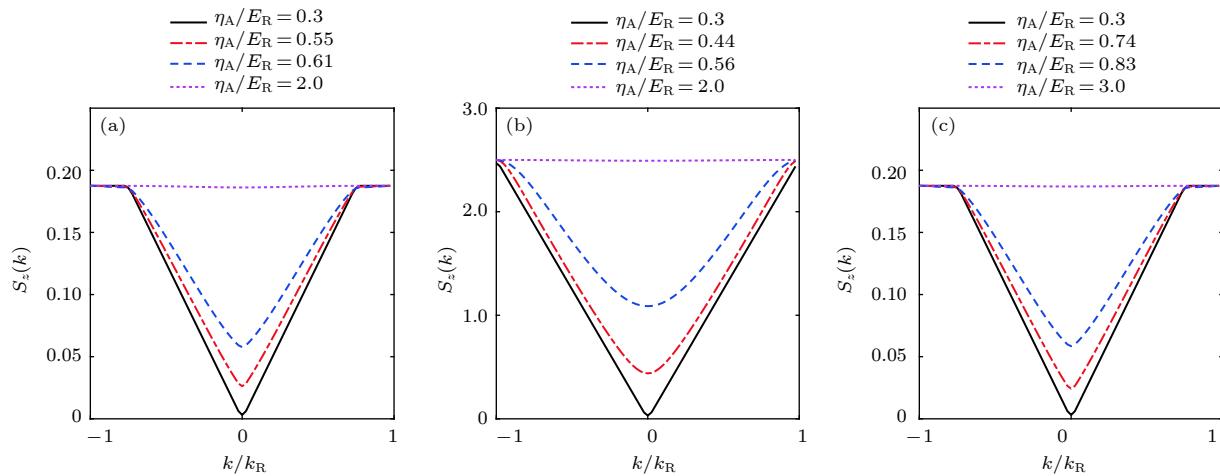


图4 静态自旋结构因子 $S_z(k)$ (a) $k_F/E_R = 3/8$; (b) $k_F/E_R = 1/2$; (c) $k_F/E_R = 5/8$ (图中对应的其他参数的选择与图2(b)中一致)

Fig. 4. The spin structure factors $S_z(k)$ for systems in different fillings: (a) $k_F/E_R = 3/8$; (b) $k_F/E_R = 1/2$; (c) $k_F/E_R = 5/8$ (The plotted parameters are the same as those in Fig. 2(b)).

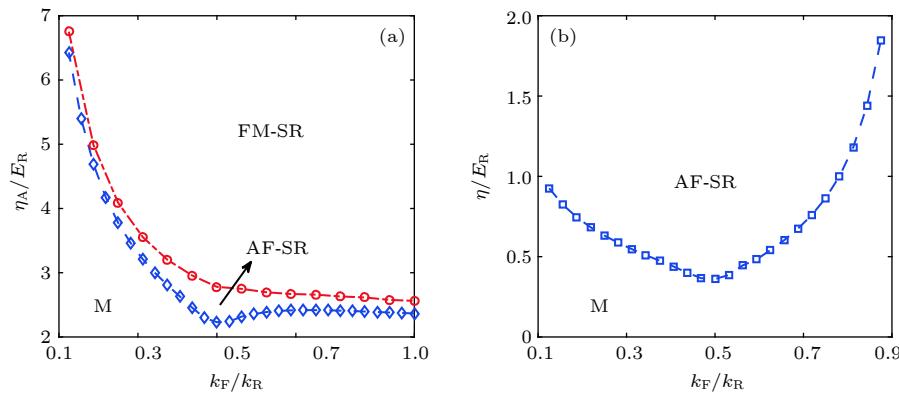


图5 (a) 蓝失谐时 $k_F-\eta_A$ 平面上的相图(M, AF-SR 和 FM-SR 分别代表金属相、反铁磁关联的超辐射相和铁磁关联的超辐射相, 其它参数的选择与图2(a)相同); (b) 红失谐时 $k_F-\eta_A$ 平面上的相图(AF-SR 代表反铁磁关联的超辐射相, 对应的其它参数的选择与图2(b)中一致)

Fig. 5. (a) The phase diagram in the $k_F-\eta_A$ plane for the system with blue-detuned atomic detuning (M, AF-SR, and FM-SR correspond to metallic phase, antiferromagnetic superradiant phase, and ferromagnetic superradiant phase, respectively. The plotted parameters are the same as those in Fig. 2(a)); (b) the phase diagram in the $k_F-\eta_A$ plane for the system with red-detuned atomic detuning (AF-SR corresponds to the antiferromagnetic superradiant phase. The plotted parameters are the same as those in Fig. 2(b)).

超辐射相, 可以看出在不同填充情况下, 调节 η_A 系统可以实现从 M 相到 AF-SR 相和从 AF-SR 相到 FM-SR 相的越变. 图 5(b) 为红失谐情况下的相图, 可以看出在不同填充情况下, 调节 η_A 系统可以实现从 M 相到 AF-SR 相的越变.

4 参数估计

本节估算所需参数并且表明我们得到的相在实验参数下可以观测. 具体地, 以⁶Li 原子为例, 对应的超精细态 $|\uparrow\rangle$ 和 $|\downarrow\rangle$ 分别对应于态 $|F=1/2, m_F=1/2\rangle$ 和 $|F=1/2, m_F=-1/2\rangle$, 其中 F 为总角动量, m_F 为磁量子数. 对于蓝失谐的情况, 我们固定 $V_0 = 5E_R$, 其中反冲能量选择 $E_R \sim 73.7$ kHz, 对应的其他参数的选择为 $\kappa = 7.4$ kHz, $g = 27.1$ MHz 和 $\Delta = 2$ GHz, 对应到我们文中参数的设定分别为 $\kappa = 100E_R$, $U = 5E_R$ 和 $\Delta_c = -10E_R$. 对于红失谐的情况, 我们固定 $V_0 = -5E_R$, 对应的其他参数的选择为 $\kappa = 7.4$ kHz, $g = 5.4$ MHz 和 $\Delta = -2$ GHz, 对应到我们文中参数的设定分别为 $\kappa = 100E_R$ 和 $U = -E_R$. 由于在红失谐, 即 $U < 0$ 时, 光场的有效失谐满足 $\Delta_c - U \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \int dx \langle \hat{\Psi}_\sigma^\dagger(x) \hat{\Psi}_\sigma(x) \rangle \cos^2(k_R x) < 0$, 系统才会有超辐射发生 [32], 所以我们选择 $\Delta_c = -100E_R$.

接下来我们简单讨论一下关于得到的不同的磁性关联相在实验上的探测. 首先, 超辐射反映在光子数的集体激发上. 光子数实验可以使用校准的单光子计数模块对腔内光强进行实时监测 [3]. 另外, 关于磁性相变由自旋动力学结构因子体现, 实验上可以通过探测透射光子来探测 [33]. 因此, 我们期望所预估的相图在实验中是可探测的.

5 总 结

在本文中, 我们提出了一个实验上可行的方案并研究了由超辐射引起的准一维两组分费米气的磁性相变与原子的失谐以及费米子的填充数的关系. 在不考虑原子间的相互作用时, 我们利用平均场近似的方法得到了体系的超辐射相变, 在此基础上, 通过定性分析 \hat{z} 方向的自旋结构因子来研究系统的磁性转变. 结果表明, 有效的光与原子相互作用导致的自旋不守恒过程会使得系统发生磁性相变, 且在蓝失谐时, 通过调节腔参数, 系统会实现

由反铁磁关联的超辐射相到磁性关联超辐射的转变; 相反地, 在红失谐时, 系统会得到反铁磁关联的超辐射相. 在非半满填充的时候系统也具有类似的结果.

参考文献

- [1] Bloch I, Dalibard J, Zwerger W 2008 *Rev. Mod. Phys.* **80** 885
- [2] Ritsch H, Demokos P, Brennecke F, Esslinger T 2013 *Rev. Mod. Phys.* **85** 553
- [3] Baumann K, Guerlin C, Brennecke F, Esslinger T 2010 *Nature (London)* **464** 1301
- [4] Landig R, Hruby L, Dogra N, Landini M, Mottl R, Donner T, Esslinger T 2016 *Nature (London)* **532** 476
- [5] Hruby L, Dogra N, Landini M, Donner T, Esslinger T 2018 *PNAS* **115** 3279
- [6] Lénard J, Morales A, Zupancic P, Esslinger T, Donner T 2017 *Nature (London)* **543** 87
- [7] Lénard J, Morales A, Zupancic P, Donner T, Esslinger T 2017 *Science* **358** 1415
- [8] Caballero-Benitez S F, Mekhov I B 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 243604
- [9] Dogra N, Brennecke F, Huber S D, Donner T 2016 *Phys. Rev. A* **94** 023632
- [10] Chen Y, Yu Z, Zhai H 2016 *Phys. Rev. A* **93** 041601(R)
- [11] Pan J S, Liu X J, Zhang W, Yi W, Guo G C 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 045303
- [12] Luo X W, Zhang C 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 263202
- [13] Gu H M, Huang Y Q, Wang H H, Wu G, Duan X F, Liu K, Ren X M 2018 *Acta Phys. Sin.* **67** 144201 (in Chinese) [谷红明, 黄永清, 王欢欢, 武刚, 段晓峰, 刘凯, 任晓敏 2018 物理学报 **67** 144201]
- [14] Parsons M F, Mazurenko A, Chiu C S, Ji G, Greif D, Greiner M 2016 *Science* **353** 1253
- [15] Boll M, Hilker T A, Salomon G, Omran A, Nespoli J, Pollet L, Bloch I, Gross C 2016 *Science* **353** 1257
- [16] Cheuk L W, Nichols M A, Lawrence K R, Okan M, Zhang H, Khatami E, Trivedi N, Paiva T, Rigol M, Zwierlein M W 2016 *Science* **353** 1260
- [17] Hilker T A, Salomon G, Grusdt F, Omran A, Boll M, Demler E, Bloch I, Gross C 2017 *Science* **357** 484
- [18] Salomon G, Koepsell J, Vijayan J, Hilker T A, Nespoli J, Pollet L, Bloch I, Gross C 2019 *Nature* **565** 56
- [19] Mazurenko A, Chiu C S, Ji G, Parsons M F, Kanasz-Nagy M, Schmidt R, Grusdt F, Demler E, Greif D, Greiner M 2017 *Nature* **545** 462
- [20] Xu Z J, Liu X Y 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 120305 (in Chinese) [徐志君, 刘夏吟 2011 物理学报 **60** 120305]
- [21] Qin S F, Zheng G P, Ma X, Li H Y, Tong J J, Yang B 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 110304 (in Chinese) [秦帅锋, 郑公平, 马晓, 李海燕, 童晶晶, 杨博 2013 物理学报 **62** 110304]
- [22] Sun N, Zhang P F, Zhai H 2018 *arXiv:* **1808** 03966v1 [cond-mat.quant-gas]
- [23] Fan J T, Zhou X F, Zheng W, Yi W, Chen G, Jia S T 2018 *Phys. Rev. A* **98** 043613
- [24] Giuliani G, Vignale G 2005 *Quantum Theory of the Electron Liquid* (Cambridge: Cambridge University Press) pp29-36
- [25] Su W P, Schrieffer J R, Heeger A J 1979 *Phys. Rev. Lett.* **42** 1698
- [26] Peierls R E 1955 *Quantum Theory of Solids* (Oxford: Clarendon Press) p108
- [27] Ogata M, Shiba H 1990 *Phys. Rev. B* **41** 2326
- [28] Costa N C, Mendes-Santos T, Paiva T, Santos R R dos,

- Scalettar R T 2016 *Phys. Rev. B* **94** 155107
[29] Chang C-C, Zhang S 2008 *Phys. Rev. B* **78** 165101
[30] Hart R A, Duarte P M, Yang T L, Liu X, Paiva T, Khatami E, Scalettar R T, Trivedi N, Huse D A, Hulet R G 2015 *Nature (London)* **519** 211
[31] Liu X-J, Law K T, Ng T K 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 086401
[32] Klinder J, Keßler H, Wolke M, Mathey L, Hemmerich A 2015 *PNAS* **112** 3290
[33] Landig R, Brennecke F, Mottl R, Donner T, Esslinger T 2015 *Nat. Commun.* **6** 7046

SPECIAL TOPIC—Cold atoms and molecules

Magnetic properties of one-dimensional Fermi gases in an optical cavity*

Feng Yan-Lin¹⁾²⁾ Fan Jing-Tao¹⁾²⁾ Chen Gang^{1)2)†} Jia Suo-Tang¹⁾²⁾

1) (*State Key Laboratory of Quantum Optics and Quantum Optics Devices, Institute of Laser Spectroscopy, Shanxi University, Taiyuan 030006, China*)

2) (*Collaborative Innovation Center of Extreme Optics, Shanxi University, Taiyuan 030006, China*)

(Received 1 November 2018; revised manuscript received 4 December 2018)

Abstract

In this work we show that the superradiance of the cavity photons can give rise to a magnetic transformation for the atomic system when the quasi one-dimensional Fermi gases are coupled to an optical cavity. This magnetic transformation has a close relationship with the atomic detuning and the filling number. When the interaction between the atoms is neglected, the mean-field approximation may be used in the superradiant phase. In this approximation, we analyze the static spin structure factors of the system with different filling numbers and atomic detuning. Then we characterize the cavity photons-assisted magnetic transformation and obtain the phase diagrams which are dependent on the cavity parameters. Finally, the feasible experimental parameters of our results are also discussed.

Keywords: effective optical lattice, superradiance, spin structure factor, magnetic correlation

PACS: 37.10.Jk, 37.30.+i, 42.50.Pq, 67.85.-d, 67.85.Lm

DOI: 10.7498/aps.68.20181954

* Project supported by the National Key R&D Program of China (Grant No. 2017YFA0304203), the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11674200, 11804204), the Program for Changjiang Scholars and Innovative Research Team in University of Ministry of Education of China (Grant No. IRT13076), and the Fund for Shanxi “1331 Project” Key Subjects Construction, China.

† Corresponding author. E-mail: chengang971@163.com

光晶格中超冷原子系统的磁激发

赵兴东 张莹莹 刘伍明

Magnetic excitation of ultra-cold atoms trapped in optical lattice

Zhao Xing-Dong Zhang Ying-Ying Liu Wu-Ming

引用信息 Citation: [Acta Physica Sinica](#), 68, 043703 (2019) DOI: 10.7498/aps.68.20190153

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190153>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

光腔中两组分玻色-爱因斯坦凝聚体的受激辐射特性和量子相变

Stimulated radiation characteristics and quantum phase transition for two-component Bose-Einstein condensate in optical cavity

物理学报. 2018, 67(18): 183701 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180971>

半无限深势阱中自旋相关玻色-爱因斯坦凝聚体的量子反射与干涉

Quantum reflection and interference of spin-dependent Bose-Einstein condensates in semi-infinite potential wells

物理学报. 2017, 66(23): 230301 <https://doi.org/10.7498/aps.66.230301>

变分法研究二维光晶格中玻色-爱因斯坦凝聚的调制不稳定性

Modulational instability of a two-dimensional Bose-Einstein condensate in an optical lattice through a variational approach

物理学报. 2015, 64(5): 054702 <https://doi.org/10.7498/aps.64.054702>

磁阱中超冷玻色气体临界行为的观测

Observation of critical behavior of ultra-cold Bose gas in a magnetic trap

物理学报. 2016, 65(11): 110504 <https://doi.org/10.7498/aps.65.110504>

87Rb玻色-爱因斯坦凝聚体的快速实验制备

Fast production of 87Rb Bose-Einstein condensates

物理学报. 2017, 66(8): 083701 <https://doi.org/10.7498/aps.66.083701>

专题：冷原子-分子物理

光晶格中超冷原子系统的磁激发^{*}赵兴东¹⁾ 张莹莹¹⁾ 刘伍明^{2)†}

1) (河南师范大学物理与材料科学学院, 新乡 453007)

2) (中国科学院物理研究所, 北京凝聚态物理国家研究中心, 北京 100190)

(2019年1月27日收到; 2019年2月11日收到修改稿)

囚禁在光学晶格中的旋量凝聚体由于其长的相干性和可调控性, 使其成为时下热点的多比特量子计算的潜在候选载体, 清楚地了解该体系的自旋和磁性的产生和调控就显得尤为重要. 本文主要从理论上回顾了光晶格原子自旋链的磁性的由来和操控手段. 从激光冷却原子出发, 制备旋量玻色-爱因斯坦凝聚体, 并装载进光晶格, 最后实现原子自旋链, 对整个过程的理论研究进行了综述; 就如何产生和操控自旋激发进行了详细探讨, 其中包括磁孤子的制备; 讨论了如何将原子自旋链应用于量子模拟. 对光学晶格中的磁激发研究将会对其在冷原子物理、凝聚态物理、量子信息等各方向的应用起指导性作用.

关键词: 旋量玻色-爱因斯坦凝聚体, 光晶格, 磁孤子, 量子模拟

PACS: 37.10.Jk, 42.50.Ct, 73.50.Ds, 81.16.Ta

DOI: 10.7498/aps.68.20190153

1 引言

近年来, 在光晶格系统中观测到了很多有趣的物理学现象, 比如超流-绝缘相变、Landau-Zener隧穿、布洛赫振荡、孤子等^[1-5], 囚禁在光学晶格中的玻色-爱因斯坦凝聚体(BEC)很快成为了冷原子物理和多体物理的研究热点之一. 其主要原因有二: 第一, 光学晶格不存在任何杂质和缺陷, 这个优点是很多固体系统无法企及的, 它为我们搞清楚诸如量子微粒(如冷原子等)在势阱之间如何进行量子隧穿, 噪声和耗散是如何影响原子在势阱之间的量子运输以及量子和经典场是如何关联等问题提供了理想而又丰富的环境, 同时光晶格中的超冷原子系统为模拟传统凝聚体物理和固体物理中的复杂物理问题提供了一个理想模型; 第二, 光学晶格中的超冷原子系统极易被操控, 目前为止已

经有大量的实验和理论工作对如何操控光晶格中超冷原子系统动力学性质进行了研究, 相对于难以调控的固体材料中的交换相互作用, 利用原子与磁或光的相互作用可以更方便地实现对晶格中原子相互作用和晶格间的交互作用的调节.

伴随着实验技术的发展, 自旋畴和其中的量子隧穿以及自旋交换力学相继在光晶格系统中被观测到^[6,7], 这引发了人们对囚禁在光阱中的带有自旋自由度的BEC产生了极大的兴趣^[8-14]. 在晶格势阱很深的条件下, 光晶格中的旋量BEC通过量子相变而处于莫特绝缘态, 此时整个体系可以看成是一个相干的原子自旋链. 此时, 各个晶格格点上的旋量BEC就像一个自旋磁子. 这些自旋磁子能够通过光诱导的和静磁的偶极-偶极相互作用进行耦合. 从这个意义上来说, 这样的旋量BEC的原子自旋链和固体物理磁性系统中的自旋链有着一定的相似性. 当然, 它们也有着明显的差别. 在

* 国家自然科学基金(批准号: 11434015, 61835013, 11728407, KZ201610005011, 11347159, 11604086)、国家科技攻关项目(批准号: 2016YFA0301500)、中国科学院战略性先导科技专项资助(批准号: XDB01020300, XDB21030300)和河南省教育厅自然科学研究项目(批准号: 01026631082, 14A140032)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: wmliu@iphy.ac.cn

固体自旋链中, 由于格点间自旋耦合是短程海森伯交换相互作用所导致, 理论模型和处理方法都采用近邻相互作用近似, 长程相互作用通常被忽略。在光晶格旋量 BEC 的原子自旋链里, 长程相互作用是非常重要的, 而且自旋耦合的强弱可以通过外部光场来控制。近年来, 一些与自旋相关的现象如自旋混合、自旋结构的形成、自发磁化的产生、自旋波的激发、磁孤子、宏观自旋隧穿等的物理机理得到了详细研究^[1,6,8]。由于晶格中原子之间长程偶极相互作用的存在, 光晶格超冷原子系统为研究格点系统中更为丰富的自旋耦合动力学特性提供了一个理想的工具, 也为超冷原子向量子信息科学与凝聚态物理交叉领域的发展开辟了广阔前景。

2 激光冷却与玻色-爱因斯坦凝聚

当激光的频率与原子的固有频率相同时, 激光射向运动着的原子, 原子就会共振吸收迎面射来的光子从低能级跃迁到高能级(图 1(a)), 由于整个过程动量守恒, 原子在得到光子以后的动量等于原子的初始动量和光子动量的矢量和, 由于二者反号, 被激发的原子的动量就会变小(图 1(b))。同时处于激发态的原子会自发辐射出光子而回到低能级的初态并获得反冲动量, 因为自发辐射出的光子的方向是随机的, 所以多次自发辐射的平均结果并不会增加原子的动量(图 1(c))。所谓激光冷却, 实际上就是通过激光与原子的作用下使原子减速, 温度是物体分子热运动的平均动能的标志, 从微观角度看, 原子减速了, 温度也就降低了。

激光冷却原子技术可以分为: 多普勒冷却、偏振梯度冷却、亚反冲冷却等。激光冷却技术可以将原子冷却到几十 μK 的量级, 如果要得到更低的温

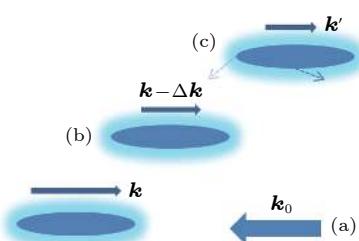


图 1 (a) 运动的原子和反向传输的激光; (b) 吸收光子动量减少的原子; (c) 原子随机辐射光子

Fig. 1. (a) Moving atoms and counter propagating laser; (b) atoms with reduced momentum after absorbing photons; (c) atoms radiate photons in random directions.

度以实现 BEC, 还需要其他的冷却技术, 如射频蒸发现冷却等。射频蒸发现冷却技术可以将原子冷却到 $0.1 \mu\text{K}$ 的量级, 此时 BEC 就可以形成。当温度低于一个临界温度时, 理想玻色气体会在最低的能态上突然凝聚, 这一物理现象现在被称为 BEC, 这个现象可以在粒子间没有相互作用时发生, 它是全同玻色子体系波函数对称性的结果。对于 BEC 而言, 具有实际意义的情况是原子被外势场束缚且原子间存在相互作用的情况, 这也是我们着重讨论的内容。束缚在外势阱 V_{ext} 中的 N 个相互作用的玻色子的多体哈密顿量的二次量子化形式为:

$$\hat{H} = \int d\mathbf{r} \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{ext}} \right] \hat{\Psi}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}') V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}), \quad (1)$$

其中 $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$ 和 $\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})$ 玻色场湮灭和产生算符, 分别表示在坐标 \mathbf{r} 处湮灭或产生一个粒子; $V(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ 表示两体相互作用势; $V_{\text{ext}}(\mathbf{r})$ 表示捕获玻色原子的外势阱。在考虑极低温的情况时, 当原子德布罗意波长远大于原子间相互作用力程时, 两体碰撞模型可以精确地描述当前的 BEC 实验。平均场理论的思想是将场算符分解为 $\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \Phi(\mathbf{r}, t) + \tilde{\Psi}(\mathbf{r}, t)$, 其中 $\Phi(\mathbf{r}, t) = \langle \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) \rangle$ 称为凝聚体波函数, 由 (1) 式简单推导可得到波函数服从的方程:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{r}, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{ext}} + g|\Phi(\mathbf{r}, t)|^2 \right) \Phi(\mathbf{r}, t), \quad (2)$$

这里 $g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}$, m 是原子质量, a 代表 s- 波散射长度。方程 (2) 就是著名的 Gross-Pitaevskii 方程。这个方程在一定程度上有效地预言了临界温度以下的凝聚体的大部分特征。方程中描述的两体碰撞使物质波和传统光学的非线性介质变得极其类似, 很多光学现象也能在这个系统观察到, 比如: 物质波混频、物质波孤子、自聚焦、散焦等。

3 光晶格技术

简言之, 相对传输的几对激光束的干涉能在空间形成明暗相间的周期分布, 这种周期性场强分布通过与中性原子的偶极相互作用, 形成一种控制质心运动的周期性网状势场, 这种由激光束干涉而形

成的原子偶极势网就是光晶格。激光束中的原子受到的两种力：偶极力和散射力。偶极力使原子陷在晶格中，而散射力则帮助原子冷却，第2节我们已经解释了散射力的原理。

偶极力可以理解为：将非平面波看成是不同模的光波的叠加，原子在这种光场中同时与许多模的光子发生相互作用，它可以从某一模式 \mathbf{k} 吸收光子，而在受激发射时发出另一模式 \mathbf{k}' 的光子。由于不同模式的光子动量不同，在这一过程中虽然吸收和发射光子的能量相同，但动量却有变化。这一动量转移靠原子动量变化来补偿，从而使原子受力。这一过程与相干的受激跃迁有关，其结果是光子在不同模间转移，所以此力也称为感应力。根据半经典理论可得偶极力的表达式为 $F_{\text{dip}} = -\hbar\gamma \frac{\nabla I}{I} \frac{\delta}{\Gamma}$ ，其中 Γ 是自发辐射率（上能级宽度），即单位时间内原子的吸收率， γ 是跃迁机率， I 为光强， $\delta = \omega - \omega_0$ 为激光的失谐。很明显，此力与光强梯度成正比，所以又称为梯度力。当失谐为红失谐时($\omega < \omega_0$)，力指向 ∇I 方向，即光强最强处；而当失谐为蓝失谐时($\omega > \omega_0$)，力的方向指向光强最弱处。也就是说，当激光频率调谐到低于原子共振频率时，该力就把原子拉向电场最强的地方，如图2(a)；而当激光调谐到高于共振频率时，该力又把原子推向电场最弱的区域，如图2(b)。总之，偶极力可以把原子囚禁在光晶格中。

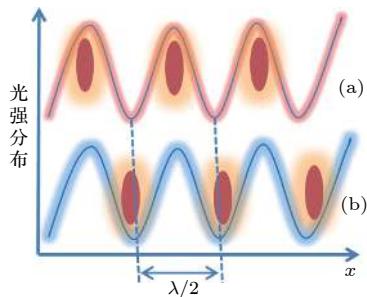


图2 偶极力捕获原子示意图 (a) 红失谐; (b) 蓝失谐

Fig. 2. Atoms are trapped by dipole force: (a) Red-detuning case; (b) blue-detuning case.

通过改变激光束的偏振和它们的传播方向可以产生一维、二维和三维的光晶格。如图3所示，一维晶格简单的由一对正交的偏振行波组成，对于二维和三维的光晶格，已经发展了很多种不同的激光束配置。

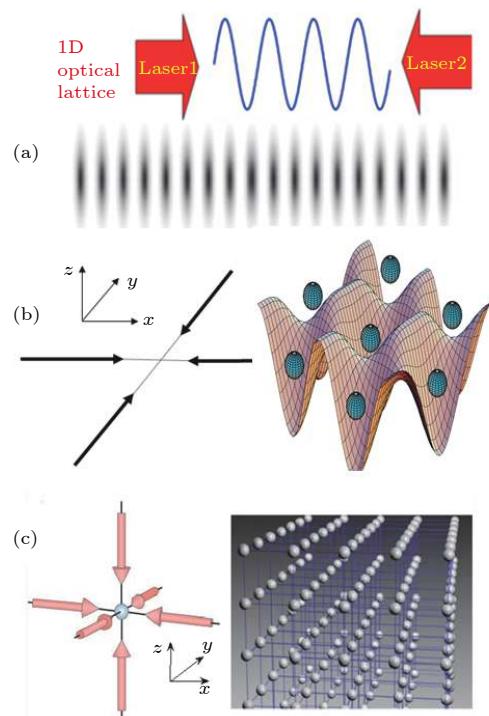


图3 一维、二维和三维光晶格的产生以及原子在晶格中分布的示意图 (a) 一维光晶格; (b) 二维光晶格; (c) 三维光晶格 [15,16]

Fig. 3. Optical lattice with different dimension and corresponding atomic distributions: (a) One-dimension case; (b) two-dimension case; (c) three-dimension case.

4 光晶格中的旋量凝聚体

4.1 势阱中的旋量凝聚体

这里仍然选择光势阱。和磁阱只能通过弱场搜寻囚禁单个超精细子能级的原子不同，光囚禁可以捕获所有磁子能级的原子。光势阱中自旋为 \mathbf{F} 旋量玻色-爱因斯坦凝聚体的哈密顿量的二次量子化形式为

$$\hat{H} = \int d\mathbf{r} \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{ext}} \right] \hat{\Psi}(\mathbf{r}) + \Omega_{\alpha,\beta,\mu,\nu} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \hat{\Psi}_\alpha^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}_\beta^\dagger(\mathbf{r}') \times V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\Psi}_\mu(\mathbf{r}') \hat{\Psi}_\nu(\mathbf{r}), \quad (3)$$

其中 $\hat{\Psi}_k(\mathbf{r})(k = \alpha, \beta, \mu, \nu)$ 是场湮灭算符，指标 α, β, μ, ν 对应着凝聚体的各个组分，且重复指标表示求和； V_{ext} 是外束缚势的一般形式，是标量场，对每个自旋组分有相同的形式。哈密顿量(3)的最后一项描述的是 $2F+1$ 个组分的旋量玻色-爱因斯坦凝聚体原子的短程相互作用，原子间的相互作用由系数 $\Omega_{\alpha,\beta,\mu,\nu}$ 表征，当系统在自旋空间满足旋转对称

性时, 相互作用的形式可大大简化. 原子相互作用的一般形式为 $\hat{V}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \sum_{f=0}^{2F} g_f \hat{P}_f$, 这里 $g_f = \frac{4\pi\hbar^2 a_f}{m}$, m 是原子质量, a_f 代表总自旋 f 轨道的 s 波散射长度; \hat{P}_f 是总自旋 f 的投影算符. 若玻色子自旋为 F , 对称性要求总自旋 $f = 0, 2, \dots, 2F$. 描述自旋 $F = 1$ 的弱相互作用的玻色-爱因斯坦凝聚体的哈密顿量为

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \sum_{\alpha} \int d\mathbf{r} \hat{\Psi}_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{ext}} \right] \hat{\Psi}_{\alpha}(\mathbf{r}) \\ & + \frac{c_0}{2} \sum_{\alpha, \beta} \int d\mathbf{r} \hat{\Psi}_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}) \hat{\Psi}_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{r}) \hat{\Psi}_{\beta}(\mathbf{r}) \hat{\Psi}_{\alpha}(\mathbf{r}) \\ & + \frac{c_2}{2} \sum_{\alpha, \beta, \alpha', \beta'} \int d\mathbf{r} \hat{\Psi}_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}) \hat{\Psi}_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{r}) \\ & \times F_{\alpha\alpha'} F_{\beta\beta'} \hat{\Psi}_{\beta'}(\mathbf{r}) \hat{\Psi}_{\alpha'}(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $\hat{\Psi}_{\alpha}(\mathbf{r})$ 是处于超精细自旋态 $|F = 1, m_F = \alpha\rangle$ 的原子的场湮灭算符, 指标 $(\alpha, \beta, \alpha', \beta' = -1, 0, 1)$ 代表三个自旋组分. 跃迁矩阵满足角动量算符对易关系 $[F_a, F_b] = i\epsilon_{abc}F_c (a, b, c \Rightarrow x, y, z)$. 原子的两体碰撞相互作用特征分别由两个参数 $c_0 = 4\pi\hbar^2(2a_2 + a_0)/3m$ 及 $c_2 = 4\pi\hbar^2(a_2 - a_0)/3m$ 确定, 这里 a_0 与 a_2 分别对应于两个原子碰撞后总角动量 $f = 0$ 与 $f = 2$ 通道的散射长度. 对 ^{23}Na , 有 $a_2 > a_0$, 则 $c_2 > 0$, 原子间是反铁磁相互作用; 而对 ^{87}Rb , 情况正好相反, 有 $a_2 < a_0$, 则 $c_2 < 0$, 原子间是铁磁相互作用. 在平均场近似下, 系统的基态特征可以通过最小化能量泛函:

$$\begin{aligned} E = & \int d^3\mathbf{r} \frac{\hbar^2}{2m} \left\{ [\nabla \sqrt{n}]^2 + [\nabla \zeta(\mathbf{r})]^2 n \right\} \\ & - \int d^3\mathbf{r} \left\{ [\mu - U(\mathbf{r})] n - \frac{n^2}{2} [c_0 + c_2 \langle \mathbf{F} \rangle^2] \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

得到. 这里我们用到了 $\phi_{\alpha}(\mathbf{r}) = \langle \psi_{\alpha}(\mathbf{r}) \rangle = \sqrt{n(\mathbf{r})} \zeta_{\alpha}(\mathbf{r})$, $n(\mathbf{r})$ 是局域原子密度, $\zeta_{\alpha}(\mathbf{r})$ 是归一化的自旋分量, μ 是化学势. 波函数的基态结构可通过最小化自旋相关的相互作用能 $\frac{n^2 c_2}{2} \langle \mathbf{F} \rangle^2$ 来决定. Ketterle 等^[7] 研究并观测了 $F = 1$ 旋量凝聚体的自旋畴, 可以通过最小化自旋依赖的能量:

$$K_s = c \langle \mathbf{F} \rangle^2 - p \langle F_z \rangle + q \langle F_z^2 \rangle \quad (6)$$

得到, 这里 p 和 q 表征塞曼能级差, $c = c_2 n/2$. 结果如图 4 所示, 可以看出, 自旋依赖的碰撞相互作用对畴的形成起着非常重要的作用.

4.2 $F = 1$ 的玻色-哈伯德模型

光晶格的光势阱阵为我们研究多体相互作用提供了一个非常可靠的环境, 将旋量凝聚体装载到光晶格中, 在最低能带的瓦涅尔基中展开玻色场算符 $\hat{\Psi}_{\alpha}(\mathbf{r}) = \sum_{\beta} \hat{a}_{\alpha\beta} w(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\beta})$, 其中 $w(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\beta})$ 是第 β 个格点的瓦涅尔函数, $\hat{a}_{\alpha\beta}$ 表示第 β 个格点上 α -自旋组分的玻色湮灭算符. 值得注意的是, 自旋对称相互作用远远大于自旋非对称相互作用, 即只有当 $|c_0| \gg |c_2|$ 时, 不同自旋组分的原子才可以用同样的空间波函数描述. 如果只考虑最近邻格点间的相互作用, 哈密顿量 (4) 可以约化得到自旋 $F = 1$ 的玻色-哈伯德模型^[17]:

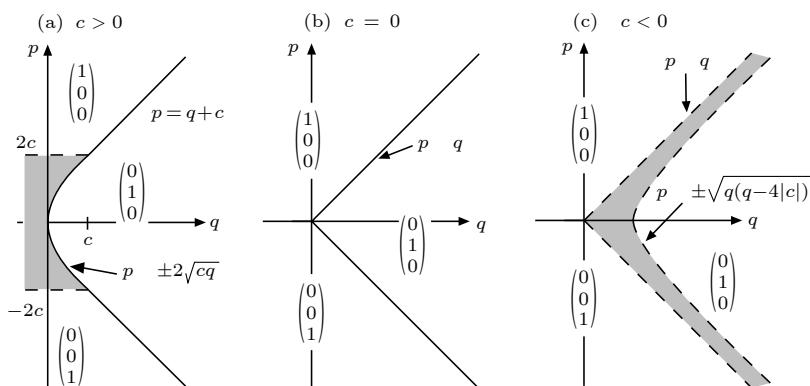


图 4 $F = 1$ 旋量凝聚体的自旋畴示意图. 图 (b) 中, $m_f = \pm 1$ 时凝聚原子会分成三个畴而且有明显的边界, 相互作用会诱导畴边界交叠如图 (a) 和图 (c) 所示, 在图 (c) 中自旋畴已经没有了明显边界^[7]

Fig. 4. Spin-domain diagrams for condensates with $F = 1$. The cloud is separated into three domains with distinct boundaries in (b), components $m_f = \pm 1$ are miscible as shown in (a), all three components are generally miscible in (c).

$$\begin{aligned}\hat{H} = & -J \sum_{i,j} \sum_{\alpha} \hat{a}_{\alpha i}^+ \hat{a}_{\alpha j}^+ + \sum_i \sum_{\alpha} \varepsilon_i \hat{a}_{\alpha i}^+ \hat{a}_{\alpha i}^+ \\ & + \frac{U_0}{2} \sum_i \sum_{\alpha, \beta} \hat{a}_{\alpha i}^+ \hat{a}_{\beta i}^+ \hat{a}_{\beta i} \hat{a}_{\alpha i} \\ & + \frac{U_2}{2} \sum_i \sum_{\alpha, \beta, \alpha', \beta'} \hat{a}_{\alpha i}^+ \hat{a}_{\beta i}^+ F_{\alpha \alpha'} F_{\beta \beta'} \hat{a}_{\beta' i} \hat{a}_{\alpha' i}, \quad (7)\end{aligned}$$

模型中的第一项是自旋对称隧穿项，隧穿耦合的强弱由隧穿矩阵元 $J = \int d^3r w^*(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) (-\hbar^2 \nabla^2 / 2m + V_{\text{Lat}}(\mathbf{r})) w(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$ 表征；第二项给出了由外加缓变势引起的第 i 个格点的能量偏移 $\varepsilon_i = \int d^3r V_{\text{Tra}}(\mathbf{r}) |w(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)|^2 \approx V_{\text{Tra}}(\mathbf{r}_i)$ ，这里可以看作不依赖格点的一个常量；第三项和第四项则分别表示同一格点上原子间的两种碰撞相互作用，即自旋对称碰撞与自旋非对称（交换）碰撞，它们的强弱分别由相互作用矩阵元 $U_{0(2)} = c_{0(2)} \int d^3r |w(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)|^4$ 表征，这是两种短程相互作用，分别由单参数 U_0 和 U_2 来唯一地决定，并且随着光晶格势阱深度的调节可以在很大的范围内连续地改变。

5 光晶格中的自旋激发和磁孤子

5.1 光晶格中的自旋激发

光晶格中的旋量凝聚体的动力学行主要是受到三种两体相互作用的影响：自旋交换碰撞相互作用、磁偶极-偶极相互作用、光诱导的偶极-偶极相互作用。对于蓝失谐的光晶格，原子被捕获的位置是波节处，这时光诱导的偶极-偶极相互作用可以忽略，很多工作都这样处理。

当势阱足够深的时候，体系会相变到莫特绝缘态。在没有外磁场作用的情况下，每个晶格中的凝聚原子可以看成是一个个独立的小磁子，并且它们的自旋指向是任意的，并没有格点间的自旋关联。此时，光晶格系统非常类似于磁学中的自旋格子系统，但是它们存在明显的差别。首先磁学中的交换相互作用在这里几乎可以忽略，毕竟小磁子之间约有半个波长的距离，莫特绝缘态的格子系统中格点间粒子交换也几乎是零。另外，由于玻色增强效应，在固体系统中经常被忽略的磁偶极-偶极相互作用这时开始发挥重要作用，如果格子中的平均粒子数 N ，磁偶极相互作用可以获得平方量级的增强。

常用的磁偶极-偶极相互作用的形式为

$$\begin{aligned}V_{dd}^{ij} = & \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' |\phi(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)|^2 |\phi(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_j)|^2 \\ & \times \left[\frac{\boldsymbol{\mu}_i \cdot \boldsymbol{\mu}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} - \frac{3[\boldsymbol{\mu}_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \boldsymbol{\mu}_j(\mathbf{r} - \mathbf{r}')]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} \right], \quad (8)\end{aligned}$$

这里 μ_0 是真空磁导率， $\boldsymbol{\mu}_i$ 是第 i 个格子的偶极矩。考虑磁偶极-偶极相互作用以后，系统的哈密顿量变成

$$\begin{aligned}H = & \sum_i \left[\lambda'_a \hat{\mathbf{S}}_i^2 - \gamma_B \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} \hat{\mathbf{S}}_i \cdot \hat{\mathbf{S}}_j \right. \\ & \left. - 3\gamma_B \sum_{j \neq i} \hat{\mathbf{S}}_i \cdot \Lambda_{ij} \cdot \hat{\mathbf{S}}_j - \gamma_B \hat{\mathbf{S}}_i \cdot \mathbf{B} \right] \quad (9)\end{aligned}$$

式中 $\hat{\mathbf{S}}_i$ 是第 i 个自旋的总自旋算符，其各分量是 $\hat{S}_i^{(\pm, z)}$ 。上式第一项是格点内的自旋交换相互作用项 $\lambda'_a = (1/2) \lambda_a \int d^3r |\phi_i(\mathbf{r})|^4$ 。第二、三项是格点间的长程相互作用项， λ_{ij} 和 Λ_{ij} 分别描述格点间磁和光诱导的偶极-偶极相互作用，最后一项是外部极化磁场 \mathbf{B} 。在一维和二维光晶格中，上式的形式可继续简化为：

$$\begin{aligned}H_{1d} = & \lambda'_a \hat{\mathbf{S}}^2 - \gamma_B \hat{\mathbf{S}} \cdot \left[\left(B_z + 2 \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} S_j^z \right) \hat{\mathbf{z}} \right. \\ & \left. + \left(B_x - 2 \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} S_j^x \right) \hat{\mathbf{x}} - \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} S_j^y \hat{\mathbf{y}} \right], \quad (10)\end{aligned}$$

$$H_{2d} = \sum_{ij} \left[\frac{\lambda_a}{2} \hat{S}_{ij}^2 + \frac{\gamma_B \mu_0}{4\pi} \sum_{kl \neq ij} \hat{S}_{ij}^T \Lambda_{ij, kl} \hat{S}_{kl} \right]. \quad (11)$$

由上两式可以看出，光晶格中旋量原子的哈密顿量和固体物理里的海森伯自旋链的哈密顿量形式非常相似，所以我们也称这个系统为光晶格中的原子自旋链模型。和海森伯自旋链相比，原子自旋链有两个独有的优点：其一是格点之间的耦合是长程耦合，充分考虑了非近邻格点间的相互作用；其二是耦合距离和强度可以调节，通过调节外场参数，可以增加或者减弱长程特性，特别地，适当调节参数可以实现近邻和次近邻的有效近似。由于磁偶极相互作用的存在，张卫平、蒲晗等^[1] 研究发现铁磁相变和自发磁化可以在一维自旋链中发生，如图 5 所示。

以上考虑都是没有光诱导的偶极-偶极相互作用的情况。在红失谐光晶格中，凝聚体被囚禁在驻

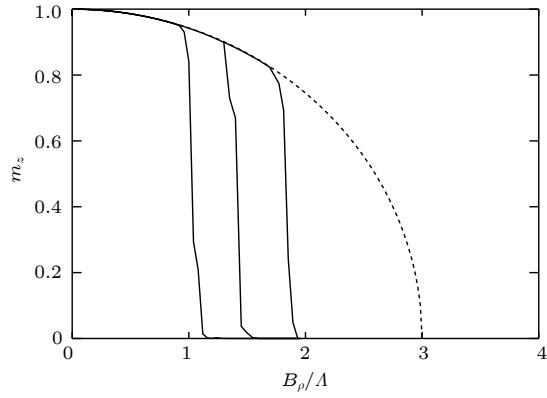


图 5 原子自旋链中磁偶极-偶极相互作用诱导的自发磁化^[11]
这里纵轴 m_z 代表 z 方向的自发磁化强度, 横轴 B_ρ 是 $x-y$ 平面上的外磁场强度, 虚线是平均场近似的结果, 数值模拟所得实线对应的是不同的格点填充数 $N = 10, 15, 20$

Fig. 5. Spontaneous magnetization of atomic spin chain dominated by magnetic dipole-dipole interaction. m_z is the magnetization components in the z -axis direction, B_ρ is intensity of the external magnetic field. The dashed line represents the mean-field result and the solid lines, from left to right, correspond to the exact numerical results for a two-site lattice with $N = 10, 15$ and 20 atoms.

波波腹, 即光强最强处. 这时需要考虑光诱导的偶极-偶极相互作用, 其形式为^[10]

$$\begin{aligned} Q_{mm'n'n} &= 3 \frac{\gamma}{\Delta} U_0 \exp \left(-\frac{r_\perp^2 + r'^2_\perp}{W_L^2} \right) \cos(k_L y) \\ &\times \cos(k_L y') \times \left[\frac{4}{9} \delta_{m'n'} \delta_{mn} e_0 \right. \\ &\times \mathbf{W}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{e}_0 - d_{m'n'} \\ &\times \mathbf{W}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot d_{mn} \left. \right], \end{aligned} \quad (12)$$

张量函数 $\mathbf{W}(\mathbf{r})$ 是用来描述光诱导的偶极-偶极相互作用的空间分布, 其表达式为 $\mathbf{W}(\mathbf{r}) = \frac{3}{4}[(11 - 3\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}})(\sin(\xi)/\xi^2 + \cos(\xi)/\xi^3) - (11 - \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}})\cos(\xi)/\xi]$, 其中 11 是单位张量. 在这种情况下, 光诱导的偶极-偶极相互作用相比于磁诱导的偶极-偶极相互作用要强得多. 与蓝失谐光晶格的情况相比, 这里光诱导的偶极-偶极相互作用将增强格点间自旋的横向耦合. 换句话说, 红失谐光晶格中的原子自旋链呈现较强的自旋各向异性特征. 考虑光诱导的偶极-偶极相互作用后系统的完整哈密顿量为^[10]:

$$\begin{aligned} H = \sum_i \left[\lambda'_a \hat{S}_i^2 - \gamma_B \hat{S}_i \cdot \mathbf{B} - \sum_{j \neq i} J_{ij}^z \hat{S}_i^z \hat{S}_j^z \right. \\ \left. - \sum_{j \neq i} J_{ij} (\hat{S}_i^- \hat{S}_i^+ + \hat{S}_i^+ \hat{S}_j^-) \right], \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} J_{ij}^z &= \frac{\mu_0 \gamma_B^2}{16\pi \hbar^2} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \frac{|\mathbf{r}'|^2 - 3y'^2}{|\mathbf{r}'|^5} |\phi_i(\mathbf{r})|^2 \\ &\times |\phi_j(\mathbf{r} - \mathbf{r}')|^2, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} J_{ij} &= \frac{U}{144\hbar^2 k_L^3} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' f_c(\mathbf{r}') \\ &\times \exp \left(\frac{\mathbf{r}_\perp^2 + |\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp|^2}{W_L^2} \right) \cos(k_L y) \\ &\times \cos[k_L(y - y')] \times \mathbf{e}_{+1} \cdot \mathbf{W}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{e}_{-1} \\ &\times |\phi_i(\mathbf{r})|^2 |\phi_j(\mathbf{r} - \mathbf{r}')|^2 + \frac{1}{2} J_{ij}^z. \end{aligned} \quad (15)$$

从方程 (13) 中可以看出, 光诱导的偶极-偶极相互作用只是在 $x-y$ 平面起作用, 而磁偶极-偶极相互作用在不同方向上都有贡献. 方程 (15) 给出了光诱导的偶极-偶极相互作用在格点间耦合的分布, 很明显的是这个耦合强度几乎完全依赖于外场的参数包括强度 U 、频率 k_L 和囚禁宽度 W_L . 适当调节外场可以极大地增加格点之间的耦合强度, 只要格点之间的耦合足够强, 横向的自旋激发就会在格点上传播, 这就导致晶格中原子的自旋扭曲在自旋链上传播. 从哈密顿量 (13) 可以导出自旋激发的海森伯运动方程:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \hat{S}_q^{(-)} = (\omega_0 + \Delta\omega_q) \hat{S}_q^{(-)} - \sum_{j \neq n} \chi_{qj} \hat{S}_q^{(-)}, \quad (16)$$

这里 $\omega_0 = -\gamma_B B$, $\Delta\omega_q = 2 \sum_{j \neq q} J_{qj}^z N_j \hbar$, 新的自旋耦合系数 $\chi_{qj} = 2 J_{qj} N_q \hbar$. 值得注意的是, 这里使用了 $\hat{S}_q^z \approx \langle \hat{S}_q^z \rangle$, 即基态的平均值. 为了深入了解方程 (16) 中自旋波的传播, 我们考虑无限长晶格中的长波激发, 这样可以采用连续近似: $\hat{S}_q^{(-)} \rightarrow S(y, t)$, $\chi_{qj} \rightarrow \chi(y - y')$, $\omega_0 + \Delta\omega_q \rightarrow \omega(y)$, 可以得到连续近似下自旋的运动方程:

$$i \frac{\partial S(y, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\beta_1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \beta_0 + \omega(y) \right] S(y, t). \quad (17)$$

这个方程描述了自旋激发沿坐标轴方向的传输, 非常类似于量子力学中有效质量为 $m^* = \hbar/\beta_1$ 的粒子的质心运动方程. 和声子定义类似, 这就是光晶格原子自旋链系统中产生的磁振子. 图 6 给出了原子自旋链中的自旋波产生和传播的示意图.

5.2 光晶格中的磁孤子

凝聚态物理发展过程中, 孤子作为基态元激发的引入对处理非线性问题是巨大的推动, 孤子激发在海森伯自旋链中已经被广泛研究过. 在低温条件

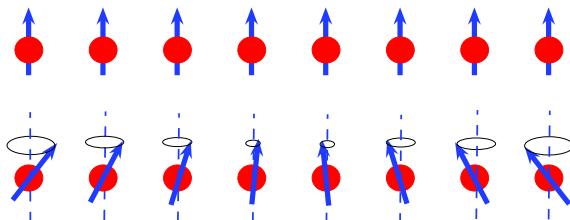


图 6 原子自旋链中自旋波的激发. 图的上部分是原子自旋链的铁磁基态示意图, 下部分是偶极-偶极相互作用下自旋进动在晶格方向的传播^[18]

Fig. 6. Spin waves are excited in atomic spin chain in optical lattice. Top: ferromagnetic ground-state structure of the spinor BEC atomic spin chain. Bottom: spin in each lattice site processes in spin space and spin waves can be excited.

下, 这些元激发实际就是我们上面提到的自旋波, 自旋波孤子也是大家比较感兴趣的课题. 只是在固体系统中, 掺杂和缺陷一直存在, 温度的影响也很大, 增加了研究和观测的难度. 这方面, 光晶格系统的优越性很明显: 一方面这里的原子自旋链系统是一个非常纯净的系统, 没有任何杂质; 另一方面, 系统具有很高的可控性, 而且温度的影响变得微乎其微. 在这个意义上, 光晶格可以作为一个非常理想的工具用来模拟固体物理中的许多动力学特征.

基于偶极-偶极的可调性, 原子自旋链中的磁孤子激发被大量地研究. 但是, 针对如何在原子自旋链中实现可观测的孤子的研究很有限. 由于连续近似下自旋波的传播服从方程(17), 通过研究孤子存在的条件, 我们建议通过调节横向场来实现磁孤子的观测. 图 7 中给出了如何通过控制外部光场的强度和囚禁宽度来实现磁孤子激发.

6 光晶格中的磁激发应用于量子模拟

6.1 磁振子压缩态

近年来, 随着精密测量的发展, 压缩态无论从理论上还是实验上都得到极大的关注. 在凝聚态物理中, 有研究表明通过调节固体材料的参数可以实现磁振子的压缩态, 这个方法实验上有很大的难度. 如第 1 节所述, 光晶格中的超冷原子系统由于其得天独厚的性质, 为模拟传统凝聚体物理和固体物理中的复杂物理问题提供了一个理想环境.

为了研究自旋偏差, 自旋分量需要重新定义 $s_n^\pm = (s_n^x \pm i s_n^y)/S$, $s_n^x = s_n^z/S$. 使用 Holstein-Primakoff 变换: $\hat{S}_i^+ = \sqrt{2S} \hat{\varphi}_i \hat{a}_i$, $\hat{S}_i^z = S - \hat{n}_i$, 傅里

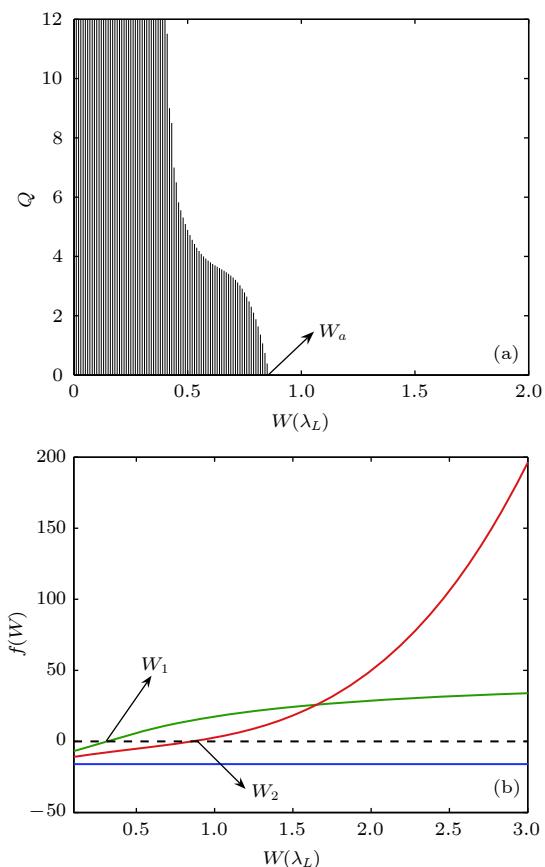


图 7 通过控制外场实现磁孤子的产生 (a) 红失谐光晶格中控制驱动光场和束缚场产生磁孤子, Q 是驱动光场的强度, W 是晶格的横向囚禁宽度, 空白的区域对应有磁孤子产生, 反之, 黑的区域不能激发磁孤子; (b) 蓝失谐光晶格中调节束缚场来产生磁孤子, 蓝线、绿线和红线分别代表考虑近邻、次近邻和长程的结果, $f(W) > 0$ 代表有磁孤子激发^[19]

Fig. 7. Magnetic soliton are excited by tuning external field: (a) Magnetic soliton are produced by tuning driving light field and trapping potential in red-detuning case, the vertical axis Q stands for the intensity of the modulated laser, and the horizontal axis W represents the transverse width of the condensate, the blank region corresponds to the existence of solitons; (b) magnetic soliton are produced by tuning trapping potential in blue-detuning case, the three lines correspond to the nearest-neighbor approximation (blue), the next-nearest-neighbor approximation (green), and the continuum limit approximation (red), respectively, magnetic solitons occur in the region $f(W) > 0$.

叶变换 $\hat{a}_k = 1/\sqrt{M} \sum_i \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_i) \hat{a}_i$, \mathbf{R}_i 是第 i 个自旋的坐标. 这样哈密顿量 (13) 可以变为

$$H = \sum_k \omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \sum_{k,k',q} V_{k,k',q} \hat{a}_{k-q}^\dagger \hat{a}_{k'+q}^\dagger \hat{a}_{k'} \hat{a}_k. \quad (18)$$

对角化哈密顿量 (18), 可以得到该系统中波矢为 \mathbf{k} 的磁振子的激发数:

$$N_k(t) = \sinh^2(\gamma_k) + \sinh^2(\lambda_k) + 2\sinh^2(\gamma_k)\sinh^2(\lambda_k) - \frac{1}{2}\sinh(2\gamma_k)\sinh(2\lambda_k)|\sin(w_k t)|. \quad (19)$$

上式第一项 γ_k 只依赖于磁偶极-偶极相互作用, 第二项 λ_k 只依赖于光诱导的偶极-偶极相互作用, 最后两项是两种偶极相互作用诱导的相干激发项. 在固体材料中, 产生压缩态的机制主要是靠不同能量的磁振子间的相互作用, 和反铁磁链相比, 在铁磁链中实现尤其困难. 在原子自旋链系统中, 两种偶极相互作用机制产生的磁振子可以实现完美的干涉.

如图 8 给出了不同参数下磁振子的压缩特性. 值得强调的是, 这里磁振子的压缩态可以通过调节外部光场来实现, 这种方式对系统的固有属性改变很小, 在以往的系统中是很难实现的.

6.2 有限温度的动力学卡西米尔效应

对动力学卡西米尔效应这一有趣的物理学现象的实验观测也是近年来科学家们比较感兴趣的课题, 很多设想的实验在实践过程中难度颇高. 直到 2011 年, 人们才在超导量子干涉设备中观测到比较完整的动力学卡西米尔效应 [20]. 与此同时, 实验过程中环境温度几乎是很难忽略的因素, 这时有很多物理学家才开始研究有限温度的卡西米尔效应 [21,22], 这个方向的研究几乎都是理论层面的, 所

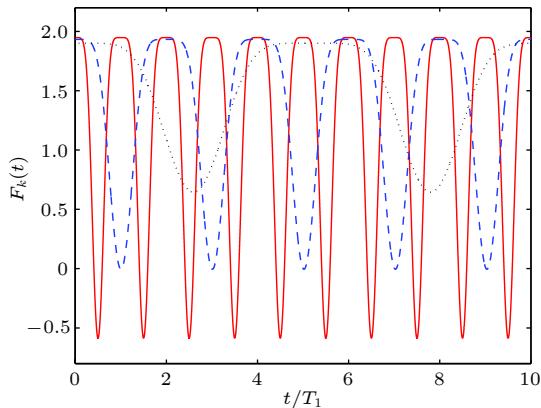


图 8 通过调节束缚场实现磁振子压缩态 实红线、绿虚线和黑实线分别对应于横向囚禁宽度为 $w = 1.5\lambda_L$, $1.98\lambda_L$, $3.0\lambda_L$ 的情况, $F_k < 0$ 代表产生了压缩 [19]

Fig. 8. Spin waves are excited in atomic spin chain in optical lattice. We choose three transverse trapping widths of the condensate: $w = 1.5\lambda_L$ (solid red line), $1.98\lambda_L$ (dashed blue line), and $3.0\lambda_L$ (dotted black line), respectively, the magnon squeezing states occur when $F_k < 0$.

以急需找一个方便操控的系统实现实验观测.

电磁场中描述的动力学卡西米尔效应的物理解释是: 假设腔镜系统的初态是真空态, 也就是电场和磁场的期望值为: $\langle \hat{E}(0) \rangle = \langle \hat{H}(0) \rangle = 0$. 然后系统随时间演化且服从方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon(\mathbf{r}, t) \hat{E}(\mathbf{r}, t) &= \nabla \times \hat{H}(\mathbf{r}, t), \\ \frac{\partial}{\partial t} \hat{H}(\mathbf{r}, t) &= -\nabla \times \varepsilon(\mathbf{r}, t) \hat{E}(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (20)$$

根据方程 (20), 有 $\langle \hat{E}(t) \rangle \equiv \langle \hat{H}(t) \rangle \equiv 0$. 但是电磁场的起伏会被放大, 同时产生声子. 使用一个外磁场来驱动囚禁在谐振子势阱中的旋量玻色-爱因斯坦凝聚体, Saito 等 [24] 最先实现了对动力学卡西米尔效应的模拟, 结果如图 9 所示:

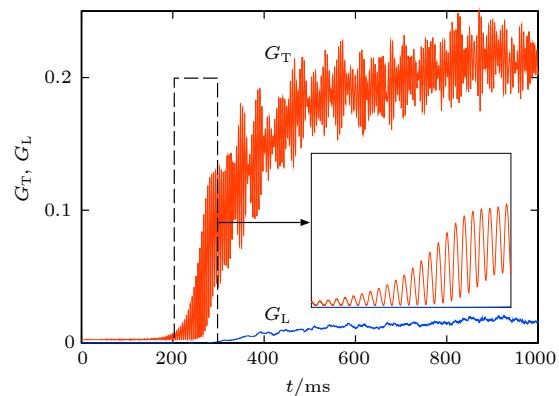


图 9 外磁场驱动下囚禁势中旋量凝聚体的横向和纵向的磁化随时间的演化 红线是横向的磁化 G_T , 蓝线代表纵向的磁化 G_L , 图中插图显示的是横向磁化被放大的过程 [23]

Fig. 9. Time evolution of the average squared transverse magnetization G_T (red curve) and longitudinal magnetization G_L (blue curve), the exponential growth of G_T is shown in subgraph.

光晶格自旋链系统中, 磁偶极-偶极相互作用和光诱导的偶极-偶极相互作用能诱导不同的自旋激发, 这和理论上研究有限温度的动力学卡西米尔效应的光学共振腔系统非常相似. 相对弱的磁偶极-偶极相互作用诱导的激发可以作为有限温度激发源, 在外部光场的驱动下, 我们发现磁振子激发会产生指数形式的增长, 如图 10 所示.

7 结 论

我们对光晶格原子自旋链的磁性的由来、操控和应用做了简要的理论回顾. 光晶格中旋量 BEC 原子自旋链模型和固体物理中的自旋链模型

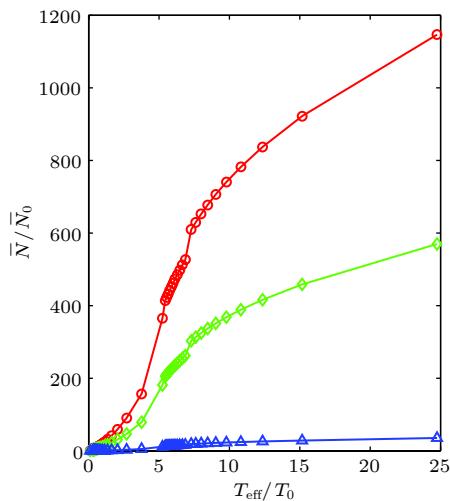


图 10 不同强度的驱动场下自旋起伏的放大倍数随有效温度的变化。图中红色圈、绿色方块和蓝色三角分别代表我们选择的不同的驱动光场强度，通过适当选择光场强度可以使振子激发产生指数形式的增长，也就是动力学卡西米尔效应^[18]

Fig. 10. Amplification factor as a function of the effective temperature under different intensities of the external modulation laser, the the dynamical Casimir effect at finite temperature take place if the proper parameters are selected.

有一定的相似性，同时差别也很显著。首先系统组成的元素不再是电子而是电中性的玻色原子，其基本相互作用不再是短程的交换相互作用，而是长程的偶极-偶极相互作用，其中磁偶极-偶极相互作用和光诱导的偶极-偶极相互作用的存在使得这个系统具有了更大的潜在应用价值。在这个理想模型中还存在额外的可控自由度，这就使得很多现象可以在理想的系统中进行观察。对晶格原子自旋和磁学性质的研究不仅是理论的拓展，未来可望在原子光学器件、集成原子光学及其原子芯片乃至量子计算与信息处理等的研究与应用中有广阔的应用前景。

参考文献

- [1] Xie Z W, Liu W M 2004 *Phys. Rev. A* **70** 045602
- [2] Yang S R, Cai H Q, Qi W, Xue J K 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 060304 (in Chinese) [杨树荣, 蔡宏强, 漆伟, 薛具奎 2011 物理学报 **60** 060304]
- [3] Cristiani M, Morsch O, Müller J H, Ciampini D, Arimondo E 2002 *Phys. Rev. A* **65** 063612
- [4] Kolovsky A R, Maksimov D N 2016 *Phys. Rev. A* **94** 043630
- [5] Xi Y D, Wang D L, Yu Y C, Wang F J, Ding J W 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3720 (in Chinese) [奚玉东, 王登龙, 余彦超, 王凤姣, 丁建文 2010 物理学报 **59** 3720]
- [6] Li Z D, Li Q Y, He P B, Liang J Q, Liu W M, Fu G S 2010 *Phys. Rev. A* **81** 015602
- [7] Stenger J, Inouye S, Stamper-Kurn D M, Miesner H J, Chikkatur A P, Ketterle W 1998 *Nature* **396** 345
- [8] Li L, Li Z D, Malomed B A, Mihalache D, Liu W M 2005 *Phys. Rev. A* **72** 033611
- [9] Ieda J, Miyakawa T, Wadati M 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 194102
- [10] Zhang W P, Pu H, Search C, Meystre P 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 060401
- [11] Pu H, Zhang W P, Meystre P 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 140405
- [12] Gross K, Search C P, Pu H, Zhang W P, Meystre P 2002 *Phys. Rev. A* **66** 033603
- [13] Li Z D, He P B, Li L, Liang J Q, Liu W M 2005 *Phys. Rev. A* **71** 053611
- [14] Xie Z W, Zhang W P, Chui S T, Liu W M 2004 *Phys. Rev. A* **69** 053609
- [15] Hemmerich A, Hänsch T W 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 410
- [16] Grynberg G, Lounis B, Verkerk P, Courtois J Y, Salomon C 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 2249
- [17] Bloch I 2005 *Nat. Phys.* **1** 23
- [18] Fried D G, Killian T C, Willmann L, Landhuis D, Moss S C, Kleppner D, Greytak T J 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 3811
- [19] Zhao X D, Zhao X, Jing H, Zhou L, Zhang W P 2013 *Phys. Rev. A* **87** 053627
- [20] Zhao X D, Geng Z D, Zhao X, Qian J, Zhou L, Li Y, Zhang W P 2014 *Appl. Phys. B* **115** 451
- [21] Wilson C M, Johansson G, Pourkabirian A, Johansson J R, Duty T, Nori F, Delsing P 2011 *Nature* **479** 376
- [22] Plunien G, Schützhold R, Soff G 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 1882
- [23] Yampolskii V A, Savelev S, Mayselis Z A, Apostolov S S, Nori F 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 096803
- [24] Saito H, Hyuga H 2008 *Phys. Rev. A* **78** 033605

SPECIAL TOPIC—Cold atoms and molecules

Magnetic excitation of ultra-cold atoms
trapped in optical lattice^{*}

Zhao Xing-Dong¹⁾ Zhang Ying-Ying¹⁾ Liu Wu-Ming^{2)†}

1) (*College of Physics and Materials Science, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China*)

2) (*Laboratory of Condensed Matter Theory and Materials Computation, Institute of Physics,
Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China*)

(Received 27 January 2019; revised manuscript received 11 February 2019)

Abstract

Spinor condensates trapped in optical lattices have become potential candidates for multi-bit quantum computation due to their long coherence and controllability. But first, we need to understand the generation and regulation of spin and magnetism in the system. This paper reviews the origin and manipulation of the magnetism of atomic spin chains in optical lattices. The theoretical study of the whole process is described in this paper, including laser cooling, the spinor Bose-Einstein condensate preparations, the optical lattice, and the atomic spin chain. Then, the generation and manipulation of magnetic excitations are discussed, including the preparation of magnetic solitons. Finally, we discuss how to apply atomic spin chains to quantum simulation. The theoretical study of magnetic excitations in optical lattices will play a guiding role when the optical lattice is used in cold atomic physics, condensed matter physics and quantum information.

Keywords: spinor Bose-Einstein condensates, optical lattice, magnetic soliton, quantum simulation

PACS: 37.10.Jk, 42.50.Ct, 73.50.Ds, 81.16.Ta

DOI: [10.7498/aps.68.20190153](https://doi.org/10.7498/aps.68.20190153)

* Project supported by the National Key R&D Program of China (Grant No. 2016YFA0301500), the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11434015, 61835013, 11728407, KZ201610005011, 11347159, 11604086), the Strategic Priority Research Program of the Chinese Academy of Sciences (Grant Nos. XDB01020300, XDB21030300), and the Foundation of He'nan Educational Committee, China (Grant Nos. 01026631082, 14A140032).

† Corresponding author. E-mail: wmliu@iphy.ac.cn

用光晶格模拟狄拉克、外尔和麦克斯韦方程

朱燕清 张丹伟 朱诗亮

Simulating Dirac, Weyl and Maxwell equations with cold atoms in optical lattices

Zhu Yan-Qing Zhang Dan-Wei Zhu Shi-Liang

引用信息 Citation: [Acta Physica Sinica](#), 68, 046701 (2019) DOI: 10.7498/aps.68.20181929

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181929>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

柱面非线性麦克斯韦方程组的行波解

Traveling wave solutions of the cylindrical nonlinear Maxwell's equations

物理学报. 2017, 66(13): 130302 <https://doi.org/10.7498/aps.66.130302>

光子与相对论麦克斯韦分布电子散射截面的蒙特卡罗计算方法

Monte Carlo method for computing relativistic photon-Maxwellian electron scattering cross sections

物理学报. 2018, 67(21): 215201 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180932>

光晶格中超冷原子系统的磁激发

Magnetic excitation of ultra-cold atoms trapped in optical lattice

物理学报. 2019, 68(4): 043703 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190153>

纵模对光子晶体中类狄拉克点传输特性的影响

Effect of longitudinal mode on the transmission properties near the Dirac-like point of the photonic crystals

物理学报. 2015, 64(17): 174206 <https://doi.org/10.7498/aps.64.174206>

声子晶体中的半狄拉克点研究

Semi-Dirac points in two-dimensional phononic crystals

物理学报. 2015, 64(19): 194301 <https://doi.org/10.7498/aps.64.194301>

专题：冷原子-分子物理

用光晶格模拟狄拉克、外尔和麦克斯韦方程*

朱燕清¹⁾ 张丹伟^{2)†} 朱诗亮^{1)2)‡}

1) (南京大学物理学院, 固体微结构国家实验室, 南京 210093)

2) (华南师范大学物理与电信工程学院, 广东省量子调控工程与材料重点实验室, 广州 510006)

(2018年10月30日收到; 2019年1月19日收到修改稿)

相对论性量子力学波动方程, 如狄拉克、外尔和麦克斯韦方程, 是描述微观粒子运动的基石. 最近的实验和理论研究表明, 冷原子系统中几乎所有参数都可精确调控, 因此冷原子系统被认为是实现量子模拟的理想平台, 可以用来研究高能和凝聚态物理中的一些基本问题. 本文介绍了设计原子光晶格哈密顿量的思路和方法, 主要涉及激光辅助跳跃的理论. 基于这些方法, 物理学界提出了利用光晶格体系模拟相对论性量子力学波动方程, 包括狄拉克、外尔和麦克斯韦方程等, 并且预言了一些在基本粒子物理中很难观察到, 但在冷原子体系可能观察到的物理现象. 本文综述了国际上此领域的研究进展.

关键词: 量子模拟, 光晶格, 激光辅助跳跃, 相对论性量子力学方程

PACS: 67.85.-d, 03.75.Ss, 71.10.Fd, 03.75.Lm

DOI: 10.7498/aps.68.20181929

1 引言

自上个世纪 80 年代以来, 伴随着超冷原子系统中实验技术的日臻成熟, 例如超冷原子气体制备^[1–5]、原子间相互作用的调控^[6]、光晶格^[7]和人工规范场的产生^[8–10]等, 科学家对于冷原子系统的操控已取得令人瞩目的成就. 最近的理论和实验研究都证明, 超冷原子体系可用于模拟和研究凝聚态和高能物理中的一些重要模型^[11], 特别是可以模拟一些很难实验实现的模型或理论上很难处理的体系或物理现象, 例如量子相变、高温超导、量子磁阻挫、极端条件下的相对论性粒子等. 冷原子量子模拟的突出优点是, 绝大部分相关的物理参数在实验上都能够精确调控, 从而可以人为设计和实现所需要的哈密顿量.

另一方面, 相对论性量子力学波动方程, 如狄

拉克、外尔和麦克斯韦方程, 是描述微观相对论性粒子运动的基石. 并且有些很早就预言的现象, 如薛定鄂预言的狄拉克粒子的 Zitterbewegung 振荡等, 一直没有在基本粒子中观察到. 如何在冷原子体系中模拟这些相对论性波动方程, 并且观察到之前不能观察的极端条件的物理现象, 正成为冷原子量子模拟的一个重要研究方向. 相对论性波动方程中, 哈密顿量是动量的一次方, 而描写冷原子的原始哈密顿量一般是动量的二次方. 如何消除动量的二次方, 突出一次方的效应, 是此类量子模拟的关键. 在现有的理论中, 有两种方式可以做到此点: 1) 基于诱导规范势的方法, 利用激光对有内部能级结构的原子产生几何相位, 可以实现自旋相关的等效规范势 \mathbf{A} , 从而可实现类似 $\mathbf{p}^2/2m + \mathbf{p} \cdot \mathbf{A}$ 的哈密顿量, 其中 $\mathbf{p}^2/2m$ 为原子的动能项. 在超冷原子中, 原子动量可以很小, 上述哈密顿量中, 在某些情况下第一项远小于第二项, 从而得到相对论性

* 国家重点研发计划(批准号: 2016YFA0301803)、国家自然科学基金(批准号: 11604103, 91636218, 11474153)和广东省自然科学基金(批准号: 2016A030313436).

† 通信作者. E-mail: zdanwei@126.com

‡ 通信作者. E-mail: slzhu@nju.edu.cn

方程需要的线性色散关系^[12]。2) 由于晶格中的某些对称性, 在动量空间中, 一些点附近是线性色散关系, 从而描写具有这些准动量的粒子需要相对论性方程。类比凝聚态系统中电子在固体周期势场和外加电磁场中的运动^[13], 将冷原子放置在由激光形成的光晶格中, 辅以适当的激光调制以实现人工规范场, 如激光辅助跳跃^[14,15]、周期调制光晶格^[16]等技术, 可以实现有线性色散关系的格点哈密顿量。这两个方式都可以用于模拟相对论性粒子及其物理效应。本文着重介绍利用光晶格体系实现相对论性量子力学波动方程的研究。该量子模拟的关键在于设计合适的光晶格和激光调制, 使得超冷原子在能带中某些特定 k 点附近的低能激发满足相应的相对论波动方程。本文首先概述激光辅助跳跃和光晶格紧束缚哈密顿量的基本理论, 然后分别介绍在光晶格系统中实现狄拉克、外尔和麦克斯韦方程的几个具体方案, 最后是总结和展望。

2 原子哈密顿量的设计

简单起见, 本文主要讨论光晶格中无作用的具有 N 个内态的原子系统, 其哈密顿量可表示为

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{V}_{\text{cou}}(\mathbf{r}), \quad (1)$$

其中 $\mathbf{H}_0 = \left[\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \mathbf{V}(\mathbf{r}) \right] \mathbb{I}_N$, 标势 $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ 为原子在光场下感受到的周期势, \mathbb{I}_N 为 $N \times N$ 单位矩阵; 空间依赖的 $\mathbf{V}_{\text{cou}}(\mathbf{r})$ 是作用在原子内态上的 $N \times N$ 矩阵, 表示原子内态间的耦合。原子的动能主要由原子的温度决定, 可通过激光冷却技术降低。标势 $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ 可通过一系列对冲激光形成驻波场实现周期

的光晶格势^[17], 而 $\mathbf{V}_{\text{cou}}(\mathbf{r})$ 则可以通过几束拉曼光实现对原子不同内态间的耦合。由于模拟相对论性粒子波动方程涉及到光晶格中相邻或原位格点不同原子内态间的翻转, 本节首先介绍激光辅助跳跃的理论。

2.1 激光辅助跳跃

激光辅助跳跃的基本思路是: 首先抑制原子在近邻格点的自然跳跃(如光晶格势阱较深或近邻格点的能量差较大), 然后通过外加拉曼激光耦合近邻格点中的原子来恢复和调控原子跳跃, 进而产生等效规范势和自旋轨道耦合^[8,9]。这里主要介绍文献^[15]中利用激光辅助跳跃产生规范势的方案。如图 1 所示, 为实现自旋依赖的光晶格, 可考虑在 x 方向施加波长处于“反魔数”(“anti-magic”) 波段的驻波场, 同时在 y 方向施加处于“魔数”波段的驻波, 处在两个不同内态 $|g\rangle$ 和 $|e\rangle$ 的原子在 xy 平面内感受到的光晶格势为

$$\begin{aligned} V(x, y) &= V_{\text{am}}(x) + V_m(y) \\ &= \pm V_1 \cos^2(\pi x / 2d_x) + V_0 \cos^2(\pi y / d_y). \end{aligned} \quad (2)$$

由于在“反魔数”波段的激光作用下(如对 Yb 原子 $\lambda_{\text{am}} \approx 760 \text{ nm}$), $|g\rangle$ 和 $|e\rangle$ 原子的极化率 $\alpha(\omega)$ 符号相反, 因此在 x 方向上对应产生的势场 $V_{\text{am}} = \pm V_1 \cos^2(\pi x / 2d_x)$ 也相反(图 1(a)), 其中 $V_1 > 0$ 为势阱深度, $d_x = \lambda_{\text{am}} / 4$ 为 x 方向复合晶格的晶格常数。在 y 方向上, 因原子在“魔数”波长的激光作用下(对 Yb 原子 $\lambda_m \approx 1.12 \mu\text{m}$) 原子极化率相同, 故感受到的势场均为 $V_m = V_0 \cos^2(\pi y / d_y)$ ($V_0 > 0$), $d_y = \lambda_m / 2$ 为沿 y 方向的晶格常数。处于势阱中的

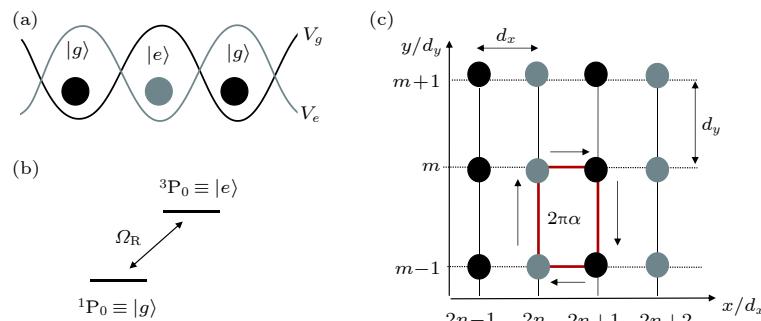


图 1 基于激光辅助跳跃实现人工磁场, 黑(灰)色圆分别表示内态为 $|g\rangle$ ($|e\rangle$) 的 Yb 原子 (a) 内态被标记为 $|g\rangle$ 和 $|e\rangle$ 的原子被囚禁在自旋依赖的光晶格势 V_g 和 V_e 中, 其中 $V_g = -V_e$; (b) x 方向上的激光辅助跃迁; (c) 自旋依赖光晶格示意图。 y 方向存在自然跳跃, x 方向由一束拉曼光 Ω_R 诱导跳跃

Fig. 1. Realization of artificial magnetic field based on laser-assisted tunneling. Gray and black dots represent the Yb atoms correspond to internal states $|g\rangle$ and $|e\rangle$, respectively: (a) The atoms $|g\rangle$ and $|e\rangle$ are trapped in the state-dependent optical lattice potentials V_g and V_e , where $V_g = -V_e$; (b) laser-assisted tunneling along x direction; (c) sketch of state-dependent optical lattice. Nature tunneling occurs along the y direction, and the tunneling along x direction is induced by a Raman beam Ω_R .

原子状态可以用瓦尼尔函数分别表示为 $w_g(\mathbf{r} - \mathbf{r}_g)$ 和 $w_e(\mathbf{r} - \mathbf{r}_e)$, 调节 V_0 至合适值, 确保原子可在 y 方向正常跳跃, 同时让 V_1 足够深以抑制 x 方向的自然跳跃, 也就是抑制 $|g(e)\rangle_{\mathbf{r}_{g(e)}} \leftrightarrow |g(e)\rangle_{\mathbf{r}_{g(e)} \pm 2d_x}$ 的自然跳跃.

激光辅助跳跃正是通过引入额外的拉曼光耦合被囚禁在不同子晶格的原子, 从而诱导水平方向的近邻跳跃. 如图 1(b) 所示, 最简单的情况是引入一束拉曼光用于诱导 $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ ($|e\rangle \leftrightarrow |g\rangle$) 的共振跃迁, 其拉比频率为 $\Omega_R = \Omega e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$. 此时近邻格点 $\mathbf{r}_g = (2n, m)$ 和 $\mathbf{r}_e = \mathbf{r}_g + \mathbf{b} = (2n+1, m)$ 之间产生的 $g-e$ 跃迁矩阵元为

$$\begin{aligned} J_{ge} &= \frac{\hbar\Omega}{2} \int w_e^*(\mathbf{r} - \mathbf{r}_e) w_g(\mathbf{r} - \mathbf{r}_g) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d^2\mathbf{r} \\ &= \frac{\hbar\Omega}{2} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_g} \int w_e^*(\mathbf{r} - \mathbf{b}) w_g(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d^2\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (3)$$

假设让拉曼光沿 yz 平面传播, 则有 $\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_g = 2\pi\alpha m$. 当调节耦合激光与 z 轴的夹角时, $|\alpha|$ 可取 $0-\lambda_m/2\lambda_0$ (对于 Yb 原子, $\lambda_0 \approx 578$ nm, 该比值 $\simeq 0.66$) 间的任意值. 至此, 如图 1(c) 所示, 构建了一个自旋依赖的光晶格, 当原子沿一个闭合网格“走一圈”时, 会积累一个 $2\pi\alpha$ 的相位, 对应一个等效的磁通(磁场). 可以证明, 在这个光晶格中产生的等效磁通沿 x 方向交错排列, 通过调制晶格位能和引入一对拉曼光能够进一步产生均匀磁场^[15].

2.2 紧束缚哈密顿量

当晶格势阱足够深, 描述光晶格中粒子的有效模型是紧束缚近似下的格点哈密顿量. 此时囚禁在势阱中的原子可由局域的瓦尼尔函数描述. 假设光晶格中原子一直处于布洛赫能带的最低带上, 则原子哈密顿量 (1) 式的二次量子化形式为

$$H_{\text{sec}} = \int d\mathbf{r} \psi^\dagger(\mathbf{r}) H \psi(\mathbf{r}), \quad (4)$$

这里的场算符可用瓦尼尔态作为基矢展开,

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}) &= (\psi_1(\mathbf{r}), \dots, \psi_q(\mathbf{r}), \dots, \psi_N(\mathbf{r}))^\top, \\ \psi_q(\mathbf{r}) &= \sum_i c_{i,q} w_q(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \{c_{i,q}, c_{j,q'}^\dagger\}_\pm = \delta_{ij} \delta_{qq'}, \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $\psi_q(\mathbf{r})$ 标记内态为 $|q\rangle$ 的场算符, $c_{i,q}$ ($c_{i,q}^\dagger$) 表示在第 i 个格点湮灭(产生)一个内态为 $|q\rangle$ 的原子, 且满足费米子 (+) 或玻色子 (-) 的对易关系. 联立 (4) 式和 (5) 式, 可得原子在光晶格中的格点哈密顿量

$$H_{\text{tb}} = \sum_{\langle i,j \rangle} \sum_{q,q'} c_{i,q}^\dagger [J_{ij}]_{qq'} c_{j,q'} + \sum_i \sum_{q,q'} c_{i,q}^\dagger [J_{ii}]_{qq'} c_{i,q'}, \quad (6)$$

其中 $\langle i,j \rangle$ 表示对最近邻格点求和, $[J_{ij}]_{qq'}$ 表示最近邻格点 i 和 j 间原子自旋 $|q\rangle$ 和 $|q'\rangle$ 的跃迁矩阵元

$$[J_{ij}]_{qq'} = \int d\mathbf{r} w_q^*(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) H w_{q'}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j), \quad (7)$$

可以看出, 该项实质上有两部分构成, 即 $q = q'$ 时, 得到自旋无关的最近邻跳跃能 $[J_{ij}]_{qq}$ (即自然跳跃), 该部分由 H_0 项贡献; 当 $q \neq q'$ 时, 得到自旋翻转的跳跃 $[J_{ij}]_{qq'}$, 即通过激光与原子耦合场 $\mathbf{V}_{\text{cou}}(\mathbf{r})$ 实现. 同理, (6) 式中的第二项表示的是原位格点自旋翻转的情况, 即 $[J_{ii}]_{qq'}$ 为 (7) 中 $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_j$ 的跃迁矩阵元. 下面论述在合适条件下, (6) 式的低能有效近似即是相对论性哈密顿量.

3 六角光晶格和交错磁通光晶格中狄拉克方程的实现

1928 年, 英国物理学家狄拉克提出了著名的狄拉克方程, 即描述自旋 $1/2$ 粒子的相对论波动方程, 其形式为

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = [c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2] \psi(\mathbf{r}, t), \quad (8)$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}, \beta$ 为狄拉克矩阵, c 为光速, 而 m 为粒子静止质量. 自从人们发现石墨烯中的准粒子即是狄拉克费米子以来, 研究狄拉克费米子成为凝聚态物理中的一大热点. 在光晶格系统中模拟和研究相对论性粒子自然也成为了量子模拟的一个热门课题. 对于二维系统的狄拉克方程, $\boldsymbol{\alpha}, \beta$ 为泡利矩阵, 哈密顿量可表示为

$$H_D = v_x \sigma_x p_x + v_y \sigma_y p_y + \Delta_g \sigma_z, \quad (9)$$

其中 $v_{x,y}$ 和 Δ_g 分别表示等效光速和等效静止能量.

这里首先回顾一下由 Zhu 等^[18] 最早在二维蜂巢光晶格中模拟狄拉克方程的理论方案. 考虑将单分量费米原子 (如 ^{40}K , ^{6}Li 等) 囚禁在蜂巢光晶格中, 该晶格可由三束驻波激光照射原子团形成, 其势场为

$$V_{\text{HOL}}(x, y) = \sum_{j=1,2,3} V_j^0 \sin^2 [k_L(x \cos \theta_j + y \sin \theta_j)], \quad (10)$$

其中 $\theta_1 = \pi/3$, $\theta_2 = 2\pi/3$, $\theta_3 = 0$, k_L 为激光的波

矢. 通过调节不同方向的激光强度可以很容易地调节势垒 V_j^0 的值, 当 $V_1^0 = V_2^0 = V_3^0$ 时形成标准的六角晶格, 当 $V_1^0 \neq V_2^0 \neq V_3^0$ 时则形成各向异性的六角晶格. 六角晶格中一个元胞含有 A 和 B 两个子格, 该系统的紧束缚哈密顿量写为

$$H = \sum_{\langle i,j \rangle} t_{ij} (a_i^\dagger b_j + h.c.), \quad (11)$$

这里的 $\langle i,j \rangle$ 同样表示最近邻子格, a_i 和 b_j 分别表示子格子 A 和 B 的费米算符. t_{ij} 表示最近邻子格间的跳跃, 三个不同方向的跳跃分别记为 t_1, t_2, t_3 . 简单起见, 令 $t_1 = t_2 = t, t_3 = \eta t$, 这里的 $\eta > 0$ 作为可调的各向异性参数. 在倒空间或动量空间中, 该系统仍是蜂巢型结构, 第一布里渊区包含两个不等价的点 \mathbf{K} 和 \mathbf{K}' . 可取 $\mathbf{K} = 2\pi/a(1/\sqrt{3}, 1)$, $\mathbf{K}' = -\mathbf{K}$, 对应晶格常数 $a = 2\pi/(\sqrt{3}k_L)$. 对 (11) 式的哈密顿量做傅里叶变换到倒空间, 采取的变换形式为 $a_i^\dagger = 1/\sqrt{N} \sum_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_i) a_{\mathbf{k}}$, $b_j^\dagger = 1/\sqrt{N} \sum_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_j) b_{\mathbf{k}}$, 其中 $\mathbf{A}_i (\mathbf{B}_j)$ 表示格点中子格 A (B) 的位置, N 表示格点的个数. 对角化倒空间哈密顿量得到本征能谱

$$E_{\mathbf{k}} = \pm \sqrt{2 + \eta^2 + 2 \cos(k_y a) + 4\eta \cos(\sqrt{3}k_x a/2) \cos(k_y a/2)}, \quad (12)$$

其中 \pm 表示能谱的两支. 当 $0 < \eta < 2$ 时, 能隙闭合, 系统呈金属态; 当 $\eta > 2$ 时, 能隙打开且 $\Delta_g = |t|(\eta - 2)$, 系统呈绝缘态. 当系统处于 $1/2$ 填充时, \mathbf{k} 在原能隙闭合点 $\mathbf{K} = (k_x^0, k_y^0)$ 展开为 $\mathbf{k} = (k_x^0 + q_x, k_y^0 + q_y)$. 此时的能谱对应展开到二阶, 可得

$$E_q = \pm \sqrt{\Delta_g^2 + v_x^2 q_x^2 + v_y^2 q_y^2}, \quad (13)$$

当 $0 < \eta < 2$ 时, $\Delta_g = 0, v_x = \sqrt{3}\eta ta/2, v_y = ta \times \sqrt{1 - \eta^2/4}$; $\eta > 2$ 时, 则 $\Delta_g = |t|(\eta - 2), v_x = ta \times \sqrt{3\eta/2}, v_y = ta\sqrt{\eta/2 - 1}$. 当 $q_{x,y} \lesssim 1/2a$ 时, 得到的 E_q 是一个好的近似, 也称为长波近似. 该能谱对应的有效哈密顿量为

$$H_D = \tau_z v_x \sigma_x q_x + v_y \sigma_y q_y + \Delta_g \sigma_z, \quad (14)$$

其中 $\tau_z = \pm 1$ 标记两个不等价的狄拉克点. 这时狄拉克点附近的准粒子激发即满足二维狄拉克方程 $i\hbar \partial_t \psi = H_D \psi$.

Zhang 等 [19] 提出另一个实现狄拉克方程的理论方案: 在自旋依赖的正方光晶格中, 通过两束拉

曼光耦合两分量的费米原子, 以形成一个交错 π 磁通的晶格, 此时系统的有效哈密顿量也是二维狄拉克哈密顿量. 考虑处于自旋依赖呈棋盘状的正方晶格中的二分量费米气, 如图 2(a) 所示. 该晶格在实验上可通过叠加存在偏振夹角的两束线偏振激光产生, 其中两个子格 (A 和 B) 间的距离以及势阱的深度都可通过调节激光的强度和夹角大小很好地控制 [20,21]. 标记所需原子的两个内态为 $|A\rangle$ 和 $|B\rangle$, 实验上若选择 ^{40}K , 则 $|A\rangle = |4^2\text{S}_{1/2}, \frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\rangle, |B\rangle = |4^2\text{S}_{1/2}, \frac{7}{2}, \frac{3}{2}\rangle$; 若选择 ^6Li , 则 $|A\rangle = |2^2\text{S}_{1/2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle, |B\rangle = |2^2\text{S}_{1/2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle$. 该晶格中, 要实现最近邻的跳跃改变内态需要用到激光辅助跳跃. 如图 2(b) 所示, 考虑使用两束拉比频率为 $\Omega_A e^{i\mathbf{k}_A \cdot \mathbf{r}}$ 和 $\Omega_B e^{i\mathbf{k}_B \cdot \mathbf{r}}$ 的拉曼光以及利用一个瞬间的激发态 $|e\rangle$ 来耦合 $|A\rangle$ 和 $|B\rangle$ (图 2(b)). 对 ^{40}K 和 ^6Li 原子而言, 该激发态可选择 $|4^2\text{P}_{1/2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ 和 $|2^2\text{P}_{1/2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$, 而两束拉曼跃迁的激光偏振为 σ^+ 和 σ^- [21].

调节拉曼光参数至合适值, 便可形成图 2(a) 中的 π 磁通的晶格. 该系统对应的紧束缚哈密顿量为

$$H_0 = \sum_{\langle i,j \rangle} t_{ij} (a_i^\dagger b_j + h.c.) + \Delta \sum_i (a_i^\dagger a_i - b_i^\dagger b_i), \quad (15)$$

其中 $a_i^\dagger (b_i^\dagger)$ 是对应子格 A (B) 的产生 $|A\rangle (|B\rangle)$ 算符. 最近邻跳跃系数 $t_{ij} = \int w_A^*(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \Omega_{\text{eff}} w_B(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) d^2\mathbf{r}$, 而 $\Omega_{\text{eff}} = \Omega_A^* \Omega_B$, 空间坐标 $\mathbf{r} = (x, y)$, $w_{A,B}$ 为最低布洛赫能带的瓦尼尔函数, 2Δ 为两个子格子间占据能的差值. 对于合适的激光, 激光辅助跳跃可产生 $t_{ij} = t_0 e^{iA_{ij}}$, $t_0 > 0$ 为跳跃的大小, 由 $\Omega_{A,B}$ 及最近邻子格子间的瓦尼尔交叠积分决定, A_{ij} 相位在

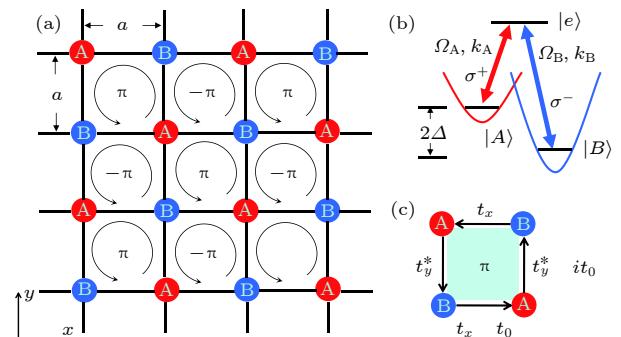


图 2 (a) 交错磁通光晶格; (b) 双光子拉曼过程; (c) 等效 π 磁通

Fig. 2. (a) Staggered flux optical lattice; (b) two-photon Raman process; (c) effective π flux.

激光辅助跳跃过程中由 \mathbf{k}_A 和 \mathbf{k}_B 诱导. 对于图 2(a) 中形成的 π 通量, 即每个方块的通量 $\sum_{ij} A_{ij} = \pm\pi$. 有一种实际的方案 [15–22] 可产生 B 到 A 的跳跃系数 $t_x = t_0$, $t_y = -it_0$, 如图 2(c) 所示. 当然实验上对玻色子系统也有其他类似的方案 [23,24,25].

同样, (15) 式中的哈密顿量在动量空间可写作 $H_0 = \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}^\dagger \mathcal{H}(\mathbf{k}) c_{\mathbf{k}}$, 其中 $c_{\mathbf{k}}^\dagger = (a_{\mathbf{k}}^\dagger, b_{\mathbf{k}}^\dagger)$, $\mathcal{H}(\mathbf{k}) = -2t_0 \times [\cos(k_x a)\sigma_x + \cos(k_y a)\sigma_y] + \Delta\sigma_z$, a 为晶格常数. 令 $f_{\mathbf{k}} = -2t_0 [\cos(k_x a) - i\cos(k_y a)]$, 此时的能谱为 $E_{\mathbf{k}} = \pm\sqrt{|f_{\mathbf{k}}|^2 + \Delta^2}$, 能隙在 $\mathbf{K}_{\pm} = \pm\frac{\pi}{2a}(1, 1)$ 关闭. 同理, 在这两个狄拉克点附近展开的有效哈密顿量为

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}) = \tau_z v_F (\sigma_x q_x + \sigma_y q_y) + \Delta\sigma_z, \quad (16)$$

其中 $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{K}_{\pm}$, $\tau_z = \pm 1$ 表示标记不等价的谷 \mathbf{K}_{\pm} , 费米速度 $v_F = 2t_0 a$.

2012 年, 苏黎世联邦理工学院的 Tarruell 等 [26] 报道了在蜂巢光晶格中使用超冷原子实现具有可调节性质的狄拉克点的实验, 他们利用三束回归反射的激光作用在 ^{40}K 原子团上, 通过调节激光间的相对强度实现了与蜂巢晶格拓扑等价的砖墙晶格. 狄拉克费米子的探测则通过测量狄拉克点附近的能带色散来实现, 能带结构可以通过布洛赫-朗道-齐纳震荡的技术 [26–28] 进行探测. 实验中通过改变激光之间的失谐量, 可在 AB 子格间产生能量差 Δ 并导致在狄拉克点打开能隙, 而从最低能带隧穿到上一能带的概率随着 Δ 的变化而改变. 当 $\Delta = 0$ 时, 即能隙在狄拉克点闭合, 隧穿的概率最大, 对应上能带的原子布局数最大. 随着 $|\Delta|$ 从 0 开始变大, 对应的隧穿率变小, 标志着系统从存在无质量狄拉克粒子到有质量狄拉克粒子的过程. 此外, 当 $\Delta = 0$ 时, 布里渊区中狄拉克点的位置以及相关线性色散的斜率可通过调节激光强度来改变. 如文献 [18] 所述, 调节激光间的相对强度, 可使得布里渊区中两个拓扑不等价的狄拉克点位置发生移动, 当这两个狄拉克点在布里渊区的角落相遇时会相互融合然后湮灭, 能隙打开. 依据这一原理, 就可将发生拓扑相变的临界线描绘出来. 而对于狄拉克点对应非零的贝里相 $\pm\pi$, 则可以通过原子干涉仪进行探测 [29].

三维的狄拉克方程所需的狄拉克矩阵为四个, 故不再是泡利矩阵, 而是 4×4 的矩阵, 此时的狄拉克哈密顿量在外尔表象下写作

$$H_D = \begin{pmatrix} c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & mc^2 \\ mc^2 & -c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \end{pmatrix}. \quad (17)$$

当 $m = 0$ 时, 该哈密顿量可用于描述三维拓扑绝缘体和普通绝缘体发生拓扑相变时的状态, 可用于描述狄拉克半金属. 狄拉克半金属拥有四重简并的狄拉克点, 类似三维推广的石墨烯 [30]. 在固体材料发现狄拉克半金属之前, 已经有人提出了几种在三维光晶格中模拟无质量和有质量狄拉克费米子的方案 [31–35]. 通过选取适当的参数值, 线心立方光晶格中的冷费米子可表现出具有可调质量的类三维狄拉克粒子的行为 [33]. 此外, 通过在立方光晶格中施加人工阻挫的磁场可以实现无质量的狄拉克费米子 [34], 其质量项可通过布拉格脉冲耦合冷原子而产生. 也有人提出, 无质量和有质量的三维相对论费米子也可以用拉曼辅助跳跃在三维光晶格中的超冷费米子原子进行模拟 [31,32,35].

4 三维光晶格中外尔方程的实现

无质量的狄拉克方程 (8) 式在外尔表象下可写成

$$i\hbar \frac{\partial \psi_{\pm}}{\partial t} = H_{\pm} \psi_{\pm}, \quad H_{\pm} = \pm c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}, \quad (18)$$

其中 ψ_{\pm} 是二分量波矢, 描述具有不同螺旋度(手性)的外尔费米子. 根据螺旋度的定义 $\hat{h} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ 可知, 当粒子自旋与动量平行(反平行)时 $h = +1$ ($h = -1$), 故无质量狄拉克方程实质上可分解为两个螺旋度相反的外尔方程的叠加. 外尔费米子作为预言中的无质量的基本粒子, 在高能物理领域至今仍未被实验发现. 而在凝聚态体系的某些三维晶格的动量空间中, 低能有效哈密顿量由外尔方程描述, 这些系统被称为外尔半金属. 外尔半金属中外尔准费米子激发的发现进一步掀起了在凝聚态系统研究和寻找相对论量子力学描写的准粒子的研究热潮.

冷原子光晶格系统中实现外尔半金属的理论方案已有许多, 如在二维光晶格中引入自旋轨道耦合, 再加一个人工维度可以实现外尔半金属 [36]; 通过在两个人工维度中堆垛一维双势阱晶格的拓扑相, 或者是直接将二维的具有交错磁通棋盘结构或蜂巢光晶格堆垛成三维的晶格 [37–40], 都可以实现外尔半金属 [37]. 在这些方案中, 自旋自由度可选择用两个原子内态或者两个子格子, 对应所需要实现的跳跃项需用到人工自旋轨道耦合和人工磁场. 文

献 [41] 给出了通过堆垛 Hofstadter-Harper 系统成为一个立方晶格以实现拓扑外尔半金属相的方案. 图 3 中展示的是沿 x 和 z 方向存在激光辅助跳跃的三维晶格示意图. 为实现这样的跳跃, 应先通过在每个格点引入足够大线性倾斜 Δ 以抑制这两个方向的自然跳跃 (t_x, t_z) ($t_{x,z} \ll \Delta \ll E_{\text{gap}}$), 该线性倾斜可以通过在 $x+z$ 方向引入线性的势场 (如重力场、磁场等) 产生. 正如在 2.1 节中介绍的方法, 引入两束远失谐频率和动量分别相差 $\delta\omega = \omega_1 - \omega_2 = \Delta/\hbar$ 和 $\delta\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$ 的拉曼光可重新诱导这两个方向发生共振跳跃^[15,16]. 该三维晶格对应的有效哈密顿量为

$$H_{3D} = - \sum_{m,n,l} (K_x e^{-i\Phi_{m,n,l}} a_{m+1,n,l}^\dagger a_{m,n,l} + t_y a_{m,n+1,l}^\dagger a_{m,n,l} + K_z e^{-i\Phi_{m,n,l}} a_{m,n,l+1}^\dagger a_{m,n,l} + \text{h.c.}), \quad (19)$$

其中 $a_{m,n,l}^\dagger$ ($a_{m,n,l}$) 表示在格点 (m, n, l) 的产生 (湮灭) 算符, $\Phi_{m,n,l} = \delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_{m,n,l} = m\Phi_x + n\Phi_y + l\Phi_z$. 随后选取合适的激光方向使得 $(\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z) = \pi(1, 1, 2)$, 即 $\Phi_{m,n,l} = (m+n)\pi$, 如图 3(b) 所示. 一方面可以将该三维晶格看作是由图 3(c) 和图 3(d) 所示的两种不同类型的二维晶格 (平行于 xz 平面) 沿 y 方向的交替叠加, 此时两平面间沿 y 方向的跳跃是常规的. 从另一个角度来看, 该三维系统可

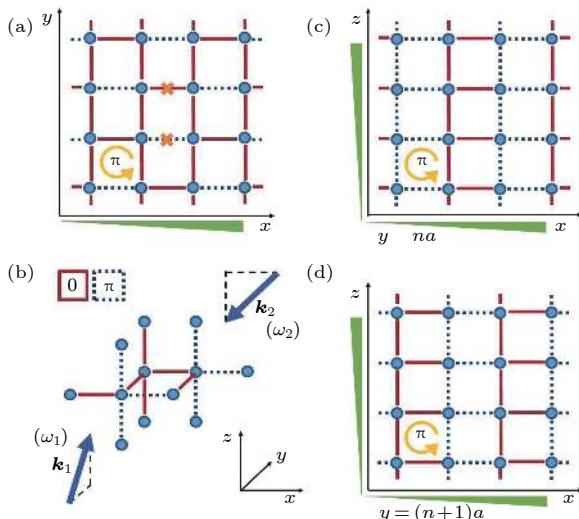


图 3 实现外尔半金属的三维立方晶格示意图. 合理设计 x 和 z 方向跳跃, 在动量空间会出现外尔点. 虚线和实线分别表示获得相位 π 和 0 ^[41]

Fig. 3. Schematic diagram of a three-dimensional cubic lattice of a Weyl semimetal. The Weyl points will be created in the momentum space if the tunneling along x and z directions are well-designed. The dashed and solid lines indicate the phase π and 0 , respectively.

视为图 3(a) 中磁通为 $\alpha = 1/2$ 的 Hofstadter-Harper 二维晶格在 z 方向的堆叠. 此时沿 z 方向的跳跃会携带相位 0 或 π , 分别对应 $m+n$ 为偶数或奇数的情况. 该系统是空间反演对称破缺的, 对应布洛赫哈密顿量为

$$\mathcal{H}(\mathbf{k}) = -2(t_y \cos k_y \sigma_x + K_x \sin k_x \sigma_y - K_z \cos k_z \sigma_z), \quad (20)$$

对应两个带的能谱

$$E_{\mathbf{k}} = \pm 2\sqrt{K_x^2 \cos^2 k_x + t_y^2 \cos^2 k_y + K_z^2 \cos^2 k_z}.$$

两个能带在第一布里渊区内的四个外尔点 $(k_x, k_y, k_z) = (0, \pm\pi/2, \pm\pi/2)$ 接触在一起, 能隙闭合. 同理, 在外尔点 \mathbf{k}_W 附近的色散是线性的, 可由各向异性的外尔哈密顿量 $H_W(\mathbf{q}) = \sum_{i,j} q_i \nu_{ij} \sigma_j$ 描述 ($\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}_W$). 这里的 $[\nu_{ij}]$ 是 3×3 的矩阵, 对应矩阵元 $\nu_{xy} = -2K_x a$, $\nu_{yx} = \pm 2t_y a$, $\nu_{zz} = \pm 2K_z a$, 其他为零. 系统所具有的的拓扑特性由外尔点的手性决定, 即 $\kappa = \text{sign}(\det[\nu_{ij}])$. 为与 (18) 式一致, 可对 H_W 做幺正变换: $e^{i\sigma_z \frac{\pi}{4}} H_W(\mathbf{q}) e^{-i\sigma_z \frac{\pi}{4}} = v_x q_x \sigma_x + v_y q_y \sigma_y + v_z q_z \sigma_z$, 此时 $v_x = \nu_{xy}$, $v_y = -\nu_{yx}$, $v_z = \nu_{zz}$.

除了使用与测量二维狄拉克点类似的方法可以探测三维的外尔点之外, 另一种观测外尔点的方法是布拉格光谱法: 采用额外的一对拉曼光耦合外尔哈密顿量, 将下能带的原子激发至上能带用以探测能带结构. 该方案将揭示具有非常高分辨率的外尔点的存在, 因为它不会改变内部原子态, 因此对塞曼位移并不敏感. 获得外尔半金属相后, 可进一步研究其独特的拓扑表面态, 即连接两个手性相反的外尔点的费米弧. 外加与一对手性相反的外尔点平行的人工电磁场, 系统因手征反常将会出现负磁阻效应, 其对应的输运性质也是一个热门的研究课题^[39]. 此外, 在标准的线性色散的外尔哈密顿量上增加某一方向的线性项 $q_j \sigma_0$, 可获得第二类的外尔点, 在费米能级附近的激发同时包含电子和空穴型的激发^[42–44]. 文献 [42] 中提出的方案可实现一类和二类的外尔半金属以及两者间的 Lifshitz 型拓扑相变.

5 光晶格中麦克斯韦方程的实现

介质中无源无流的麦克斯韦方程可写为

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

这里电位移矢量 \mathbf{D} 与电场强度 \mathbf{E} 满足关系 $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}$, 磁场 \mathbf{B} 与磁场强度 \mathbf{H} 满足关系 $\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$. 其中 $\varepsilon_0 (\mu_0)$ 为真空介电常数 (磁导率), ε_r 和 μ_r 分别为相对介电常数和相对磁导率. 在各向异性的介质中 ε_r 和 μ_r 不再是数而是矩阵. 简单起见, 假设它们都是对角的, (21) 式是相对论性方程, 但并非量子力学方程. 定义光子波函数为 $\Phi = \tilde{\mathbf{E}} + i\tilde{\mathbf{H}}$, 其中 $\tilde{E}_\alpha = \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_\alpha} E_\alpha$, $\tilde{H}_\alpha = \sqrt{\mu_0 \mu_\alpha} H_\alpha$, 光速 $c = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$, $\varepsilon_\alpha (\mu_\alpha)$ 为 $\varepsilon_r (\mu_r)$ 的对角元. 代入 (21) 式, 可得到麦克斯韦方程的薛定谔形式^[45], 即

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi = H_M \Phi, \quad (22)$$

其中 H_M 为单光子的哈密顿量, 表示为

$$H_M = v_x \hat{S}_x \hat{p}_x + v_y \hat{S}_y \hat{p}_y + v_z \hat{S}_z \hat{p}_z, \quad (23)$$

其中 $v_\alpha = c / \sqrt{\varepsilon_\beta \mu_\gamma}$, $\hat{p}_\alpha = -i\hbar \partial_\alpha$, \hat{S} 为自旋 1 矩阵^[45], 对应矩阵元 $(\hat{S}_\beta)_{\alpha\gamma} = i\xi_{\alpha\beta\gamma}$ ($\alpha, \beta, \gamma = x, y, z$), $\xi_{\alpha\beta\gamma}$ 为列维-齐维塔张量. 当 $\varepsilon_r = \mu_r = 1$ 时, $H_M = c \hat{S} \cdot \hat{\mathbf{p}}$ 回到真空各向同性的情况.

麦克斯韦型哈密顿量 H_M 本是用于描述无质量光子的行为, 但一些晶格系统中的准粒子激发也可由 H_M 描述. 与高能物理中粒子由庞加莱群描述不同, 晶体中的准粒子受到的仅是某些庞加莱子群(空间群)的约束, 因此在晶格系统中寻找赝自旋为 1 的费米子激发是可能的. 换句话说, 光晶格中也可实现 H_M , 从而模拟麦克斯韦方程. 由该哈密顿量描述的费米子激发, Zhu 等^[45] 称其为麦克斯韦费米子. 在光晶格中实现麦克斯韦费米子有两种方案: 1) 选择无相互作用费米子的三个内态 $|s\rangle = |\uparrow\rangle, |0\rangle, |\downarrow\rangle$ 作为赝自旋 1 的自旋态, 此时晶格的形状可以是最简单的正方形或立方体结构; 2) 选用晶格中三个子格子作为赝自旋态, 此时所需的激光束较少.

下面简要介绍文献 [45] 中的第一种方案. 首先考虑实现的二维晶格哈密顿量为

$$\begin{aligned} \hat{H}_{2D} &= t \sum_{\mathbf{r}} \left[\hat{H}_{rx} + \hat{H}_{ry} + \left(\Gamma_0 \hat{a}_{\mathbf{r},0}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{r},\uparrow} + \text{h.c.} \right) \right], \\ \hat{H}_{rx} &= -\hat{a}_{\mathbf{r}-x,0}^\dagger (\hat{a}_{\mathbf{r},\downarrow} + i\hat{a}_{\mathbf{r},\uparrow}) \\ &\quad + \hat{a}_{\mathbf{r}+x,0}^\dagger (\hat{a}_{\mathbf{r},\downarrow} - i\hat{a}_{\mathbf{r},\uparrow}) + \text{h.c.}, \\ \hat{H}_{ry} &= \hat{a}_{\mathbf{r}-y,\uparrow}^\dagger (\hat{a}_{\mathbf{r},\downarrow} + i\hat{a}_{\mathbf{r},0}) \\ &\quad - \hat{a}_{\mathbf{r}+y,\uparrow}^\dagger (\hat{a}_{\mathbf{r},\downarrow} - i\hat{a}_{\mathbf{r},0}) + \text{h.c.}, \end{aligned} \quad (24)$$

\hat{H}_{rx} 和 \hat{H}_{ry} 分别表示沿 x 和 y 方向的自旋翻转, 对

应跳跃系数为 t . $\hat{a}_{i,s}$ 为格点 \mathbf{r} 的 $|s\rangle$ 态的湮灭算符, $\Gamma_0 = 2iM$ 项为原位的自旋翻转, M 为可调参数. 考虑处于二维倾斜正方光晶格中的无相互作用原子, 选择三个原子内态来标记自旋. 原格点位置的自旋翻转项 $\Gamma_0 \hat{a}_{\mathbf{r},0}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{r},\uparrow}$ 可以很容易地通过引入射频场或拉曼光束耦合 $|0\rangle$ 和 $|\uparrow\rangle$ 产生. 主要困难在于实现沿 x 和 y 方向的自旋翻转 \hat{H}_{rx} 和 \hat{H}_{ry} . 为此, 定义叠加态

$$\begin{aligned} |1_x\rangle &= (|\downarrow\rangle - i|\uparrow\rangle) / \sqrt{2}, \quad |2_x\rangle = (|\downarrow\rangle + i|\uparrow\rangle) / \sqrt{2}, \\ |1_y\rangle &= (|\downarrow\rangle - i|0\rangle) / \sqrt{2}, \quad |2_y\rangle = (|\downarrow\rangle + i|0\rangle) / \sqrt{2}, \end{aligned} \quad (25)$$

两个跳跃项可表示为

$$\begin{aligned} T_x &= T_{+x} + T_{-x} = \overset{\times}{\curvearrowleft} |1_x\rangle \overset{\sqrt{2}}{\curvearrowleft} |0\rangle \\ &\quad + |0\rangle \overset{-\sqrt{2}}{\curvearrowleft} |2_x\rangle \overset{\times}{\curvearrowleft} + \text{h.c.}, \\ T_y &= T_{+y} + T_{-y} = \overset{\times}{\curvearrowleft} |1_y\rangle \overset{-\sqrt{2}}{\curvearrowleft} |\uparrow\rangle \\ &\quad + |\uparrow\rangle \overset{\sqrt{2}}{\curvearrowleft} |2_y\rangle \overset{\times}{\curvearrowleft} + \text{h.c.}, \end{aligned} \quad (26)$$

其中 \times 意味着该方向的跳跃被禁止. 跳跃项 T_{+x} 和 T_{+y} 可选择合适的激光频率和偏振通过激光辅助跳跃实现. 首先, 通过在两个方向引入均匀能量梯度对晶格进行倾斜, 从而打破宇称(左右)对称, 这可以通过重力场或者交流或直流的斯塔克位移的梯度来产生. 在不同方向上, 每个位置需要不同的能量梯度 $\Delta_{x,y}$, 如 $\Delta_x = 1.5\Delta_y$. 由于存在大的势能倾斜, 自然跳跃将被抑制, 要恢复跳跃项需应用到双光子拉曼耦合, 这就要求设计合适的激光束及其结构^[45]. 该系统对应动量空间的哈密顿量为

$$\mathcal{H}(\mathbf{k}) = 2t \sin k_x \hat{S}_x + 2t \sin k_y \hat{S}_y + 2t(M - \cos k_x - \cos k_y) \hat{S}_z, \quad (27)$$

这里已令 $a = \hbar \equiv 1$. 对应能谱为 $E = 0, \pm 2t \sqrt{\sin^2 k_x + \sin^2 k_y + (M - \cos k_x - \cos k_y)^2}$. 该系统存在丰富的相图: $|M| > 0$ 时, 系统为平庸的绝缘体; $0 < |M| < 2$ 时, 系统为非平庸的陈绝缘体, 对应陈数 $|C| = 2$; 当 $|M| = 2$ 时, 系统处于拓扑金属态, 对应 Berry 相位 $|\gamma| = 2\pi$; $M = 0$ 时为平庸的金属相. 同理, $M = 2$ 时能隙关闭, 存在一个简并点 $\mathbf{K}_M = (0, 0)$, Zhu 等称其为麦克斯韦点. 将哈密顿量在该点附近展开, 可得到二维麦克斯韦哈密顿量

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}) = v_x q_x \hat{S}_x + v_y q_y \hat{S}_y, \quad (28)$$

其中 $v_x = v_y = 2t$, $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{K}_M$. 类似可以得到 $M = -2$ 或 $M = 0$ 时的麦克斯韦哈密顿量. 值得注

意的是, 系统处于非平庸的陈绝缘体相时 (Zhu 等称其为麦克斯韦绝缘体), 存在两个边界态, 其有效哈密顿量由一维麦克斯韦哈密顿量 $\mathcal{H}_{\text{edge}} = v_y k_y \hat{S}_y$ 描述, 对应粒子螺旋度 ($h = \langle \text{sign}(k_y) \hat{S}_y \rangle$) 守恒为 +1 ($0 < M < 2$) 或 -1 ($-2 < M < 0$), 分别与右旋和左旋圆偏振光子态对应.

该模型同样可以推广到三维, 此时哈密顿量为

$$\begin{aligned} \hat{H}_{3D} &= \hat{H}_{2D} + t \sum_{\mathbf{r}} \hat{H}_{\mathbf{rz}}, \\ \hat{H}_{\mathbf{rz}} &= -i(\hat{a}_{\mathbf{r}+\mathbf{z},0}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{r},\uparrow} + \hat{a}_{\mathbf{r},0}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{r}+\mathbf{z},\uparrow}) + \text{h.c.}, \end{aligned} \quad (29)$$

类似的方法可以实现 $\hat{H}_{\mathbf{rz}}$, 该项在动量空间贡献为 $-2t \cos k_z \hat{S}_z$. 此时的系统类似于推广的外尔半金属相, $1 < M < 3$ 具有两个麦克斯韦点, 两个点携带拓扑荷相反, 为 $C = \pm 2$. 如 $M = 2$ 时, $\mathbf{K}_{M\pm} = (0, 0, \pm\pi/2)$, 两点附近的低能有效哈密顿量为三维麦克斯韦哈密顿量

$$\mathcal{H}_{M\pm}(\mathbf{q}) = v_x q_x \hat{S}_x + v_y q_y \hat{S}_y \pm v_z q_z \hat{S}_z, \quad (30)$$

其中等效光速 $v_x = v_y = v_z = 2t$. 类比外尔半金属, 此三维的麦克斯韦金属相同样存在费米弧, 因麦克斯韦点的陈数为 ± 2 , 故在每个表面上存在两条费米弧, 但因存在零能体态, 因而只能在零能附近看见费米弧. 在冷原子系统中实现麦克斯韦准粒子需要克服很多困难, 但最近在超导比特的参数空间中, 三维麦克斯韦哈密顿量 \hat{H}_M 已经被实验模拟 [46].

6 总结与展望

本文介绍了利用光晶格实现相对论性量子力学波动方程的几个具体方案, 并讨论了相应的独特性质和所用到的相关测量方法. 这套方法和思路可以用于实现和研究更高自旋的相对论性波动方程 [47,48], 以及最近引起广泛研究兴趣的可用于拓扑量子计算的阿贝尔或非阿贝尔任意子, 如马约纳拉 (Majorana) 费米子、斐波纳吉 (Fibonacci) 任意子、仲费米子 (parafermions) 等 [49–53]. 此外, 赎自旋 1 的拓扑麦克斯韦费米子有非常丰富的物理性质, 值得更进一步研究. 类似于狄拉克和外尔费米子, 可以讨论麦克斯韦粒子的克莱因隧穿效应 [54,55] 和 Zitterbewegung 振荡 [56] 动力学, 以及非常规的输运特性 [57] 等. 例如, 在狄拉克和外尔费米子的 Zitterbewegung 效应中存在一个振荡频率, 但在麦克斯韦费米子的 Zitterbewegung 振荡中有

两种不同的振荡频率 [58]. 此外可将二维模型推广到时间反演的体系, 用于模拟光的量子自旋霍尔效应 [59]. 光晶格中的超冷原子因具有高度可控性 [60], 目前已经成为了模拟凝聚态系统的一个强有力的工具和平台, 并且已经取得了一些值得庆贺的成绩, 如 Su-Schrieffer-Heeger [61], Bose-Hubbard [62,63], Haldane [64], Hofstadter-Harper [24,25,65] 模型等, 这些模型在凝聚态系统中难以实现, 但已经在冷原子光晶格系统中被实验实现 [1]. 未来, 冷原子光晶格系统将继续用于模拟和研究量子多体系统、拓扑量子物质、高能、天体、甚至是量子信息等领域的问题 [66,67]. 由于具有独特而有趣的物理性质, 超冷原子物理必将在各个领域的研究和实现上大放异彩.

参考文献

- [1] Chu S 1998 *Rev. Mod. Phys.* **70** 685
- [2] Cohen-Tannoudji C N 1998 *Rev. Mod. Phys.* **70** 707
- [3] Phillips W D 1998 *Rev. Mod. Phys.* **70** 721
- [4] Anderson M H, Ensher J R, Matthews M R, Wieman C E, Cornell E A 1995 *Science* **269** 198
- [5] Davis K B, Mewes M O, Andrews M R, van Druten N J, Durfee D S, Kurn D M, Ketterle W 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 3969
- [6] Chin C, Grimm R, Julienne P, Tiesinga E 2010 *Rev. Mod. Phys.* **82** 1225
- [7] Jessen P, Deutsch I 1996 *Adv. At. Mol. Opt. Phys.* **37** 95
- [8] Dalibard J, Gerbier F, Juzeliūnas G, Öhberg P 2011 *Rev. Mod. Phys.* **83** 1523
- [9] Goldman N, Juzeliūnas G, Öhberg P, Spielman I B 2014 *Rep. Prog. Phys.* **77** 126401
- [10] Zhai H 2015 *Rep. Prog. Phys.* **78** 026001
- [11] Zhang D W, Zhu Y Q, Zhao Y X, Hui Y, Zhu S L 2018 arXiv: 1810.09228
- [12] Zhu S L, Zhang D W, Wang Z D 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 210403
- [13] Lewenstein M, Sanpera A, Ahufinger V, Damski B, Sen A, Sen U 2007 *Adv. Phys.* **56** 243
- [14] Jaksch D, Zoller P 2003 *New J. Phys.* **5** 56
- [15] Gerbier F, Dalibard J 2010 *New J. Phys.* **12** 033007
- [16] Struck J, Olschlager C, Weinberg M, et al. 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 225304
- [17] Grimm R, Weidemüller M 2000 *Adv. At. Mol. Opt. Phys.* **42** 95
- [18] Zhu S L, Wang B, Duan L M 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 260402
- [19] Zhang D W, Shan C J, Mei F, Yang M, Wang R Q, Zhu S L 2014 *Phys. Rev. A* **89** 015601
- [20] Mandel O, Greiner M, Widera A, Rom T, Hansch T W, Bloch I 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 010407
- [21] Lee P J, Anderlini M, Brown B L, Sebby-Strabley J, Phillips W D, Porto J V 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 020402
- [22] Mazza L, Bermudez A, Goldman N, Rizzi M, Martin-Delgado M A, Lewenstein M 2012 *New J. Phys.* **14** 015007
- [23] Aidelsburger M, Atala M, Nascimbène M, Trotzky S, Chen Y A, Bloch I 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 255301

- [24] Aidelsburger M, Atala M, Lohse M, Barreiro J T, Paredes B, Bloch I 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 185301
- [25] Miyake H, Siviloglou G A, Kennedy C J, Burton W C, Ketterle W 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 185302
- [26] Tarruell L, Greif D, Uehlinger T, Jotzu G, Esslinger T 2012 *Nature* **483** 302
- [27] Lim L K, Fuchs J N, Montambaux G 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 175303
- [28] Uehlinger T, Greif D, Jotzu G, Tarruell L, Esslinger T, Wang L, Troyer M 2013 *Eur. Phys. J. Special Topics* **217** 121
- [29] Duca L, Li T, Reitter M, Bloch I, Schleier-Smith M, Schneider U 2015 *Science* **347** 288
- [30] Armitage N P, Mele E J, Vishwanath A 2018 *Rev. Mod. Phys.* **90** 015001
- [31] Bermudez A, Mazza L, Rizzi M, Goldman N, Lewenstein M, Martin-Delgado M A 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 190404
- [32] Mazza L, Bermudez A, Goldman N, Rizzi M, Martin-Delgado M A, Lewenstein M 2012 *New J. Phys.* **14** 015007
- [33] Yang M, Zhu S L 2010 *Phys. Rev. A* **82** 064102
- [34] Lepori L, Mussardo G, Trombettoni A 2010 *Europhys. Lett.* **92** 50003
- [35] Wilson K, New Phenomena in Subnuclear Physics, Plenum, New York, 1977.
- [36] Zhang D W, Mei F, Xue Z Y, Zhu S L, Wang Z D 2015 *Phys. Rev. A* **92** 013612
- [37] Ganeshan S, Sarma S D 2015 *Phys. Rev. B* **91** 125438
- [38] Jiang J H 2012 *Phys. Rev. A* **85** 033640
- [39] He W Y, Zhang S, Law K T 2016 *Phys. Rev. A* **94** 013606
- [40] Hou J M, Chen W 2016 *Sci. Rep.* **6** 33512
- [41] Dubček T, Kennedy C J, Lu L, Ketterle W, Soljačić M, Buljan H 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 225301
- [42] Xu Y, Duan L M 2016 *Phys. Rev. A* **94** 053619
- [43] Shastry K, Yang Z, Zhang B 2017 *Phys. Rev. B* **95** 014306
- [44] Kong X, He J, Liang Y, Kou S 2017 *Phys. Rev. A* **95** 33629
- [45] Zhu Y Q, Zhang D W, Yan H, Xing D Y, Zhu S L 2017 *Phys. Rev. A* **96** 033634
- [46] Tan X, Zhang D W, Liu Q, Xue G, Yu H F, Zhu Y Q, Yan H, Zhu S L, Yu Y 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 130503
- [47] Liang L, Yu Y 2016 *Phys. Rev. B* **93** 045113
- [48] Lan Z, Goldman N, Bermudez A, Lu W, Öhberg P 2011 *Phys. Rev. B* **84** 165115
- [49] Kitaev A, Laumann C 2009 arXiv: 0904.2771
- [50] Trebst S, Troyer M, Wang Z, Ludwig A W W 2008 *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **176** 384
- [51] Nayak C, Simon S H, Stern A, Freedman M, Sarma S D 2008 *Rev. Mod. Phys.* **80** 1083
- [52] Read N, Rezayi E 1999 *Phys. Rev. B* **59** 8084
- [53] Liu S, Shan C J, Zhang Z M, Xue Z Y 2014 *Quantum Inf. Process.* **13** 1813
- [54] Vaishnav J Y, Clark C W 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 153002
- [55] Zhang D W, Xue Z Y, Yan H, Wang Z D, Zhu S L 2012 *Phys. Rev. A* **85** 013628
- [56] Li Z, Wang H Q, Zhang D W, Zhu S L, Xing D Y 2016 *Phys. Rev. A* **94** 043617
- [57] Xu Y, Duan L M 2017 *Phys. Rev. B* **96** 155301
- [58] Shen X, Zhu Y Q, Li Z (In preparation)
- [59] Bliokh K Y, Smirnova D, Nori F 2015 *Science* **348** 1448
- [60] Qiu Y, He J, Wang Y H, Wang J, Zhang T C, Wang J M 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6227 (in Chinese) [邱英, 何军, 王彦华, 王婧, 张天才, 王军民 2008 物理学报 **57** 6227]
- [61] Atala M, Aidelsburger M, Barreiro J T, Abanin D, Kitagawa T, Demler E, Bloch I 2013 *Nat. Phys.* **9** 795
- [62] Fisher M P A, Weichwan P B, Grinstein G, Fisher D S 1989 *Phys. Rev. B* **40** 546
- [63] Jaksch D, Bruder C, Cirac J I, Zoller P 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 3108
- [64] Jotzu G, Messer M, Desbuquois R, Lebrat M, Uehlinger T, Greif D, Esslinger T 2014 *Nature* **515** 237
- [65] Aidelsburger M, Lohse M, Schweizer C, Atala M, Barreiro J T, Nascimbène S, Cooper N R, Bloch I, Goldman N 2015 *Nat. Phys.* **11** 162
- [66] Yang Y, Chen S, Li X B 2018 *Acta Phys. Sin.* **67** 237101 (in Chinese) [杨圆, 陈帅, 李小兵 2018 物理学报 **67** 237101]
- [67] Fan H 2018 *Acta Phys. Sin.* **67** 120301 (in Chinese) [范桁 2018 物理学报 **67** 120301]

SPECIAL TOPIC—Cold atoms and molecules

Simulating Dirac, Weyl and Maxwell equations with cold atoms in optical lattices^{*}

Zhu Yan-Qing¹⁾ Zhang Dan-Wei^{2)†} Zhu Shi-Liang^{1)2)‡}

1) (National Laboratory of Solid State Microstructures, School of Physics, Nanjing University, Nanjing 210093, China)

2) (Guangdong Provincial Key Laboratory of Quantum Engineering and Quantum Materials, School of Physics and Telecommunication Engineering, South China Normal University, Guangzhou 510006, China)
(Received 30 October 2018; revised manuscript received 19 January 2019)

Abstract

Relativistic wave equations, such as Dirac, Weyl or Maxwell equations, are fundamental equations which we use to describe the dynamics of the microscopic particles. On the other hand, recent experimental and theoretical studies have shown that almost all parameters in cold atomic systems are precisely tunable, so the cold atom systems are considered as an ideal platform to perform quantum simulations. It can be used to study some topics in high energy and condensed matter physics. In this article, we will first introduce the ideas and methods for engineering the Hamiltonian of atoms, mainly related to the theories of laser-assisted tunneling. Based on these methods, one can simulate the equations of motion of relativistic particles and observe some interesting behaviors which are hard to be observed in other systems. The article reviews these recent advances.

Keywords: quantum simulations, optical lattices, laser-assisted tunneling, relativistic wave equations

PACS: 67.85.-d, 03.75.Ss, 71.10.Fd, 03.75.Lm

DOI: [10.7498/aps.68.20181929](https://doi.org/10.7498/aps.68.20181929)

* Project supported by the National Key Research and Development Program of China (Grant No. 2016YFA0301803), the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11604103, 91636218, 11474153), and the Natural Science Foundation of Guangdong Province, China (Grant No. 2016A030313436).

† Corresponding author. E-mail: zdanwei@126.com

‡ Corresponding author. E-mail: slzhu@nju.edu.cn

超冷费米气体的膨胀动力学研究新进展

刁鹏鹏 邓书金 李芳 武海斌

Recent progress of expansion dynamics in strongly-interacting ultracold Fermi gases

Diao Peng-Peng Deng Shu-Jin Li Fang Wu Hai-Bin

引用信息 Citation: [Acta Physica Sinica](#), 68, 046702 (2019) DOI: 10.7498/aps.68.20182293

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.68.20182293>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

反常磁矩对弱磁场弱相互作用费米气体热力学性质的影响

Effect of anomalous magnetic moment on thermodynamic properties of weakly interacting Fermi gas in weak magnetic field

物理学报. 2015, 64(8): 080501 <https://doi.org/10.7498/aps.64.080501>

由N-E-V分布及赝势法研究弱磁场中弱相互作用费米子气体的热力学性质

Investigation of thermodynamic properties of weakly interacting Fermi gas in weakly magnetic field by using the N-E-V distribution and pseudopotential method

物理学报. 2015, 64(4): 040501 <https://doi.org/10.7498/aps.64.040501>

核磁共振量子信息处理研究的新进展

New research progress of nuclear magnetic resonance quantum information processing

物理学报. 2018, 67(22): 220301 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180754>

气体-表面相互作用的分子动力学模拟研究

Molecular dynamics simulations on scattering of Ar molecules on smooth and rough surfaces

物理学报. 2018, 67(22): 223401 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20181608>

各向异性界面动力学与各向异性表面张力的相互作用对定向凝固过程中深胞晶生长的影响

Effects of anisotropic interface kinetics and surface tension on deep cellular crystal growth in directional solidification

物理学报. 2017, 66(10): 106801 <https://doi.org/10.7498/aps.66.106801>

专题：冷原子-分子物理

超冷费米气体的膨胀动力学研究新进展*

刁鹏鹏 邓书金 李芳 武海斌[†]

(华东师范大学, 精密光谱科学与技术国家重点实验室, 上海 200062)

(2018年12月28日收到; 2019年2月4日收到修改稿)

多体系统的非平衡动力学演化是当前物理学中最具挑战性的问题之一。超冷量子费米原子气体具有较强的可控性, 是研究多体非平衡力学的理想系统, 可以用来模拟和理解大爆炸后的早期宇宙、重离子碰撞中产生的夸克-胶子以及核物理等力学。一般多体系统演化是非常复杂的, 往往需要利用对称性来研究。利用 Feshbach 共振可以制备标度不变的费米原子气体: 无相互作用和么正费米量子气体。当远离平衡态时, 可利用普适的指数和函数来刻画, 其力学可以通过对系统的时空演化进行标度变换来识别。本文主要介绍近年来强相互作用超冷费米气体的膨胀动力学研究进展, 包括原子气体的各向异性展开、标度力学和 Efimovian 膨胀力学。

关键词: 强相互作用超冷费米气体, Feshbach共振, 各向异性展开, 标度不变性, Efimovian膨胀力学

PACS: 67.10.Db, 67.25.bd, 67.30.hb, 67.85.Lm

DOI: 10.7498/aps.68.20182293

1 引言

自从 1999 年简并费米气体 (DFG) 在实验中被实现以来^[1], 费米原子气体具有的量子统计规律和稳定可控的相互作用使得其迅速成为了研究热点, 近二十年来得到了迅猛发展。相较于玻色气体, 费米气体遵从不同的量子统计规律, 在无相互作用下费米原子气体从经典气体到量子气体趋于平滑过渡, 超流相变过程只会在原子间存在相互作用的情况下才能出现。费米气体初期的研究内容主要集中在超冷费米气体的超流特性上, 比如强相互作用超冷费米气体的流体动力学展开^[2] 和集体激发振荡^[3,4]、分子的玻色爱因斯坦凝聚 (BEC) 和原子对的 BCS (Bardeen-Cooper-Schrieffer) 超流的渡越物理 (BEC-BCS crossover)^[5–7]、强相互作用费米气体量子化涡旋的实现^[8]、自旋极化的费米气体^[9]、

孤子的产生和传播^[10]、Mott 绝缘态^[11] 以及反铁磁态^[12,13] 的超流相变等, 最近几年超冷费米气体的自旋轨道耦合^[14]、Bragg 谱^[15]、新奇非平衡力学^[16] 以及具有长程偶极相互作用的超冷磁性原子气体^[17,18] 等也取得了较大的进展。

膨胀动力学是超冷费米气体非常重要的研究方向。在超冷费米气体中, Feshbach 共振技术的使用可以精确调控原子间的相互作用, 当原子间 s 波散射长度调至 0 时, 原子气体为无散射碰撞的无相互作用费米气体; 而在 Feshbach 共振点处, 原子间 s 波散射长度远超原子间距, 系统的相互作用能占主导, 形成么正费米气体。在么正费米气体中, 原子间距成为了系统唯一的长度单位, 系统可以表现出许多普适性的物理规律^[19–21]。

无论无相互作用费米气体还是么正费米气体, 系统中均存在标度不变力学对称性, 在这种动力学对称性下, 超冷费米量子气体的局域关联函数在

* 国家重点研发计划(批准号: 2017YFA0304201)、国家自然科学基金(批准号: 11734008, 11374101, 91536112, 116214040)、上海市优秀学术带头人(批准号: 17XD1401500) 和上海市基础研究重大研究计划(批准号: 17JC1400500)资助的课题。

† 通信作者。E-mail: hbwu@phy.ecnu.edu.cn

演化过程中是自相似的,因此其热力学流体性质可以通过一个简单的坐标含时标量因子变换来描述,极大地简化了多体非平衡系统动力学的复杂性。在超冷费米气体膨胀动力学的研究中,可以通过快速精确调控原子间相互作用以及外加势来构成一个测试基本的少体和多体物理的理想系统,探索强相互作用费米气体许多新奇的非平衡特性,理解复杂少体和多体量子系统动力学过程。

本文主要介绍超冷费米气体中膨胀动力学的研究进展。首先介绍强相互作用超冷费米气体各向异性膨胀动力学,这一动力学膨胀行为直接反映了超冷费米气体的超流特性;其次是超冷费米气体的标度不变性及其对称性破缺,介绍了么正费米气体和无相互作用费米气体的标度不变展开动力学,以及在有限散射长度情形下原子气体系统的标度不变性不再能够维持而产生的标度不变对称性破缺动力学行为;最后是标度不变费米气体的 Efimovian 膨胀动力学的观测,分别讲述了超冷费米气体的 Efimovian 膨胀动力学的实验结果和普适的动力学特性,并且对超冷费米气体超级 Efimovian 膨胀动力学原子团大小以及能量的双对数标度振荡行为展开了讨论和分析。本综述以强相互作用费米气体为研究主体,介绍了最近强相互作用超冷费米气体膨胀动力学的最新研究进展,主要对超冷费米气体在少体和多体动力学研究、新奇非平衡动力学探究等方面展开了深入讨论。

2 超冷费米气体的膨胀动力学研究

2.1 强相互作用超冷费米气体的各向异性展开

类似超冷费米气体存在高温超导特性,超流体也是超冷费米气体具有的一大特性。在超冷费米气体接近零温的情况下,流体中存在的量子黏度越来越小,费米流体越来越接近超流体,通过对超流体所具有的流体力学性质^[2,22]、量子化涡旋^[8]、原子成对效应^[23,24]等进行深入探索研究,可以进一步提高人们对超流体性质的深入认知。

2002 年,美国杜克大学的 O'Hara 等^[2]利用全光俘获的方法获取了强相互作用的⁶Li 超冷费米气体,并且首次观测了强相互作用费米气体的各向异性膨胀过程。在实验中,他们使用外加磁场来进行原子的 Feshbach 共振,使三维“雪茄型”费米气体

处于强相互作用区域,当快速关掉光阱使原子气体自由地在三维空间飞行膨胀时,发现其膨胀过程展现出图 1(a) 中所示的情形,原子气体的纵横比很快发生颠倒,体现为各向异性的动力学膨胀,这是由于原子间强烈的散射碰撞导致的。对于稀释的原子气体而言,原子间间距相对较大,原子间短程相互作用长度一般会远小于原子间距,利用 Feshbach 共振技术可以将超冷原子将 s 波散射长度调至远大于原子间距,此时原子间的散射碰撞将占据主导作用,费米原子气体也因此展现出各向异性的“椭圆流动”行为^[2]。而对于无相互作用的费米气体,由于原子气体间没有散射碰撞,在足够长的时间后原子的动量分布将趋向于各向同性,最终在空间中原子气体将形成趋向于球形。因此这种各向异性膨胀过程不会发生在无相互作用的费米气体中,无相互作用原子气体的纵横比不会超过 1,如图 1(c) 所示。

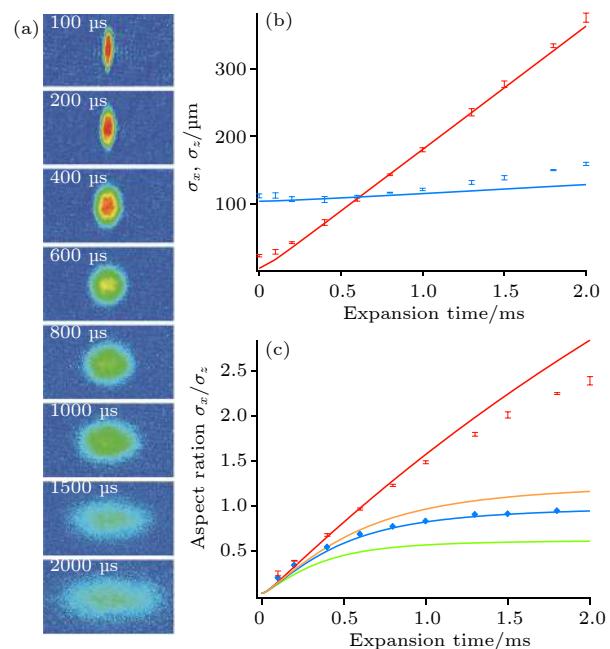


图 1 (a) 强相互作用超冷费米气体的各向异性膨胀吸收成像图; (b) 原子团不同方向的非平衡动力学膨胀行为; (c) 不同相互作用下原子团的纵横比大小演化图^[2]

Fig. 1. (a) The absorption image of the anisotropic expansion dynamics in strongly interacting Fermi gas; (b) the non-equilibrium dynamical expansion behavior in different directions; (c) the evolution for the aspect ratio of the atomic cloud under different interaction regime^[2].

强相互作用超冷费米气体各向异性的动力学膨胀行为是超冷费米气体原子间超强相互作用最直观的体现,曾一度作为费米超流体的有力证据。

不仅如此, 强相互作用超冷费米气体的各向异性膨胀还与系统中存在的量子黏度^[25]有着紧密的联系。当系统中量子黏度增大时, 原子气体的动量分布将从快速膨胀的径向方向流向缓慢膨胀的轴向方向, 进而使得原子气体的纵横比逐步缩小, 这一特性还可以用于测量费米流体中的量子黏度系数以及熵^[3,20,25,26]。

在理论方面, 2002 年意大利特伦托大学的 Menotti 等^[27]做出了重要的贡献。在研究中, 从平衡态超流费米气体的流体力学出发, 研究了系统的连续性方程和欧拉流体方程, 利用 Landau-Vlasov 方程以及标量变换方程^[28], 成功推导了三维谐振子阱中强相互作用费米气体的动力学方程, 较为完备地描述了超流态强相互作用费米气体 BEC-BCS 渡越区域的飞行时间动力膨胀行为。研究结果可以用以下方程来表示:

$$n(x, y, z, t) = (b_x b_y b_z)^{-1} n_0 \left(\frac{x}{b_x}, \frac{y}{b_y}, \frac{z}{b_z}, t \right), \quad (1)$$

$$\ddot{b} + \frac{\omega_i^2}{(b_x b_y b_z)^\gamma} = 0, \quad (2)$$

其中 n 为原子气体的密度, b 为标量参数, ω 表征系统的谐振子阱, γ 表征原子间相互作用强度, 在相互作用强度趋于无穷大的 Feshbach 共振点处, γ 值为 $2/3$ 。此动力学方程具有很大的普适性, 不仅可以用来描述超冷费米气体的 BEC-BCS 渡越, 还可以用来描述其他系统, 比如相互作用的玻色系统中 $\gamma = 1$ ^[29,30]。

2.2 超冷费米气体的标度不变性及其对称性破缺

标度不变物理系统有一个鲜明的特征, 系统中缺乏有效特征长度标度, 使得连接不同物理领域的重大进展成为可能。在超冷费米气体中, 原子气体间的 s 波散射占据主导作用, 超冷原子间相互作用可以通过 Feshbach 共振技术来调节, 在原子间相互作用趋于 0 时可以形成无相互作用费米气体, 而原子间散射长度趋于无穷大时会形成么正费米气体。对于无相互作用费米气体, 原子间散射长度为 0, 么正费米气体中原子散射长度趋于无穷, 更是远大于原子间距, 因此对于这两种特殊情形, 系统中原子间距成为了唯一标度, 都将体现出标度不变的动力学对称特性。在标度不变力学对称性下, 超冷费米量子气体的局域关联函数在演化过程中

是自相似的, 因此其热力学流体性质可以通过一个简单的坐标含时标量因子变换来描述, 极大地简化了多体非平衡系统力学的复杂性, 可以激发许多少体和多体力学的研究, 在热力学和流体力学方面产生许多普适的动力学规律^[19,31–33]。

超冷原子气体从谐振子阱中自由展开时, 在强相互作用区域原子气体不仅仅体现出“椭圆流动”的行为, 其均方原子团大小 $\langle r^2 \rangle = \langle x^2 + y^2 + z^2 \rangle$ 也呈现出标量力学特征^[34]。这一标量力学展开行为被 Elliott 等^[34]在实验上证实, 如图 2 所示, 他们发现当标度不变的费米气体在飞行时间展开时, 原子气体的均方原子团大小 $\langle r^2 \rangle$ 有着普适的飞行时间 t^2 标量关系, 无论是无相互作用费米气体还是么正费米气体均遵从这一规律。

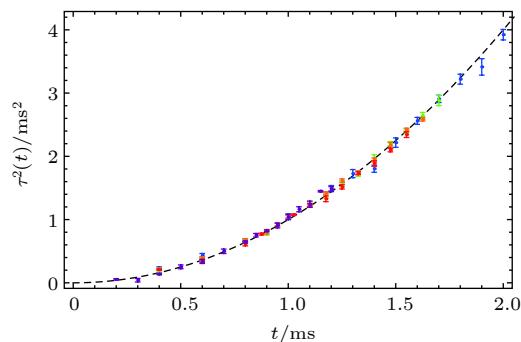


图 2 么正费米气体和无相互作用费米气体的标度不变展开力学^[34]

Fig. 2. Scale invariant expansion of a resonantly interacting Fermi gas compared with the non-interacting Fermi gas^[34].

在强相互作用么正区域, 当原子气体从偶极阱中自由展开时, 由于原子气体间的体黏滞阻力和局部非平衡态带来的压力对原子气体的自由膨胀过程影响较小, 尽管原子气体有着各向异性的力学膨胀行为, 原子气体的整体均方原子团大小 $\langle r^2 \rangle = \langle x^2 + y^2 + z^2 \rangle$ 仍旧维持着飞行时间 t^2 标量关系。而当散射长度有限时, 系统的标度不变对称性得到破坏, 费米量子流体中的体黏滞阻力加大, 并且出现了由标度对称性破缺所产生的费米压力, 这些阻力与原子间的散射长度有着相同的符号, 致使在散射长度为正的 BEC 区域阻碍原子气体的自由展开, 在散射长度为负的 BCS 区域使得原子气体的膨胀速度加快, 因此呈现出如图 3 所示的动力学情形。

这一实验结果证实了两个问题: 首先, 在强相互作用超冷费米气体的各向异性膨胀过程, 费米气

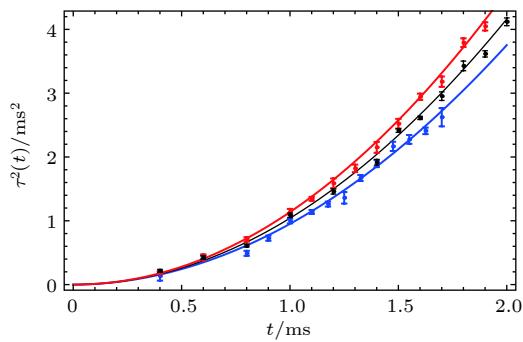


图 3 Feshbach 共振点附近费米气体膨胀力学的对称性破缺行为, 从上到下依次为 BCS 区域、幺正区域和 BEC 区域^[34]

Fig. 3. Conformal symmetry breaking in the expansion for a Fermi gas near a Feshbach resonance. Top: BCS region; Center: unitary region; Bottom: BEC region^[34].

体仍然维持着标度不变对称性; 其次, 在流体力学膨胀中费米压强 P 与能量密度 ε 之间存在着定量的依靠关系 $P = \frac{2}{3}\varepsilon$. 在有限散射长度的情形下, 系统的标度不变性将不再能够维持, 原子气体中也会产生由标度对称性破缺所产生的费米压强差.

2.3 超冷费米气体的 Efimovian 新奇膨胀力学

2.3.1 超冷费米气体的 Efimovian 动力学

Efimovian 膨胀力学^[16]是近年来超冷费米

气体膨胀力学研究中一个非常重要的研究内容, 在标度不变性对称性下, 当超冷费米气体所处谐振子阱的频率按照 $1/t$ 关系连续变化时, 原子团的膨胀过程将会随着时间变化出现一系列分离的平台结构, 在每一个平台附近费米气体几乎停止膨胀, 平台的位置和大小构成了一个等比数列, 呈现出指数周期式分布. 这种新奇的动力学膨胀过程和三体物理中的 Efimov 效应^[35–38]有着类似的数学表达式, 是由量子费米原子气体所具有的对称性决定的, 只有在空间和时间上同时具有标度不变性的时候才会出现. 而当超冷费米气体原子间相互作用为有限值时, 标度不变对称性遭到破坏, 此时系统的量子化平台结构也不再能够维持^[39].

在 Efimovian 膨胀力学的实验中, 华东师范大学的武海斌研究组利用两束交叉光偶极阱构成原子气体的谐振子阱, 利用磁场 Feshbach 的技术来调控原子气体间的相互作用强度, 分别在无相互作用费米气体和幺正费米气体中进行了实验观察, 结果如图 4(d) 和图 4(e) 所示. 当谐振子频率按照 $1/\sqrt{\lambda t}$ 变化且 $\lambda < 4$ 时, 原子气体的膨胀过程会出现一系列的量子化平台结构, 且每个量子化平台所处的时间和原子团的大小均呈现出周期式的离散化指数规律. 随着无量纲因子 λ 的逐渐变大, 系统的平台结构数目逐步减少且平台间距逐渐加大, 最

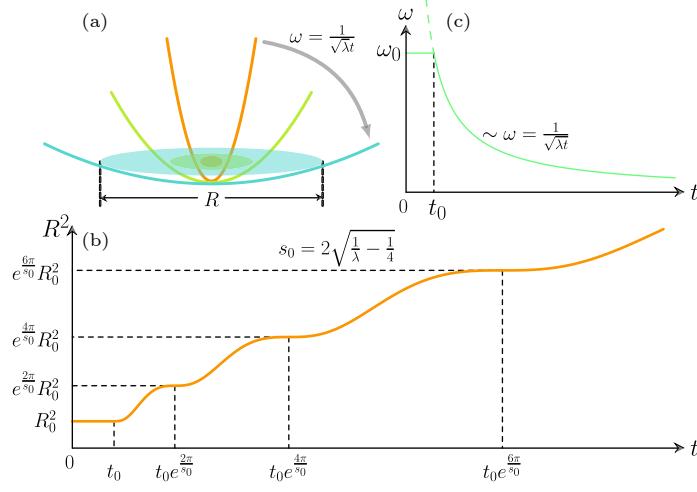
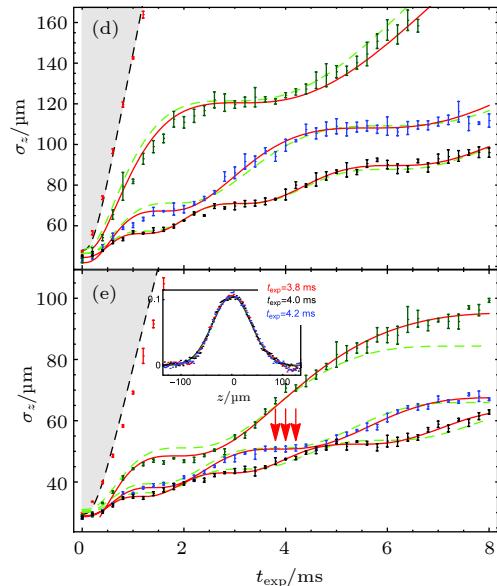


图 4 Efimovian 膨胀力学示意图 (a), (b) 原子气体所处谐振子阱频率的变化过程; (c) Efimovian 膨胀力学的理论预测; (d), (e) 分别代表无相互作用费米气体和强相互作用费米气体的 Efimovian 膨胀力学的实验观测结果^[16]

Fig. 4. The Efimovian expansion dynamics: (a) and (b) are the evolution of the harmonic trap frequency; (c) the prediction of the Efimovian expansion dynamics; (d) and (e) are the experimental observation of the Efimovian expansion in non-interacting Fermi gas and unitary Fermi gas respectively^[16].



终在 $\lambda=4$ 的时候达到阈值点, 趋近于连续分布。而在图 4(d) 和图 4(e) 中大于 4 的左侧灰色区域, 原子气体膨胀过程不存在量子化平台结构, 原子气体表现出连续的对称性。

类似于在超冷原子气体中观测的 Efimov 三体束缚态的离散化束缚能^[36], Efimovian 动力学膨胀过程也受因子 s_0 控制, 其动力学膨胀行为可以用数学表达式描述如下:

$$\frac{\langle \hat{R} \rangle^2(t)}{R_0^2} = \frac{t}{t_0 \sin^2 \varphi} [1 - \cos \varphi \cos(s_0 \ln \frac{t}{t_0} + \varphi)], \quad (3)$$

其中 $s_0 = \omega_b \gamma$, $\gamma = \sqrt{1/\lambda - 1/4}$, $\varphi = -\arctan s_0$ 。如图 5(a) 所示, ω_b 与原子气体的集体激发模有关, 在无相互作用费米气体中数值为 2, 在么正费米气体中实验结果接近 $\sqrt{12/5}$, 与三维么正费米气体长轴的集体激发模式有着相同的因子^[40–42]。图 5(b) 表明, 费米气体在量子简并附近, s_0 随 γ 呈线性变化且比值与原子的集体激发频率因子相同, 在一定范围内原子数目的多少以及温度的高低不影响 Efimovian 膨胀力学。

对比在不同相互作用下的超冷费米气体的 Efimovian 膨胀力学行为, 研究发现当 s_0 相同时,

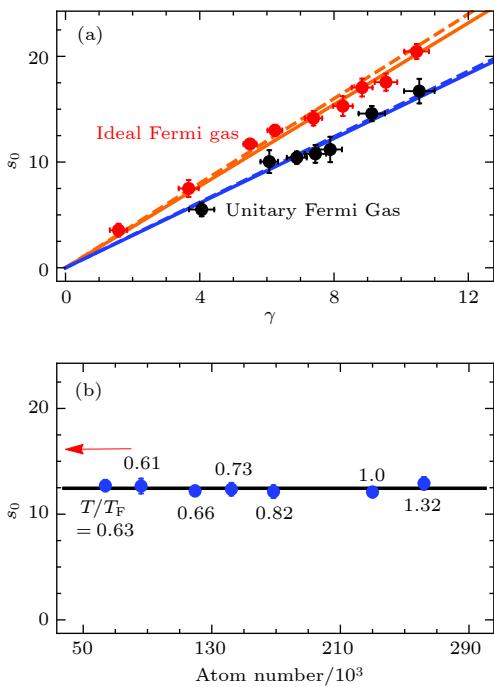


图 5 Efimovian 膨胀力学的普适性 (a) Efimovian 膨胀力学与原子间相互作用的关系; (b) Efimovian 膨胀力学与原子数目、温度间的关系; (c), (d) 无量纲化后的普适 Efimovian 动力学膨胀图^[16]

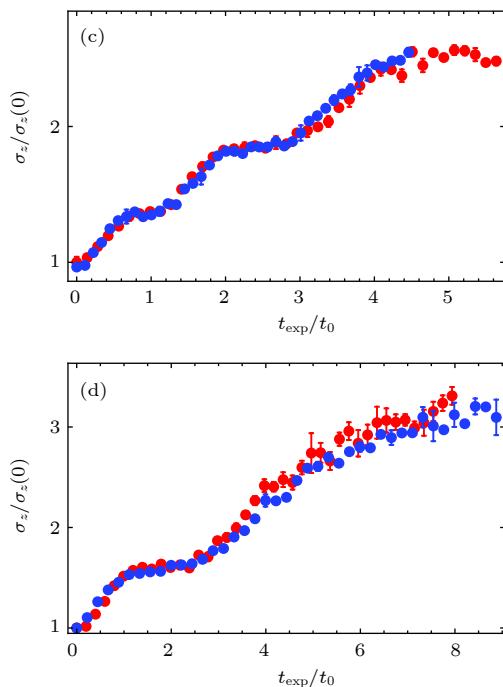
Fig. 5. The universality of the Efimovian expansion dynamics: (a) The Efimovian expansion with different interaction regime; (b) the Efimovian expansion with different atoms' number and temperature; (c) and (d) are the universal dimensionless Efimovian expansions^[16].

么正费米气体和无相互作用费米气体有着相同的动力学膨胀规律, 方程 (3) 可重新表示为

$$\bar{R}_z^2 = \frac{\bar{t}}{\sin^2 \varphi} [1 - \cos \varphi \cos(s_0 \ln \bar{t} + \varphi)], \quad (4)$$

其中 $\bar{R}_z = R_z(t)/R_z(0)$ 为原子气体的膨胀率, $\bar{t} = (t_{\text{exp}} + t_0)/t_0$ 为无量纲相对时间, \bar{R}_z 只与 \bar{t} 和 s_0 相关, Efimov 膨胀力学对无相互作用费米气体和么正费米气体是普适的。图 5(c) 和图 5(d) 共同展示了不同相互作用下标度不变费米气体在相同 s_0 情况下的膨胀力学, s_0 取值分别为 10.53 和 5.88。该研究结果表明, Efimovian 膨胀力学是普适的物理规律, 适用于所有的标度不变系统。

在偏离 Feshbach 共振点、散射长度有限的 BEC 和 BCS 区域, 超冷费米气体的 Efimovian 膨胀力学的量子化台阶显然也将不再能够维持, 原子气体中存在的体黏滞阻力和对称性破缺所带来的压强差会阻碍或者加速原子气体的动力学膨胀行为, 进而使得量子化平台结构发生破坏和偏离。可以想像的是, 随着台阶数目的增加, 标度不变对称性破缺带来的影响会逐步增加, 量子化平台结构的破坏也会变得愈加严重。



2.3.2 超冷费米气体的超级 Efimovian 膨胀

基于超冷费米气体的标度不变性, 在谐振子频率按照 $1/\sqrt{\lambda t}$ 变化时, 原子气体呈现出可控的时间-空间离散的 Efimovian 动力学膨胀行为, 这与三体物理中著名的 Efimov 效应十分相像. Efimov 效应是基于三个相互作用的玻色子在三维空间 s 波相互作用下形成的, 在一定的情况下, 三个玻色子可以形成无限多离散的三体束缚态. 近期有理论研究发现, 三个费米子在二维空间 p 波相互作用下也可以形成类似的三体束缚态, 被称为超级 Efimov 效应 [43]. 超级 Efimov 效应的能量本征值不再是简单的指数依靠关系, 而是呈现出双指数的标量行为, $E_n = E_0 e^{-2e^{\pi n/\bar{s}_0 + \theta_0}}$ ($\bar{s}_0 = 4/3$, θ_0 是短程相互作用参数). 然而较大的标量因子以及双指数依靠关系的存在使得三体束缚态间的能量比值变得非常巨大, 即便有理论证明可以通过采用不同质量的原子种类来缩小这一差值 [44,45], 超级 Efimov 效应目前在实验中仍旧难以观测.

近期有理论提出可以在标度不变费米气体中开展动力学超级 Efimov 效应的研究 [46], 并且很快

就被实验证实 [42]. 当超冷费米气体的频率按照 $\sqrt{1/4t^2 + 1/t^2 \lambda \log^2(t/t_*)}$ 变化并且 $\lambda < 4$ 时, 原子气体的膨胀动力学方程可以表述为

$$\langle R^2 \rangle = At \log(t/t_*) \{1 + B \cos[s_0 \log(\log t/t_*) + \varphi]\}. \quad (5)$$

实验结果如图 6 所示, 在时间和空间坐标下超冷费米气体无论是在无相互作用下 (图 6(c)) 下还是处于幺正区域 (图 6(a)) 均呈现出与 Efimov 效应类似的时间空间离散结构, 而将其转化到双对数坐标下 (图 6(b) 和图 6(d)) 原子团大小清晰地展现出正弦振荡的行为, 表征出原子气体膨胀过程中所显现的双对数依赖关系.

值得一提的是, 超级 Efimovian 动力学膨胀过程中不仅原子团大小呈现双对数依赖关系, 其能量本征值也符合双对数标量关系. 谐振子阱中的量子气体的能量可以认为势能和内能之和, 内能包括原子气体的动能和相互作用能. 如图 7 所示, 在无相互作用费米气体中, 由于相互作用能为零, 系统可以简单地认为只存在势能和动能, 随着超级 Efimovian 动力学膨胀行为的进行, 原子气体的内

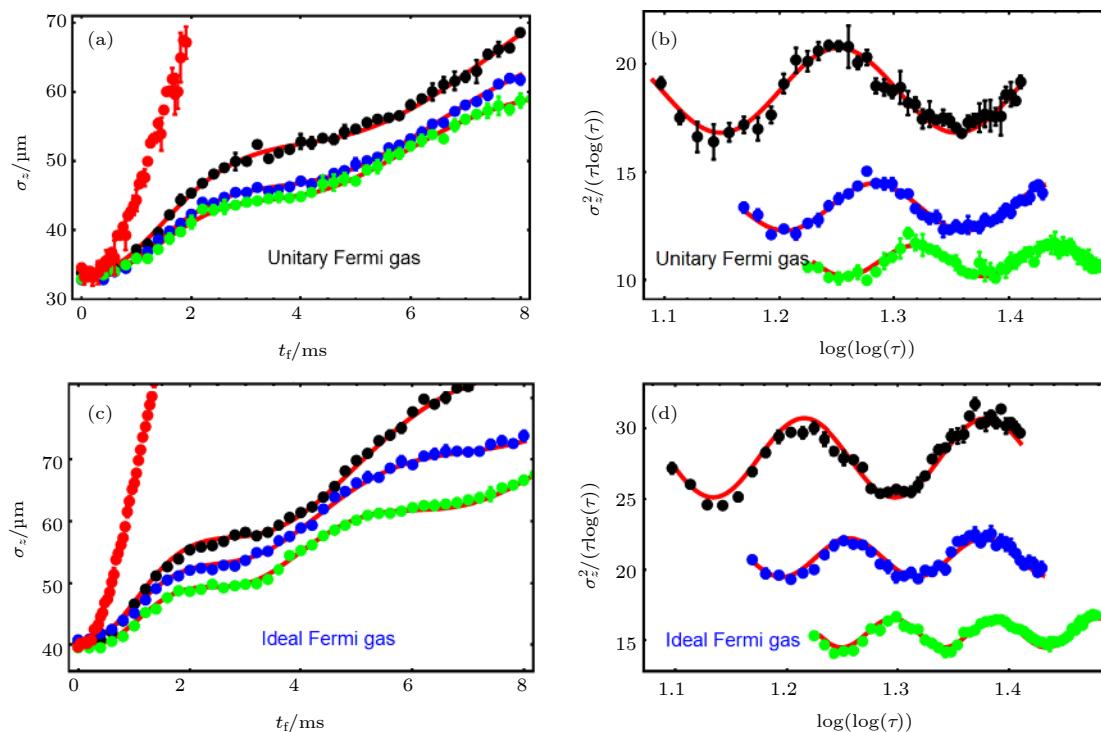


图 6 超级 Efimovian 膨胀动力学实验结果 (a) 和 (c) 分别表示幺正费米气体和无相互作用费米气体的超级 Efimov 动力学效应; (b) 和 (d) 表示在时间双对数标度下相应原子团大小的振荡行为 [42].

Fig. 6. The experimental observation of dynamical super Efimovian expansion. (a), (b) and (c), (d) are the mean axial cloud size versus the expansion time and the dimensionless axial mean square cloud size versus the dimensionless time in the unitary Fermi gas and ideal Fermi gas, respectively [42].

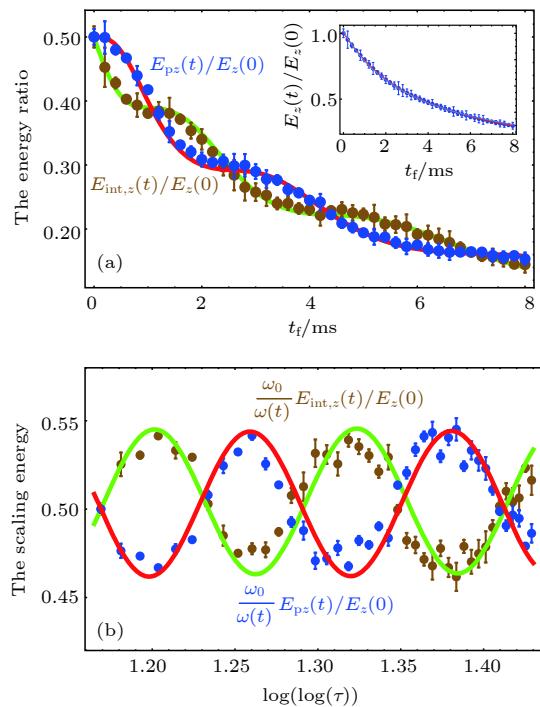


图 7 超级 Efimovian 膨胀过程中的内能和势能在时间 (a) 及其双对数标度 (b) 下的变化示意图^[42]

Fig. 7. The axial potential (internal) energy ratio versus expansion time (a) and the axial energy scaling versus dimensionless time (b) for the super Efimovian expansion^[42].

能和势能同步减少,且内能和势能存在很大程度的周期式交换过程,其能量交换的周期刚好和超级 Efimov 动力学效应的振荡周期相同。超级 Efimov 动力学过程中内能和势能均符合双对数指数标度关系,且振荡周期相同,相位相差 π 。

近期河海大学的 Zhang 等^[47]用标度理论对不同构型、不同相互作用情形的动力学超级 Efimov 效应开展了拓展研究,研究发现在对称性破缺的情形下超级 Efimov 动力学行为仍旧可以呈现出双对数周期振荡的行为,但是在 BEC 区域振荡行为将表现为偏离中心向下振荡,而相应的 BCS 区域则表现为偏离中心向上振荡,这种行为可以用来区分不同类型的超流特性。

3 结 论

超冷费米气体的研究是当前冷原子分子物理的重要研究方向之一,强相互作用超冷费米气体的膨胀动力学更是有着非常重要的研究意义。当费米气体处于强相互作用幺正区域时,超冷的费米气体原子间散射长度趋于无穷,费米多体系统除原子间

的距离外不再具有特征长度,表现出普适的热力学特性,具有标度不变性的对称性。重要的是这一膨胀动力学行为是普适的行为,可以拓展至其他标度不变的系统中,比如一维 Tonk 气体和二维弱相互作用量子气体等,这些系统中的行为需要进行进一步的实验验证。

本文介绍的工作均是在标度不变系统中进行的研究工作,此时的超冷费米气体为无相互作用或者散射共振状态。然而当系统偏离散射共振时,散射长度变为具体有限的大小,系统的标度不变性将遭到破坏,相应的膨胀动力学也将发生改变甚至原有的特性都会被破坏。研究散射长度从零变为无穷大过程中原子气体的膨胀动力学有助于人们更加清晰地认知少体和多体物理,以及理解碰撞散射过程的机理。对于某些鲜明的动力学特征如 Efimovian 膨胀动力学的离散周期特性是否能够保持仍旧需要探索,相应周期长度之间的关系还需要进一步的研究。

可以预见的是,强相互作用超冷费米气体的非平衡动力学是未来比较前沿的研究课题,有许多新奇的非平衡动力学课题还未解决。比如低温原子气体散射长度突然改变时多体系统的膨胀动力学如何改变,以及在此变化条件下如何探索量子气体中原子对能带间隙的大振幅和低振动频率的振荡的集体行为,这对于研究孤立强相互作用费米气体的准热化、热化和热平衡过程有较大意义。

总的来说,研究强相互作用超冷费米气体的膨胀动力学意义深远,在这样的超冷超强相互作用的标度不变费米气体中,通过精确调控外加俘获势和原子间相互作用强度,构成了一个基本的测试少体和多体物理的理想系统,对于新奇非平衡动力学操控和探测有着深远的影响。

感谢清华大学翟荟教授、中山大学俞振华教授、中国农业大学齐燃副教授,以及美国 Adolfo Del Campo 教授的合作与讨论。

参考文献

- [1] DeMarco B, Jin D S 1999 *Science* **285** 1703
- [2] O’ Hara K M, Hemmer S L, Gehm M E, Granade S R, Thomas J E 2002 *Science* **298** 2179
- [3] Kinast J, Hemmer S L, Gehm M E, Turlapov A, Thomas J E 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 150402
- [4] Bartenstein M, Altmeyer A, Riedl S, Jochim S, Chin C,

- Denschlag J H, Grimm R 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 203201
- [5] Regal C A, Greiner M, Giorgini S, Holland M, Jin D S 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 250404
- [6] Partridge G B, Strecker K E, Kamar R I, Jack M W, Hulet R G 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 020404
- [7] Bartenstein M, Altmeyer A, Riedl S, Jochim S, Chin C, Denschlag J H, Grimm R 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 120401
- [8] Zwierlein M W, Abo-Shaeer J R, Schirotzek A, Schunck C H, Ketterle W 2005 *Nature* **435** 1047
- [9] Liao Y, Rittner A, Paprotta T, Li W, Partridge G, Hulet R G, Baur S K, Mueller E J 2010 *Nature* **467** 567
- [10] Nguyen J H V, Luo D, Hulet R G 2017 *Science* **356** 422
- [11] Greif D, Parsons M F, Mazurenko A, Chiu C S, Blatt S, Huber F, Ji G, Greiner M 2016 *Science* **351** 953
- [12] Mazurenko A, Chiu C S, Ji G, Parsons M F, Kanasz-Nagy M, Schmidt R, Grusdt F, Demler E, Greif D, Greiner M 2017 *Nature* **545** 462
- [13] Hart R A, Duarte P M, Yang T, Liu X, Paiva T, Khatami E, Scalettar R T, Trivedi N, Huse D A, Hulet R G 2015 *Nature* **519** 211
- [14] Wang P, Yu Z, Fu Z, Miao J, Huang L, Chai S, Zhai H, Zhang J 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 095301
- [15] Hoinka S, Lingham M, Delehaye M, Vale C J 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 050403
- [16] Deng S, Shi Z, Diao P, Yu Q, Zhai H, Qi R, Wu H 2016 *Science* **353** 371
- [17] Lu M, Burdick N Q, Lev B L 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 215301
- [18] Aikawa K, Frisch A, Mark M, Baier S, Grimm R, Ferlaino F 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 010404
- [19] Ku M J, Sommer A T, Cheuk L W, Zwierlein M W 2012 *Science* **335** 563
- [20] Kinast J, Turlapov A, Thomas J E, Chen Q, Stajic J, Levin K 2005 *Science* **307** 1296
- [21] Nascimbéne S, Navon N, Jiang K J, Chevy F, Salomon C 2010 *Nature* **463** 1057
- [22] Clancy B, Luo L, Thomas J E 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 140401
- [23] Kinnunen J, Rodríguez M, Törmä P 2004 *Science* **305** 1131
- [24] Chin C, Bartenstein M, Altmeyer A, Riedl S, Jochim S, Denschlag J H, Grimm R 2004 *Science* **305** 1128
- [25] Cao C, Elliott E, Joseph J, Wu H, Petricka J, Schäfer T, Thomas J E 2011 *Science* **331** 58
- [26] Bluhm M, Hou J, Schäfer T 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 065302
- [27] Menotti C, Pedri P, Stringari S 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 250402
- [28] Guéry-Odelin D 2002 *Phys. Rev. A* **66** 033613
- [29] Castin Y, Dum R 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 5315
- [30] Kagan Y, Surkov E L, Shlyapnikov G 1996 *Phys. Rev. A* **54** R1753
- [31] Ho T L 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 090402
- [32] Makotyn P, Klauss C E, Goldberger D L, Cornell E A, Jin D S 2014 *Nature Physics* **10** 116
- [33] Bulgac A, Drut J E, Magierski P 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 120401
- [34] Elliott E, Joseph J A, Thomas J E 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 040405
- [35] Efimov V 1970 *Phys. Lett. B* **33** 563
- [36] Kraemer T, Mark M, Waldburger P, Danzl J G, Chin C, Engeser B, Lange A D, Pilch K, Jaakkola A, Nägerl H C, Grimm R 2006 *Nature* **440** 315
- [37] Braaten E, Hammer H W 2006 *Phys. Rep.* **428** 259
- [38] Braaten E, Hammer H W 2007 *Ann. Phys.* **322** 120
- [39] Gharashi S E, Blume D 2016 *Phys. Rev. A* **94** 063639
- [40] Riedl S, Sánchez Guajardo E R, Kohstall C, Altmeyer A, Wright M J, Denschlag J H, Grimm R, Bruun G M, Smith H 2008 *Phys. Rev. A* **78** 053609
- [41] Kinast J, Turlapov A, Thomas J E 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 170404
- [42] Deng S, Diao P, Li F, Yu Q, Yu S, Wu H 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 125301
- [43] Nishida, Moroz S, Son D T 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 235301
- [44] Moroz S, Nishida Y 2014 *Phys. Rev. A* **90** 063631
- [45] Ulmanis J, Häfner S, Kuhnle E D, Weidemüller M 2016 *Nat. Sci. Rev.* **3** 174
- [46] Shi Z, Qi R, Zhai H, Yu Z 2017 *Phys. Rev. A* **96** 050702
- [47] Zhang L, Wen W, Ma X D, Wang Y 2018 *Int. J. Mod. Phys. B* **32** 1850230

SPECIAL TOPIC—Cold atoms and molecules

Recent progress of expansion dynamics in strongly-interacting ultracold Fermi gases*

Diao Peng-Peng Deng Shu-Jin Li Fang Wu Hai-Bin[†]

(State Key Laboratory of Precision Spectroscopy, East China Normal University, Shanghai 200062, China)

(Received 28 December 2018; revised manuscript received 4 February 2019)

Abstract

The evolution of non-equilibrium dynamic for many-body systems is one of the most challenging problems in physics. Ultra-cold quantum atomic Fermi gas provide an test-bed for studying many-body non-equilibrium dynamics due to its high freedom of controllability, which can be used to simulate and understand the dynamics of the early universe after the Big Bang, quark-gluon produced in heavy ion collisions and nuclear physics. Generally, the evolution of many-body systems is very complex, and usually needs to be studied by symmetry. Feshbach resonance can be used to prepare scale invariant atomic Fermi gases: non-interacting and unitary Fermi gases. When far away from equilibrium state, universal exponents and functions can be used to characterize the dynamics of the system, which can be identified by scaling the temporal and spatial evolution of the system. In this review, the recent developments in the expansion dynamics of strongly interacting ultracold Fermi gases are introduced, including the anisotropic expansion of atomic gases, scaling dynamics and Efimovian expansion dynamics.

Keywords: strongly-interacting ultracold Fermi gas, Feshbach resonance, anisotropic expansions, scale invariance, Efimovian expansion dynamics

PACS: 67.10.Db, 67.25.bd, 67.30.hb, 67.85.Lm

DOI: 10.7498/aps.68.20182293

* Project supported by the National Key R&D Program of China (Grant No. 2017YFA0304201), the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos.11734008, 11374101, 91536112, 116214040), the Excellent Leaders of Disciplines in Science of Shanghai, China (Grant No. 17XD1401500), and the Basic Research Program of Shanghai, China (Grant No. 17JC1400500).

† Corresponding author. E-mail: hbwu@phy.ecnu.edu.cn