

基于光子计数的纠缠微波压缩角锁定*

魏天丽 吴德伟[†] 杨春燕 罗均文 李响 朱浩男

(空军工程大学信息与导航学院, 西安 710077)

(2018年11月22日收到; 2019年1月21日收到修改稿)

针对基于超导 180° 混合环的纠缠微波制备方案探测效率低、信息处理难以及控制复杂等问题, 设计了基于微波光子计数的压缩角锁定方案. 对超导 180° 混合环的输出信号进行微波光子计数, 通过贝叶斯准则估计输入压缩态微波场的相对压缩角, 并将压缩角校正信息反馈于 JPA 抽运源, 调整两路单模压缩态微波场的相对压缩角为 180° , 达到控制输出纠缠性能最优的目的. 该研究为路径纠缠微波的纠缠性能的提升以及高质量纠缠微波源的设计提供了理论参考.

关键词: 纠缠微波制备, 压缩角锁定, 微波光子计数, 贝叶斯估计

PACS: 03.67.Bg, 03.67.Mn, 42.50.Dv

DOI: 10.7498/aps.68.20182077

1 引言

量子微波起源于 20 世纪 80 年代, 伴随着单原子微波激射器的产生而出现^[1], 之后 Yurke 等^[2] 利用约瑟夫森结首次实现了对微波的量子压缩, 这是量子微波发展史上的里程碑事件. 随着对非经典态量子微波研究的深入, 量子纠缠微波应运而生, Flurin 等^[3] 以及 Menzel 等^[4] 分别提出了制备路径纠缠微波的方案并进行了实验验证. 量子纠缠微波良好的非定域性、时空关联性以及随机性等使得其在应用领域成果显著, 当前基于量子纠缠微波的量子通信、量子信息处理、量子照明以及无线电导航等领域都取得重大突破^[5-9], 这也进一步推动了对高质量纠缠信号源的研究.

目前量子纠缠微波信号的制备更多地倾向于 Menzel 等^[4] 提出的基于超导 180° 混合环 (superconducting 180° hybrid ring coupler) 的纠缠制备方案, 并在此基础上加以改进提升信号质量.

Fedorov 等^[10] 提出的改进方案在理论上达到了信号纠缠性能最优, 然而在实验过程中对压缩态微波场的反馈控制问题仍没有得到有效解决, 基于双路接收机的探测方案使得信息处理较复杂且探测效率极低. 因此, 采用更有效的探测方案以及设计更实用的反馈控制方案是提升信号纠缠性能的关键所在. 目前量子微波的探测有量子层析、正交关联检测、纠缠见证以及光子数探测等^[11-14]. 当前纠缠在超低温条件下产生, 光子数较低, 在进行正交分量检测以及量子层析时均需要对信号进行多级放大, 引入大量噪声, 探测效率难以保证. 随着近年来微波光子计数的发展, 对量子微波的光子数探测已成为可能, 且探测效率达 90%, 大大提升了接收灵敏度以及信号处理精度^[15-17].

本文针对基于超导 180° 混合环的纠缠制备方案, 设计了基于微波光子计数的压缩态微波场反馈控制方案, 相比基于多级放大的检测方案, 其探测效率提升了 53%, 并且简化了反馈控制回路, 可大幅提升纠缠微波的纠缠性能.

* 国家自然科学基金 (批准号: 61573372, 61603413) 资助的课题和空军工程大学校长基金 (批准号: XZJY2018038).

[†] 通信作者. E-mail: wudewei74609@126.com

2 基于超导 180°混合环的纠缠制备方案

德国物理学家 Menzel 等^[4]提出利用约瑟夫森参量放大器 (Josephson parametric amplifier, JPA) 和超导 180°混合环产生纠缠微波信号, 实现了路径纠缠. 如图 1 所示, 微波信号通过环形器送入 JPA 进行放大, 在抽运信号的激励下, JPA 工作于简并模式产生实验所需的单模压缩态, 并以此作为超导 180°混合环的一路输入, 同时另一路输入为温度可控的 50 Ω 负载噪声源, 实验产生平均光子数约为 1 的弱热态. 压缩态和热态在超导 180°混合环中耦合输出为路径纠缠的量子微波信号.

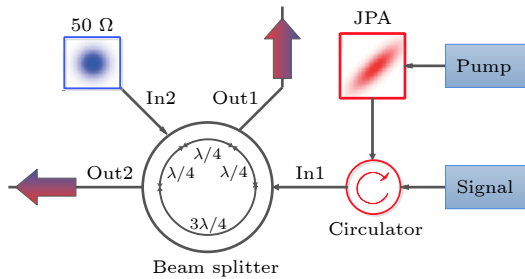


图 1 基于超导 180°混合环纠缠制备方案

Fig. 1. Entanglement preparation scheme based on superconducting 180° hybrid ring coupler.

在此基础上, Fedorov 等^[10]实现了利用两路单模压缩态以及超导 180°混合环制备纠缠的方案, 该方案可制备性能更优的纠缠信号. 对于超导 180°混合环的分束器模型, 单模压缩态的压缩方向相互正交时输出纠缠特性最好, 因此两路输入信号相对压缩角的锁定是影响纠缠性能的关键. Fedorov 等^[10]利用双路径接收机对输出纠缠信号进行量子层析, 获得输入单模压缩态的 Wigner 函数, 以此确定压缩角并将压缩角校正信息反馈于 JPA 抽运源, 从而控制两路压缩态的压缩方向正交.

然而基于双路径接收机的压缩角锁定方案存在以下两个问题: 1) JPA 与超导 180°混合环工作于超低温条件下, 产生纠缠光子较少, 在进入双路径接收机之前需经过多级放大, 导致引入过多噪声, 探测效率极低, 当前采用 JPA 作为前级放大可实现的最高探测效率仅为 37%^[11]; 2) 在信号处理过程中需分别重构两路压缩态的 Wigner 函数并进

行校正信息的反馈, 信息处理多, 操作过程复杂, 且需特别注意信号在 JPA、超导 180°混合环与双路径接收机转换时的温度控制^[10]. 为此, 本文设计了基于微波光子计数的压缩角锁定方案.

3 基于微波光子计数的压缩角锁定方案

随着光子计数器的发展, 基于光子计数的测量方法逐渐成为一种重要的测量方案, 近年来对微波光子计数器的研究不断深入, 基于电流偏置约瑟夫森结的电路量子电动力学系统通过在辐射场中吸收单光子实现微波光子的探测, 但效率较低^[15,17]. 图 2 所示的基于 transmon 的微波单光子探测通过位于传输线末端的 transmon 实现了传输过程中微波光子的探测, 且当前不断改进多 transmon 的设计以及超导传输线耦合以克服量子噪声对探测的影响, 探测效率已达 90%^[16,18]. 此外, 近年来超导隧道结、微波动态电感探测器等新的微波光子探测方法也不断地被提出^[19], 探测效率也不断提升, 使得微波光子计数逐渐成为可能.

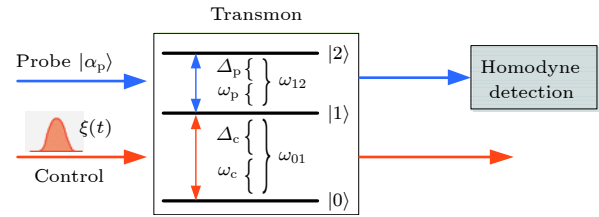


图 2 基于单 transmon 的微波光子探测系统

Fig. 2. A scheme for single-photon detection using a transmon.

在该设计方案中, JPA 产生单模压缩态可用简并参量放大过程描述, 其哈密顿量表示为

$$H_I = i\hbar\chi^{(2)} \left[e^{-i\theta_{re}} a^2 - e^{i\theta_{re}} (a^+)^2 \right], \quad (1)$$

其中 a 表示为输入频率为 ω 的输入信号光场; θ_{re} 表示抽运光与信号光的相对相位差; $\chi^{(2)}$ 与二阶非线性极化率有关, 为实数. 令 $\eta = \chi^{(2)} e^{i\theta_{re}}$, 则时间演化算符为

$$U(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H_I t\right) = \exp\left(t\eta^* a^2 - t\eta (a^+)^2\right). \quad (2)$$

再令 $\xi = 2t\eta$, 则压缩算符即为

$$S(\xi) = \exp \left[\frac{1}{2} (\xi^* a^2 - \xi (a^+)^2) \right]. \quad (3)$$

令 $r = 2t\chi^{(2)}$ 表示为压缩幅, θ_{re} 表示为压缩角. 由此可知, 控制输入光不变, 改变 JPA 抽运源相位可调整输出信号的压缩角, 满足关系式 $\theta_{re} \propto 2\theta_{pump}$.

如图 3 所示, 利用微波光子计数器对超导 180° 混合环输出信号进行光子计数, 通过测量两臂输出的光子数差用以估计信号 s_2 相对信号 s_1 的压缩角. 由上述分析可知, 压缩角与相位信息可相互转化, 由于输出粒子束的量子波动包含了相对相位信息, 通过贝叶斯方法和光子计数能有效利用该信息估计出相对压缩角, 且估计精度能准确地达到量子克拉美罗界 (quantum Cramer-Rao, QCR) 下界^[20]. 通过计算估计值相对于目标值的偏差 $\delta\theta$, 对作用于 JPA1 的抽运源实施 $2\delta\theta$ 的压缩角校正, 使得两路单模压缩态压缩方向相对正交, 此时可制备纠缠性能最优的路径纠缠微波信号.

4 参数估计与性能分析

压缩态微波场 s_1 与 s_2 的量子态表示为 $|\xi_1\rangle$ 与 $|\xi_2\rangle$, 其中 $\xi_1 = r_1, \xi_2 = r_2 e^{i\theta}$ 表示信号 s_2 相对于 s_1 的压缩角为 θ , 为简化分析记 $r_1 = r_2 = r$. 当两路信号通过 180° 混合环时, 其输入输出关系可表示为

$$\begin{pmatrix} a_{1out} \\ a_{2out} \end{pmatrix} = \mathbf{B}_{BS} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta}{2} & -\sin \frac{\beta}{2} \\ \sin \frac{\beta}{2} & \cos \frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

其中 \mathbf{B}_{BS} 表示散射矩阵, β 描述分束器的功分比例. Yurke 等^[21] 指出分束器的作用可通过角动量算符来表征, 由此对任意输入的双模量子态 $|\text{in}\rangle_{BS}$, 经过分束器后的输出量子态可表示为

$$|\text{out}\rangle_{BS} = \exp(-i\beta\hat{J}_y) |\text{in}\rangle_{BS}, \quad (5)$$

$\hat{J}_y = -\frac{i}{2} (a_1^+ a_2 - a_2^+ a_1)$ 为角动量算符.

压缩真空态 $|\xi\rangle$ 在粒子数表象中可表示为 $|\xi\rangle = \sum_m S_m(\theta_s) |2m\rangle$, 其中

$$S_m(\theta_s) = \frac{1}{\sqrt{\cosh r_0}} (-1)^m \left(\frac{1}{2} e^{i\theta_s} \tanh r_0 \right)^m \frac{\sqrt{(2m)!}}{m!},$$

$\xi = r_0 e^{i\theta_s}$ 表示任意压缩算符. 输出态表示为 $|\psi(\theta)\rangle = e^{-i\beta\hat{J}_y} |\varphi_{in}\rangle$,

$$|\varphi_{in}\rangle = |\xi_1\rangle |\xi_2\rangle = \sum_n S_n(0) |2n\rangle \sum_m S_m(\theta) |2m\rangle,$$

则在输出端测量到粒子数为 N_c 和 N_d 的条件概率为

$$P(N_c, N_d | \theta) = \left| \langle N_c | \langle N_d | e^{-i\beta\hat{J}_y} |\varphi_{in}\rangle \right|^2. \quad (6)$$

令 $N = N_c + N_d$ 为系统总光子数, $\mu = (N_c - N_d)/2$, 则 (6) 式可推导如下:

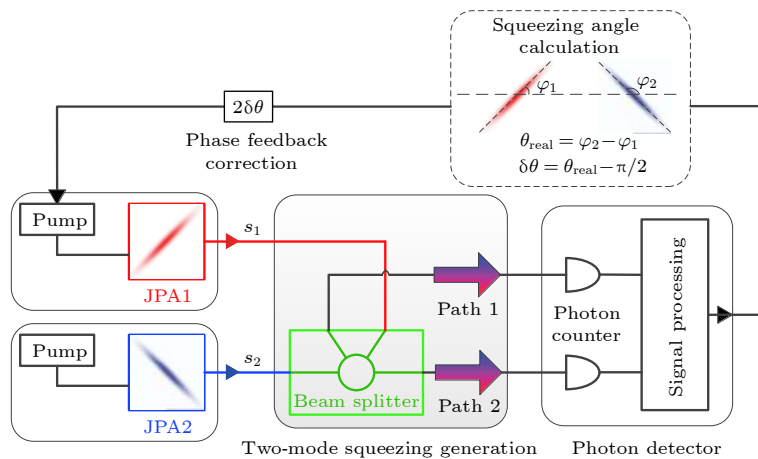


图 3 基于微波光子计数的压缩角锁定方案

Fig. 3. Squeezing angle locking scheme based on microwave photon counter.

$$\begin{aligned}
 P(N_c, N_d | \theta) &= \left| \langle N_c | \langle N_d | e^{-i\beta \hat{J}_y} | \varphi_{in} \rangle \right|^2 \\
 &= \left| \left\langle \frac{N}{2} - \mu \left| \left\langle \frac{N}{2} + \mu \right| e^{-i\beta \hat{J}_y} \sum_n S_n(0) |2n\rangle \sum_m S_m(\theta) |2m\rangle \right. \right|^2 \\
 &= \left| \left\langle \frac{N}{2} - \mu \left| \left\langle \frac{N}{2} + \mu \right| e^{-i\beta \hat{J}_y} \sum_{m,n} S_n(0) S_m(\theta) |2n\rangle |2m\rangle \right. \right|^2 \\
 &= \left| \sum_{m=0}^{N/2} S_{N/2-m}(0) S_m(\theta) \left\langle \frac{N}{2} - \mu \left| \left\langle \frac{N}{2} + \mu \right| e^{-i\beta \hat{J}_y} |N-2m\rangle |2m\rangle \right. \right|^2 \\
 &= \left| \sum_{m=0}^{N/2} S_{N/2-m}(0) S_m(\theta) \left\langle \frac{N}{2} - \mu \left| \left\langle \frac{N}{2} + \mu \right| e^{-i\beta \hat{J}_y} \left| \frac{N}{2} + \frac{N}{2} - 2m \right\rangle \left| \frac{N}{2} - \left(\frac{N}{2} - 2m \right) \right\rangle \right. \right|^2 \\
 &= \left| \sum_{m=0}^{N/2} S_{N/2-m}(0) S_m(\theta) d_{\mu, N/2-2m}^{N/2}(\beta) \right|^2, \tag{7}
 \end{aligned}$$

其中 $d_{\mu, \nu}^j(\beta)$ 为角动量旋转矩阵元, 具体展开式为

$$d_{\mu, \nu}^j(\beta) = \sqrt{\frac{(j-\nu)!(j+\nu)!}{(j-\mu)!(j+\mu)!}} \left(\sin \frac{\beta}{2} \right)^{\nu-\mu} \left(\cos \frac{\beta}{2} \right)^{\nu+\mu} P_{j-\nu}^{\nu-\mu, \nu+\mu}(\cos \beta), \tag{8}$$

$P_{j-\nu}^{\nu-\mu, \nu+\mu}(\cos \beta)$ 为雅克比行列式, 表示为

$$P_{j-\nu}^{\nu-\mu, \nu+\mu}(\cos \beta) = 2^{-(j-\nu)} \sum_{k=0}^{j-\nu} \binom{j-\nu}{k} \binom{j+\mu}{j-\nu-k} (1-\cos \beta)^{-(j-\nu-k)} (1+\cos \beta)^k. \tag{9}$$

当利用超导 180°混合环作为该方案的微波分束器时, 参数 $\beta = \pi/2$. 由贝叶斯理论可求解相对压缩角 θ 的后验概率密度分布函数:

$$P(\theta | N_c, N_d) = \frac{P(N_c, N_d | \theta) P(\theta)}{P(N_c, N_d)}, \tag{10}$$

$P(\theta)$ 表示先验概率密度函数, 由于初始状态对 θ 无任何可参考已知信息, 因此可认为 θ 在 $[0, \pi)$ 上均匀分布, 即 $P(\theta) = 1/\pi (0 \leq \theta < \pi)$. $P(N_c, N_d)$ 可设为一个固定的归一化常数, 表示多次计数中光子数分别为 N_c, N_d 的概率, 则 $\theta_{es} = \int_0^\pi \theta P(\theta | N_c, N_d) d\theta$ 即为待估计的相对压缩角.

图 4 定性分析了压缩度 $r_1 = r_2 = 1$ 、初始相对压缩角为 0 的条件下压缩角锁定前后微波分束器输出特性. 图 4 中上下两部分分别描述了锁定前后 180°混合环两路输出信号正交分量的 Wigner 函数分布特性, 由图 4 可知, 当相对压缩角为 0, 即未锁定时, 输出信号正交分量的 Wigner 函数分布表现为热态, 不存在明显关联, 未表现纠缠特性; 当相对压缩角锁定为 π 时, 输出 Wigner 函数分布表现为压缩态, 且两路信号正交 X 分量为正

关联, Y 分量为反关联, 符合路径纠缠信号幅度纠缠判定条件, 即输出纠缠.

负值度 (negativity) 是 Zyczkowski 等^[22] 提出的定量计算纠缠的度量指标, 之后在此基础上发展了对数负度 (logarithmic negativity)^[23]. 对于基于单模压缩态与超导 180°混合环的纠缠制备方案, 其对数负度可表示为

$$E_N = \max(0, -\log(\min \Delta^2)), \tag{11}$$

其中 $\Delta^2 = \langle \Delta^2(X_1 \mp X_2) \rangle + \langle \Delta^2(Y_1 \pm Y_2) \rangle$. 为便于分析纠缠度与相对压缩角的关系, 可将 (11) 式表示为

$$E_N = \max\left(0, -\log\left(\frac{1+\cos \theta}{4} e^{2r} + \frac{3+\cos \theta}{4} e^{-2r}\right)\right). \tag{12}$$

图 5 刻画了不同压缩度条件下任意压缩角锁定前后超导 180°混合环输出的纠缠度对比. 由图 5 可知: 随着初始相对压缩角的增加, 纠缠度增大, 且在初始相对压缩角为 π 时, 即两路输入信号相互正交时达到最大值, 进一步验证了相对压缩角锁定控制方程; 任意初始相对压缩角均可通过锁定方案

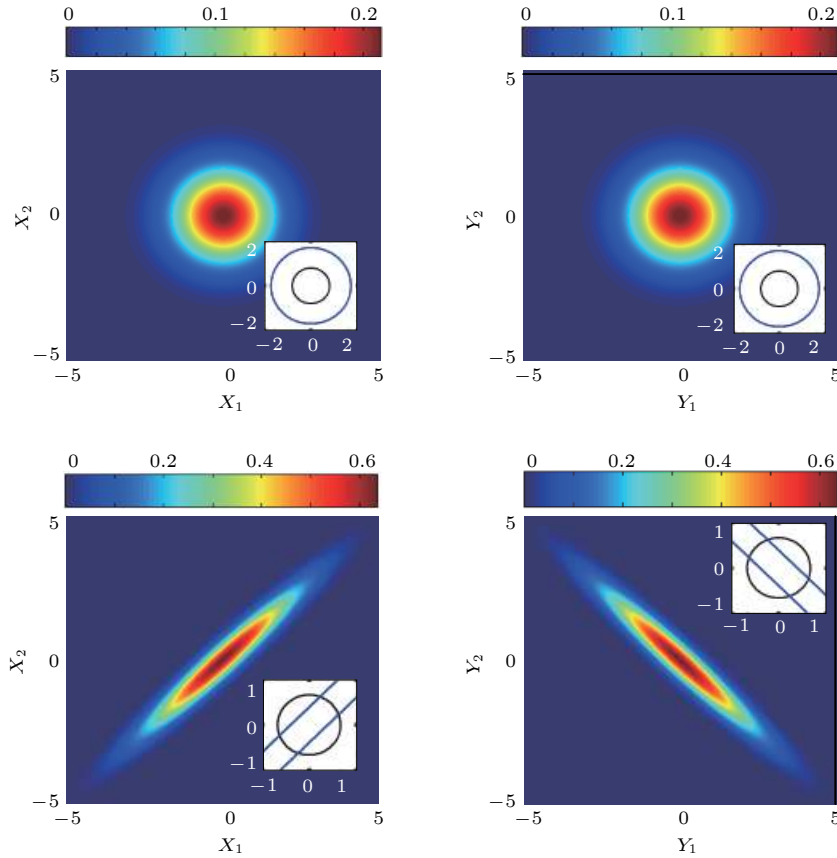


图 4 相对压缩角锁定前后输出特性

Fig. 4. Output properties before and after locking squeezing angle.

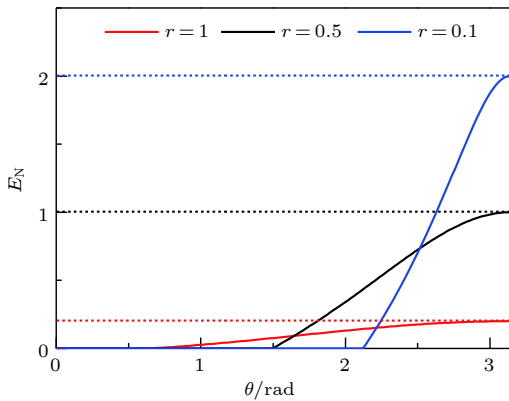


图 5 相对压缩角锁定前后输出纠缠度(实线, 锁定前; 虚线, 锁定后)

Fig. 5. Degree of output entanglement before and after locking squeezing angle. (real line, before locking; dashed line, after locking).

使得输出为纠缠度最大的路径纠缠微波信号; 输入单模压缩态的压缩度越大, 锁定后的输出纠缠度越高, 幅度纠缠特性越明显.

此外, 该方案的可操作性方面, 相对于 Fedorov 等^[10]的设计方案, 基于微波光子计数的压缩角锁定方案无需将信号放大到常温状态, 在超低温条件

下(制备温度)即可探测, 简化了温度控制系统, 同时超低温环境减少了探测过程中的噪声引入, 效率更高; 且由于信息处理过程将压缩角信息简化为相对压缩角, 则只需对一路 JPA 的抽运源进行反馈校正, 降低了操作难度与复杂度.

5 结 论

本文针对两路单模压缩态制备纠缠现存问题, 研究了超导 180° 混合环输入的压缩角锁定问题. 利用微波光子计数器进行接收, 根据贝叶斯准则估计相对压缩角并解算压缩角校正信息反馈给 JPA 抽运源, 实现压缩角的锁定. 该技术利用微波光子计数器进行接收, 探测效率远高于 JPA 放大技术. 同时探测在超低温条件下进行, 既简化了温度控制系统又减少了探测噪声. 此外, 利用贝叶斯准则估计相对压缩角, 其精度可达 QCR 下界. 该研究将有效提升纠缠微波制备的纠缠性能, 且对纠缠微波源的设计提供了理论参考.

参考文献

- [1] Meschede D, Walther H, Müller G 1985 *Phys. Rev. Lett.* **54** 551
- [2] Yurke B, Kaminsky P G, Miller R E, Whittaker E A, Smith A D, Silver A H, Simon R W 1988 *Phys. Rev. Lett.* **60** 764
- [3] Flurin E, Roch N, Mallet F, Devoret M H, Huard B 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 183901
- [4] Menzel E P, Candia R D, Deppe F, Eder P, Zhong L, Ihmig M, Haerberlein M, Baust A, Hoffmann E, Ballester D, Inomata K, Yamamoto T, Nakamura Y, Solano E, Marx A, Gross R 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 250502
- [5] Andersen U L, Neergaard-Nielsen, Lockc P V, Furusawa A 2015 *Nat. Phys.* **11** 713
- [6] Marshall K, Jacobsen C S, Schafermeier C, Gehring T, Weedbrook C, Andersen U L 2016 *Nat. Commun.* **7** 13795
- [7] Sanz M, Las H U, Garcia R, Solano E, Di C R 2017 *Phys. Rev. Lett.* **118** 070803
- [8] Xiong B, Li X, Wang X Y, Zhou L 2017 *Ann. Phys.* **385** 757
- [9] Li X, Wu D W, Wei T L, Miao Q, Zhu H N, Yang C Y 2018 *AIP Adv.* **8** 065217
- [10] Fedorov K G, Pogorzalek S, Las Heras U, Sanz M, Yard P, Eder P, Fische M R, Goetz, Xie J E, Inomata K, Nakamura Y, Candia D R, Solano E, Marx A, Deppe F, Gross R 2018 *Sci. Rep.* **8** 6416
- [11] Beltran M A C 2010 *Ph. D. Dissertation* (Colorado: University of Colorado)
- [12] Ku H S, Kindel W F, Mallet F 2015 *Phys. Rev. A* **91** 042305
- [13] Eichler C, Bozyigit D, Lang C 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 113601
- [14] Zhu H N, Wu D W, Li X, Wang X L, Miao Q, Fang G 2018 *Acta Phys. Sin.* **67** 040301 (in Chinese) [朱浩男, 吴德伟, 李响, 苗强, 方冠 2018 *物理学报* **67** 040301]
- [15] Koshino K, Inomata K, Lin Z, Nakamura Y, Yamamoyo T 2015 *Phys. Rev. A* **91** 43805
- [16] Sathyamoorthy S R, Stace T M, Johansson G 2016 *C. R. Phys.* **17** 756
- [17] Koshino K, Lin Z, Inomata K, Yamamoyo T, Nakamura Y 2016 *Phys. Rev. A* **93** 23824
- [18] Fan B, Johansson G, Combes J, Mibrun G J, Stace T M 2014 *Phys. Rev. B* **90** 035132
- [19] Guo W J 2016 *Ph. D. Dissertation* (Chengdu: Southwest Jiaotong University) (in Chinese) [郭伟杰 2016 博士学位论文 (成都: 西南交通大学)]
- [20] Chen K, Chen S X, Wu D W, Yang C Y, Miao Q 2017 *Acta Photon. Sin.* **46** 0512003
- [21] Yurke B, McCall S L, Klauder J R 1986 *Phys. Rev. A* **33** 4033
- [22] Zyczkowski K, Horodecki P, Sanpera A, Lewenstein M 1998 *Phys. Rev. A* **58** 883
- [23] Viasl G, Werner R F 2002 *Phys. Rev. A* **65** 032314

Squeezing angle locking of entangled microwave based on photon counting*

Wei Tian-Li Wu De-Wei[†] Yang Chun-Yan Luo Jun-Wen
Li Xiang Zhu Hao-Nan

(*Information and Navigation College, Air Force Engineering University, Xi'an 710077, China*)

(Received 22 November 2018; revised manuscript received 21 January 2019)

Abstract

Quantum entanglement possesses important applications in quantum computation, quantum communication, and quantum precision measurement. It is also an important method to improve the performance of quantum radar and quantum radio navigation. However, the penetration of light wave is poor due to the high frequency, which leads to detecting limitations in bad weather. In this context, quantum entanglement in the microwave domain has been extensively studied, and it is hopeful to overcome the above-mentioned defects in quantum optics. Although the entangled microwave preparation of continuous variable is achievable at present, there exist still some problems such as poor entanglement performance, low entanglement efficiency, complex signal processing and control, which restrict the development of entangled microwave sources. In order to improve the entanglement performance in microwave domain, a squeezing-angle locking scheme based on single photon counting is proposed. First, two Josephson parametric amplifiers (JPAs) are driven respectively by two pump signals to generate two single-mode squeezed states which are uncorrelated to each other. Next, the squeezing angle difference between the two single-mode squeezed states is adjusted to 180° , and then the two signals are mixed in a superconducting 180° hybrid ring coupler for two entangled microwave outputs. The outputs are single photon detected, and the results are sent to the data processor for solution. The squeezing angle difference between the input single-mode squeezed microwaves is estimated by Bayesian criterion and compared with the target value to calculate the error. Finally, the squeezing angle correction information is fed back into the JPA pump to control the squeezing angle of the single-mode squeezed microwave of the JPA output as well as the relative squeezing angle to reach the target value. Thus, the dual-path entangled microwave with the optimal entanglement performance is output. Comparing with the existing entangled microwave preparation schemes, a single photon counter is utilized in the scheme of this paper, which leads to a detection efficiency of 90%. In addition, the Bayesian criterion is used to estimate the output result, and the theoretical precision reaches the quantum Cramer-Rao lower bound. Meanwhile, the introduced noise level and operation difficulty are reduced, which greatly improves the property of dual-path entangled microwave preparation.

Keywords: entangled microwave preparation, squeezing angle locking, microwave photon counting, Bayesian estimation

PACS: 03.67.Bg, 03.67.Mn, 42.50.Dv

DOI: [10.7498/aps.68.20182077](https://doi.org/10.7498/aps.68.20182077)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 61573372, 61603413) and the Principal Fund of Air Force Engineering University, China.

[†] Corresponding author. E-mail: wudewei74609@126.com