第 34 卷 第 6 期
1985 年 6 月

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 34, No. 6
Jun., 1985

激光场的随机性对简并四波混频的影响

傅盘铭　叶佩弦
(中国科学院物理研究所)

1984 年 5 月24日收到

提　要

本文在相位扩散模型的基础上，研究了随机场对简并四波混频输出强度的影响．指出这种影响的大小主要取决于激光源的相干时间与感生光栅弛豫时间的比值．激光源的随机性对混频信号的线宽的影响也作了详细的讨论．

一、引　言

一般说来，任意一个激光场 $E = \varepsilon e^{i(k\cdot r-\omega t+\phi)}$ 都有一定的随机性．这种随机性对简并四波混频有无影响？就其机制而言，简并四波混频[1,2]来源于 1，2 两束光与非线性介质作用后在介质中感生出的随空间调制的光栅(见图 1)．此光栅可以来源于原子布居的变化，分子取向的变化或介质温度的变化．作为探测光的光束 3 被介质中这个空间光栅所衍射，从而产生了沿光束 2 的反向前进的混频信号．在此，既然产生混频输出的关键过程是 1，2 (或 2，3) 两束光在介质中相干涉并形成光栅，因此一种常见的观点认为，激光场的随机性对简并四波混频的产生是有影响的．这体现在：1，2 (或 2，3) 两束光必须是互相能干涉的，首先它们必须来自同一激光源，其次它们之间的光程差必须短于该激光源的相干长度．

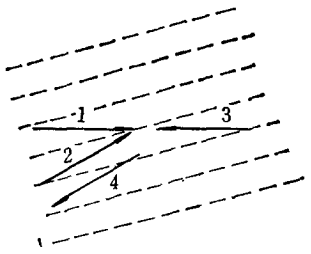


图 1

这种观点是正确的吗？本文试图对此问题作一理论探讨．我们用相位扩散模型[3]来描述随机的激光场．得出结论是：首先，一般说来激光场的随机性对于简并四波混频输出强度是有影响的．但是，这种影响并不体现在 1，2 (或 2，3) 两束光必须来自同一激光源，也不体现在它们的光程差必须小于光源的相干长度．其次，在介质中建立起来的空间光栅具有一定的弛豫时间 T，是这种影响存在的前提．这种影响的大小主要取决于激光源的相干时间 $\tau_c = 1/\Delta\nu$($\Delta\nu$ 为光源的带宽)与光栅弛豫时间 T 的比值．当这个比值远大于 1 时，入射光位相的随机性对混频输出信号强度没有直接影响，而只影响该信号的线宽．本文对于在不同情况下，激光源的随机性如何影响信号的线形和线宽也作了详细的讨论．

二、理　论

我们采用感生衍射光栅的观点来分析简并四波混频信号的产生．为讨论简单起见，

只考虑由 1，2 两束光在介质中形成的光栅，而把混频信号看作是这个光栅对第 3 束光的衍射. 对于 2，3 两束光形成的光栅，其物理过程是完全一样的. 因此，我们的结果可以很容易地推广到一般情形. 此外，假定光栅有一定的弛豫时间 T.

我们用 $n(\boldsymbol{r}, t)$ 表示这个感生光栅的空间分布及其随时间的变化. 随着简并四波混频机制的不同，n 代表不同的物理量，例如能级的布居、分子取向的序参数、介质的局域温度等.

在 1，2 两束光作用下，忽略光栅的空间扩散，则光栅满足以下的运动方程[1]:

$$\frac{dn(\boldsymbol{r}, t)}{dt} + \frac{n(\boldsymbol{r}, t)}{T} = \frac{\chi}{T} E_1(\boldsymbol{r}, t)E_2^*(\boldsymbol{r}, t) + \text{c. c.} \tag{1}$$

其中 χ 是与介质有关的某一物质常数，例如可以是三阶非线性极化率的某个倍数. T 为光栅的弛豫时间.

混频输出信号来源于这个光栅对第 3 束光的衍射，且其电场 $E_s(\boldsymbol{r}, t)$ 为

$$E_s(\boldsymbol{r}, t) \propto n(\boldsymbol{r}, t)E_3(\boldsymbol{r}, t). \tag{2}$$

我们又假定三束入射光都是随机的平面波，表示为

$$E_i(\boldsymbol{r}, t) = \varepsilon_i e^{i(\boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{r} - \omega t + \phi_i(t))} \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{3}$$

同时，我们采用相位扩散模型，亦即认为 ε_i 为常数，$\phi_i(t)$ 为一 Wiener-Levy 随机过程[4]，其微商的关联函数为

$$\langle \dot{\phi}_i(t)\dot{\phi}_i(t') \rangle = 2D_{\phi_i}\delta(t - t'). \tag{4}$$

而

$$\langle \dot{\phi}_i(t) \rangle = 0. \tag{5}$$

此模型一般用于描述远超阈值下工作的单模激光场. D_{ϕ_i} 称为扩散系数. 可以看出，ϕ 的随机变化是一个马尔可夫过程. 同时，激光输出的线形为洛伦兹型，线宽 (FWHM) 为 $2D_{\phi_i}$.

1. 随机场作用下的混频信号

由 (1) 和 (3) 式得到

$$\frac{dn}{dt} + \frac{n}{T} = \frac{\chi}{T} A(\boldsymbol{r})e^{i\psi(t)} + \text{c. c.} \tag{6}$$

这里，$A(\boldsymbol{r}) = \varepsilon_1\varepsilon_2^* e^{i\Delta\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$；$\Delta\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2$；而

$$\psi(t) = \phi_1(t) - \phi_2(t)$$

亦为一随机变量.

如果 E_1 和 E_2 都是连续激光场，则 (6) 式的解为

$$n(t) = \frac{\chi}{T} A(\boldsymbol{r}) \int_0^\infty d\tau e^{i\psi(t-\tau)} \cdot e^{-\frac{\tau}{T}} + \text{c.c.}, \tag{7}$$

将其代入 (2) 式，得到

$$E_s(\boldsymbol{r}, t) \propto \frac{\chi}{T} A(\boldsymbol{r})\varepsilon_3 e^{-i(\omega t - \boldsymbol{k}_3\cdot\boldsymbol{r})} \cdot e^{i\phi_3(t)} \cdot \int_0^\infty d\tau e^{i\psi(t-\tau)} \cdot e^{-\frac{\tau}{T}} + \text{c.c.}, \tag{8}$$

1) 严格说，此方程只适用于分子取向光栅. 对于布居光栅，其建立过程与系统的纵向及横向弛豫时间有关. 因此，本文得到的结果需要做修正.

混频输出强度 $I_s(\boldsymbol{r}, t)$ 比例于 $E_3(\boldsymbol{r}, t)$ 的绝对值的平方．现在，由于 $\phi(t-\tau)$ 是一个随机过程，因此必须对其涨落进行随机平均，故

$$I_s(\boldsymbol{r}, t) \propto \langle |E_s(\boldsymbol{r}, t)|^2 \rangle$$

$$\propto \frac{\chi^2}{T^2} |\varepsilon_1 \varepsilon_2^* \varepsilon_3|^2 \cdot \int_0^\infty d\tau \int_0^\infty d\tau' \langle e^{i[\phi(t-\tau)-\phi(t-\tau')]} \rangle \cdot e^{-\frac{\tau+\tau'}{T}}. \tag{9}$$

由于 $\dot{\phi}_i(t)$ 为随机高斯函数，因而 $\phi_i(t)$ 以及 $\phi(t)$ 亦为高斯函数[5]．从高斯函数的一般性质可得

$$\langle e^{i[\phi(t-\tau)-\phi(t-\tau')]} \rangle = e^{-\frac{1}{2}\langle [\phi(t-\tau)-\phi(t-\tau')]^2 \rangle}, \tag{10}$$

而

$$\langle [\phi(t-\tau)-\phi(t-\tau')]^2 \rangle = 2D_\phi |\tau - \tau'|. \tag{11}$$

其中 D_ϕ 是随机变量 ϕ 的扩散系数．将 (11) 式代入 (10) 式，再代入 (9) 式得

$$I_s(\boldsymbol{r}, t) \propto \frac{\chi^2}{T^2} |\varepsilon_1 \varepsilon_2^* \varepsilon_3|^2 \cdot \int_0^\infty d\tau \int_0^\infty d\tau' \cdot e^{-D_\phi |\tau' - \tau|} \cdot e^{-\frac{\tau+\tau'}{T}}. \tag{12}$$

积分后得到混频输出信号为

$$I_s(\boldsymbol{r}, t) \propto \frac{\chi^2}{1 + D_\phi T} |\varepsilon_1 \varepsilon_2^* \varepsilon_3|^2. \tag{13}$$

2. 随机场作用下混频信号的线形和线宽

已知，混频信号的谱线线形由混频输出电场的关联函数的傅氏变换决定．亦即线形函数为[6]

$$I_s(\nu) \propto \int d\tau e^{-i\nu\tau} \cdot \langle E_s^*(t) E_s(t+\tau) \rangle. \tag{14}$$

利用 (8) 式得到

$$\langle E_s^*(t) E_s(t+\tau) \rangle \propto \frac{\chi^2}{T^2} |\varepsilon_1 \varepsilon_2^* \varepsilon_3| \cdot e^{i\omega\tau} \cdot \langle e^{i[\phi_3(t)-\phi_3(t+\tau)]} \rangle$$

$$\cdot \int_0^\infty d\tau' \int_0^\infty d\tau'' \langle e^{i[\phi(t-\tau')-\phi(t+\tau-\tau'')]} \rangle \cdot e^{-\frac{\tau'+\tau''}{T}}. \tag{15}$$

在此，为集中研究产生感生光栅的 1，2 两光束的随机性的影响，已假定第 3 束光是来自另一独立光源．

然后，利用与 (10) 和 (11) 式相类似的以下关系式：

$$\langle e^{i[\phi_3(t)-\phi_3(t+\tau)]} \rangle = e^{-D_{\phi_3}\tau}, \tag{16}$$

$$\langle e^{i[\phi(t-\tau')-\phi(t+\tau-\tau'')]} \rangle = e^{-D_\phi |\tau'' - \tau'|}. \tag{17}$$

则 (15) 式经积分后简化为

$$\langle E_s^*(t) E_s(t+\tau) \rangle \propto \frac{\chi^2}{T} \frac{e^{i\omega\tau}}{D_\phi^2 - (1/T)^2} \cdot e^{-D_{\phi_3}\tau} \left[D_\phi e^{-\frac{\tau}{T}} - \frac{1}{T} e^{-D_\phi \tau} \right]. \tag{18}$$

将上式代入 (14)式，经积分后可得到线形函数为

$$I_s(\nu) = \frac{1}{\pi(1 - D_\phi T)} \left[\frac{D_{\phi_3} + D_\phi}{(\omega - \nu)^2 + (D_{\phi_3} + D_\phi)^2} \right.$$

$$\left. - \frac{D_\phi (1 + D_{\phi_3} T)}{(\omega - \nu)^2 + (D_{\phi_3} + 1/T)^2} \right]. \tag{19}$$

这里，已将线形函数归一化为 $\int I_s(\nu)d\nu = 1$.

3. 扩散系数D_ψ的计算

扩散系数 D_ψ 由一般公式

$$2D_\psi = \frac{\langle[\psi(t) - \psi(t-\Delta t)]^2\rangle}{\Delta t} \tag{20}$$

给出. 而 $\psi(t) = \phi_1(t) - \phi_2(t)$.

1) 设 1, 2 两束光来自两个独立的光源. 此时 $\phi_1(t)$ 和 $\phi_2(t)$ 是无关的. 由 (20) 式得到

$$2D_\psi = 2D_{\phi_1} + 2D_{\phi_2} - 2\frac{\langle[\phi_1(t) - \phi_1(t-\Delta t)][\phi_2(t) - \phi_2(t-\Delta t)]\rangle}{\Delta t}, \tag{21}$$

但

$$\phi_i(t) - \phi_i(t-\Delta t) = \int_{t-\Delta t}^{t} dt'\dot{\phi}_i(t'), \tag{22}$$

因此

$$\langle[\phi_1(t) - \phi_1(t-\Delta t)][\phi_2(t) - \phi_2(t-\Delta t)]\rangle$$
$$= \int_{t-\Delta t}^{t} dt' \int_{t-\Delta t}^{t} dt''\langle\dot{\phi}_1(t')\dot{\phi}_2(t'')\rangle = 0. \tag{23}$$

由此及 (21) 式得

$$D_\psi = D_{\phi_1} + D_{\phi_2}. \tag{24}$$

由于激光源位相的扩散系数与激光线宽的关系为

$$2D_{\phi_i} = \Delta\nu_i. \tag{25}$$

故

$$2D_\psi = \Delta\nu_1 + \Delta\nu_2. \tag{26}$$

其中 $\Delta\nu_1$ 和 $\Delta\nu_2$ 分别为 1, 2 两光束的 FWHM 线宽.

2) 设 1, 2 两束光均来自同一个激光器，它们之间的相对延时为 τ. 此时若 $\phi_1(t) = \phi(t)$, 则 $\phi_2(t) = \phi(t-\tau)$. 从而

$$\psi(t) = \phi(t) - \phi(t-\tau).$$

当 $\tau = 0$ 时，由于 $\psi(t) = 0$, 故 $D_\psi = 0$.

当 τ 不为零时，由 (20) 式可得

$$2D_\psi(\tau) = 4D_\phi - 2\frac{\langle[\phi(t) - \phi(t-\Delta t)][\phi(t-\tau) - \phi(t-\tau-\Delta t)]\rangle}{\Delta t}. \tag{27}$$

而从 (22) 式又可知

$$\langle[\phi(t) - \phi(t-\Delta t)]\cdot[\phi(t-\tau) - \phi(t-\tau-\Delta t)]\rangle$$
$$= \int_{t-\Delta t}^{t} dt' \int_{t-\tau-\Delta t}^{t-\tau} dt''\cdot\langle\dot{\phi}(t')\dot{\phi}(t'')\rangle. \tag{28}$$

当 $\tau > \Delta t$ 时，由于上式中 t' 和 t'' 的积分范围不重合，因此由 (4) 式得知上式的积分函数

$$\langle\dot{\phi}(t')\dot{\phi}(t'')\rangle = 0.$$

于是，我们得到扩散系数 $D_\psi(\tau)$ 为

$$D_\psi(\tau)=\begin{cases}0 & (\text{当 } \tau=0)\\ 2D_\phi & (\text{当 } \tau>\Delta t).\end{cases} \tag{29}$$

这里，Δt 必须远大于 $\phi(t)$ 的关联时间 t_c.

三、讨　论

1. (13) 式给出混频信号强度 I_s 与扩散系数 D_ψ 和光栅弛豫时间 T 的乘积的关系. 如图 2 所示.

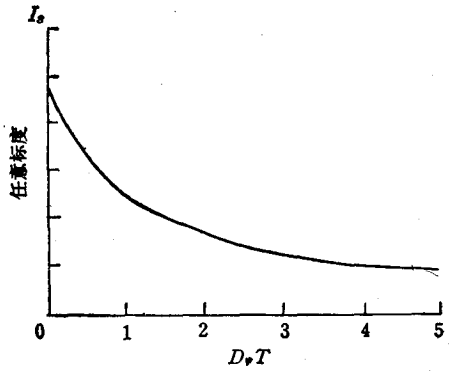


图 2

可以看出，光场的随机性一般说来对于混频输出强度是有影响的. 这表现在 I_s 与 D_ψ 有关，而 D_ψ 又是 $\psi=\phi_1-\phi_2$ 的随机变化过程的扩散系数. 但是另一方面，D_ψ 对 I_s 的影响又是通过它与光栅弛豫速率 $1/T$ 的比值体现出来的.

当 $1/T\gg D_\psi$ 时，由 (13) 式得到

$$I_s\propto|\chi|^2|\varepsilon_1\varepsilon_2^*\varepsilon_3|^2. \tag{30}$$

换言之，I_s 与 D_ψ 无关.

当 $1/T\sim D_\psi$ 或 $1/T\ll D_\psi$ 时，I_s 明显地随 D_ψ 变化. 而当 $1/T\ll D_\psi$ 时，

$$I_s\propto\frac{\chi^2}{D_\psi T}|\varepsilon_1\varepsilon_2^*\varepsilon_3|^2. \tag{31}$$

要解释光场随机性的这种影响，首先要说明扩散系数 D_ψ 的物理意义. 如前所述，1，2 两束光干涉后，在空间形成干涉图样，正是这个具有条纹图样的光场与非线性介质作用后，在介质中建立起感生的光栅. 对建立光栅有贡献的是 1，2 两束光干涉后光场的干涉部分，其强度为

$$I(\boldsymbol{r})=2\mathrm{Re}\{\varepsilon_1\varepsilon_2^*e^{i[\Delta\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\psi(t)]}\}. \tag{32}$$

由此式看出，干涉条纹的间隔和取向是不变的，由 $\Delta\boldsymbol{k}$ 的大小和方向决定，但其位置却与 $\psi(t)$ 有关. 由于 $\psi(t)$ 是随机变化的，因此干涉条纹也在保持相互间隔及取向不变的情况下随机飘移. 既然 D_ψ 是 ψ 的扩散系数，因此它也就代表这种飘移的速率.

当 $1/T\gg D_\psi$ 时，光栅的建立和消失的速率远大于光场干涉条纹位置飘移的速率. 此时，介质对光场的响应可看作是即时响应. 亦即，任一时刻光栅条纹的位置是由那个时刻光场干涉条纹的位置决定的. 或者说，光栅条纹紧跟着光场干涉条纹的飘移而飘移. 无疑，这时作为探测光的光束 3 将面对着一个条纹在随机飘移着的衍射光栅. 但由于光栅条纹间隔及取向不变，因此它对第 3 束光衍射的方向和效率并不因此而改变. 换言之，此时随机光场对简并四波混频输出强度并无影响. 另一方面，当 $1/T\sim D_\psi$ 或 $1/T\ll D_\psi$ 时，光场干涉条纹位置飘移的速率不小于甚至远大于光栅建立和消失的速率. 此时，由于光栅消失的速率不够快，赶不上干涉条纹飘移的速率，因此由前一时刻光场的干涉条纹建立起的光栅条纹在后一时刻仍程度不同地滞留着，并叠加在后一时刻光场的干涉条纹所建

立起的光栅条纹上面. 结果将使得光栅条纹变得模糊并减小光栅条纹的反衬度，从而降低作为探测光的第 3 束光的衍射效率. 显然，这种影响的程度取决于 D_ψ 与 $1/T$ 的比值. 这个比值愈大，影响愈严重，简并四波混频信号强度下降愈厉害. 这正是前面理论分析得到的结论.

2. 既然光场随机性的影响是通过 D_ψ 体现出来的，从 (13) 式可看出，只要 D_ψ 不是很大，就不至于影响到四波混频是否能产生. 这一点正可用以检验一些似是而非的说法. 首先，1，2 两束光是否必须来自同一激光源？我们的回答是否定的. 从 (24) 式看出，当 1，2两束光来自不同的独立光源时，D_ψ 是两个光源各自的扩散系数之和，相对单个光源的扩散系数只是倍数地增加. 只要 $D_\psi T \gg 1$ 不成立，简并四波混频仍然能有效地产生. 其次，当 1，2 两束光来自同一激光源时，两束光的相对程差小于光源的相干长度 $c \cdot \tau_c$，是否是能够产生四波混频输出的标志？我们的回答也是否定的. 相对程差与相干长度的比值在这里并不显得多么重要. 从 (29) 式看出，只是当 1，2 两束光的相对程差等于零时，情况才显得特殊，此时 $D_\psi = 0$，也就是说混频输出不受光源随机性的影响. 而当两束光的相对延时远大于 $\dot{\phi}$ 的关联时间 t_c 时，$D_\psi = 2D_\phi$，亦即 D_ψ 总是光源扩散系数的两倍. 事实上，t_c 相对激光源的相干时间 τ_c 来说是非常小的，因此 1，2 两束光稍许延时便导至 $D_\psi = 2D_\phi$，而与延时是否达到或超过 τ_c 无关. 在 $\tau \sim t_c$ 时 $\phi(t)$ 的随机过程已不再能看作马尔可夫过程. 这时 $\dot{\phi}(t)$ 的记忆时间将对整个过程起影响. 这无疑已超越本文讨论的范围.

3. (19) 式表明，激光场的随机性对混频信号的线形和线宽有影响，同时这种影响还受到感生光栅弛豫过程的制约. 首先，若 $D_\psi = 0$，即 1，2 两束光的干涉条纹不存在随机飘移，则不论感生光栅的弛豫时间 T 的大小如何，(19) 式方括号内的第二项总是零. 此时线形函数为

$$I(\nu) = \frac{D_{\phi_3}/\pi}{(\omega \cdot \nu)^2 + D_{\phi_3}^2} \tag{33}$$

是洛伦兹型线形，线宽等于作为探测光的光束 3 的线宽 $\Delta\nu_3 = 2D_{\phi_3}$. 这是不难理解的. 因为此时感生光栅尽管存在弛豫过程，但其条纹位置和光场的干涉条纹位置一样，是静止不动的，光栅对光束 3 的衍射不存在多普勒频移，因而作为衍射光的混频信号的线宽只来源于探测光. 但当 $D_\psi \neq 0$ 时，情况就不同了. 如前所述，只要扩散系数 D_ψ 不为零，光场干涉条纹位置总是飘移的，因而感生光栅的条纹也是飘移的. 对于一个运动的光栅，其衍射光将产生多普勒频移. 由于现在光栅条纹的运动是随机的，因而频移也是随机的. 于是，混频信号除了存在由 $\Delta\nu_3$ 决定的线宽外，还应存在一定的附加线宽. 由于现在是感生光栅对探测光进行衍射，所以对混频信号的线形和线宽直接起影响的，是感生光栅条纹随机飘移的情况. 正如前面已指出，当光栅存在弛豫过程时，感生光栅条纹随机飘移的情况一般并不等同于光场干涉条纹随机飘移的情况. 因此，混频信号的线形和线宽不仅取决于 D_ψ，而且还与光栅弛豫时间 T 有关. 当 $T \approx 0$ 时，即弛豫速率很快时，(19) 式方括号内的第二项趋于零，线形函数由第一项给出为

$$I(\nu) \approx \frac{(D_{\phi_3} + D_\psi)/\pi}{(\omega - \nu)^2 + (D_{\phi_3} + D_\psi)^2}. \tag{34}$$

此时亦为洛伦兹型线形，但线宽除有 $\Delta\nu_3$ 外，还有一附加线宽 $2D_\psi$. 这是因为，此时由于感生光栅弛豫速度极快，光栅条纹能够紧跟着光场干涉条纹的飘移而飘移，从而使两者具有同一飘移速率 D_ψ. 但当 T 逐渐增大后，(19) 式中方括号内的第二项将起作用，亦即现在决定线形的除第一项外，还须考虑第二项. 如果注意到这两项都是洛伦兹型函数，而谱线的线形函数又是这两项之差，则不难承认这时线性不再会是洛伦兹型. 此外，也不难论证此时谱线的附加线宽将随 T 的增大而变小. 其原因是，当光栅存在一定弛豫时间时，光栅条纹不能紧跟光场干涉条纹而飘移，致使光栅条纹飘移的速率小于光场干涉条纹飘移的速率. T 愈大飘移速率愈慢. 由于现在谱线的附加加宽决定于衍射光的多普勒谱移量. 所以，飘移速率愈慢，频移量愈小，加宽也就愈小.

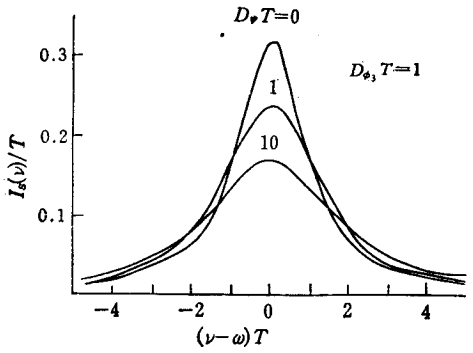


图 3

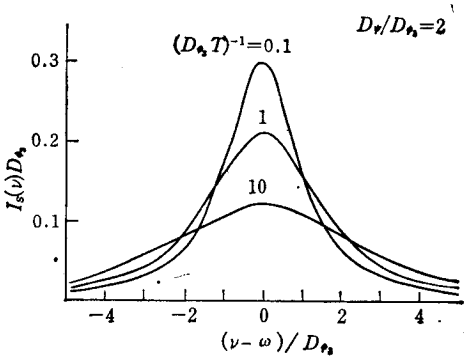


图 4

为了对上述分析有更清楚的了解，我们利用 (19) 式作出了两组曲线. 一组如图 3 所示. 它表示当 D_{ϕ_3} 和 T 固定不变时线形和线宽随 D_ψ 改变的情况. 可以看出，D_ψ 愈大谱线加宽愈大. 另一组如图 4 所示. 它表示当 D_{ϕ_3} 和 D_ψ 固定不变时，线形和线宽随 T 改变的情况. 可以看出，T 愈大，谱线愈窄. 这些结论无疑是和上面的讨论一致的.

参　考　文　献

[1] R. M. Hellwarth, *J. Opt. Soc. Am.*, 67 (1977), 1.
[2] *A. Yariv*, *IEEE J.*, QE-**14** (1978), 650.
[3] M. Sargent III, M. O. Scully and W. E. Lamb, Laser Physics, (Addison -Wesley, 1974).
[4] N. G. Van Kampen, Stochastic Process in physics and Chemistry, (North-Holland, 1981).
[5] P. Avan and C. Cohen-Tannoudyi, *J. Phys.*, B**10** (1977), 155.
[6] S. Chandrasekhar, *Rev. Mod. Phys.*, **15** (1943), 1.

THE EFFECT OF THE STOCHASTIC PROPERTY OF LASER ON THE DEGENERATE FOUR-WAVE MIXING

FU PAN-MING YE PEI-XIAN
(Institute of Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

The effect of the stochastic field on the degenerate four-wave mixing signal intensity has been studied basing on the phase-diffusion model. It is shown that the ratio of the correlation time of the laser source to the relaxation time of the induced grating plays an important role. The effect of the stochastic property of laser source on the linewidth of mixing signal has also been discussed.