第41卷 第3期 物 理 学 报 Vol. 41, No. 3
1992 年 3 月 ACTA PHYSICA SINICA Mar., 1992

静磁多极系统的对称性群及谐波势

李 钰
上海机械学院应用物理研究室，上海，200093

1991 年 4 月 1 日收到

本文研究具有控制矢量的静磁多极系统，导出这多极系统的对称变换与其M函数诱导对称变换的关系，并建立一个严格、普遍的简单方法，以便从这多极系统的对称性群出发，导出它对谐波势的约束关系。

PACC: 0220; 0240; 4180D

一、引 言

在文献[1]中，我们研究了控制矢量为 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_\omega)$ 的多极系统，导出其M函数对称性群可能具有的类型。在文献[2]中，导出这多极系统M函数的对称变换对偏谐波势的约束关系。在文献[3]中，导出静电多极系统的对称变换与其M函数诱导对称变换的关系，因而给出一个严格、普遍的简单方法，以便从静电多极系统的对称性群出发，导出它对这静电多极系统谐波势的约束关系。由文献[4,5]可以看出，不同于静电势那样的为一个标量场，磁标势场乃是一个赝标量场。故磁标势的正负符号在变换行列式为(-1)的正交坐标变换中必变号，而且任何环流的旋转方向在反射时必反转方向。因此，在反射变换时，静磁多极系统的行为将比静电多极系统复杂得多。也正由于上述差异，因此在推导静电多极系统的变换与其M函数的诱导变换间的关系时所用的论点，已不适用于静磁多极系统。故文献[3]的结论不能直接套用到静磁多极系统。本文严格地导出静磁多极系统的变换与其M函数诱导变换间的关系。因而由文献[2]，我们建立了一个严格、普遍的简单方法，以便从静磁多极系统的对称性群出发(不需知道这多极系统及其M函数的具体情况)，导出它对谐波势的约束关系。

本文所有符号都取自文献[2,3]。

二、静磁多极系统的 M 函数

控制矢量为 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_\omega)$ 的静磁多极系统是由 s 个线圈(分别绕在各自的芯子上)组成的有序集合。它们围绕着以 z 轴为旋转轴的真空区域 Ω 排列。假设线圈中每匝导线是近于闭合的，沿任一线圈都指定其参考电流方向，并且线圈上的点是按其参考电流

方向从始端到终端次序排列的. 因此一旦起始端点给定,则线圈参考电流方向便也决定. 假定对每个 $k\in\{1,\cdots,s\}$ 而言,加在第 k 线圈上的激励电流 η_k 是变量 $\xi_1,\cdots,\xi_\omega$ 的线性函数如下:

$$\eta_k=\sum_{\lambda=1}^{\omega}w_{k\lambda}\xi_\lambda \qquad k=1,\cdots,s, \tag{1}$$

其中 $w_{k\lambda}(k=1,\cdots,s;\ \lambda=1,\cdots,\omega)$ 为实常数. (1) 式称为这多极系统的控制关系. 于是,如令区域 Ω 中 z 轴上某点为原点,则这多极系统的传导电流分布如下:

$$j_\xi(r)=\sum_{k=1}^{s}\eta_k\frac{dr_k}{ds_k}\delta(pr_k(r-r_k)), \tag{2}$$

其中 $r_k(s_k)$ 描写第 k 线圈的几何分布. s_k 为从始端出发沿导线度量的长度. $pr_k(r-r_k)$ 表示 $r-r_k$ 在垂直于 dr_k/ds_k 的平面上的投影. $\delta(pr_k(r-r_k))$ 为在上述平面上的二维 Dirac delta 函数[5]. 因此, 如果这 s 个芯子的磁性物质工作于线性范围,使得

$$B=\mu H, \tag{3}$$

其中 μ 不依赖于磁场,则由下述关系[4,6]:

$$\nabla\times(B/\mu)=j_\xi, \tag{4}$$

$$\nabla\cdot B=0, \tag{5}$$

$$B=-\nabla\phi \tag{6}$$

可知,如令原点的磁标势值为 0,则这多极系统在 Ω 内产生的磁标势为

$$\phi=\sum_{k=1}^{s}\eta_k\phi_k(P) \qquad P\in\Omega, \tag{7}$$

其中 ϕ_k 为当第 k 线圈激励电流为 1,而其他线圈激励电流为 0 时,这多极系统在 Ω 内产生的磁标势. 于是由(1)式可知,控制矢量为 ξ 的静磁多极系统在 Ω 内点 P 处产生的磁标势是 P 及 ξ 的函数如下:

$$\phi(P,\xi)=\sum_{\lambda=1}^{\omega}\xi_\lambda\phi_\lambda(P) \qquad (P,\xi)\in\Omega\times\Xi, \tag{8}$$

其中

$$\phi_\lambda(P)=\sum_{k=1}^{s}w_{k\lambda}\phi_k(P) \qquad P\in\Omega,\lambda=1,\cdots,\omega. \tag{9}$$

这函数 $\phi(P,\xi)$ 称为该多极系统的 M 函数.

三、静磁多极系统的变换

令 $\mathscr{R}$ 中只存在一个静磁多极系统. 这多极系统的变换 (g,v) 定义如下:

在笛卡尔乘积空间 $\mathscr{R}\times\Xi$ 的变换 (g,v) 下, $\mathscr{R}$ 中每一点 P 处的导电物质及磁性物质连同它们的次序一起转移到如下的对应点 P^* 处:

$$P^*=gP, \tag{10}$$

而且在 $\mathcal{R}$ 的每个 ξ 处的激励电流 $(\eta_1,\cdots,\eta_s)$ 被转移到对应的新 ξ^*处，

$$\xi^* = v\xi. \tag{11}$$

与文献[3]一样，能证明上述变换 (g,v) 将老的 s 极系统变换成新的 s 极系统(当然，后者也是个静磁多极系统)，并将老的控制关系(1)式变成下述新的控制关系：

$$\eta_k = \sum_{\lambda=1}^{m} w_{k\lambda}(v^{-1}\xi), \qquad k = 1,\cdots,s. \tag{12}$$

此后，多极系统的变换 $(g,1)$ 和 $(1,v)$ 简写成 g 和 v，则有

$$(g,v) = gv = vg. \tag{13}$$

按其定义，变换 g 是保持次序不变的一种变换。故在变换 g 下，任一个老线圈的始端都转移到对应新线圈的始端，因而新线圈的参考电流方向也就确定。由(12)，(13)式可知，多极系统的变换 g 并不改变控制关系。所以对一给定的控制矢量 $\xi = (\xi_1,\cdots,\xi_m)$ 而言，激励电流 $(\eta_1,\cdots,\eta_s)$ 在变换 g 下是不变的。然而，在变换 g 下，线圈中每个近于闭合的一匝导线中的任何环流的旋转方向，当 g 为转动时是不改变的，当 g 为反射时必反转方向[5]；故每个线圈的参考电流方向和激励电流在每匝导线中的旋转方向也是这样的。这里还应知道，在变换 g 下，每个线圈的螺旋方向，当 g 为转动时是不改变的，当 g 为反射时必反转方向[7]。现在替代 R_n 而考虑下述变换：

$$\tilde{R}_n = R_nN = NR_n, \tag{14}$$

其中

$$N = N_1,\cdots,N_\omega. \tag{15}$$

由(1)，(12)，(14)，(15)式(其中(12)式中的 v 代之以 N)，可知 $\tilde{R}_n$ 为如下的变换，在这变换下，这多极系统经历变换 R_n，同时，各个 η_k 代之以 $(-\eta_k)$，$(k=1,\cdots,s)$，因此所有激励电流在每匝导线中的绝对值和旋转方向都保持不变。

四、M函数的诱导变换

在 $\mathcal{R}$ 中给定一直角坐标系 $\{O,(e_\alpha)\}$，其中原点为点 O，正交标准化基底为 $(e_\alpha)=(e_1,e_2,e_3)$。于是，坐标为 $(x_\alpha)=(x_1,x_2,x_3)$ 的点 P 的位置矢量 $r = OP$ 可表示如下：

$$r = \sum_{\alpha=1}^{3} x_\alpha e_\alpha. \tag{16}$$

$\mathcal{R}$ 的一个正交变换 $g(=C_n$ 或 $R_n)$ 将 $\mathcal{R}$ 中的每个点 P 变为新点 $P^* = gP$，每个位置矢量 r 变为新位置矢量 $r^* = gr$，

$$r^* = \sum_{\alpha=1}^{3} x_\alpha e_\alpha^*, \tag{17}$$

其中

$$(e_\alpha^*) = (ge_\alpha). \tag{18}$$

因此将老的直角坐标系 $\{O,(e_\alpha)\}$ 变为新的直角坐标系 $\{O,(e_\alpha^*)\}$。

静磁多极系统的变换 (g, ν) 对其 M 函数诱导一个对应变换，在下面将导出.

首先，令这多极系统经历变换 $g(=C_n$ 或 $R_n)$，则其激励电流 $(\eta_1, \cdots, \eta_s)$ 和控制矢量 ξ 不变，只是老多极系统的有序的 s 个线圈及其芯子变成新多极系统的有序的 s 个线圈及其芯子. 由(2),(16),(17)式可知，新的传导电流分布为

$$\boldsymbol{j}_\xi^*(\boldsymbol{r}^*)=\sum_{k=1}^{s}\eta_k\frac{d\boldsymbol{r}_k^*}{ds_k}\delta(p\boldsymbol{r}_k(\boldsymbol{r}^*-\boldsymbol{r}_k^*)), \tag{19}$$

其中 $\boldsymbol{r}^*=g\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{r}_k^*=g\boldsymbol{r}_k$，并且 $p\boldsymbol{r}_k(\boldsymbol{r}^*-\boldsymbol{r}_k^*)$ 表示 $\boldsymbol{r}^*-\boldsymbol{r}_k^*$ 在垂直于 $d\boldsymbol{r}^*/ds_k$ 的平面上的投影. 由(16),(17)式可知，新多极系统的点 $P^*(=gP)$ 在坐标系 $\{O,(\boldsymbol{e}_\alpha^*)\}$ 中描写的坐标，正好为老多极系统对应点 P 在坐标系 $\{O,(\boldsymbol{e}_\alpha)\}$ 中描写的坐标. 因此有

$$\mu(x_\alpha)=\mu(P^*)|_{(\boldsymbol{e}_\alpha^*)}=\mu(P)|_{(\boldsymbol{e}_\alpha)}, \tag{20}$$

$$(x_{k\tau}(s_k))=\boldsymbol{r}_k^*(s_k)|_{(\boldsymbol{e}_\alpha^*)}=\boldsymbol{r}_k(s_k)|_{(\boldsymbol{e}_\alpha)}, \tag{21}$$

其中下标 $(\boldsymbol{e}_\alpha)$ 及 $(\boldsymbol{e}_\alpha^*)$ 分别表示在 $\{O,(\boldsymbol{e}_\alpha)\}$ 及 $\{O,(\boldsymbol{e}_\alpha^*)\}$ 中的描写.因此，由(21),(19),(2)式得

$$(j_{\xi\tau}(x_\alpha))=\boldsymbol{j}_\xi^*(P^*)|_{(\boldsymbol{e}_\alpha^*)}=\boldsymbol{j}_\xi(P)|_{(\boldsymbol{e}_\alpha)}. \tag{22}$$

令 $\boldsymbol{B}_\xi$ 及 $\boldsymbol{B}_\xi^*$ 分别为老多极系统及新多极系统产生的磁感应强度，并令

$$\begin{aligned}(B_{\xi\beta}(x_\alpha))&=\boldsymbol{B}_\xi(P)|_{(\boldsymbol{e}_\alpha)},\\(B_{\xi\beta}^*(x_\alpha))&=\boldsymbol{B}_\xi^*(P^*)|_{(\boldsymbol{e}_\alpha^*)},\end{aligned} \tag{23}$$

其中 $P^*=gP$，则 $(B_{\xi\beta}(x_\alpha))$ 及 $(B_{\xi\beta}^*(x_\alpha))$ 为下述同一组方程的解：

$$\begin{aligned}&\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}\varepsilon_{\alpha\beta\tau}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(B_{\xi\beta}/\mu)=j_{\xi\tau}\qquad\tau=1,2,3,\\&\sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_\beta}B_{\xi\beta}=0,\end{aligned} \tag{24}$$

其中

$$\varepsilon_{\alpha\beta\tau}=\begin{cases}+1 & \text{如 } \alpha,\beta,\tau \text{ 为 1, 2, 3 的偶置换;}\\-1 & \text{如 } \alpha,\beta,\tau \text{ 为 1, 2, 3 的奇置换;}\\0 & \text{其他情况.}\end{cases} \tag{25}$$

因为静磁多极系统的大小实质上是有限的，所有它的传导电流及磁化电流都约束在有界区域中. 故它的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 在无限远处像 $1/|\boldsymbol{r}|^3$ 一样地趋于零[4].这样，可以证明：对给定的分布 $\mu(x_\alpha)$ 及 $\boldsymbol{j}_{\xi\tau}(x_\alpha)$ 而言，(24)式仅有一个解 $(B_{\xi\beta}(x_\alpha))$. 所以有

$$(B_{\xi\beta}^*(x_\alpha))=(B_{\xi\beta}(x_\alpha)). \tag{26}$$

令 ϕ_ξ 及 ϕ_ξ^* 为分别由老多极系统及新多极系统在 Ω 内产生的磁标势，并令

$$\begin{aligned}\phi_\xi(x_\alpha)&=\phi_\xi(P)|_{(\boldsymbol{e}_\alpha)}\qquad P\in\Omega,\\\phi_\xi^*(x_\alpha)&=\phi_\xi^*(P^*)|_{(\boldsymbol{e}_\alpha^*)}\qquad P^*\in\Omega,\end{aligned} \tag{27}$$

其中 $P^*=gP$，则 $\phi_\xi(x_\alpha)$ 及 $\phi_\xi^*(x_\alpha)$ 为下述同一组方程的解：

$$\begin{aligned}&B_{\xi\beta}=-\frac{\partial\phi_\xi}{\partial x_\beta}\qquad\beta=1,2,3,\\&\phi_\xi(0,0,0)=0.\end{aligned} \tag{28}$$

故有

$$\phi^*_\xi(x_{\alpha^*}) = \phi_\xi(x_\alpha) \qquad (x_\alpha)\in\Omega_\circ \tag{29}$$

因此，由(27)式即得

$$\phi^*_\xi(P^*)|_{(\mathscr{C}^*_\alpha)} = \phi_\xi(P)|_{(\mathscr{C}_\alpha)}\circ$$

所以

$$\phi^*_\xi(P)|_{(\mathscr{C}^*_\alpha)} = \phi_\xi(g^{-1}P)|_{(\mathscr{C}_\alpha)}\circ \tag{30}$$

由文献[4]可知，磁标势是赝标量场，故有[5]

$$\phi^*_\xi(P)|_{(\mathscr{C}^*_\alpha)} = \begin{cases}\phi^*_\xi(P)|_{(\mathscr{C}_\alpha)} & \text{如果 } g = C_n,\\ -\phi^*_\xi(P)|_{(\mathscr{C}_\alpha)} & \text{如果 } g = R_n.\end{cases} \tag{31}$$

由(30)—(31)式可得

$$\phi^*_\xi(P)|_{(\mathscr{C}_{\alpha^*})} = \begin{cases}\phi_\xi(g^{-1}P)|_{(\mathscr{C}_\alpha)} & \text{如果 } g = C_n,\\ -\phi_\xi(g^{-1}P)|_{(\mathscr{C}_\alpha)} & \text{如果 } g = R_n.\end{cases}$$

上式正好为下述方程在一给定直角坐标系中的描写：

$$\phi^*_\xi(P) = \begin{cases}\phi_\xi(g^{-1}P) & \text{如果 } g = C_n,\\ -\phi_\xi(g^{-1}P) & \text{如果 } g = R_n.\end{cases} \tag{32}$$

上式等号两边都为赝标量，故它在任何直角坐标系中都成立。由于上式中的 ξ 为 Ξ 的任一元素，故知经历变换 g 后，新多极系统的 M 函数为

$$\phi^*(P,\xi) = \begin{cases}\phi(g^{-1}P,\xi) & \text{如果 } g = C_n,\\ -\phi(g^{-1}P,\xi) & \text{如果 } g = R_n.\end{cases} \tag{33}$$

其次，令这个新多极系统再经历变换 v，则由(12)式可知，又得到另一个新多极系统，其 M 函数为

$$\phi^{**}(P,\xi) = \begin{cases}\phi(g^{-1}P,v^{-1}\xi) & \text{如果 } g = C_n,\\ -\phi(g^{-1}P,v^{-1}\xi) & \text{如果 } g = R_n.\end{cases} \tag{34}$$

由(34),(8),(14),(15)式可得下述命题：

命题 1　静磁多极系统的变换 $hv(h = C_n$ 或 $\tilde{R}_n)$ 对其 M 函数 $\phi(P,\xi)$ 诱导一个对应的变换 $T^*(hv)$ 如下：

$$T^*(C_nv) = T(C_nv),\quad T^*(\tilde{R}_nv) = T(R_nv), \tag{35}$$

其中算符 $T(g,v)$ 在文献[1,2]中已定义。

五、对称性群及约束关系

定义　变换 $hv(h = C_n$ 或 $\tilde{R}_n)$ 称为一给定静磁多极系统的对称变换，如果不管老多极系统的控制矢量取什么值，这变换不改变其导线、磁性物质及激励电流在 $\mathscr{R}$ 中的分布。这里不考虑上述分布中的次序情况。

当原点处的磁标势值规定为 0 后，一个静磁多极系统在区域 Ω 中产生的磁标势是由其导线、磁性物质及激励电流在 $\mathscr{R}$ 中的分布唯一决定的。因此，由命题 1 及上述静磁多极系统对称变换的定义，可得下述命题 2。

命题 2 静磁多极系统的对称变换 $hv(h=C_n$ 或 $\tilde{R}_n)$ 对其 M 函数诱导一个由(35)式所定义的对称变换.

从这里起,符号 $\sigma(p)$ 被简写成 p. 由文献[2]的定理及上述命题 2,得到下述定理:

定理 如果 hv 为某一静磁多极系统的一个对称变换,其中

$$h=C_n \text{ 或 } \tilde{R}_n, \tag{36}$$

$$v=\prod_{j=1}^{r}{}' p_j \prod_{\nu\in\langle p_j\rangle} N_\nu^{k_\nu}, \tag{37}$$

$p_1,\cdots,p_r\in S_\omega$ 为不相交轮换,满足

$$\bigcup_{j=1}^{r}\langle p_j\rangle=\{1,\cdots,\omega\}, \tag{38}$$

并且 $k_\nu=0$ 或 $1(\nu=1,\cdots,\omega)$, 则对每个 $\xi\in\Xi$, 有

$$(v^{-1}\xi)_\lambda=(-1)^{k_\lambda}\xi_{(p_j\lambda)} \qquad \lambda\in\langle p_j\rangle, \quad j=1,\cdots,r. \tag{39}$$

同时对每个 $m\in\{0,1,2,\cdots\}$, 在这多极系统的 m 次偏谐波势 $\Psi_{m1},\cdots,\Psi_{m\omega}$ 间成立下述约束关系:

(1) 当 $h=C_n$ 时,这些关系为

$$(-1)^{k_\lambda}\Psi_{m\lambda}\exp(i2m\pi/n)=\Psi_{m(p_j\lambda)}, \tag{40}$$

其中 $\lambda\in\langle p_j\rangle,\lambda=1,\cdots,r$;

(2) 当 $h=\tilde{R}_n$ 时,这些关系为

$$(-1)^{k_\lambda}\bar{\Psi}_{m\lambda}\exp(i2m\pi/n)=\Psi_{m(p_j\lambda)}, \tag{41}$$

其中 $\lambda\in\langle p_j\rangle,j=1,\cdots,r$. 这里,对任一复数 a 而言, $\bar{a}$ 为其共轭复数.

由(39)式,并将(12)与(1)式对比,可看出,由(37)式表示的变换 v 在物理上可如下实现,即简单地将每个变量 ξ_λ 代之以 $(-1)^{k_\lambda}\xi_{(p_j\lambda)}$, 其中 $\lambda\in\langle p_j\rangle,j=1,\cdots,r$.

由文献[2]可知,一个静磁多极系统在控制矢量为 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_\omega)$ 时的 m 次谐波势 Ψ_m 可表示如下:

$$\Psi_m=\sum_{\lambda=1}^{\omega}\xi_\lambda\Psi_{m\lambda}. \tag{42}$$

上述关于 Ψ_m 与 $\{\Psi_{m1},\cdots,\Psi_{m\omega}\}$ 的关系,当圆柱坐标系绕 z 轴转过任一个角度都不变.

由上述定理,仿照文献[3], 可以建立一个严格、普遍的简单方法,以便从一个静磁多极系统的对称性群出发,导出其谐波势的约束关系. 这一方法与文献[3]中给出的方法相比较,除去将静电多极系统的变换 R_n 及电谐波势 $\{\Phi_m,\Phi_{m1},\cdots,\Phi_{m\omega}\}$ 分别代之以静磁多极系统的变换 $\tilde{R}_n$ 及磁谐波势 $\{\Psi_m,\Psi_{m1},\cdots,\Psi_{m\omega}\}$ 外,其它不变.

[1] 李钰,数学物理学报, 8(1988),131.
[2] Li Yu, *Optik*, 75(1987), 8.
[3] Li Yu, *Optik*, 76 (1987), 48.
[4] J. D. Jackson, Classical Electrodynamics, 2nd Ed., John Weley Sons, New York, (1975).
[5] G. Arfken Mathematical Methods for Physicists 3rd Ed., Academic Press, Orlondo, (1985).
[6] W. Glaser, Grundlagen der Elektronenoptik, Springer, Wien, (1952).
[7] J. A. Schouten, Ricci-Calculus, 2nd Ed., (1954), p.5.

SYMMETRY GROUP AND HARMONIC POTENTIALS OF A MAGNETOSTATIC MULTIPOLE

Li Yu

Research Section of Applied Physics,

Shanghai Institute of Mechanical Engineering, Shanghai, 200093

(Received 1 April 1991)

ABSTRACT

In this paper, a magnetostatic multipole with a control vector is studied. The relation between the symmetry transformation of this multipole and that of its M-function is derived. A rigorous, general and simple method for deriving the constraints of the symmetry group of this multipole on its harmonic potentials has been set up.

PACC: 0220; 0240; 4180D