第41卷 第5期 物 理 学 报 Vol. 41, No. 5
1992 年 5 月 ACTA PHYSICA SINICA May, 1992

旋波近似和非旋波近似下Jaynes-Cummings模型中光场位相涨落*

李高翔 彭金生
华中师范大学物理系,武汉 430070

1991 年 6 月 10 日收到

本文讨论在旋波近似和非旋波近似下 Jaynes-Cummings(缩写为 J-C)模型中光场位相随时间的演化. 解析分析证明原子的 Rabi 振荡将导致相干光场的位相扩散, 虚光场的影响能够展现系统的量子噪声,并且使光场频率发生漂移.

PACC: 4250

一、引 言

由于 J-C 模型[1]是描述原子与辐射场相互作用的最简单和最典型的模型. 近年来, 对它已有极为广泛的研究[2-6]. 光场的相位特性是十分重要的物理特性, 然而以往关于原子与辐射场相互作用系统的研究中, 对光场位相随时间的演化行为[7]及其涨落却很少给予注意. 特别是还未曾有人探讨过虚光场效应[8-12](非旋波项)对相位涨落的影响.

本文依照 Barnett-Pegg 引入的位相理论[13-15,7],在旋波近似 (RWA) 和非旋波近似下,通过考察初始时处在相干态的单模光场与二能级原子相互作用系统 (相干态 J-C 模型[2])中,光场位相算符随时间演化的规律,证明原子 Rabi 振荡将导致相干光场的相位扩散,说明虚光场效应不仅能够展现系统的量子噪声,而且能使光场频率发生漂移.

二、旋波近似下,J-C 模型中光场的位相随时间的演化

在相互作用绘景中, 描述光场与二能级原子相互作用的 J-C 模型的 Hamiltonian, 在旋波近似下可表为

$$H = H_0 + V^I, \tag{1}$$

式中

$$H_0 = \omega a^+ a + \omega s_z, \tag{2}$$

$$V^I = g(as_+ + a^+ s_-), \tag{3}$$

式中算符 a^+ 和 a 表示频率为 ω 的光子的产生和湮没算符, g 为光场与原子的耦合常数. $s_z, s_\pm$ 为通常的本征频率为 ω 的二能级原子的赝自旋算符. 这里仅考虑光场频率与原子

* 国家自然科学基金资助的课题.

本征频率发生共振的情况。

如果在 $t = 0$ 时刻，原子处在激发态 $|a\rangle$，辐射场处于 $\sum_n F_n(0)|n\rangle$，即

$$|\psi_{af}(0)\rangle = \sum_n F_n(0)|a,n\rangle, \tag{4}$$

那么，在 t 时刻，系统的态矢随着时间的演化可展开为

$$|\psi_{af}^{I}(t)\rangle = \sum_n a_n(t)|a,n\rangle + b_n(t)|b,n\rangle。 \tag{5}$$

利用相互作用绘景中的 Schrödinger 方程，可得

$$a_n(t) = \frac{F_n(0)}{2}[e^{-i\gamma(n)t} + e^{i\gamma(n)t}], \tag{6}$$

$$b_{n+1}(t) = \frac{F_n(0)}{2}[e^{-i\gamma(n)t} - e^{i\gamma(n)t}], \tag{7}$$

式中

$$\gamma(n) = g\sqrt{n+1}$$

为与原子的 Rabi 频率有关的参数。把(6),(7)式代入(5)式，即确定在相互作用绘景中系统任意时刻的态矢，变换到 Schrödinger 绘景中得到

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}[a_n(t)|a,n\rangle + b_{n+1}(t)|b,n+1\rangle]\exp\left[-i\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega t\right]。 \tag{8}$$

按 Barnett-Pegg 理论[7,13-15]，定义完备和正交的光场位相本征态为

$$|\theta_m\rangle = (s+1)^{-1/2}\sum_{n=0}^{s}\exp(in\theta_m)|n\rangle, \tag{9}$$

式中　$\theta_m = \theta_0 + \frac{2\pi m}{s+1}$　　$m = 0,1,2,\cdots s,$ (10)

式中 θ_0 为一参考位相，$(s+1)$ 为位相本征态矢集张开的 **Hilbert 空间的维数。** 那么，光场的厄密位相算符可表示为

$$\hat{\phi}_0 = \sum_{m=0}^{s}\theta_m|\theta_m\rangle\langle\theta_m|。 \tag{11}$$

很明显，θ_m 为本征态矢 $|\theta_m\rangle$ 对应的本征值。于是，原子-光场耦合系统的态矢 $|\psi(t)\rangle$ 按光场位相本征态集展开的表达式可写为

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{m=0}^{s}\langle a,\theta_m|\psi\rangle|a,\theta_m\rangle + \langle b,\theta_m|\psi\rangle|b,,\theta_m\rangle, \tag{12}$$

式中 $|\langle a,\theta_m|\psi\rangle|^2 + |\langle b,\theta_m|\psi\rangle|^2$ 代表光场位相概率分布函数，因此在原子-光场耦合系统中，光场位相算符的平均值为

$$\langle\hat{\phi}_0^n\rangle = \sum_m \theta_m^n\{|\langle a,\theta_m|\psi\rangle|^2 + |\langle b,\theta_m|\psi\rangle|^2\} \quad (n = 1,2)。 \tag{13}$$

假设初始时辐射场处于相干态，即

$$F_n(0) = e^{-\bar{n}/2}\alpha^n/\sqrt{n!}, \tag{14}$$

式中 $\alpha = \bar{n}^{1/2}e^{i\xi}$;$\bar{n}$ 为平均光子数,ξ 为 α 的位相角. 如果 $\bar{n} \gg 1$,则光场呈 Guassian 分布[13-15]

$$F_n(0) \approx (2\pi\bar{n})^{-1/4}\exp[-(n-\bar{n})^2/4\bar{n}]e^{in\xi}. \tag{15}$$

若利用鞍点近似法[2],即

$$g\sqrt{n+1} \approx g\sqrt{\bar{n}+1} + \frac{g(n-\bar{n})}{2\sqrt{\bar{n}+1}} \approx g\sqrt{\bar{n}} + \frac{g(n-\bar{n})}{2\sqrt{\bar{n}}}, \tag{16}$$

那么光场位相概率分布函数为

$$\begin{aligned} P(\theta_m,t) &= |\langle a,\theta_m|\psi(t)\rangle|^2 + |\langle b,\theta_m|\psi(t)\rangle|^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{s+1}\right)\left(\frac{4\bar{n}}{2\pi}\right)^{1/2}\left\{\exp[-2\bar{n}(\xi-\theta_m-\omega t+gt/2\sqrt{\bar{n}})^2]\right. \\ &\quad \left.+\exp[-2\bar{n}(\xi-\theta_m-\omega t-gt/2\sqrt{\bar{n}})^2]\right\}. \end{aligned} \tag{17}$$

在连续谱极限下,即 $s\to\infty$ 时,θ_m 为连续变量,不难发现

$$\int P(\theta,t)\frac{s+1}{2\pi}d\theta = 1,$$

式中 $\frac{s+1}{2\pi}$ 为位相态密度[7,13-15].

如果在(17)式中考虑到 $\bar{n} \gg 1$ 时,$g/2\sqrt{\bar{n}} \ll \omega$,即忽略与原子 Rabi 振荡直接相联系的 $g/2\sqrt{\bar{n}}$,利用(13)式可求得光场位相随时间的演化规律

$$\langle\hat{\phi}\rangle = \int\theta P(\theta,t)\frac{s+1}{2\pi}d\theta = \xi - \omega t, \tag{18}$$

$$\langle\hat{\phi}^2\rangle = \int\theta^2 P(\theta,t)\frac{s+1}{2\pi}d\theta = (\xi-\omega t)^2 + 1/4\bar{n}. \tag{19}$$

从(18)式看到,光场位相以速率 ω 变化. 这时光场位相涨落为

$$\langle\Delta\hat{\phi}\rangle^2 = \langle\hat{\phi}^2\rangle - \langle\hat{\phi}\rangle^2 = 1/4\bar{n}. \tag{20}$$

由于 $\bar{n} \gg 1$,可以认为光子数分布仍然呈 Possion 分布[15],即 $\langle\Delta\hat{N}\rangle^2 = \bar{n}$. 那么

$$\langle\Delta\hat{\phi}\rangle^2\langle\Delta\hat{N}\rangle^2 = 1/4. \tag{21}$$

这表明,如果忽略原子 Rabi 振荡频率对光场位相概率分布的影响,则初始时的相干光场在时间演化过程中仍然保持为光子数-位相最小测不准态,即仍为相干光场.

但是,如果在(17)式中不忽略 $g/2\sqrt{\bar{n}}$,即考虑原子 Rabi 振荡对光场位相概率分布函数的影响,则

$$\langle\hat{\phi}^2\rangle = (\xi-\omega t)^2 + 1/4\bar{n} + g^2t^2/4\bar{n}, \tag{22}$$

而 $\langle\hat{\phi}\rangle$ 仍然满足(18)式,于是光场位相涨落为

$$\langle\Delta\hat{\phi}\rangle^2 = \frac{1}{4\bar{n}} + g^2t^2/4\bar{n}. \tag{23}$$

这时,光子数-位相测不准关系变为

$$\langle\Delta\hat{\phi}\rangle^2\langle\Delta\hat{N}\rangle^2 = 1/4 + g^2t^2/4. \tag{24}$$

可以看出,随着时间的演化,光场的位相涨落增大,此时光场不再保持为光子数-位相最小测不准态[16]. 从(20),(23)式可以看到,导致光场位相涨落增大的原因是原子与光场相互

作用造成原子的 Rabi 振荡.

对于光场为混沌光场的情况,此时光场位相涨落值最大[13,14],其值为$\langle\Delta\hat{\phi}\rangle^2_{max}=\pi^2/3$.发现

$$t=\frac{2\pi\bar{n}^{1/2}}{\sqrt{3}\,g}=T_r/\sqrt{3}<T_r \tag{25}$$

时，J-C 模型中光场的位相涨落由于原子 Rabi 振荡的影响达到最大值，这时光场变为混沌光场. T_r 为原子粒子布居差呈现出周期崩塌-回复现象的回复周期[2].

这里需要指出,上述研究与近期关于光场位相理论的文献[7]有一些明显不同. 比较本文与文献[7]中的光场位相平均值发现两者相差 ωt. 从文献[7]中的(23)式可以看到,光场位相涨落 $\langle\Delta\phi\rangle^2_{max}\rangle\pi^2/3$，这一结果显然与 Barnett 等人关于光场位相涨落最大值为 $\pi^2/3$[13,14] 这一结论矛盾. 造成这些矛盾的原因是文献[7]中的(12)式是相互作用绘景中的态矢,而其中(20)式中的 $\hat{\phi}_\theta$ 和(23)式中的 $\hat{\phi}^2_\theta$ 却是 Schrödinger 绘景中的算符,两者不在同一绘景中计算,故前后结论相矛盾. 由于本文的态矢和算符都是在 Schrödinger 绘景中,故本文关于光场位相涨落的结论((20),(23)式)不仅精确,而且与文献[13,14]也没有矛盾. 另外,还值得指出的是,文献[7]中认为，光场位相概率分布函数 $P_+(\theta,t)=P_-(\theta,t)$ 是原子粒子布居差出现回复现象的直接原因,这一结论是在相互作用绘景中提出的. 但如果考虑 Schrödinger 绘景中的位相概率分布函数，文献[7]中的(22)式应变为

$$P^s_\pm(\theta,t)=\frac{1}{2\pi}\left(1+2\sum_{n,k}b_nb_k\cos[(n-k)(\theta+\omega t)\mp(\sqrt{n}-\sqrt{k})gt]\right).$$

不难发现,不仅在 $t=T_r$ 时，$P^s_+(\theta,t)=P^s_-(\theta,t)$，而且在 $\omega t=\frac{m\pi}{n-k}-\theta$ ($m=0,\pm1,\pm2,\cdots$) 处也有 $P^s_+(\theta,t)=P^s_-(\theta,t)$. 但在这些时间粒子布居差并不出现回复现象. 这表明文献[7]中提出的光场位相概率分布函数 $P_+(\theta,t)=P_-(\theta,t)$ 是原子粒子布居差出现回复现象的直接原因这一结论的依据并不充分.

三、非旋波近似下,光场的位相随时间的演化

虚光子过程反映在 J-C 模型中的非旋波近似项中[6,9-12]为考察虚光子过程在二能级原子与辐射场相互作用系统中对光场位相的影响,必须计及非旋波项.

在相互作用绘景中,与单模辐射场相互作用的二能级原子的 Hamiltonian 在非旋波近似下可写为

$$H=V^1+H_0. \tag{26}$$

但这里

$$H_0=\omega s_z+\omega a^+a, \tag{27}$$

$$V^1=g(as_++a^+s_-+a^+s_+e^{2i\omega t}+as_-e^{-2i\omega t}), \tag{28}$$

式中 g,a,a^+,s_z 和 $s_\pm$ 的意义与前述相同. 这里也只考虑光场频率与原子本征频率共振的情况.

将相互作用绘景中的原子-光场耦合系统的态矢(5),(28)式代入 Schrödinger 方程,得到

$$i\dot{a}_n = g(\sqrt{n+1}\,b_{n+1} + \sqrt{n}\exp(2i\omega t)b_{n-1}), \tag{29}$$

$$i\dot{b}_{n+1} = g(\sqrt{n+1}\,a_n + \sqrt{n+2}\exp(-2i\omega t)a_{n+2}). \tag{30}$$

不难看到,(29),(30)式等号右边第二项直接反映虚光子过程对 $a_n(t)$ 和 $b_{n+1}(t)$ 的影响. 利用逐级迭代理论[17]作为近似,将(6),(7)式代入(29),(30)式,并且只精确到 g/ω 的一次幂项,得到

$$\begin{aligned} a_n(t) = {} & \frac{F_n(0)}{2}\left[\exp(i\gamma(n)t) + \exp(-i\gamma_{(n)}t)\right] \\ & + \frac{g\sqrt{n-2}}{2}F_{n-2}(0)\left\{\frac{\exp[i(2\omega + g\sqrt{n-1})t]-1}{2\omega + g\sqrt{n-1}}\right. \\ & \left. - \frac{\exp[i(2\omega - g\sqrt{n-1})t]-1}{2\omega - g\sqrt{n-1}}\right\}, \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} b_{n+1}(t) = {} & \frac{F_n(0)}{2}\left[\exp(-i\gamma_{(n)}t) - \exp(i\gamma_{(n)}t)\right] \\ & + \frac{g\sqrt{n+2}}{2}F_{n+2}(0)\left\{\frac{\exp[-i(2\omega - g\sqrt{n+3})t]-1}{2\omega - g\sqrt{n+3}}\right. \\ & \left. + \frac{\exp[-i(2\omega + g\sqrt{n+3})t]-1}{2\omega + g\sqrt{n+3}}\right\}. \end{aligned} \tag{32}$$

从(31),(32)式可以看到,如果辐射场很强,即光子数很大,那么

$$g\sqrt{n}/(2\omega \pm g\sqrt{n-1}),\quad g\sqrt{n+2}/(2\omega \pm g\sqrt{n+3}),$$

就不再是一个小量,这时旋波近似不再合理. 为处理问题方便,在这里假设

$$g\sqrt{n}/(2\omega \pm g\sqrt{n-1}),\quad g\sqrt{n+2}/(2\omega \pm g\sqrt{n+3})$$

不是一个很大的量,这时可以采用逐级迭代理论. 将(31),(32)式代入(8)式,从而确定 Schrödinger 绘景中系统的态矢.

按前面同样的步骤,忽略 $g/2\omega$ 的二次幂项,在 $\bar{n} \gg 1$ 时,可以得到初始为相干态的光场位相概率分布函数为

$$\begin{aligned} P(\theta,t) = {} & \frac{1}{2}A\left(\frac{2\pi}{s+1}\right)\left(\frac{4\bar{n}}{2\pi}\right)^{1/2}\{\exp[-2\bar{n}(\xi-\theta-\omega t+gt/2\sqrt{\bar{n}})^2] \\ & + \exp[-2\bar{n}(\xi-\theta-\omega t-gt/2\sqrt{\bar{n}})^2] \\ & - \frac{g\sqrt{\bar{n}}}{\omega}\cos(2\xi + g\sqrt{\bar{n}}\,t)\exp\{-\bar{n}[(\xi-\theta-\omega t+gt/2\sqrt{\bar{n}})^2 \\ & + (\xi-\theta-\omega t)^2]\} \\ & + \frac{g\sqrt{\bar{n}}}{\omega}\cos(2\xi - g\sqrt{\bar{n}}\,t)\exp\{-\bar{n}[(\xi-\theta-\omega t-gt/2\sqrt{\bar{n}})^2 \end{aligned}$$

$$+(\xi-\theta-\omega t)^2]\}$$

$$-2\frac{g\sqrt{\bar{n}}}{\omega}\sin 2(\omega t-\xi)\sin 2g\sqrt{\bar{n}}\,t\exp\{-\bar{n}[(\xi-\theta-\omega t-gt/2\sqrt{\bar{n}})^2$$

$$+(\xi-\theta-\omega t+gt/2\sqrt{\bar{n}})^2]\}\},\tag{33}$$

式中

$$A=1-\frac{g\sqrt{\bar{n}}}{\omega}\exp\left(-\frac{1}{8}g^2t^2\right)\sin 2\xi\sin g\sqrt{\bar{n}}\,t$$

$$+\frac{g\sqrt{\bar{n}}}{\omega}\sin 2g\sqrt{\bar{n}}\,t\exp\left(-\frac{1}{2}g^2t^2\right)\tag{34}$$

为概率归一化因子.

利用(13),(34)式,精确到 g/ω 的一次幂项，可以求得光场位相函数随时间的演化

$$\langle\hat{\phi}\rangle=\xi-\omega t+\frac{g^2t}{4\omega}\exp\left(-\frac{1}{8}g^2t^2\right)\cos 2\xi\cos g\sqrt{\bar{n}}\,t,\tag{35}$$

$$\langle\hat{\phi}^2\rangle=(\xi-\omega t)^2+\frac{1}{4\bar{n}}+\frac{g^2t^2}{4\bar{n}}+\frac{g^2t}{2\omega}(\xi-\omega t)\exp\left(-\frac{1}{8}g^2t^2\right)\cos 2\xi\cos g\sqrt{\bar{n}}\,t$$

$$+\frac{g^2t^2}{4\bar{n}}\frac{3}{4}\frac{g\sqrt{\bar{n}}}{\omega}\left[\exp\left(-\frac{1}{2}g^2t^2\right)\sin 2g\sqrt{\bar{n}}\,t\sin 2(\omega t-\xi)\right.$$

$$\left.-\exp\left(-\frac{1}{8}g^2t^2\right)\sin g\sqrt{\bar{n}}\,t\sin 2\xi\right].\tag{36}$$

于是光场的位相涨落为

$$\langle\Delta\hat{\phi}\rangle^2=\frac{1}{4\bar{n}}+\frac{g^2t^2}{4\bar{n}}+\frac{g^2t^2}{4\bar{n}}\frac{3g\sqrt{\bar{n}}}{4\omega}\left[\exp\left(-\frac{1}{2}g^2t^2\right)\sin 2g\sqrt{\bar{n}}\,t\sin 2(\omega t-\xi)\right.$$

$$\left.-\exp\left(-\frac{1}{8}g^2t^2\right)\sin g\sqrt{\bar{n}}\,t\sin 2\xi\right].\tag{37}$$

从(35)—(37)式可以看到,在光场位相函数中出现 g/ω 的一次幂项,这些项的出现是由于在态函数中考虑了虚光场的效应(非旋波项的效应). 非旋波项（虚光子过程）和旋波项(实光子过程)的相互干涉导致光场位相函数中出现小的起伏，这些起伏反映了系统的量子噪声. 即在旋波近似下不能描述系统的量子噪声，而在非旋波近似下明显地展现出来.量子噪声的大小与耦合常数 g、平均光子数 $\bar{n}$、共振频率 ω 及位相角 ξ 有关.这表明，量子噪声由原子和辐射场共同决定,这一结论与文献 [6]结论一致. 特别是把(37)式与(23)式相比可见,光场位相涨落不仅与原子-光场耦合常数 g、光场平均光子数 $\bar{n}$ 有关，而且还与光场的角频率 ω、初位相角 ξ 明显相关. 所以不同频率、不同初位相的光场，与原子相互作用时,即使具有相同的光强和耦合常数,由于虚光场效应，它们的位相涨落会明显地不同. 可见,在 J-C 模型中，考虑虚光场效应后其光场位相涨落不仅与光场的强度性质有关,而且还依赖于其位相性质[12].

此外,与在旋波近似情况下(18)式的结果不同,由(35)式知，$d\langle\phi\rangle/dt\approx-\omega$，这表明光场频率发生漂移,其数值由原子-光场耦合系统的性质决定. 产生漂移的原因是由于

旋波项(实光子过程)和非旋波项(虚光子过程)的干涉效应. 虚光子效应不仅会导致原子能级发生漂移[8,9], 而且还会使光场频率发生漂移.

四、结 论

本文讨论了旋波近似和非旋波近似两种情况下,相干态 J-C 模型中光场位相随时间的演化规律. 解析分析表明,在旋波近似下,原子的 Rabi 振荡使得初始为相干态的光场不再保持其光子数-位相最小测不准性质. 虚光场的影响导致光场位相出现小的起伏,表现为系统的量子噪声,位相涨落不仅由光场强度性质决定,而且由光场位相性质决定. 并且发现,虚光场效应使光场频率发生漂移.

[1] E. T. Jaynes, F. W. Cummings, *Proc. IEEE*, **51**(1963), 89.
[2] J. H. Eberly, N. B. Narozhy, J. Scanchez-Mondragon, *Phys. Rev. Lett.*, **40**(1980), 1323.
[3] G. Rempe, H. Walther *et, al., Phys. Rev Lett.*, **58**(1987), 353.
[4] G. Compagno, Jinsheng Peng, F. Persico, *Opt. Commun.*, **57**(1986), 415.
[5] 周鹏、彭金生,物理学报,**38**(1989),2044
[6] 彭金生、李高翔、周鹏,物理学报,**40**(1991),1042。
[7] H. T. Dung, R. Tanas, A. S. Shumovsky, *Opt. Commum.*, **79**(1990), 462.
[8] X. Y. Huang, Jinsheng Peng, *Phys. Scr.*, **T21**(1988), 100.
[9] G. Compagno, R. Passante, F. Persico, *J. Mod. Opt.*, **37**(1990), 1337.
[10] G. Compagno, G. M. Palma, R. Passante, F. Persico, *Europhys. Lett.*, **9**(1989), 215.
[11] A. K. Biswas, G. Compagno, G. M. Palma, R. Passante, F. Persico, *Phys. Rev.*, **A42**(1990), 4291.
[12] S. J. D. Phoenix, *J. Mod. Opt.*, 36(1989), 1163.
[13] S. M. Barnett, D. T. Pegg, *J. Mod. Opt.*, **36**(1989), 7.
[14] D. T. Pegg, S. M. Barnett, *Phys. Rev.*, **A39**(1989), 1665.
[15] C. C. Gery, *Opt. Commum.*, **75**(1990), 168.
[16] F. W. Cummings, *Phys. Rev.*, **A140**(1965), 1051.
[17] W. H. Louisell, Quantum Statistical Properties of Radiation, John Wiely, (1973).

PHASE FLUCTUATIONS IN JAYNES-CUMMINGS MODEL WITH AND WITHOUT ROTATION WAVE APPROXIMATION

LI GAO-XIANG　PENG JIN-SHENG

Department of Physics, Huazhong Normal University, Wuhan 430070

(Received 10 June 1991)

ABSTRACT

In this paper, we have respectively investigated the time evolution of the phase operator of radiation field in the Jaynes-Cummings model with and without RWA. We verified that the atomic Rabi oscillation leads to the phase dissipation of radiation field by analytical method, and the effect of virtual field can exhibit the quantum fluctuations of system and leads to the frequency shift of radiation field.

PACC: 4250