第 44 卷 第 12 期
1995 年 12 月

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 44, No. 12
Dec., 1995

单向光折变环形振荡器的分岔与混沌行为

庄 军
(中国科学院上海光学精密机械研究所，上海 201800)

谭维翰
(上海科学技术大学物理系，上海 201800)

(1994 年 6 月 14 日收到)

当两束光在电光晶体中传输时，由于光折变效应，它们将相互耦合，从而使得其中一束光的能量得到放大。本文在此基础上给出了单向光折变环形振荡器的振荡方程，并通过数值模拟进行了分析，发现在小失谐情况下，系统工作是稳定的；而当失谐量超过一定数值时，将出现分岔与混沌行为.

PACC: 4260; 4265.

1 引 言

目前，对电光效应中光折变效应的研究越来越深入，例如光折变晶体中两波相互作用在高调制深度情况下的能量耦合[1]，多光束相互作用时的能量转换[2,3]，以及四波耦合过程中的不稳定与混沌行为[4]等等. 以光折变晶体为增益介质的环形振荡器自从在 $BaTiO_3$ 晶体中获得成功以来[5]，进行了大量的实验研究工作，实验发现，由于光折变增益介质对光的放大过程与一般激光增益介质有所不同，使得光折变振荡器具有一些新的特点，例如一定条件下，多横模竞争的周期遨游行为[6]，横向奇点的出现及横向空间湍流等等[7].

对于光折变振荡器的理论研究，人们已初步给出了稳态输出的有关参量，但其中并未考虑谐振腔的线宽，也未能给出定态点附近的稳定特性. 本文首先从光折变晶体中两波相互耦合的方程出发，建立迭代形式的振荡方程；然后通过解析和数值计算的方法给出相应的定态值；并且研究了其稳定特性，发现当失谐量较大时，系统将出现分岔与混沌行为.

2 光折变振荡器的迭代方程

两束光在电光晶体中传输时所产生的干涉花样，由于光折变效应，将在晶体中形成一相应的折射率光栅[8]. 当满足一定条件时，其中一束光(抽运光)的能量将传换给另一束光(信号光)，由此可实现信号光在谐振腔中的振荡.

如图 1 是以光折变晶体为增益介质的环形振荡器，腔长为 L，晶体长度为 l，两束光的波矢 $\boldsymbol{K}_1, \boldsymbol{K}_2$ 的夹角为 2θ，z 轴在其平分线上.

在晶体中，如把电场强度写为

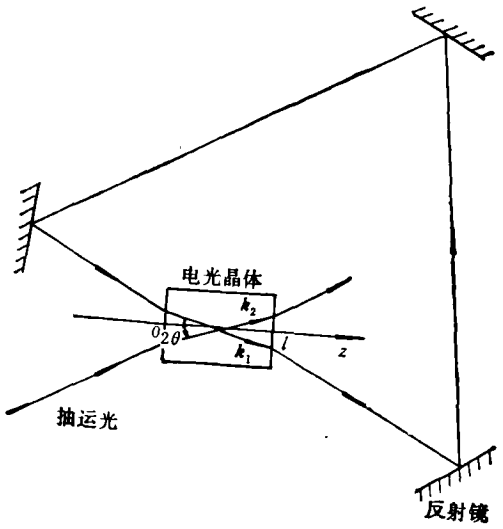


图 1 单向光折变环形振荡器

$$E_i = A_i(r)\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{K}_i \cdot \boldsymbol{r} - \omega_i t)] + \mathrm{c.c.},$$
$$A_i(\boldsymbol{r}) = \sqrt{I_i}\exp(\mathrm{i}\phi_i), \tag{1}$$

其中 i 取 1,2 分别代表抽运光和信号光,则在弱调制近似下[8],相应的折射率光栅为

$$n = n_0 + \frac{n_1}{2}\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\frac{A_1 A_2^*}{I_0}\exp\left[\mathrm{i}(\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r} - \delta_1 t)\right] + \mathrm{c.c.}\right\}, \tag{2}$$

其中 $I_0 = I_1 + I_2 = |A_1|^2 + |A_2|^2$, $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_1 - \boldsymbol{K}_2$, $\delta_1 = \omega_1 - \omega_2$, ϕ 是折射率光栅相对干涉花样的相移,它可写为[9]

$$\phi = \phi_0 + \arctan(\delta_1\tau), \tag{3}$$

n_1 为

$$n_1 = \frac{2}{(1+\delta_1^2\tau^2)^{\frac{1}{2}}}\Delta n_s, \tag{4}$$

其中 τ 是晶体的响应时间, Δn_s 是光折变饱和常数, 它依赖于光栅常数和晶体材料的性质, ϕ_0 在不加外电场的晶体中为 $\pm\pi/2$ 符号由光轴方向决定. 在缓变近似下, 由 Maxwell 方程出发,并利用(1)和(2)式,可得两波在晶体中的耦合方程[10], 进而可写出信号光在谐振腔中振荡的迭代公式

$$I_{n+1} = \frac{I_n(I_n+1)}{I_n + \mathrm{e}^{-\gamma l}}\mathrm{e}^{-\alpha l}R\rho(\Delta\phi_n), \tag{5}$$

$$\Delta\phi_n = -\frac{\beta}{\gamma}\ln\left(\frac{I_n+1}{I_n+\mathrm{e}^{-\gamma l}}\right), \tag{6}$$

其中 $I_n = I_2(0)/I_1(0)$, $I_2(0)$, $I_1(0)$ 分别代表 $z=0$ 时的信号光和抽运光的强度, R 是腔的反射率, α 是晶体的损耗因子, $\Delta\phi_n$ 是信号光通过增益介质所引起的附加相位(这里的附加相位相对于没有耦合的情况). γ, β 分别为

$$\gamma = \frac{2\pi n_1}{\lambda\cos\theta}\sin\phi,\ \beta = \frac{\pi n_1}{\lambda\cos\theta}\cos\phi, \tag{7}$$

其中 $\lambda \approx \lambda_1 \approx \lambda_2$，当 $\phi_0 = \pi/2$ 时，$\beta/\gamma = \delta_1\tau/2$。$\rho(\Delta\phi_n)$ 是描写信号光在放大过程中由于失谐而带来的损耗，即考虑了腔的线宽。如果定义腔的失谐 δ_2 为

$$\delta_2 = 2n\pi - \int_L k\mathrm{d}s, \tag{8}$$

n 取正整数，则有 Fabry-Perot 腔理论，$\rho(\Delta\phi_n)$ 可写为

$$\rho(\Delta\phi_n) = \frac{1}{1 + F\sin^2\left(\dfrac{\delta_2 + \Delta\phi_n}{2}\right)}, \tag{9}$$

F 为精细结构常数。(5),(6)和(9)式则为光折变振荡器的振荡方程。值得一提的是，由(6)式可知光强的变化直接影响光场的附加相位，而附加相位的变化通过(9)式又回过去影响光强。后面将看到正是由于这种相互作用才导致了分岔、混沌行为。

3　迭代方程的数值模拟与分析

3.1　稳态情况

在分析定态点附近的稳定特性之前，必须给出相应的定态值，由(5)，(6)和(9)式可知，它们应由下式确定：

$$1 = \frac{I^{st} + 1}{I^{st} + \mathrm{e}^{-\alpha l}}\mathrm{e}^{-\alpha l}R\rho(\Delta\phi^{st}), \tag{10}$$

$$\Delta\phi^{st} = -\frac{\beta}{\gamma}\ln\left(\frac{I^{st} + 1}{I^{st} + \mathrm{e}^{-\gamma l}}\right), \tag{11}$$

$$\rho(\Delta\phi^{st}) = \frac{1}{1 + F\sin^2\left(\dfrac{\delta_2 + \Delta\phi^{st}}{2}\right)}. \tag{12}$$

从上式可知，由于腔的线宽，当其它参数给定后，I^{st} 随信号光的频率 ($\delta_1\tau = (\omega_1 - \omega_2)\tau$) 不同而变化，而如只考虑单个频率振荡的情况，则竞争到最后的信号光频率应该是最大定态光强 I^{st}_{max} 所对应的频率 ($\delta_1\tau_{max}$)，即满足

$$\frac{\mathrm{d}I^{st}}{\mathrm{d}\delta_1\tau} = 0. \tag{13}$$

(10)式等号右端前面部分是描写介质的增益，如令 $g(I^{st},\delta_1\tau) = \dfrac{I^{st} + 1}{I^{st} + \mathrm{e}^{-\gamma l}}$，则在两边对 $\delta_1\tau$ 求导可得

$$0 = \rho(\Delta\phi_n)\frac{\mathrm{d}g(I^{st},\delta_1\tau)}{\mathrm{d}\delta_1\tau} + g(I^{st},\delta_1\tau)\frac{\mathrm{d}\rho(\Delta\phi_n)}{\mathrm{d}\delta_1\tau}. \tag{14}$$

注意到(4)和(7)式并利用(13)式有 $\mathrm{d}g(I^{st},\delta_1\tau)/\mathrm{d}\delta_1\tau \propto \delta_1\tau$，而在小失谐(近共振)的情况下，$\mathrm{d}g(I^{st},\delta_1\tau)/\mathrm{d}\delta_1\tau \approx 0$，所以(14)式成为 $\mathrm{d}\rho(\Delta\phi_n)/\delta_1\tau = 0$，由(12),(11)和(7)式则得

$$\delta_2 + \Delta\phi^{st} = 0.$$

再结合(10),(11)和(7)式，可给出近共振区域内定态信号光强度 I^{st}_{max} 和频率 $\delta_1\tau_{max}$ 分别为

$$I''_{max}=\frac{e^{-\alpha l}R-e^{-\gamma l}}{1-e^{-\alpha l}R}, \tag{15}$$

$$\delta_1\tau_{max}=\frac{2\delta_2}{\alpha l-\ln R}. \tag{16}$$

为验证上述分析,对(10)—(12)式进行了数值计算,给出 I''-$\delta_1\tau$ 曲线. 图 2(a) 为共振情况 $\delta_2=0$,图 2(b) 中的 $\delta_2=0.05$,其它参数, 参照文献[1,10]分别取为: $\lambda=632.8$ nm, $l=5$mm,$\alpha=52$,$\theta=0.02$,$R=0.95$,$\Delta N_s=0.00001$,由图 2 中可得信号光的定态光强为 $I''_{max}=1.35$, 频率为 $\delta_1\tau_{max}=0$, 与由(15),(16)式给出的结果完全一致; 而图 2(b) 中相应的定态光强和频率分别为 $I''_{max}=1.221$,$\delta_1\tau_{max}=0.315$,,另外由(15),(16)式所得的结果为 $I''_{max}=1.218$,$\delta_1\tau_{max}=0.321$, 可见两者符合得较好. 后面将会看到当 δ_2 较大时,两者则相差很大. 因此,当考虑了腔的线宽后,(15),(16)式仅适用于近共振的情况.

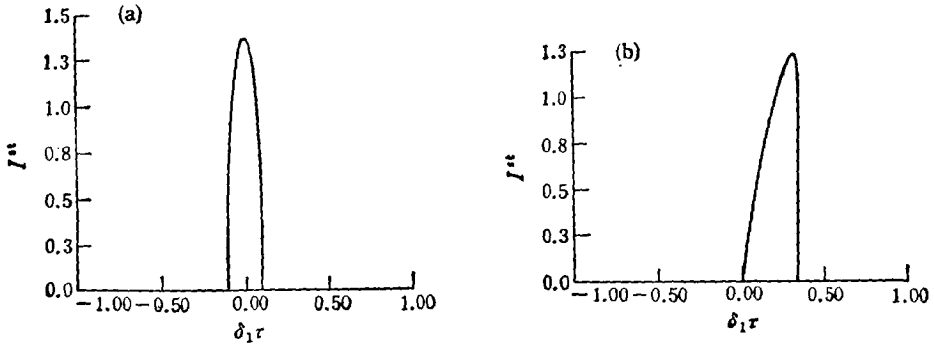


图 2 (a) 共振情况, (b) 近共振情况时的定态光强 I'' 与频率 $\delta_1\tau$ 的关系

另外,当失谐不大时,由(15),(16)式给出的定态值是稳定的. 事实上,在这种情况下迭代方程(5),(6)和(7)可近似简化为

$$I_{n+1}=\frac{I_n(I_n+1)}{I_n+e^{-\gamma l}}e^{-\alpha l}R, \tag{17}$$

$$\Delta\phi_n=-\frac{\beta}{\gamma}\ln\left(\frac{I_n+1}{I_n+e^{-\gamma l}}\right). \tag{18}$$

显然上述方程将最终收敛在定态,直接对(5), (6)和(9)式的数值模拟也证明了这一点. 而比较(5),(6),(9)和(17)、(18)式可知: 在近共振条件下, 信号光的附加相位与光强之间的相互作用可以忽略,这正是系统稳定的内在原因.

3.2 失谐较大时的分岔与混沌

正象前面提到的,(15),(16)式只能近似地给出小失谐情况的定态值. 当失谐量较大时,(14)式中的 $dg(I'', \delta_1\tau)/d\delta_1\tau$ 不能忽略, 其物理意义是: 介质 ($g(I'', \delta_1\tau)$) 与腔 ($\rho(\Delta\phi_n)$) 此时将共同决定最终的信号光频率, 在这种情况下只能通过数值计算给出 I''_{max},$\delta_1\tau_{max}$ 的值. 图 3 则为 $\delta_1\tau$-I'' 曲线,其失谐量 $\delta_2=0.5$, 其它参数为 $l=5$ mm, $\alpha=52$,$\theta=0.02$.$R=0.92$,$\Delta n_s=0.00004$,与小失谐情况(图 2(a),(b)) 相比, 有两个

明显的不同：其一是最大的定态光强 I''_{max} 及对应的频率 $\delta_1\tau_{max}$ 确实与(15)，(16)式给出的值不相符，其二是线宽大为增加，其原因在于光折变放大介质中存在着附加相位。

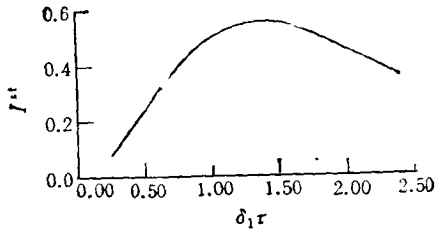


图 3　失谐较大时的定态光强 I'' 与频率 $\delta_1\tau$ 的关系

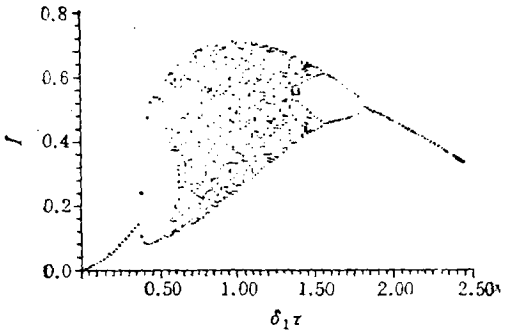


图 4　图 3 中所给出的各定态点 $(I'',\delta_1\tau)$ 附近的稳定特性

图 3 中给出的定态光强与频率纯粹是由(10)—(12)式计算得到的，因此其稳定特性还需作进一步数值模拟。我们把所得的定态值代入(5)，(6)和(9)式进行迭代。图 4 给出图 3 中不同频率的定态点附近 $(I''\delta_1\tau)$ 的稳定特性，可见在相当一段频率范围内系统是不稳定的。图 5 是对不同的 Δn_s，在 I''_{max}，$\delta_1\tau_{max}$ 附近的稳定特性图，随光折变饱和常数 Δn_s 的增加系统出现分岔，混沌行为。图 5 中的参数同图3。图 6 是图 5 中 Δn_s 取 0.0000375 时，光强与时间的关系曲线，从图 6 中可以看到它实质上对应图 5 中的四分岔周期结构，表现为四种不同的光强(状态)随时间遨游，另外图 6 中考虑了晶体的响应时间 τ，也就是说如果在某一时刻 t，系统处在状态 1 上，则只有当 $t+T>\tau$ 时 (T 的含义参见图 6)，系统才可能跳到状态 2 上，以此类推。当然，实际情况中晶体的响应是连续的，因此图 6 只是时间 T 尺度上平均结果。如果进一步增加 Δn_s，则光强随时间的变化逐步进入无周期状态，即对应图 5 中的混沌区。

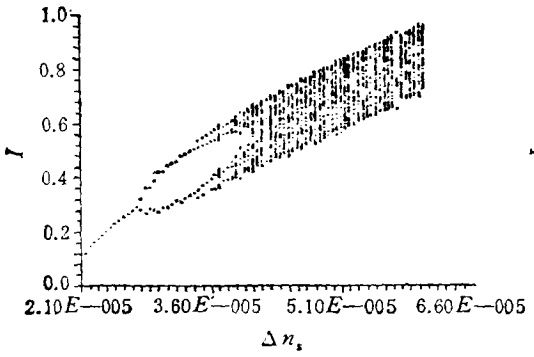


图 5　不同的 Δn_s 所对应的定态点 $I''_{max},\delta_1\tau_{max}$ 附近的分岔和混沌行为

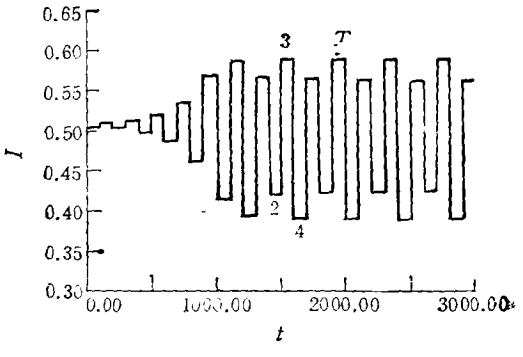


图 6　Δn_s 取 0.0000375 时，信号光强度 I 与时间 t 的关系

4 结 论

我们建立了单向光折变环形振荡器在定态附近的振荡方程. 在小失谐的情况下，系统是稳定的，并且定态信号光强度和频率可分别由(15),(16)式近似给出；而当失谐量较大时，则只能通过数值计算来确定，并且在一定的定态点附近系统将随 Δn_s 的增加而出现分岔与混沌行为，表现在光强上则出现强度周期遨游的现象. 而出现不稳定的本质原因则是信号光强度与附加相位之间的相互作用.

最后，需指出文献[11]中，作者把实验中观察到的信号光横向周期遨游归结为由于外界空气扰动，从而改变光场相位(即偏离共振状态)使其从一个横模跳到另一个横模，而单模情况则表现为光强变化. Arecchi 目前对光折变振荡器作了进一步的实验[6]，并认为以上的横模不稳定现象是一种混沌遨游，即是系统所固有的. 这正是本文分析的出发点，虽然是对不考虑横向效应的单模进行的，但图 6 所示的单模光强遨游现象很可能与横模遨游有一定的联系，这还有待于更深入的研究.

[1] Chong Hoon Kwak, Seo Yeon Park, Jong Sool Jeong, Ho Hyung Suh and El-Hang Lee, *Opt. Commun.*, **105** (506) (1994), 353.

[2] V. Gusmeroli, C. Mariottini and M. Martinelli, *Opt. Commun.*, **77** (1990), 359.

[3] Mordechai Segv, Yoav Ophir and Baruch Fischer, *Opt. Commun.*, **77** (2, 3) (1990), 265.

[4] Milivoj Belic, Dejan Timotijevic, *Opt. Commun.*, **96** (4,5,6). (1993), 283.

[5] J. O. White, M. Cronin-Golomb, B. Fischer and A. Yariv., *Appl. Phys. Lett.*, **40** (1982), 450.

[6] F. T. Arecchi, G. Giacomelli, P. L. Ramazza and S. Residori, *Phys. Rev. Lett.*, **65** (1990), 2531.

[7] F. T. Arecchi, G. Giacomelli, P. LRamazza and S. Residori, *Phys. Rev. Lett.*, **67** (1991), 3749.

[8] N. V. Kukhtarev, V. B. Markov, S. G. Odulov, M. S. Soskin and V. L. Vinetskii, *Ferroelectrics*, **22** (1979), 949.

[9] J. P. Huignard and A. Marrackchi, *Opt. Commun.*, **38** (1981), 249.

[10] Pochi Yeh, *J. Opt. Soc. Am.*, **B2** (1985), 1924.

[11] Jean-Louis de Bougrenet de la Tocnaye and Pierre Pellat-Finet, Jean-Pierre Huignard, *J. Opt. Soc. Am.*, **B3** (1986), 315.

BIFURCATION AND CHAOS OF UNIDIRECTIONAL PHOTOREFRACTIVE RING OSCILLATORS

ZHUANG JUN

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica, Shanghai 201800)

TAN WEI-HAN

(Department of Physics, Shanghai University of Science and Technology, Shanghai 201800)

(Received 14 June 1994)

ABSTRACT

Owing to holographic two-wave mixing in photorefractive crystals, one of the waves can be amplified. From this fact, we give the oscillatory equations of unidirectional photorefractive ring oscillator and find it works stably in the small detuning domain by numerical calculation; With the increased detuning, on the other hand, bifurcation and chaos phenomena appear under certain condition.

PACC: 4260; 4265