第44卷 第2期 物 理 学 报 Vol. 44, No. 2
1995 年 2 月 ACTA PHYSICA SINICA Feb., 1995

二次型含时间的谐振子系统的压缩态和压缩相干态*

许晶波 刘宜昌 高孝纯
(浙江大学物理系,杭州 310027)

(1993年8月16日收到)

利用演化算符方法研究了最一般的二次型含时间的谐振子系统的时间演化和压缩态问题. 进一步讨论了脉动质量的受迫谐振子系统的压缩态和高 n 压缩态. 最后, 构造了在时间演化过程中保持最小测不准关系的压缩相干态和高 n 压缩相干态.

PACC: 4250;0365

1 引 言

自从 Glauber[1] 在量子光学中引入相干态概念以来,相干态已被广泛应用于物理学的各个领域[2],并为解决各种物理问题提供了有力的工具.压缩光的概念理论上在1979年就已提出,但直到1985年, 它才第一次从实验室中产生. 由于辐射场的压缩效应在光通讯和引力波测量等方面具有潜在的应用价值, 压缩态[3]的研究一直是量子光学中理论和实验都极为关注的研究方向. 近几年, 与含时间的哈密顿系统相联系的相干态和压缩态的研究逐渐引起了人们的兴趣[4-6]. 人们利用各种方法研究了一些质量和频率随时间变化的谐振子系统的相干态、压缩态及其时间演化问题,发现质量或频率的变化均可产生压缩效应. 但由频率或质量随时间变化的谐振子所产生的压缩态一般不再保持最小测不准关系[4-6]. 最近, 高 n 压缩态的研究也开始引起人们的注意[8,9]. 本文利用演化算符方法研究了最一般的二次型含时间的谐振子系统的演化和压缩态问题. 求出了脉动质量的谐振子的时间演化算符,讨论了此系统的压缩态和高 n 压缩. 值得指出,文献[10]虽用一种高斯型的 Ansatz 求出过此系统的传播子, 但用此法很难讨论系统的压缩态问题. 最后在一种特殊的二次型含时间系统中构造了压缩相干态和高 n 压缩相干态.

2 演化算符方法研究含时间系统的压缩态和高n压缩态

考虑一个最一般的二次型含时间的谐振子系统, 其哈密顿量为

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_0(t) + \hat{V}(t), \tag{1}$$

* 国家自然科学基金及浙江省自然科学基金资助的课题.

其中

$$\hat{H}_0(t)=\frac{\hat{p}^2}{2m(t)}+\frac{1}{2}m(t)\omega^2(t)\hat{x}^2+g(t)(\hat{x}\hat{p}+\hat{p}\hat{x}),\tag{2a}$$

$$\hat{V}(t)=-m(t)f(t)\hat{x}+k(t)\hat{p}.\tag{2b}$$

作为此系统特例的广义含时间的谐振子系统，最近在几何相因子的研究中引起了人们很大兴趣[11,12]. 这里先来研究与 $\hat{H}_0(t)$ 所对应的演化算符 $\hat{U}_0(t,0)$，为此，引入

$$\hat{J}_+=\frac{\mathrm{i}}{2\hbar}\hat{x}^2,\hat{J}_-=\frac{\mathrm{i}}{2\hbar}\hat{p}^2,\ \hat{J}_0=\frac{\mathrm{i}}{4\hbar}(\hat{x}\hat{p}+\hat{p}\hat{x}),\tag{3}$$

满足 $SU(1,1)$ 代数

$$[\hat{J}_+,\hat{J}_-]=-2\hat{J}_0;[\hat{J}_0,\hat{J}_\pm]=\pm\hat{J}_\pm.\tag{4}$$

于是哈密顿量 $\hat{H}_0(t)$ 可表示为

$$\hat{H}_0(t)=a_1(t)\hat{J}_+ + a_2(t)\hat{J}_0 + a_3(t)\hat{J}_-,\tag{5}$$

其中

$$a_1(t)=-\mathrm{i}\hbar m(t)\omega^2(t);a_2(t)=-4\mathrm{i}\hbar g(t);a_3(t)=-\frac{\mathrm{i}\hbar}{m(t)},\tag{6}$$

对应的薛定谔方程为

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi_0(t)\rangle=\hat{H}_0(t)|\Psi_0(t)\rangle.\tag{7}$$

演化算符 $\hat{U}_0(t,0)$ 定义为 $|\Psi_0(t)\rangle=\hat{U}_0(t,0)|\Psi(0)\rangle$，即满足

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}_0(t,0)=\hat{H}_0(t)\hat{U}_0(t,0),\ \hat{U}_0(0,0)=1.\tag{8}$$

由于 $\hat{J}_\pm,\hat{J}_0$ 之间形成 $SU(1,1)$代数，系统 $\hat{H}_0(t)$ 所对应的演化算符可写成如下形式[6]:

$$\hat{U}_0(t,0)=\exp[c_1(t)\hat{J}_+]\cdot\exp[c_2(t)\hat{J}_0]\cdot\exp[c_3(t)\hat{J}_-].\tag{9}$$

将(9)式代入(8)式，并经过一些代数运算可得

$$c_1(t)=m(t)\frac{\partial}{\partial t}\ln A(t),\ c_2(t)=-4\int_0^t g(\tau)\mathrm{d}\tau-2\ln\frac{A(t)}{A(0)},$$

$$c_3(t)=-A^2(0)\int_0^t\frac{\exp\left[-4\int_0^\tau g(u)\mathrm{d}u\right]}{m(\tau)A^2(\tau)}\mathrm{d}\tau,\tag{10}$$

其中 $A(t)$ 为下列辅助方程的解:

$$\ddot{A}(t)+\left[4g(t)+\frac{\partial}{\partial t}\ln m(t)\right]\dot{A}(t)+\omega^2(t)A(t)=0.\tag{11}$$

若令 $\hat{H}_\mathrm{I}(t)=\hat{U}_0^+(t,0)\hat{V}(t)\hat{U}_0(t,0)$，且与 $\hat{H}_\mathrm{I}(t)$ 所对应的演化算符为 $\hat{U}_\mathrm{I}(t,0)$，则易证整个系统的演化算符为 $\hat{U}(t,0)=\hat{U}_0(t,0)\hat{U}_\mathrm{I}(t,0)$，这里 $\hat{U}_\mathrm{I}(t,0)$ 满足演化方程

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}_\mathrm{I}(t,0)=\hat{H}_\mathrm{I}(t)\hat{U}_\mathrm{I}(t,0),\hat{U}_\mathrm{I}(0,0)=1.\tag{12}$$

由演化算符 $\hat{U}_0(t,0)$ 的表达式可直接求得

$$\hat{H}_\mathrm{I}(t)=-m(t)f(t)\hat{U}_0^+(t,0)\hat{x}\hat{U}_0(t,0)+k(t)\hat{U}_0^+(t,0)\hat{p}\hat{U}_0(t,0)$$

$$= [\hat{x} - c_3(t)\hat{p}][k(t)c_1(t) - m(t)f(t)]\exp\left[-\frac{c_2(t)}{2}\right] + \hat{p}k(t)\exp\left[\frac{c_2(t)}{2}\right]. \quad (13)$$

由于 $[\hat{x},\hat{p}] = i\hbar$,可类似于前面的讨论求得演化算符

$$\hat{U}_1(t,0) = \exp[h_1(t)\hat{p}] \cdot \exp[h_2(t)\hat{x}] \cdot \exp[h_3(t)], \quad (14)$$

其中

$$h_1(t) = \frac{i}{\hbar}\int_0^t \left\{c_3(\tau)[k(\tau)c_1(\tau) - m(\tau)f(\tau)]\exp\left[-\frac{c_2(\tau)}{2}\right] - k(\tau)\exp\left[\frac{c_2(\tau)}{2}\right]\right\} \cdot d\tau,$$

$$h_2(t) = \frac{i}{\hbar}\int_0^t [m(\tau)f(\tau) - k(\tau)c_1(\tau)]\exp\left[-\frac{c_2(\tau)}{2}\right] \cdot d\tau,$$

$$h_3(t) = \int_0^t [k(\tau)c_1(\tau) - m(\tau)f(\tau)]\exp\left[-\frac{c_2(\tau)}{2}\right] \cdot \left[\int_0^\tau d_1(u)du\right]d\tau. \quad (15)$$

因此,整个系统 $\hat{H}(t)$ 所对应的演化算符为

$$\begin{aligned}\hat{U}(t,0) &= \hat{U}_0(t,0)\hat{U}_1(t,0)\\ &= \exp[c_1(\tau)\hat{f}_+] \cdot \exp[c_2(t)\hat{f}_0] \cdot \exp[c_3(t)\hat{f}_-] \cdot \exp[h_1(t)\hat{p}]\\ &\quad \cdot \exp[h_2(t)\hat{x}] \cdot \exp[h_3(t)]. \end{aligned} \quad (16)$$

现在进一步研究此系统的压缩态和高 n 压缩态. 假如系统 $t = 0$ 时处于相干态 $|\Psi(0)\rangle = |\alpha\rangle$, 则 t 时刻系统的波函数为

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t,0)|\Psi(0)\rangle = \hat{U}_0(t,0)\hat{U}_1(t,0)|\Psi(0)\rangle. \quad (17)$$

首先考虑 $\hat{U}_0(t,0)$,为此分别引入压缩算符 $\hat{S}(z)$,位移算符 $\hat{D}(\beta)$ 及转动算符 $\hat{R}(\phi)$ 如下:

$$\hat{S}(z) = \exp\left[\frac{1}{2}(z^*\hat{a}^2 - z\hat{a}^{+2})\right], \hat{D}(\beta) = \exp(\beta^*\hat{a} - \beta\hat{a}^\dagger),$$

$$\hat{R}(\phi) = \exp(-i\phi\hat{a}^\dagger\hat{a}), \quad (18)$$

其中 $\hat{a} = (m_0\omega_0\hat{x} + i\hat{p})/\sqrt{2m_0\hbar\omega_0}$. 利用 $[\hat{a},\hat{a}^\dagger] = 1$ 易证

$$\hat{S}(z)\hat{a}\hat{S}^\dagger(z) = \hat{a}\cosh|z| + \hat{a}^\dagger\left(\frac{z}{|z|}\sinh|z|\right),$$

$$\hat{D}(\beta)\hat{a}\hat{D}^\dagger(\beta) = \hat{a} + \beta, \hat{R}(\phi)\hat{a}\hat{R}^\dagger(\phi) = e^{i\phi}\hat{a}. \quad (19)$$

利用 $\hat{U}_0(t,0)$ 的表达式(9)可以求得

$$\hat{U}_0(t,0)\hat{a}\hat{U}_0^\dagger(t,0) = \mu(t)\hat{a} + \nu(t)\hat{a}^\dagger, \quad (20)$$

其中

$$\mu = \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{c_2}{2}\right)\left[1 - c_1c_3 + \exp(c_2) - ic_3m_0\omega_0 - \frac{ic_1}{m_0\omega_0}\right], \quad (21a)$$

$$\nu = \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{c_2}{2}\right)\left[1 + c_1c_3 - \exp(c_2) - ic_3m_0\omega_0 + \frac{ic_1}{m_0\omega_0}\right], \quad (21b)$$

$$|\mu(t)|^2 - |\nu(t)|^2 = 1. \quad (22)$$

由(22)式可知,(20)式实际上是一个 Bogoliubov 变换,故可根据(19)式将 $\hat{U}_0(t,0)$ 写成压缩算符和转动算符的乘积形式

$$\hat{U}_0(t,0)=\hat{S}[z(t)]\hat{R}[\phi(t)], \tag{23}$$

其中

$$\cosh|z|=|\mu|,\sinh|z|=|\nu|,e^{i\phi}=\frac{\mu}{|\mu|},\ \frac{z}{|z|}=\frac{\nu}{|\nu|}\frac{|\mu|}{\mu},$$

$$\hat{S}(z)\hat{R}(\phi)\hat{a}\hat{R}^{\dagger}(\phi)\hat{S}^{\dagger}(z)=\hat{a}(e^{i\phi}\cosh|z|)+\hat{a}^{\dagger}\left(\frac{z}{|z|}e^{i\phi}\sinh|z|\right). \tag{24}$$

其次研究 $\hat{U}_I(t,0)$，由 $\hat{U}_I(t,0)$的表达式易得

$$\hat{U}_I(t,0)\hat{a}\hat{U}^{\dagger}(t,0)=\hat{a}+\frac{1}{\sqrt{2m_0\omega_0}}(m_0\omega_0h_1-ih_2). \tag{25}$$

故可根据(19)式将 $\hat{U}_I(t,0)$ 写成如下形式:

$$\hat{U}_I(t,0)=\exp[i\theta(t)]\cdot\hat{D}[\beta(t)], \tag{26}$$

其中

$$\beta(t)=\frac{1}{\sqrt{2m_0\omega_0}}[m_0\omega_0h_1(t)-ih_2(t)];\theta(t)=h_3(t)+h_1(t)h_2(t)/2. \tag{27}$$

因此系统 t 时刻的波函数(17)式可表示为

$$|\bar{\Psi}(t)\rangle=\exp[i\theta(t)]\cdot\hat{S}[z(t)]\hat{R}[\phi(t)]\hat{D}[\beta(t)]|\alpha\rangle, \tag{28}$$

即系统若在 $t=0$ 时处于相干态，则在演化过程中将处于压缩态. 此时 $\hat{x}$ 和 $\hat{p}$ 在压缩态 $|\bar{\Psi}(t)\rangle$ 中的偏差 $(\Delta\hat{x})^2$ 和 $(\Delta\hat{p})^2$ 分别为

$$\begin{aligned}(\Delta\hat{x})^2&=\langle\bar{\Psi}(t)|\hat{x}^2|\bar{\Psi}(t)\rangle-(\langle\bar{\Psi}(t)|\hat{x}|\bar{\Psi}(t)\rangle)^2\\&=\frac{\hbar}{2m_0\omega_0}\exp(-c_2)(1+m_0^2\omega_0^2c_3^2),\end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}(\Delta\hat{p})^2&=\langle\bar{\Psi}(t)|\hat{p}^2|\bar{\Psi}(t)\rangle-(\langle\bar{\Psi}(t)|\hat{p}|\bar{\Psi}(t)\rangle)^2\\&=\frac{m_0\omega_0}{2}\hbar\exp(c_2)\cdot\left[1-2c_1c_3\exp(c_2)\right.\\&\quad\left.+\left(\frac{1}{m_0^2\omega_0^2}+c_3^2\right)c_1^2\exp(-2c_2)\right],\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}(\Delta\hat{x})^2\cdot(\Delta\hat{p})^2&=\frac{\hbar^2}{4}(1+m_0^2\omega_0^2c_3^2)\left[1-2c_1c_3\exp(-c_2)\right.\\&\quad\left.+\left(\frac{1}{m_0^2\omega_0^2}+c_3^2\right)c_1^2\exp(-2c_2)\right].\end{aligned} \tag{31}$$

从(32)式可以看到 $|\bar{\Psi}(t)\rangle$ 虽然是压缩态，但在演化过程中一般不再保持最小测不准关系.

若 $t=0$ 时系统处于高 n 相干态 $|\bar{\Psi}_n(0)\rangle=|\alpha,n\rangle=\hat{D}(\alpha)|n\rangle$，则由前面的讨论可知，系统在 t 时刻的波函数为

$$|\bar{\Psi}_n(t)\rangle=\exp[i\theta(t)]\hat{S}[z(t)]\hat{R}[\phi(t)]\hat{D}[\beta(t)]|\alpha,n\rangle, \tag{32}$$

即在 t 时刻系统处于高 n 压缩态，此高 n 压缩态是文献[8,9]中的高 n 压缩态的推广. 此时，$\hat{x}$ 和 $\hat{p}$ 在高 n 压缩态 $|\bar{\Psi}_n(t)\rangle$ 中的偏差 $(\Delta\hat{x})^2$ 和 $(\Delta\hat{p})^2$ 分别为

$$(\Delta\hat{x})^2 = \frac{\hbar}{2m_0\omega_0}(2n+1)\exp(-c_2)\cdot(1+m_0^2\omega_0^2c_3^2), \tag{33}$$

$$(\Delta\hat{p})^2 = \frac{m_0\omega_0}{2}\hbar(2n+1)\exp(-c_2)\cdot\left[1-2c_1c_3\exp(c_2)+\left(\frac{1}{m_0^2\omega_0^2}+c_3^2\right)c_1^2\exp(-2c_2)\right], \tag{34}$$

$$(\Delta\hat{x})^2\cdot(\Delta\hat{p})^2 = \frac{\hbar^2}{4}(2n+1)^2(1+m_0^2\omega_0^2c_3^2)\left[1-2c_1c_3\exp(c_2)+\left(\frac{1}{m_0^2\omega_0^2}+c_3^2\right)c_1^2\exp(-2c_2)\right]. \tag{35}$$

3 脉动质量的受迫谐振子系统的压缩态和高n压缩态

现在研究脉动受迫谐振子系统。这时,(2)式的哈密顿量中 $g(t)=k(t)=0$, $m(t)=m_0\cos^2\nu t$, $\omega(t)=\omega_0=$常数, $f(t)=F(t)/m_0$。在此情形,辅助方程(11)式变为

$$\ddot{A}(t)-2\nu\tan\nu t\dot{A}(t)+\omega_0^2A(t)=0. \tag{36}$$

令 $\tau=\nu t$, $y(\tau)=A(\tau)\cos\tau$,则(36)式可表示为

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\tau^2}+(1+\omega_0^2/\nu^2)y=0. \tag{37}$$

易得方程(37)的通解为

$$y(\tau)=C_1'\cos\frac{\Omega}{\nu}\tau+C_2'\sin\frac{\Omega}{\nu}\tau, \tag{38}$$

其中 $\Omega=(\omega_0^2+\nu^2)^{1/2}$。于是(36)式的一般解为

$$A(t)=\frac{1}{\cos\nu t}[C_1'\cos\Omega t+C_2'\sin\Omega t]. \tag{39}$$

利用初始条件及(39)式可得

$$C_1(t)=m_0\nu\sin\nu t\cos\nu t-m_0\Omega\cos^2\nu t\tan\Omega t,$$

$$C_2(t)=-2\ln\frac{\cos\Omega t}{\cos\nu t},\quad C_3(t)=\frac{-1}{m_0\Omega}\tan\Omega t, \tag{40}$$

$$\hat{H}_1(t)=-\frac{1}{m_0\Omega}F(t)\sin\Omega t\cos\nu t\hat{p}-F(t)\cos\nu t\cos\Omega t\hat{x}, \tag{41}$$

$$h_1(t)=\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_0^t\frac{1}{m_0\Omega}F(\tau)\sin\Omega\tau\cos\nu\tau\mathrm{d}\tau;\ h_2(t)=\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_0^tF(\tau)\cos\Omega\tau\cos\nu\tau\mathrm{d}\tau,$$

$$h_3(t)=-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_0^t\frac{1}{m_0\Omega}F(\tau)\cos\nu\tau\cos\Omega\tau\left[\int_0^\tau F(u)\sin\Omega u\cos\nu u\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}\tau. \tag{42}$$

这样,求出了脉动质量的受迫谐振子系统的精确的时间演化算符。接着,进一步讨论此系统的压缩态和高 n 压缩态。

若系统 $t=0$ 时处于相干态 $|\Psi(0)\rangle=|\alpha\rangle$,则系统在 t 时刻将处于压缩态 $|\Psi(t)\rangle$。

此时，$\hat{x}$ 和 $\hat{p}$ 在 $|\overline{\Psi}(t)\rangle$ 中的偏差 $(\Delta\hat{x})^2$ 和 $(\Delta\hat{p})^2$ 分别为

$$(\Delta\hat{x})^2 = \frac{\hbar}{2m_0\omega_0}\frac{1}{\cos^2\nu t}\left(1-\frac{\nu^2}{\Omega^2}\sin^2\Omega t\right),$$

$$(\Delta\hat{p})^2 = \frac{m_0\omega_0}{2}\hbar\left[\left(\cos\nu t\cos\Omega t+\frac{\nu}{\Omega}\sin\nu t\sin\Omega t\right)^2\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\nu}{\omega_0}\sin\nu t\cos\Omega t-\frac{\Omega}{\omega_0}\cos\nu t\sin\Omega t\right)^2\right],$$

$$(\Delta\hat{x})^2\cdot(\Delta\hat{p})^2 = \frac{\hbar^2}{4}\left(1-\frac{\nu^2}{\Omega^2}\sin^2\Omega t\right)\left[\left(\cos\Omega t+\frac{\nu}{\Omega}\sin\Omega t\tan\nu t\right)^2\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\sin\Omega t-\frac{\nu}{\omega_0}\cos\Omega t\tan\nu t\right)^2\right]. \tag{43}$$

由(43)式可以看到，$|\overline{\Psi}(t)\rangle$ 虽为压缩态，但在演化过程中不再满足最小测不准关系.

若系统 $t=0$ 时处于高 n 相干态 $|\overline{\Psi}(0)\rangle = |\alpha,n\rangle$，则系统在 t 时刻将处于高 n 压缩态 $|\overline{\Psi}_n(t)\rangle$. 此时 $\hat{x}$ 和 $\hat{p}$ 在 $|\overline{\Psi}_n(t)\rangle$ 中的偏差 $(\Delta\hat{x})^2$ 和 $(\Delta\hat{p})^2$ 分别为

$$(\Delta\hat{x})^2 = \frac{\hbar}{2m_0\omega_0}(2n+1)\cdot\frac{1}{\cos^2\nu t}\left(1-\frac{\nu^2}{\Omega^2}\sin^2\Omega t\right),$$

$$(\Delta\hat{p})^2 = \frac{m_0\omega_0}{2}\hbar(2n+1)\left[\left(\cos\nu t\cos\Omega t+\frac{\nu}{\Omega}\sin\nu t\sin\Omega t\right)^2\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\nu}{\omega_0}\sin\nu t\cos\Omega t-\frac{\Omega}{\omega_0}\cos\nu t\sin\Omega t\right)^2\right],$$

$$(\Delta\hat{x})^2\cdot(\Delta\hat{p})^2 = \frac{\hbar^2}{4}(2n+1)\left(1-\frac{\nu^2}{\Omega^2}\sin^2\Omega t\right)\left[\left(\cos\Omega t+\frac{\nu}{\Omega}\sin\Omega t\tan\nu t\right)^2\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\sin\Omega t-\frac{\nu}{\omega_0}\cos\Omega t\tan\nu t\right)^2\right]. \tag{44}$$

4　压缩相干态和高 n 压缩相干态

在这一节中，将证明(2)式中的 $g(t)$ 如取为

$$g(t) = -\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial t}\ln r(t);\ r(t) = \frac{m(t)\omega(t)}{m(0)\omega(0)}, \tag{45}$$

那么，相应的压缩态(28)式和高 n 压缩态(32)式就成为压缩相干态和高 n 压缩相干态. 此时，辅助方程(11)式变为

$$\ddot{A}(t)-\frac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)}\dot{A}(t)+\omega^2(t)A(t)=0. \tag{46}$$

易得方程(46)式的一般解为

$$A(t) = C_1'\cos y(t)+C_2'\sin y(t), \tag{47}$$

其中 $y(t)=\int_0^t\omega(\tau)d\tau$. 利用初始条件及(47)式可以求得

$$C_1(t)=m(t)\omega(t)\tan y(t),C_2(t)=\ln\left[\frac{r(t)}{\cos^2 y(t)}\right],$$

$$c_3(t)=-\frac{\tan y(t)}{m(0)\omega(0)};\tag{48}$$

$$\hat{H}_1(t)=\sqrt{r(t)}\left[k(t)-\frac{f(t)}{\omega(t)}\right]\cos y(t)\hat{p}-\frac{1}{\sqrt{r(t)}}[m(t)f(t)\cos y(t)$$
$$+r(t)k(t)m(0)\omega(0)\sin y(t)]\hat{x},\tag{49}$$

$$h_1(t)=\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_0^t\left[\frac{f(\tau)}{\omega(\tau)}-k(\tau)\right]\sqrt{r(\tau)}\sin y(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

$$h_2(t)=\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_0^t\frac{1}{\sqrt{r(\tau)}}[m(\tau)f(\tau)\cos y(\tau)+r(\tau)k(\tau)m(0)\omega(0)\sin y(\tau)]\mathrm{d}\tau,$$

$$h_3(t)=-\int_0^t\frac{1}{\sqrt{r(\tau)}}[m(\tau)f(\tau)\cos y(\tau)+r(\tau)k(\tau)m(0)\omega(0)\sin y(\tau)]$$
$$\times\left[\int_0^\tau h_1(u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}\tau;\tag{50}$$

$$\hat{U}_0(t,0)\hat{a}\hat{U}^\dagger(t,0)=\cosh\left[\frac{1}{2}\ln r(t)\right]\exp[\mathrm{i}y(t)]\hat{a}$$
$$+\sinh\left[\frac{1}{2}\ln r(t)\right]\exp[\mathrm{i}y(t)]\hat{a}^\dagger.\tag{51}$$

若系统 $t=0$ 时处于相干态 $|\Psi(0)\rangle=|\alpha\rangle$,则系统在 t 时刻的波函数为

$$|\Psi(t)\rangle=\exp[\mathrm{i}\theta(t)]\hat{S}\left[\frac{1}{2}\ln r(t)\right]\hat{R}[y(t)]\hat{D}[\beta(t)]|\alpha\rangle,\tag{52}$$

此时 $\hat{x}$ 和 $\hat{p}$ 在 $|\Psi(t)\rangle$ 中的偏差 $(\Delta\hat{x})^2$ 和 $(\Delta\hat{p})^2$ 分别为

$$(\Delta\hat{x})^2=\frac{\hbar}{2}\frac{1}{m(t)\omega(t)},\ (\Delta\hat{p})^2=\frac{\hbar}{2}m(t)\omega(t),$$
$$(\Delta\hat{x})^2\cdot(\Delta\hat{p})^2=\hbar^2/4.\tag{53}$$

即在演化过程中 $\hat{x}$ 和 $\hat{p}$ 在 $|\Psi(t)\rangle$ 中的偏差 $(\Delta\hat{x})^2$ 和 $(\Delta\hat{p})^2$ 总是满足最小测不准关系，且(52)式中的压缩算符 $\hat{S}\left[\frac{1}{2}\ln r(t)\right]$中的含时参数 $r(t)$ 为实数。因此 $|\Psi(t)\rangle$为压缩相干态。

若 $t=0$ 时系统处于高 n 相干态 $|\Psi_n(0)\rangle=|\alpha,n\rangle=\hat{D}(\alpha)|n\rangle$，则由前面的讨论可知系统在 t 时刻的波函数为

$$|\Psi_n(t)\rangle=\exp[\mathrm{i}\theta(t)]\hat{S}\left[\frac{1}{2}\ln r(t)\right]\hat{R}[y(t)]\hat{D}[\beta(t)]|\alpha,n\rangle.\tag{54}$$

此时 $\hat{x}$ 和 $\hat{p}$ 在 $|\Psi_n(t)\rangle$ 中的偏差 $(\Delta\hat{x})^2$ 和 $(\Delta\hat{p})^2$ 分别为

$$(\Delta\hat{x})^2=\frac{\hbar}{2}\frac{(2n+1)}{m(t)\omega(t)},\ (\Delta\hat{p})^2=\frac{\hbar}{2}(2n+1)m(t)\omega(t),$$
$$(\Delta\hat{x})^2\cdot(\Delta\hat{p})^2=\frac{\hbar^2}{4}(2n+1)^2.\tag{55}$$

即在演化过程中，$(\Delta\hat{x})^2$ 和 $(\Delta\hat{p})^2$ 总是满足 n 阶最小测不准关系，因此，$|\Psi_n(t)\rangle$ 为高 n 压缩相干态。

5 结　语

近年来，由于在量子光学、几何相因子及天体演化等含时间问题的研究中应用了相干态和压缩态。相干态和压缩态随时间演化问题逐渐引起了人们的注意。本文着重讨论了相干态、压缩态的时间演化问题，并且得到了在时间演化过程中始终保持最小测不准关系的压缩相干态和高 n 压缩相干态。

[1] R. J. Glauber, *Phys. Rev.*, **130**(1963),2529; **131**(1963),2766.

[2] J. R. Klauder and B. S. Skagerstam, Coherent States (World Scientific Singapore, 1985); A. M. Perelomov, Generalized Coherent States and Their Applications (Springre-Verlag, Berlin, 1985).

[3] H. P. Yuen, *Phys. Rev.*, **A13**(1976),2226; D. F. Wall, *Nature*, **306**(1983),141.

[4] J. G. Hartley and J. R. Ray, *Phys. Rev.*, **D25**(1982),382; I. A. Pedrosa, *Phys. Rev.*, **D36**(1987), 1279.

[5] H. G. Oh, H. R. Lee, T. F. George and C. I. Um, *Phys. Rev.*, **A39**(1989),5515; J. B. Xu, J. M. Bao and X. C. Gao, *Can. J. Phys.*, **70**(1992),637.

[6] C. M. Cheng and P. C. Fung, *J. Phys. A*, **21**(1988), 4115; C. F. Co, *J.Phys. A*, **23**(1990), 1155; *Phys. Lett.*, **A162**(1992),299.

[7] C. C. Gerry and F. Plumb, *J. Phys. A*, **23**(1990),3997; **24**(1991),3515; X. Ma and W. Rhodes, *Phys. Rev.*, **A39**(1989),1941; H. R. Zaidi and H. Y. Fan, *Phys. Rev.*, **A39**(1989),1948.

[8] J. B. Xu, T. Z. Qian and X. C. Gao, *Phys. Lett.*, **A159**(1991),113.

[9] J. Hamilton, *Phys. Rev.*, **A42**(1990).1.

[10] S. W. Qian, Z. Y. Gu and W. Wang, *Phys. Lett.*, **A157**(1991),456.

[11] R. Jackiw, *Int. Mod. Phys.*, **A3**(1988),285; L. Vanet, *Phys. Rev.*, **D37**(1988),2369.

[12] X. C. Gao, J. B. Xu and T. Z. Qian, *Ann. Phys.* (N. Y.), **204**(1990),235; W. Dittrich and M. Reuter, *Phys. Lett.*, **A155**(1991),94; S. Baskoutas, A. Jannussis and R. Mignani, *Phys. Lett.*, **A 164**(1992),17.

SQUEEZED STATES AND SQUEEZED-COHERENT STATES OF THE GENERALIZED QUADRATIC TIME-DEPENDENT HARMONIC OSCILLATOR

XU JING-BO LIU YI-CHANG GAO XIAO-CHUN

(Department of Physics, Zhejiang University, Hangzhou 310027)

(Received 16 August 1993)

ABSTRACT

The problem of time evolution and squeezed states of the generalized quadratic time-dependent harmonic oscillator is studied by making use of the time-evolution operator approach. Then, the squeezed states and high-n squeezed states of the driven harmonic oscillator with strongly pulsating mass are constructed. Finally, we show how the squeezed-coherent states and high-n squeezed-coherent states, which preserve the minimum uncertainty codition, can be generated.

PACC: 4250;0365