第 49 卷 第 9 期 2000 年 9 月
1000-3290/2000/49(09)/1663-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 49, No. 9, September, 2000
©2000 Chin. Phys. Soc.

含时调制的 Jaynes-Cummings 模型的 Pancharatnam 相位

侯邦品

(四川师范大学物理系,成都 610066)

(2000 年 1 月 10 日收到; 2000 年 2 月 28 日收到修改稿)

基于含时调制的 Jaynes-Cummings 模型的 $SU(2)$ 群结构,求得它的 Pancharatnam 相位,并分析了该模型从绝热开启直到关闭原子与场的相互作用的整个过程的相位变化.讨论了该模型在半经典近似条件下的情况.

关键词:含时调制的 Jaynes-Cummings 模型, Pancharatnam 相位, $SU(2)$ 群

PACC:0365, 4250

1 引 言

Berry[1] 在考察含时量子系统的绝热演化时,发现系统经过一个周期便获得由参量空间决定的几何相位(简称 Berry 相位). Aharonov 和 Anandan[2] 取消了绝热条件的限制,讨论一般周期量子系统中的几何相位,即 AA 相位.上述两种相位都有不同程度的限制条件.后来, Samuel 和 Bhandari[3] 将 Pancharatnam[4] 的经典光学的干涉理论移植到量子力学中,便得到 Pancharatnam 相位.该相位是一种最普遍的几何相位,它不囿于绝热和周期条件的限制.还可应用于非么正、非厄米过程.李等[5] 给出了该相位的严格定义.

Jaynes-Cummings 模型(简称 JC 模型)[6] 是量子光学的一个基本模型.它描述了一个二维原子与单模光场之间的相互作用.在偶极近似和旋波近似下,它可被严格准确地求解.特别是,它蕴含了许多非经典性质,如光场的压缩性[7],光子数的亚泊松分布[8],以及原子布居的周期崩塌与回复[9] 等效应.后来, JC 模型被推广到很多种类(参见文献[10],及其相关文献).上述绝大多数模型中,原子与场的耦合系数是不含时的,但当讨论绝热开启或关闭原子与场相互作用的弛豫过程时,其耦合系数是含时的,针对这种情况, Prants 等人[11] 提出了含时调制的 JC 模型.本文基于该模型的 $SU(2)$ 群结构[12] 讨论它的 Pancharatnam 相位,并定性地分析了该模型从绝热开启直到关闭相互作用的整个过程的几何相位变化.文献[13]尽管求得含有 Kerr 项的多光子的 JC 模型的几何相位,但该模型的耦合系数是不含时的.另外,该文仅在 Fock 空间中的子空间讨论了它的 AA 相位,但当单独考察开启或关闭相互作用的过程时,它应是一个非循环的演化过程,故有必要讨论它的 Pancharatnam 相位.

在展开讨论之前,我们先介绍 Pancharatnam 相位的定义:

设 $|\psi(t)\rangle$ 为 Schrödinger 方程

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \hat{H}(t)|\psi(t)\rangle \tag{1}$$

的解(全文取 $\hbar=1$),它在 t 时刻相对于任意初始时刻 t_0 的相位差为

$$\Phi(t,t_0) = \arg\langle\psi(t_0)|\psi(t)\rangle, \tag{2}$$

其中 $\langle\psi(t_0)|\psi(t)\rangle\neq 0$,而动力学相位为[2]

$$\Phi_D(t,t_0) = -\int_{t_0}^{t}\langle\psi(t')|\hat{H}(t')|\psi(t')\rangle\mathrm{d}t', \tag{3}$$

则 Pancharatnam 相位为

$$\Phi_G(t,t_0) = \Phi(t,t_0) - \Phi_D(t,t_0). \tag{4}$$

该相位是最普遍的量子几何相位.

2 含时调制的 JC 模型的 Pancharatnam 相位

含时调制的 JC 模型的 Hamiltonian 量为[11]

$$\hat{H}(t) = \omega\left(\hat{a}\hat{a}^{+}+\frac{1}{2}\right)+\omega_0\hat{S}_z$$

$$+ g_0 f(t)[\hat{S}_- \hat{a}^+ \exp(-\mathrm{i}\Delta t) + \hat{S}_+ \hat{a}\exp(\mathrm{i}\Delta t)], \tag{5}$$

其中 ω 和 ω_0 分别是场和原子的频率，$\Delta = \omega - \omega_0$ 为失谐量，g_0 为标准 JC 模型[6]的耦合系数，$f(t)$ 为场与原子耦合的含时调制系数，场的升降算符为 $\hat{a}^+$ 和 $\hat{a}$，$\hat{S}_\pm$ 和 $\hat{S}_z$ 为二维原子的赝自旋算符. 现介绍一组算符 $\hat{A}_+$，$\hat{A}_-$ 和 $\hat{A}_0$，它们被定义为[12]

$$\hat{A}_+ = \hat{C}^{-1/2}\hat{a}\hat{S}_+, \ \hat{A}_- = \hat{C}^{-1/2}\hat{a}^+ \hat{S}_-, \ \hat{A}_0 = \hat{S}_z, \tag{6}$$

其中 $\hat{C} = \hat{N} + \hat{A}_0 + \frac{1}{2}$，而 $\hat{N} = \hat{a}^+ \hat{a}$ 为粒子数算符. 显然，它们满足 $SU(2)$ 群生成元的对易关系：

$$[\hat{A}_+, \hat{A}_-] = 2\hat{A}_0, \ [\hat{A}_0, \hat{A}_\pm] = \pm \hat{A}_\pm, \tag{7}$$

并有

$$[\hat{C}, \hat{A}_0] = [\hat{C}, \hat{A}_\pm] = [\hat{C}, \hat{H}] = 0, \tag{8}$$

故在下文中，$\hat{C}$ 被当作常算符. 则 Hamiltonian 量(5)式被改写成

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_I, \tag{9}$$

其中

$$\hat{H}_0 = \omega\hat{C}, \tag{10}$$

$$\hat{H}_I = \Delta\hat{A}_0 + g_0 f(t)\hat{C}^{1/2}\left[\hat{A}_+ \exp(\mathrm{i}\Delta t) + \hat{A}_- \exp(-\mathrm{i}\Delta t)\right]. \tag{11}$$

由(8)式可知 $[\hat{H}_0, \hat{H}_I] = 0$，故我们将在相互作用绘景中进行讨论. Hamiltonian 量(11)式所对应的演化算符为[14]

$$\hat{U}_I(t) = \hat{R}(t)\exp\left[-\mathrm{i}\alpha(t)\hat{A}_0\right]\hat{R}(t_0), \tag{12}$$

其中

$$\hat{R}(t) = \exp\left\{-\frac{\gamma(t)}{2}[\hat{A}_+ \exp(-\mathrm{i}\beta(t)) - \hat{A}_- \exp(\mathrm{i}\beta(t))]\right\}, \tag{13}$$

和

$$\alpha(t) = \int_{t_0}^{t}\left[\Delta\cos\gamma(t') + 2g_0 f(t')\hat{C}^{1/2}\sin\gamma(t') \cdot \cos(\Delta t' + \beta(t')) + 2\dot{\beta}(t')\sin^2\frac{\gamma(t')}{2}\right]\mathrm{d}t', \tag{14}$$

式中参数 γ 和 β 满足如下关系式：

$$(\Delta - \dot{\beta}(t))\sin\gamma(t) = 2g_0 f(t)\hat{C}^{1/2} \cdot \cos\gamma(t)\cos(\Delta t + \beta(t)), \tag{15}$$

$$2g_0 f(t)\hat{C}^{1/2}\sin(\beta(t) + \Delta t) + \dot{\gamma}(t) = 0. \tag{16}$$

现选取初态为 $|\psi(t_0)\rangle = \left|\begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix}\right\rangle$，即原子在初始时刻 t_0 处在激发态，而场处在 Fock 态 $|n\rangle$，即有 $\hat{C}|\psi(t_0)\rangle = n|\psi(t_0)\rangle$，故以后用 n 代替 $\hat{C}$. 并假定在初始刻 t_0 时，场与原子无相互作用，即 $g_0 f(t_0) = 0$，由(15)，(16)和(13)式，可得 $\hat{R}(t_0) = 1$. 由此可得 Schrödinger 方程的一个形式解：

$$|\psi_I(t)\rangle = \hat{R}(t)\exp\left[-\mathrm{i}\alpha(t)\hat{A}_0\right]|\psi(t_0)\rangle. \tag{17}$$

再利用指数算符的分解理论[15]，改写算符 $\hat{R}(t)$ 式为

$$\hat{R}(t) = \exp\left[\Lambda_+ \hat{A}_+\right]\exp\left[\ln\Lambda_0\hat{A}_0\right]\exp\left[\Lambda_- \hat{A}_-\right], \tag{18}$$

其中 $\Lambda_0 = \left[\cos\frac{r(t)}{2}\right]^{-2}$，$\Lambda_+ = -\operatorname{tg}\frac{r(t)}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta(t)}$，$\Lambda_- = \operatorname{tg}\frac{r(t)}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta(t)}$. 由(9)和(6)式可得整个系统的解：

$$|\psi(t)\rangle = \left[n\cos\frac{r(t)}{2}\right]^{-1}\left[n - (n+1)\sin^2\frac{r(t)}{2}\right] \cdot \exp\left\{-\mathrm{i}\left[\frac{\alpha(t)}{2} + n\omega t\right]\right\}\left|\begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix}\right\rangle - \frac{\sqrt{n(n+1)}}{n}\sin\frac{\gamma(t)}{2}\exp\left\{-\mathrm{i}\left[\frac{\alpha(t)}{2} - \beta(t) + (n+1)\omega t\right]\right\}\left|\begin{matrix} 0 \\ n+1 \end{matrix}\right\rangle. \tag{19}$$

所以由(2)式可得 $|\psi(t)\rangle$ 相对 $|\psi(t_0)\rangle$ 的相位差为

$$\Phi(t, t_0) = \arg\langle\psi(t_0)|\psi(t)\rangle = -\frac{1}{2}[\alpha(t) + 2n\omega t], \tag{20}$$

其中 $\alpha(t)$ 已由(14)式给出. 利用文献[14]中(9)—(12)式及本文(17)式，可求得动力学相位为

$$\Phi_{\mathrm{D}}(t, t_0) = -\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}[2n\omega + \Delta\cos\gamma(t') + 2g_0 f(t')n^{1/2}\sin\gamma(t') \cdot \cos(\Delta t + \beta(t'))]\mathrm{d}t', \tag{21}$$

则含时调制的 JC 模型的 Pancharatnam 相位为

$$\Phi_{\mathrm{G}}(t, t_0) = -\int_{t_0}^{t}\dot{\beta}(t')\sin^2\frac{\gamma(t')}{2}\mathrm{d}t'. \tag{22}$$

在绝热情况下,即(14),(15)式中对时间求导的项可忽略,可得

$$\beta(t) = -\Delta t, \tag{23}$$

$$\Delta\sin\gamma(t) - g_0 f(t) n^{1/2}\cos\gamma(t) = 0, \tag{24}$$

由此可得,绝热几何相位为

$$\Phi_{Ga}(t,t_0) = \Delta\int_{t_0}^{t}\frac{1-\cos\gamma(t')}{2}\mathrm{d}t', \tag{25}$$

其中

$$\cos\gamma = \frac{\Delta}{\sqrt{\Delta^2 + g_0^2 f^2(t) n}}. \tag{26}$$

由上式可知,含时调制的 JC 模型的几何相位与失谐量 Δ,耦合系数 $g_0 f(t)$ 及初态有关.

3　讨论与结论

现在,讨论系统从绝热开启直到关闭原子与场相互作用的整个过程的几何相位的变化.系统的调制系数为[11]

$$g_0 f(t) = \begin{cases} g_0\exp[-\theta t - |\theta| T] & 0 < t \leqslant T, \\ 0 & t = t_0. \end{cases} \tag{27}$$

当 θ 取负值时,(27)式描述了绝热开启过程,对应到图 1 中的 AB 段曲线;当 θ 取正值时,该式描述了

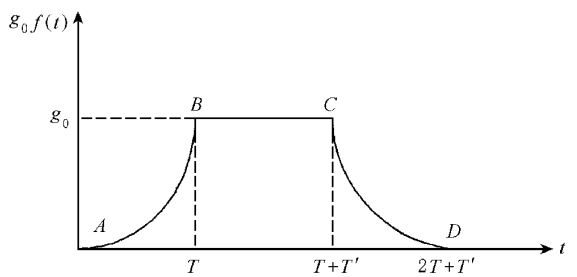


图 1　含时调制的 JC 模型的耦合系数随时间变化的图像

绝热关闭后的弛豫过程,由图 1 中的 CD 曲线标示.而 BC 段描述稳定的相互作用阶段.本文在 $t = t_0$ 时刻取 $g_0 f(t_0) = 0$,且假定 T 较长,故图像略与文献[11]不同.由(25)式可知,几何相位与 $f(t)$ 的取值成正比.在绝热开启过程中,几何相位在参量空间($g_0 f(t)\sqrt{n}\sin\gamma\cos\Delta t$, $g_0 f(t)\sqrt{n}\sin\gamma\sin\Delta t$, $\Delta\cos\gamma$)的演化曲线逐渐远离 z 轴(见图 2 中 $A'B'$ 的曲线);当系统达到稳定时,即 $f(t) = 1$,由文献[13]可知,稳定过程是一个周期过程,不失一般性,我们假设此过程仅为一个周期,它的几何相位的演化曲线由图 2 中 $B'C'B'$ 闭合曲线表示;在关闭相互作用后的弛豫阶段,$\theta > 0$,几何相位对应的曲线逐渐靠拢 z 轴,最后回到 A'(见图 2 中 $B'A'$ 曲线段).

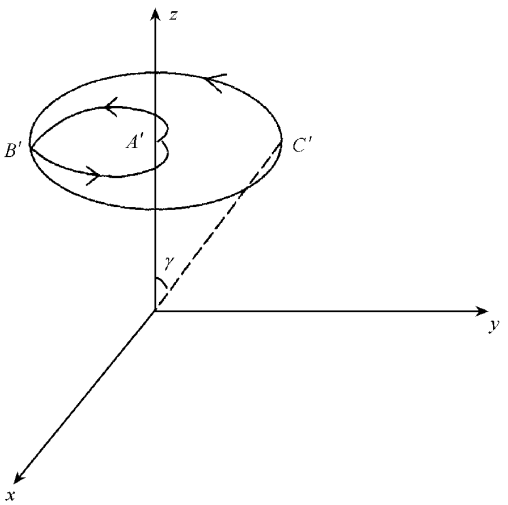


图 2　含时调制的 JC 模型的几何相位在参量空间中的演化曲线

最后,值得指出的是:当把原子系统当成经典源,即 $\hat{S}_u \to \langle\hat{S}_u\rangle$,其中 $u = \pm z$,(22)式便是受力谐振子的 Pancharatnam 相位[16];当把光场当成经典的电磁场,(22)式便是文献[17]中的(19)式.

本文利用含时调制的 JC 模型的 $SU(2)$ 群结构,求得它的准确解和 Pancharatnam 相位,并讨论了该系统从绝热开启直到关闭相互作用的整个过程的相位变化.最后,指出了本文的结果是受力谐振子及磁场中运动的二能级原子在纯量子理论中的表现形式.

[1] M. V. Berry, *Proc. Roy. Soc. London*, **A392**(1984), 45.
[2] Y. Aharonov, J. Anandan, *Phys. Rev. Lett.*, **58**(1987), 1593.
[3] J. Samuel, R. Bhandari, *Phys. Rev. Lett.*, **60**(1988), 2339.
[4] S. Pancharatnam, *Proc. Indian Acad. Sci.*, **A44**(1956), 247.
[5] Bo-zang Li, Ling-yun Zhang, Xiang-dong Zhang, *Acta Physica Sinica*, **46**(1997), 2081(in Chinese) [李伯臧、张凌云、张向东, 物理学报, **46**(1997), 2081].
[6] E. T. Jaynes, F. W. Cummings, *Proc. IEEE*, **51**(1963), 89.
[7] P. Meystre, M. S. Zubairy, *Phys. Lett.*, **A89**(1982), 390.
[8] G. Rempe, H. Walther, *Phys. Rev.*, **A42**(1990), 1650.
[9] J. H. Eberly, J. J. Sanchez-Mondragon, N. B. Narozhny, *Phys. Rev. Lett.*, **44**(1980), 1323.
[10] B. W. Shore, P. L. Knight, *J. Mod. Optics*, **40**(1993), 1195.
[11] S. V. Prants, L. S. Yacoupova, *J. Mod. Optics*, **39**(1992), 961.
[12] S. Yu, H. Rauch, Y. Zhang, *Phys. Rev.*, **A52**(1995), 2585.
[13] Z. Tang, *Phys. Rev.*, **52**(1995), 3448.

[14] Y. Z. Lai, J. Q. Liang, H. J. W. Muller-Kirsten, J. G. Zhou, *Phys. Rev.*, **A53**(1996), 3691.
[15] K. Wodkiewicz, J. H. Eberly, *J. Opt. Soc. Am.*, **B2**(1985), 458.
[16] I. Mondas, D. B. Popovic, *J. Phys.*, **A26**(1993), 3313.
[17] Yue-gang Zhao, Bo-zang Li, *Chin. Phys. Lett.*, **14**(1997), 801.

THE PANCHARATNAM PHASE FOR THE JAYNES-CUMMINGS MODEL WITH TIME-DEPENDENT MODULATION

HOU BANG-PIN
(*Department of Physics, Sichuan Normal University, Chengdu* 610066, *China*)
(Received 10 January 2000; revised manuscript received 28 February 2000)

ABSTRACT

Based on the $SU(2)$ group for the Jaynes-Cummings model with time-dependent modulation, we obtain its pancharatnam phase and analyse the phase changes during the whole process from adiabatically switching on to switching off of the interaction of the atom with the field. Finally, we discuss the results in the semiclassical approximation.

Keywords: Jaynes-Cummings model with time-dependent modulation, Pancharatnam phase, $SU(2)$ group
PACC: 0365, 4250