非弹性蹦球的动力学研究*

周志刚[1)] 石玉仁[1)2)†] 刘丛波[1)] 王光辉[1)] 杨红娟[1)]

1) (西北师范大学物理与电子工程学院, 甘肃省原子分子物理与功能材料重点实验室, 兰州 730070)

2) (中国科学院物理研究所, 北京 100190)

(2012 年 2 月 20 日收到; 2012 年 4 月 10 日收到修改稿)

对有空气阻尼的非弹性蹦球的动力学行为进行了数值模拟, 通过改变控制参数 V_0, 蹦球的运动表现出倍周期分岔、混沌等非线性现象, 采用 0-1 检测法和最大 Lyapunov 指数证实了这种现象.

关键词: 非弹性蹦球, 0-1 检测法, 混沌, 颗粒物质

PACS: 05.10.–a, 45.50.–j

1 引 言

蹦球最早是费米为了解释宇宙射线的起源而提出的一个理想化物理模型 [1,2]. 近年来, 人们在研究颗粒物质时发现振动颗粒床中的颗粒出现了许多奇特的现象, 如振动颗粒的对流 [3−5]、振动斑图 [6,7]、巴西果效应 [8−11]、三明治分离现象 [12−15] 等. 振动颗粒床中的颗粒体系可以看作是很多蹦球的耦合 [16], 这种耦合非常复杂, 相关研究也促进了蹦球问题的进一步研究 [17,18].

蹦球是一个简单的系统, 但却包含着复杂的非线性现象 [19−24]. 由于蹦球与板间碰撞恢复系数的不同, 蹦球和板间的碰撞可分为完全弹性、非弹性、完全非弹性. 对有空气阻尼的完全弹性蹦球问题, Naylor[25] 做了深入研究, 发现无论板上方空气是静止或是随着板运动, 蹦球的运动都表现出倍周期分岔、混沌等复杂的非线性现象; 并且发现空气阻尼变大时, 蹦球分岔图将变得更复杂. 对无空气阻尼非弹性蹦球问题, Everson[26] 采用最大 Lyapunov 指数和蹦球分岔图的方法进行了研究, 找出了蹦球做混沌运动的区域. 姜泽辉等 [27,28] 对振动板上蹦球的完全非弹性碰撞做了研究, 发现在无空气阻尼和完全非弹性碰撞下, 蹦球的 “着陆” 速度、蹦球在空中运动的时间都只受到约化加速度的影响, 且都随着约化加速度的变化出现了倍周期分岔现象, 文中还指出, 这种分岔不断级联至密集区, 在密集区中存在分形结构, 但却并没有出现混沌. Gilet 等 [29] 又研究了完全非弹性蹦球的分岔图, 指出其结构非常复杂. 本文采用数值模拟的方法对有空气阻尼的非弹性蹦球的运动行为做了研究, 结果表明: 蹦球的运动状态随着板振动的最大速度 V_0 的变化也出现了倍周期分岔和混沌等现象; 并且还发现蹦球的运动对碰撞恢复系数很敏感, 当碰撞恢复系数增大时, 周期运动的蹦球达到稳定需要的碰撞次数将更多.

2 模型及模拟结果

蹦球模型是由做周期性振动的平板和蹦球组成, 板的运动规律由下式描述:

$$V(t) = V_0 \cos(\omega t), \tag{1}$$

V_0, ω 分别为板振动的最大速度和振动角频率. 蹦球在板上方运动, 它与板发生非弹性碰撞, k 为碰撞恢复系数 ($0 < k < 1$); 在空中它还受到与其速度成

* 国家自然科学基金 (批准号: 11047010) 和教育部科学技术研究重点项目 (批准号: 209128) 资助的课题.

† E-mail: shiyr@nwnu.edu.cn

© 2012 中国物理学会 Chinese Physical Society

正比的空气阻尼力的作用, 阻尼系数为 η; 蹦球的运动可用下式描述:

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= t_n + \Delta t_n, \\ v_{n+1} &= -kv' + (1+k)V_0 \cos(\omega t_{n+1}), \end{aligned} \tag{2}$$

其中下标 n, $n+1$ 分别标记蹦球与板的第 n 次和 $n+1$ 次碰撞. Δt_n 为蹦球第 n 次空中飞行时间, v' 为蹦球与板发生第 $n+1$ 次碰撞时的速度; v_{n+1} 为蹦球第 $n+1$ 次碰撞弹起时的速度.

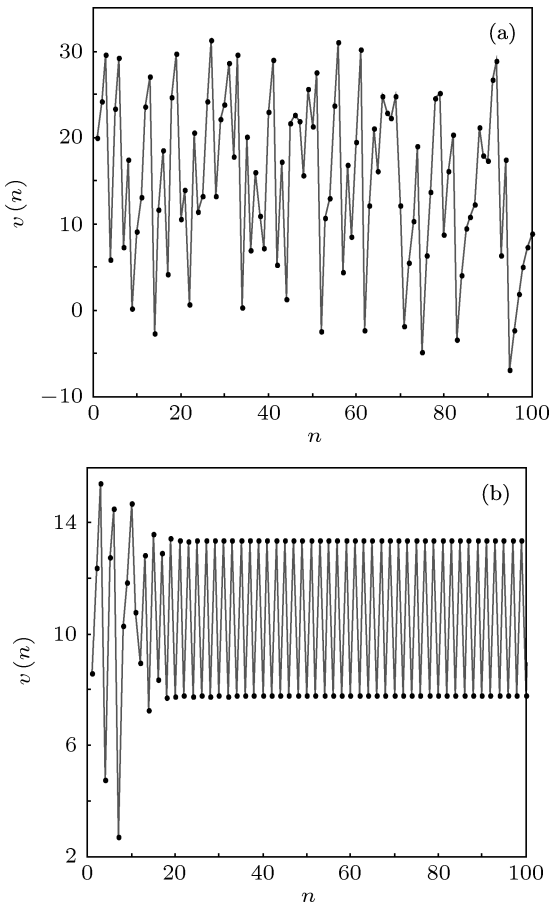


图 1 蹦球速度图, 计算中选取 $k = 0.8$, $\alpha = 39.2$, 两种情形下蹦球的初始条件 $v_1 = 2V_0$, $\phi_1 = 0$ (a) 混沌状态, $\omega = \pi$, $V_0 = 10$; (b) 周期运动状态, $\omega = \pi$, $V_0 = 4.3$

蹦球第 n 次弹起后, 在空中的速度为

$$v = C\mathrm{e}^{-\frac{\eta}{m}(t-t_n)} - \alpha, \tag{3}$$

其中 $\alpha = \dfrac{m}{\eta}g$; $v|_{t=t_n} = v_n$ 为初始条件, 则蹦球与板第 $n+1$ 次碰撞时的速度

$$v' = (v_n + \alpha)\mathrm{e}^{-\frac{g}{\alpha}\Delta t_n} - \alpha. \tag{4}$$

蹦球与板再次相碰时, 两者处于同一位置, 有

$$\begin{aligned} &A\sin\omega(\Delta t_n + t_n) - A\sin(\omega t_n) \\ &= \frac{\alpha}{g}(v_n + \alpha)\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{g}{\alpha}\Delta t_n}\right) - \alpha \cdot \Delta t_n, \end{aligned} \tag{5}$$

其中 $A = V_0/\omega$ 为板振动振幅. 通过数值方法得到 Δt_n, (2) 式可化为

$$\begin{aligned} \phi_{n+1} &= \phi_n + \Delta\phi_n, \\ v_{n+1} &= -k\left[(v_n + \alpha)\mathrm{e}^{-\frac{g}{\alpha}\Delta t_n} - \alpha\right] \\ &\quad + (1+k)V_0\cos\phi_{n+1}, \end{aligned} \tag{6}$$

其中 $\Delta\phi_n = \omega\Delta t_n$. 下面利用方程 (5) 和 (6) 对蹦球的运动进行数值模拟.

图 1 和图 2 分别显示了不同的 V_0 下, 蹦球的运动出现了混沌和周期运动. 图 1(a) 中蹦球从板上的反弹速度在不断变化, 并随着碰撞次数的增加出现杂乱, 蹦球处于混沌状态; 图 1(b) 中蹦球在板上蹦跳几十次后, 其速度趋于稳定, 此时蹦球处于周期运动状态, 运动周期是板振动周期的整数倍. 在相图 (图 2) 中可清楚地看到, 处于周期运动的蹦球最终在两个稳定状态间运动.

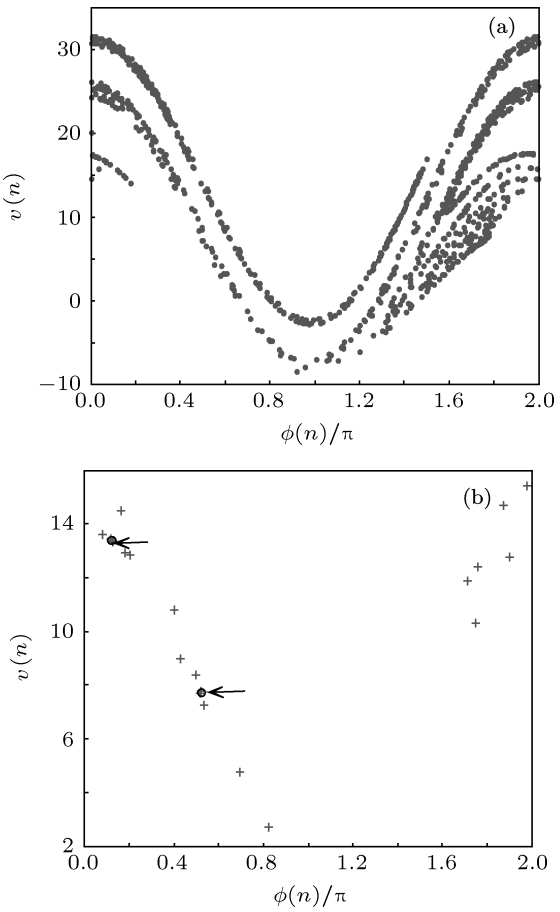


图 2 蹦球运动相图 (a), (b) 分别对应混沌状态和周期运动状态, 参量取值和图 1 相同; 图 (b) 中箭头所指为蹦球在相空间中稳定运动时的状态

当 V_0 在一定范围内变化时, 蹦球的速度将出现分岔行为, 如图 3 所示. 可以看出蹦球的运动速度随着 V_0 的变化出现了倍周期分岔, 然后级联直至很密集的混沌区域; 这些密集的混沌区并非完全连成一片, 而是中间会出现狭窄的周期窗口, 并且这些周期窗口中也出现了一系列相类似的分岔现象, 它们具有分形结构特征 [27]. 分岔图的复杂度受各种控制参数的影响, 在模拟中调小参量 α 取值, 或是增大板运动的角频率时, 分岔图都会表现得更复杂, 这时 V_0 很小时就能够出现倍周期分岔并不断级联至混沌密集区, 文献 [25] 中增大空气阻尼, 蹦球的分岔图也变得复杂.

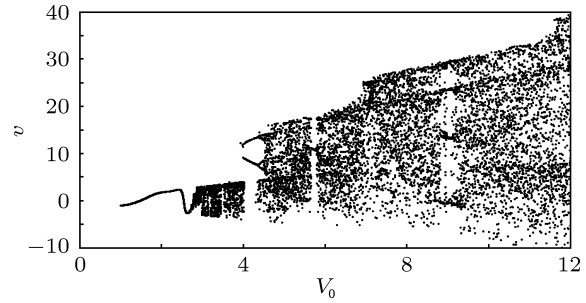


图 3 蹦球速度分岔图

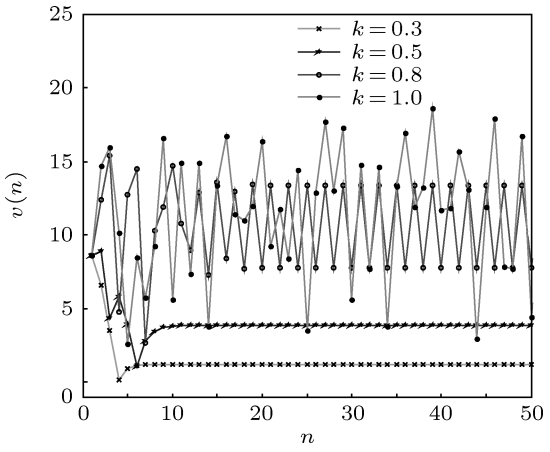


图 4 不同碰撞系数对蹦球弹起速度的影响 模拟中板的参数为 $\omega=\pi, V_0=4.3$, 蹦球运动的初始条件为 $v_1=2V_0, \phi_1=0$

在数值模拟过程中, 我们还对碰撞恢复系数对蹦球运动的影响做了数值模拟. 图 4 中是对不同碰撞恢复系数下蹦球以相同的初速度弹起后的速度图; 碰撞恢复系数较大时, 蹦球达到稳定时所用碰撞次数多, $k=0.3, 0.5, 0.8$ 时, 蹦球分别要 10, 16, 27 次碰撞才达到稳定; 当 $k=1$ 时, 蹦球在模拟中都没达到稳定, 可能处于混沌运动状态.

3 分析与讨论

3.1 Lyapunov 指数分析

为检测蹦球的运动状态是否为混沌运动, 通常考察系统的最大 Lyapunov 指数 λ_1. 当 λ_1 为正数时, 说明相空间中两临近的轨迹之间以 λ_1 指数速率分离; 当 λ_1 为负数时, 两相临轨迹相互靠拢. 本文采用 Bennetin 方法 [30] 计算最大 Lyapunov 指数.

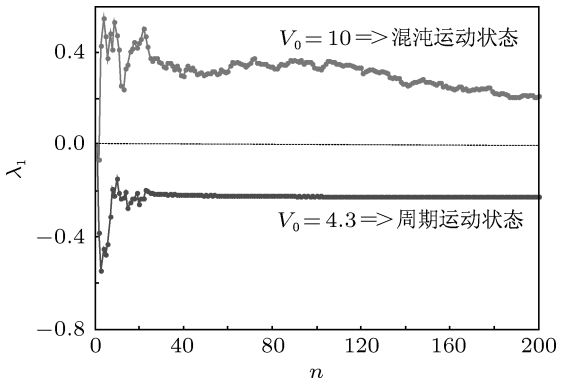


图 5 $V_0=10$ 和 $V_0=4.3$ 时的最大 Lyapunov 指数

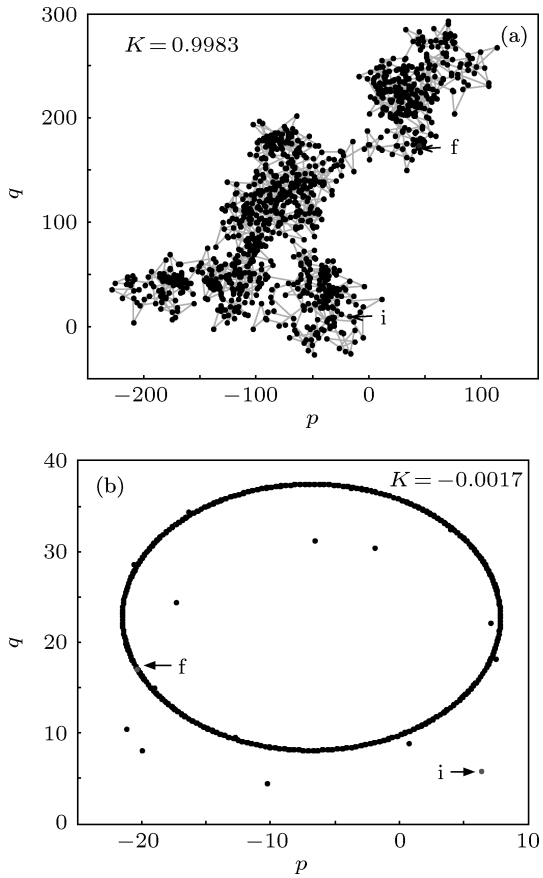


图 6 蹦球在 (p, q) 空间的相图, 两图中箭头所指并标有 i, f 的点分别为初始点、终止点 (a) $V_0=10$, 蹦球混沌运动图; (b) $V_0=4.3$, 蹦球周期运动图

图 5 给出了在不同 V_0 条件下蹦球的 Lyapunov 指数. 从图 5 可看出: $V_0 = 4.3$ 时, $\lambda_1 < 0$, 表明蹦球做周期运动; $V_0 = 10$ 时, $\lambda_1 > 0$, 蹦球处于混沌运动状态. 这与图 1 直观表明的结果相符.

3.2 0-1 检测

下面采用 0-1 检测 [31,32] 来验证系统是否发生混沌. 这种方法不像 Lyapunov 指数分析那样需要知道系统的动力学方程, 而且对系统的维数也没有要求. 输入待检测的时间序列, 理论上结果是 0 或 1, 但一般情况下当结果非常接近 1 时, 即可判断为混沌运动了.

相空间 (ϕ_n, v_n) 中的混沌解 (图 2(a)), 在 (p, q) 空间中对应布朗运动, 如图 6(a); 而相空间中的周期解 (图 2(b)), 在 (p, q) 空间中对应一个环, 如图 6(b) 所示. 算得 $V_0 = 10$ 时 K 值为 0.9983, 接近 1, 表明系统处于混沌状态; $V_0 = 4.3$ 时, K 值为 -0.0017, 接近 0, 表明系统处于周期运动状态.

4 结 论

对存在空气阻尼的非弹性蹦球的动力学行为进行了数值模拟, 表明在此种情形下蹦球的运动也具有复杂的非线性特征. 应用 0-1 检测法和最大 Lyapunov 指数都证实了随着板速度幅 V_0 的增加, 非弹性蹦球的运动出现了倍周期分岔、混沌现象. 另外在数值模拟中我们还观察到, 碰撞恢复系数较大时, 蹦球的运动要更复杂些.

[1] Fermi E 1949 *Phys. Rev*. **75** 1169

[2] Lichtenberg A J, Liebermen M A, Cohen R H 1980 *Physica* D **1** 291

[3] Jaeger H M, Nagel S R, Bringer R P 1996 *Rev. Mod. Phys.* **68** 1259

[4] Evesque P, Rajchenbach J 1989 *Phys. Rev. Lett.* **62** 44

[5] Knight J B , Jaeger H M, Nagel S R 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 3728

[6] Aoki K M, Akiyama T, Maki Y, Watanabe T 1996 *Phys. Rev.* E **54** 874

[7] Melo F, Umbanhowar P, Swinney H L 1994 *Phys. Rev. Lett*. **72** 172

[8] Visscher W M, Bolsterli M 1972 *Nature* **239** 504

[9] Hong D C, Quinn P V, Luding S 2011 *Phys. Rev. Lett.* **86** 3423

[10] Quinn P V, Hong D C 2000 *Phys. Rev.* E **62** 8295

[11] Zhao Y Z, Jiang M Q, Zheng J Y 2009 *Acta Phys Sin.* **58** 1812 (in Chinese) [赵永志, 江茂强, 郑津洋 2009 物理学报 **58** 1812]

[12] Jiang Z H, Lu K Q, Hou M Y, Chen W, Chen X J 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2244 (in Chinese) [姜泽辉, 陆坤权, 厚美瑛, 陈唯, 陈相君 2003 物理学报 **52** 2244]

[13] Shi Q F, Yan X Q, Hou M Y, Niu X J, Lu K Q 2003 *Chin. Sci. Bull.* **48** 328 (in Chinese) [史庆藩, 阎学群, 厚美瑛, 牛小娟, 陆坤权 2003 科学通报 **48** 328]

[14] Liang X W, Li L S, Hou Z G, Lü Z, Yang L, Sun G, Shi Q F 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2300 (in Chinese) [梁宣文, 李粮生, 侯兆国, 吕震, 杨雷, 孙刚, 史庆藩 2008 物理学报 **57** 2300]

[15] Sun Q C, Wang G Q 2009 *Granular Material Mechanics Introduction* (Beijing: Science Press) pp7–10 (in Chinese) [孙其诚, 王光谦 2009 颗粒物质力学导论 (北京: 科学出版社) 第 7—10 页]

[16] Giusepponi S, Marchesoni F, Borromeo M 2005 *Physica* A **351** 142

[17] Warr S, Cooke W, Ball R C, Huntley J M 1996 *Physica* A **231** 551

[18] Linz S J, Hänggi P 1994 *Phys. Rev.* E **50** 3464

[19] Kowalik Z J, Franaszek M, Pierarński P 1988 *Phys. Rev.* A **37** 4016

[20] Pierarński P, Malécki J 1986 *Phys. Rev.* A **34** 582

[21] Paskota M 1998 *Chaos Soliton Fract.* **9** 323

[22] Franaszek M, Isomäki H M 1991 *Phys. Rev.* A **43** 4231

[23] Tufillaro N B 1994 *Phys. Rev.* E **50** 4590

[24] Holmes P J 1982 *J. Sound Vibration* **84** 173

[25] Naylor M A 2002 *Phys. Rev.* E **66** 057201

[26] Everson R M 1986 *Physica* D **19** 355

[27] Jiang Z H, Zhao H F, Zheng R H 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 7579 (in Chinese) [姜泽辉, 赵海发, 郑瑞华 2009 物理学报 **58** 7579]

[28] Jiang Z H, Zheng R H, Zhao H F, Wu J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3727 [姜泽辉, 郑瑞华, 赵海发, 吴晶 2007 物理学报 **56** 3727]

[29] Gilet T, Vandewalle N, Dorbolo S 2009 *Phys. Rev.* E **79** 055201

[30] Bennetin G, Galgani L, Giorgilli A, Strelcyn J M 1978 *C. R. Acad. Sc. Paris* A **268** 431

[31] Gottwald G A, Melbourne I 2004 *Proc. R. Soc. Lond.* A **406** 603

[32] Litak G, Syta A, Budhraja M, Saha L M 2009 *Chaos Soliton. Fract.* **42** 1511

Study on the dynamics of an inelastic bouncing ball*

Zhou Zhi-Gang[1)] Shi Yu-Ren[1)2)†] Liu Cong-Bo[1)]
Wang Guang-Hui[1)] Yang Hong-Juan[1)]

1) (*Key Laboratory of Atomic and Molecular Physics and Functional Materials of Gansu Province, College of Physics and Electronic Engineering, Northwest Normal University, Lanzhou* 730070*, China*)

2) (*Institute of Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100190*, China*)

(Received 20 February 2012; revised manuscript received 10 April 2012)

Abstract

Considering the case of air damping, we use the method of numerical simulation to study dynamic behavior of inelastic bouncing ball. By changing the value of control parameter V_0, the motion of the bouncing ball exhibits nonlinear phenomena of period doubling bifurcation, chaos, etc. These phenomena are confirmed by both 0-1 test and maximal Lyapunov exponent.

Keywords: inelastic bouncing ball, 0-1 test, chaos, granular material

PACS: 05.10.–a, 45.50.–j

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11047010) and the Foundation for Key Program of Ministry of Education, China (Grant No. 209128).

† E-mail: shiyr@nwnu.edu.cn