

楊諾賽波動方程作為原子核或元 粒子理論的數學形式*

朱 洪 元

(中國科學院物理研究所)

提 要

本文指出楊諾賽波動方程作為電子的個體理論的困難；指出這一類型波動方程可以作為原子核系綜理論的數學形式，也可以作為元粒子系綜理論的數學形式。本文並討論了這一類型波動方程的第二級量子化問題。

蘇聯物理學者 Д. И. Блохинцев^[1] 和 Я. И. Френкель^[2] 指出，量子力學是關於微觀客體的系綜的性質和運動的理論，並不是關於微觀客體的個體的性質和運動的理論。因此提出了尋求關於微觀客體的個體理論問題。楊諾賽提議，將薛定諤波動方程加以非線性的擴充，使之成為電子的個體理論^[3]。本文討論了楊諾賽所提出的這一類型方程的物理意義，指出將其作為電子的個體理論的困難，指出這一類型波動方程可以作為原子核系綜理論或元粒子系綜理論的數學形式，討論了這一類型波動方程的第二級量子化問題。

由於許多讀者對楊諾賽所提出的波動方程不熟悉，因此在本文第一節中將該波動方程作簡單的介紹，並同時指出作為電子個體理論將遭遇到的帶有普遍性質的困難。在第二節中從核子力的介子場論中推得相對論性的楊諾賽波動方程，討論其作為原子核系綜理論的數學形式的可能性。在第三節中討論了楊諾賽波動方程作為元粒子系綜理論的數學形式的可能性。在第四節中討論了楊諾賽波動方程的第二級量子化問題，利用泡利^[4]的考慮方法，指出楊諾賽波動方程具有滿足雅可比恆等式的，不隨時間而變的雙線性協變式。因此有可能將楊諾賽波動方程寫成哈密頓形式。在第五節中討論了楊諾賽波動方程的總能量和總動量以及其和楊諾賽波動方程第二級量子化之間的關係。

*1955 年 10 月 4 日收到。

一. 楊諾賽的波動方程及其作為電子的個體理論的困難

描述自由電子的薛定諤波動方程是：

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{2} \Delta \psi; \quad (1)$$

其中以 $\hbar, c$ 及電子質量 m 為度量單位。楊諾賽提出將式 (1) 加以非線性的擴充，使之成為：

$$\left. \begin{aligned} i \frac{\partial \psi}{\partial t} &= -\frac{1}{2} \Delta \psi + \alpha^2 O(x) \psi, \\ O(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} P(x-x') \psi^*(x') \psi(x') dx'^3; \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中 x 代表電子的空間坐標， $P(x-x')$ 為一隨 $|x-x'|$ 而增加的單調函數， α 為一微小之常數， dx'^3 為空間體積元。

式 (2) 中之 $P(x-x')$ 類似一種波內部的內聚力，使波包不能無限制的擴散。楊諾賽以此種不會無限制擴散的波包反映個別的自由電子，而以式 (2) 為電子的個體理論的出發點。楊諾賽舉例，令

$$P(x-x') = \frac{1}{2} (x-x')^2, \quad (3)$$

以之代入式 (2)，得

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \psi(x)}{\partial t} &= -\frac{1}{2} \Delta \psi(x) + \frac{1}{2} \alpha^2 x^2 \psi(x) \\ &\quad - \alpha^2 x \int_{-\infty}^{\infty} x' \psi^*(x') \psi(x') dx'^3 \psi(x) + \frac{\alpha^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x'^2 \psi^*(x') \psi(x') dx'^3 \psi(x). \end{aligned} \quad (4)$$

將波包的中心作為坐標的原點，則式 (4) 成為

$$\left. \begin{aligned} i \frac{\partial \psi}{\partial t} &= -\frac{1}{2} \Delta \psi + \frac{\alpha^2}{2} x^2 \psi + \frac{\alpha^2}{2} F \psi, \\ F &= \int_{-\infty}^{\infty} x'^2 \psi^*(x') \psi(x') dx'^3. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式 (5) 之定態解和諧振子的波函數一樣，而其相應之能量為

$$E_n = \left(\frac{3}{2} n + \frac{3}{4} \right) \alpha, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

楊諾賽認為：此種不會擴散的波函數即可以用來代表自由電子。

楊諾賽將式 (2) 擴充成為

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{2} \Delta \psi + V \psi + \alpha^2 O \psi, \quad (7)$$

以之為在勢場 $V(\mathbf{x})$ 中運動的電子的個體理論。

但是以式 (2) 和式 (7) 做為電子的個體理論的出發點是有困難的。為了能從式 (7) 得出和實驗數值相符的原子能級， α 必須是很小的常數。否則式 (7) 的結果過份地修改了薛定諤波動方程的結果，便將不再和實驗結果符合。另一方面，根據式 (6)，電子有一系列的激發態，彼此間的距離甚小，與 α 的數量級相同。由於楊諾賽的假定必須考慮到在很高的能量交換過程中，電子不會破裂，這一結論和 $O(\mathbf{x})$ 的具體形式無關，改變 $O(\mathbf{x})$ ，祇能改變這些激發態的能量分佈，不能使這些激發態不存在。因此這類理論的普遍結果之一是：電子具有一系列相距極近的激發態。但是這一結果又將導致嚴重的理論後果。這種相距極近的激發態的存在將使泡利不相容原理的實際作用大為減弱。原子中將可以存在超過二個以上的 K 電子。金屬中電子的簡併度將大為減輕。因此在原子結構、金屬比熱等等一系列的問題上，式 (2) 和式 (7) 將引致錯誤的結論。

另一方面，從核子-介子場論中消去介子場，也可以得到楊諾賽提出這一類型的方程。因此有可能將這一類型的波動方程作為原子核系綜理論的數學形式。

二． 楊諾賽波動方程作為原子核系綜理論的數學形式

原子的形成是由於電子之間以及原子核和電子間存在着電磁力。從古典力學和古典電磁學到達原子結構的量子理論可以通過二條不同的路徑。一條是從洛倫茲方程和麥克斯韋方程中消去電磁場而得到電子間的相互作用庫侖力，然後將電子的運動方程量子化而得到薛定諤波動方程。另一條路徑是先將洛倫茲方程和麥克斯韋方程量子化，在量子化以後才將電磁場消去，也可以得到描述原子結構的薛定諤方程。

目前為了描述原子核現象而發展的核子力的介子場論，不論是哪一種近似法，都是用後一類方法。有可能先將介子場從運動方程中消去，然後將核子場的運動方程量子化，也能得到關於原子核結構和變化的近似理論。當然，由於核子力的力程很短，和長力程的庫侖力不同，核子在開始便必須當作波來處理，而不能當作質點來處理。為簡單計，今假定介子是中性的和標量的，介子和核子之間的相互作用也是標量的，則介子場和核子場的運動方程是：

$$(\square - \mu^2) \phi - g \bar{\psi} \psi = 0, \quad (8a)$$

$$\left(\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + M + g \phi \right) \psi = 0; \quad (8b)$$

其中 ψ 和 ϕ 各代表核子場和介子場, M 及 μ 代表核子和介子的質量, g 代表相互作用常數. 解 (8a), 得

$$\phi(x) = \phi_0(x) - g \int G(x-x') \bar{\psi}(x') \psi(x') dx'; \quad (9)$$

其中 x 代表時間-空間坐標, $\phi_0(x)$ 代表自由介子場, $G(x-x')$ 代表式 (8a) 之格林函數, dx' 代表時間-空間四維容積分元. 在能量轉化不大的原子核現象中不會有自由介子出現, 因此可令 $\phi_0(x)$ 等於零. 將 (9) 代入 (8b), 消去 ϕ 便得

$$\left(\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + M - g^2 \int G(x-x') \bar{\psi}(x') \psi(x') dx' \right) \psi(x) = 0. \quad (10)$$

從形式上看來, 式 (10) 是楊諾賽波動方程 (2) 的相對論性擴充. 但在實質上有一點差別. 在式 (2) 中 $P(x-x')$ 是隨 $|x-x'|$ 而無限增加的單調函數, 所以不可能有平面波或類似平面波的解. 式 (10) 的 $G(x-x')$ 則隨着離光錐面愈遠而趨於無窮小, 所以可以有平面波解. 今試求並討論式 (10) 的這種最簡單的解. 令

$$\psi = A u e^{i P_\mu x^\mu}, \quad (11)$$

其中 A 為波幅, u 為單位旋量. 將 (11) 代入 (10), 得

$$\left(i \gamma^\mu P_\mu + M - g^2 |A|^2 \langle u^* | \beta | u \rangle \int G(x-x') dx' \right) u = 0; \quad (12)$$

式 (12) 中之積分

$$\int G(x-x') dx' = \int G(-\xi) d\xi = \frac{1}{\mu^2}. \quad (13)$$

令

$$M' = M - \hbar \cdot \frac{g^2}{\mu^2} \cdot |A|^2,$$

$$\hbar = \langle u^* | \beta | u \rangle,$$

則式 (12) 成爲

$$\{ i \gamma^\mu P_\mu + M' \} u = 0. \quad (14)$$

式 (14) 之解爲衆所周知, 其重要結果是:

$$P_0^2 = E^2 = P^2 + M'^2. \quad (15)$$

由於

$$\hbar = \langle u^* | \beta | u \rangle = \frac{M'}{E},$$

故

$$M' = M - \frac{g^2 |A|^2}{\mu^2} \cdot \frac{M'}{E}. \quad (16)$$

式 (15) 和 (16) 的特點是：平面波所代表的粒子的質量不是 M 而是 M' ，隨着波幅的大小而改變。這是由於式 (10) 的非線性，疊加原理不復成立的緣故。我們可以將式 (10) 中的格林函數 $G(x - x')$ 當作核子之間的作用力。那末式 (16) 中的質量虧損

$$- \frac{g^2 |A|^2}{\mu^2} \cdot \frac{M'}{E} \quad (17)$$

便代表一束核子中由於核子間的相互作用而產生的每個核子的結合能。 $|A|^2$ 代表核子束中核子的密度。密度愈大，結合能也愈大。式 (17) 中的因數 g^2 代表相互作用強度的影響，因數 $\frac{1}{\mu^2}$ 代表相互作用力程的影響，因數 $\frac{M'}{E}$ 代表斐茲傑惹收縮的影響。在隨着核子運動的坐標中觀察，核子束中核子的密度不是 $|A|^2$ 而是 $|A|^2 \sqrt{1 - v^2}$ ；其中 v 代表核子束中核子的速度。

但是根據式 (17)，在一束核子中每個核子的結合能隨着密度 $|A|^2$ 而增加，沒有任何限制，因此不能解釋飽和現象。解釋飽和現象的簡單辦法是引入多體力。我們可以在式 (10) 中加入如：

$$\int F(x, x', x'') \bar{\psi}(x'') \psi(x'') \bar{\psi}(x') \psi(x') \psi(x) dx' dx'' \quad (18)$$

之類形式的項。 $F(x, x', x'')$ 代表處於 x, x' 和 x'' 的三個核子間的三體力。可以想見，式 (16) 將因之而改變。質量虧損將不僅是由式 (17) 代表，另外必有和

$$(AA^*)^2 \quad (19)$$

成正比例的項。假使這一項的係數是正的而不是負的，那末在 $|A|^2$ 大過某一數值以後，核子束中每一個核子的結合能非但不會增加，而且反會減少。

我們也可以引入具有交換力性質的格林函數 $G(x - x')$ 來解釋飽和現象。在這樣的解釋中泡利的不相容原理佔着關鍵的地位。飽和現象便成為將式 (10) 按費密統計法第二級量子化的結果。

此外，為了使核子場呈現粒子性，使能級呈現分立性，也必須將式 (10) 第二級量子化。假使不將波幅 A 量子化，那末 $|A|^2$ 便可以取連續的值。這樣便無法解釋結合能 (17) 的分立性。

若式 (10) 中的 g 等於零，則第二級量子化後核子場便呈現粒子性。其態反映彼此間沒有相互作用的核子系統。若 g 不等於零，則第二級量子化以後也呈現粒子性，

但是其態便反映彼此間存在着相互作用的核子系統。其中的分立態代表各個原子核，而連續態則代表各種原子核反應，包括共振現象。

必須指出，式 (10) 中祇包括了核子間的相互作用，並不包括核子和電磁場，電子-正子場，中微子場之間的相互作用。因此式 (10) 不能解釋原子核的電磁性質， γ 和 β 衰變現象。如本節開始時所指出，式 (10) 也不能用來處理牽涉到自由介子的原子核現象。

三. 楊諾賽波動方程作為元粒子系綜理論的數學形式

當然，我們不一定要用中性標量介子作為核子力的傳遞者。格林函數 $G(x - x')$ 可以採取許多不同的形式而不影響我們在上節所作的定性結論。

假使式 (10) 中 M 大而 g 小，則分立態的靜能雖不是 M 的嚴格整數倍，但基本上却是 M 的整數倍。在這一情況下我們可以說：這些態代表由質量等於 M 的粒子組成的客體。其靜質量和 M 的某一整數倍之間有微小的差異。這一微小的差異代表粒子間的結合能。原子核就是這樣的客體。原子核的結合能和靜質量比較起來是微小的。

假使式 (10) 中 M 小而 g 大，則分立態的靜能和 M 的整數倍之間毫無相似之處。 M 在決定分立態的靜能時祇起若干微擾的作用。在這樣的情況下我們便不能說：分立態代表由質量等於 M 的粒子組成的客體。 ψ 代表一種場，這種場有許多靜質量不同的量子，而且這些靜質量數值之間並沒有簡單的整數倍關係。這樣，式 (10) 在第二級量子化以後便可以作為元粒子理論的數學形式。

式 (10) 在第二級量子化以後，場 ψ 的量子不僅可以具有不同的質量，也可以具有不同的自旋和不同的壽命。正如原子核可以具有不同的自旋和壽命一樣。式 (10) 的連續能譜中可能有共振的現象。這種共振現象在原子核理論中代表原子核的似穩態，在元粒子理論中代表不穩定的粒子。從共振能級寬度可以推知原子核似穩態或元粒子的平均壽命。

在宇宙線中已經發現了許多不穩定的粒子。這許多粒子有一特點：產生的截面大，與之相較，平均壽命便顯得長得難於解釋。曾經有人企圖解釋這一特點。例如：沛依士認為^[5] 這些粒子的產生和衰變是通過不同的相互作用而進行的，因此產生截面和平均壽命之間並沒有直接的必然聯系。

式 (10) 可以用另一種方式來解釋這一特點。我們可以採用一種具有勢壘的格林函數 $G(x - x')$ 。假使變化過程的能量很高，高於格林函數的勢壘，那末變化過程便

不大受勢壘的阻礙而得以迅速進行。假使變化過程的能量很低，低於格林函數的勢壘，那末變化必須藉隧道效應透過勢壘而進行，祇能進行得很慢。在宇宙線的碰撞中，能量變化常常非常大，因此各種粒子的產生截面也大。但是在衰變過程中能量變化要小得很多，因此衰變必須透過勢壘進行，壽命也就長了。

式(10)是狄喇克波動方程的擴充。也可以將普羅加波動方程作類似的擴充。實驗指出：產生核子力的場不僅具有 π 介子一種量子，還具有比 π 介子更重的量子，例如 τ 介子， κ 介子等等。湯川秀樹^[6]用普羅加波動方程來描述產生核子力的場可能過於簡單化，因此有將普羅加波動方程加以擴充的必要。如式(10)中的擴充也是一種可能的擴充方式。

曾經有許多人建造元粒子的理論，想用一種場將許多元粒子概括進去。但是這些理論大都用增加場的自由度來達到這一目的。例如：湯川秀樹^[7,8]的非定域場不再是時空中一個點的函數，而是二個點的函數；薄普，沛依士^[9,10]的非定域作用量的理論引入了場量的高次微分；沛依士^[11]的理論將同位旋的空間加以擴充。式(10)之所以可以作為元粒子理論的數學形式，並不是由於增加了場的自由度，而是由於將場變為非線性的。

近來海森伯^[12,13]也討論了作為元粒子理論的非線性場。令式(10)中的 M 等於零，令 $G(x - x')$ 等於 $\delta(x - x')$ ，則式(10)就還原為海森伯所討論的非線性波動方程。這就是說：海森伯假定場的內聚力是 δ 型的。

四． 楊諾賽波動方程的第二級量子化和哈密頓形式

楊諾賽波動方程不僅屬於非線性的類型，而且屬於非定域相互作用類型。這一類型的一般的、不自相矛盾的第二級量子化方法尚未被找到。楊振寧和費爾特曼^[14]曾經提出了直接從運動方程出發進行第二級量子化的方法。費曼^[15,16]提出了直接從拉氏函數出發進行第二級量子化的方法。從形式上看來，這類方法比哈密頓形式量子化方法更為廣泛。但在實際上用這類方法去處理非哈密頓形式的理論，却常遇到具有基本性質的困難。量子力學的基本原理之一是：在薛定諤表示中不同時間的波函數由么正變換聯繫起來，在海森伯表示中同一力學量在不同時間的數學形式由么正變換聯繫起來。這一原理一方面反映了幾率守恆，另一方面反映了力學量的本徵值不隨時間而變。但是楊振寧和費爾特曼的量子化方法以及費曼的量子化方法都不能一定保證滿足這一要求^[17,18]。當然仍值得研究，假使我們放棄波函數的存在，祇假定 S 矩陣的存在，是否有可能將他們的量子化方法加以擴充而應用到非哈密頓形式的理論上去，而 S 矩陣

又同時滿足么正條件。

另一方面，泡利指出：有可能將布洛欣采夫^[19]，麥克麥納斯^[20]等所提出的非定域相互作用的電動力學還原為哈密頓形式。應用泡利的考慮方法可以指出：也有可能將楊諾賽波動方程還原為哈密頓形式。從楊諾賽波動方程可以推出不隨時間而變的雙線性協變式。而這一雙線性協變式又滿足雅可比恆等式。根據賴-孔尼格斯^[21]的定理，就有可能將楊諾賽波動方程還原為哈密頓形式。

令 $D\psi$ 和 $\delta\psi$ 代表二個各自獨立的場量 ψ 的變更。將式 (10) 加以 δ 變更，然後乘以 $D\bar{\psi}(x)$ ，便得到：

$$\begin{aligned} D\bar{\psi}(x) \left\{ \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + M \right\} \delta\psi(x) \\ = g^2 D\bar{\psi}(x) \int dx' G(x-x') \left\{ \delta\bar{\psi}(x') \psi(x') \psi(x) \right. \\ \left. + \bar{\psi}(x') \delta\psi(x') \psi(x) + \bar{\psi}(x') \psi(x') \delta\psi(x) \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

將式 (10) 的互軛式加以 D 變更，然後乘以 $\delta\psi(x)$ ，並注意格林函數 $G(x-x')$ 是實函數，便得到：

$$\begin{aligned} \left\{ -\gamma^\mu \frac{\partial D\bar{\psi}(x)}{\partial x^\mu} + M D\bar{\psi}(x) \right\} \delta\psi(x) \\ = g^2 \int dx' G(x-x') \left\{ D\bar{\psi}(x) \bar{\psi}(x') \psi(x') \right. \\ \left. + \bar{\psi}(x) D\bar{\psi}(x') \psi(x) + \bar{\psi}(x) \bar{\psi}(x') D\psi(x') \right\} \delta\psi(x). \end{aligned} \quad (21)$$

將式 (20) 和 (21) 相減，並按三維空間體積元 $d\mathbf{x}^3$ 積分，並假定在無窮遠處 ψ 趨於零，便得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[-i \int D\bar{\psi}(x) \gamma_4 \delta\psi(x) d\mathbf{x}^3 - \frac{g^2}{2} \int G(x''-x') \epsilon(t-t') d\mathbf{x}' d\mathbf{x}'' \times \right. \\ \times \left\{ \psi(x') \psi(x'') D\bar{\psi}(x'') \delta\bar{\psi}(x') + \bar{\psi}(x') \psi(x'') D\bar{\psi}(x'') \delta\psi(x') \right. \\ \left. \left. - \bar{\psi}(x'') \psi(x') D\bar{\psi}(x') \delta\psi(x'') - \bar{\psi}(x'') \bar{\psi}(x') D\psi(x') \delta\psi(x'') \right\} \right] = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

其中 $\epsilon(t) = 1$ ，設 $t > 0$ ； $\epsilon(t) = -1$ ，設 $t < 0$ 。將式 (22) 中之變更 D 和 δ 交換，將所得的新方程從式 (22) 中減去，並引入符號

$$(DA, \delta B) = DA \cdot \delta B - \delta A \cdot DB, \quad (23)$$

便得：

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{S}(D, \delta) = 0,$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}(D, \delta) = & -i \int dx^3 (D\bar{\psi}(x), \gamma_4 \delta\psi(x)) \\
& - \frac{g^2}{2} \int G(x''-x') \epsilon(t-t'') dx' dx'' \left\{ \psi(x') \psi(x'') (D\bar{\psi}(x''), \delta\bar{\psi}(x')) \right. \\
& + \bar{\psi}(x') \psi(x'') (D\bar{\psi}(x''), \delta\psi(x')) - \bar{\psi}(x'') \psi(x') (D\bar{\psi}(x'), \delta\psi(x'')) \\
& \left. - \bar{\psi}(x'') \bar{\psi}(x') (D\psi(x'), \delta\psi(x'')) \right\}. \quad (24)
\end{aligned}$$

$\mathfrak{S}(D, \delta)$ 是不隨時間而變的雙線性協變式。可以證明，這一雙線性協變式服從雅可比恆等式

$$d\mathfrak{S}(D, \delta) + D\mathfrak{S}(\delta, d) + \delta\mathfrak{S}(d, D) = 0; \quad (25)$$

其中 d, D, δ 為三個各自獨立的變更。因此有可能將楊諾賽波動方程還原為哈密頓形式。

但是在式 (24) 和 (25) 中出現屬於不同時間的場函數 ψ 。因此在這些式子中，變更 D 之間是相互依賴的，變更 δ 之間也是相互倚賴的。因此要將理論化為哈密頓形式，首先必須引入變換，使雙線性協變式中所有的變更都彼此互不依賴。這樣，就必須研究楊諾賽波動方程的起始條件和邊界條件問題。必須找到一系列物理量，它們在同一時間是彼此不相倚賴的，完全各自獨立的；另一方面，它們的值在某一時間已經確定以後，場在過去和未來的情況也就完全決定。當然，這些物理量在某一時間不必一定僅僅是在該時間的場函數 ψ 的泛函，完全可以也是其他時間的場函數 ψ 的泛函。事實上在非定域相互作用的場論中，重要的物理量常常決定於不同時間的場函數。在下節中討論的總能量和總動量就是例子。

這樣一系列的物理量是否存在，視格林函數的形式而定。這樣一系列物理量的存在無非意味着理論中存在着決定論性的因果律。要求格林函數保證決定論性因果律的存在，在物理意義上說來，並不是不合理的。

五. 總 動 量 和 總 能 量

泡利假定場函數在 $t \rightarrow \pm\infty$ 時趨於無窮小。在這假定的基礎上而進行的第二級量子化得到和勃洛赫^[22]的結果相同的結果。這樣的假定沒有充分的根據，因此引致不正確的結果。

我們假定格林函數 $G(x-x')$ 的形式使楊諾賽波動方程能夠還原為哈密頓形式，那末就可以尋找場的總動量和總能量 P_μ ，而令

$$i \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} = [P_\mu, \psi] = P_\mu \psi - \psi P_\mu. \quad (26)$$

維格納^[23]指出：式 (10) 和 (26) 合起來未必就能將對易定則完全確定下來。但是假定了式 (26)，至少能將對易定則的選擇範圍縮小。

由於在運動方程中和哈密頓函數中各算符的排列次序有重要意義，爲了確定算符排列的次序，我們從一個拉氏函數中將運動方程和總能量、總動量推導出來。令拉氏函數爲

$$L = - \int \bar{\psi}(x) \left(\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + M \right) \psi(x) dx + \frac{g^2}{2} \int \bar{\psi}(x'') \bar{\psi}(x') \psi(x') \psi(x'') G(x''-x') dx' dx'', \quad (27)$$

變更式 (27) 得：

$$\begin{aligned} \delta L = & - \int \delta \bar{\psi}(x) \left(\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + M \right) \psi(x) dx - \int \bar{\psi}(x) \left(\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + M \right) \delta \psi(x) dx \\ & + \frac{g^2}{2} \int G(x''-x') dx' dx'' \left\{ \delta \bar{\psi}(x'') \bar{\psi}(x') \psi(x') \psi(x'') \right. \\ & + \bar{\psi}(x'') \delta \bar{\psi}(x') \psi(x') \psi(x'') + \bar{\psi}(x'') \bar{\psi}(x') \delta \psi(x') \psi(x'') \\ & \left. + \bar{\psi}(x'') \bar{\psi}(x') \psi(x') \delta \psi(x'') \right\}, \quad (28) \end{aligned}$$

從式 (28) 得到下列的運動方程：

$$\left(\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + M \right) \psi(x) - \frac{g^2}{2} \int \bar{\psi}(x') \left\{ \psi(x'), \psi(x) \right\} G(x-x') dx' = 0, \quad (29a)$$

$$\left(-\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + M \right) \bar{\psi}(x) - \frac{g^2}{2} \int \left\{ \bar{\psi}(x), \bar{\psi}(x') \right\} \psi(x') G(x'-x) dx' = 0; \quad (29b)$$

其中符號 $\{ \}$ 代表反對易符號；並注意，由於對稱的理由， $G(x-x') = G(x'-x)$ 。

從式 (29) 中可以推導出場的總動量和總能量。將式 (29a) 乘以 $\frac{\partial \bar{\psi}(x)}{\partial x^\rho}$ ，將式 (29b) 乘以 $\frac{\partial \psi(x)}{\partial x^\rho}$ ，相加，使得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{\psi}(x)}{\partial x^\rho} \gamma^\mu \psi(x) - \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \frac{\partial \psi(x)}{\partial x^\rho} \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \delta_{\mu\rho} \left(\frac{\partial \bar{\psi}(x)}{\partial x^\nu} \gamma^\nu \psi(x) - \bar{\psi}(x) \gamma^\nu \frac{\partial \psi(x)}{\partial x^\nu} \right) + \delta_{\mu\rho} M \bar{\psi}(x) \psi(x) \right] \\ - \frac{g^2}{2} \int \left[\frac{\partial \bar{\psi}(x)}{\partial x^\rho} \bar{\psi}(x') \left\{ \psi(x'), \psi(x) \right\} G(x-x') \right. \\ \left. + \left\{ \bar{\psi}(x), \bar{\psi}(x') \right\} \psi(x') \frac{\partial \psi(x)}{\partial x^\rho} G(x'-x) \right] dx' = 0. \quad (30) \end{aligned}$$

將式 (30) 按三維空間體積元積分，並假定場函數在無窮遠處等於零，則得：

$$\frac{d}{dt} P_\mu = 0,$$

$$P_\mu = P_\mu^0 + P_\mu^{in};$$

其中

$$\begin{aligned} P_\mu^0 &= i \int dx^3 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{\psi}(x)}{\partial x^\mu} \gamma^4 \psi(x) - \bar{\psi}(x) \gamma^4 \frac{\partial \psi(x)}{\partial x^\mu} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \delta_{4\mu} \left(\frac{\partial \bar{\psi}(x)}{\partial x^\nu} \gamma^\nu \psi(x) - \bar{\psi}(x) \gamma^\nu \frac{\partial \psi(x)}{\partial x^\nu} \right) + \delta_{4\mu} M \bar{\psi}(x) \psi(x) \right], \quad (31) \\ P_\mu^{in} &= \frac{g^2}{4} \int dx' dx'' G(x''-x') \epsilon(t-t') \left[\frac{\partial \bar{\psi}(x'')}{\partial x''^\mu} \bar{\psi}(x') \left\{ \psi(x') \psi(x'') \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \bar{\psi}(x''), \bar{\psi}(x') \right\} \psi(x') \frac{\partial \psi(x'')}{\partial x''^\mu} \right]. \end{aligned}$$

P_μ 就是總能量和總動量。其中 P_μ^0 為“自由場”的總動量和總能量。 P_μ^{in} 則產生於場內部的內聚力。

P_μ 的特點是：它決定於不同時間的場函數。從核子力的介子場論看來，這一特點是不難理解的。因為某一瞬間的總動量和總能量不僅決定於該瞬間的核子場，也決定於該瞬間的介子場。在式 (10) 或 (29) 中已經將介子場消去。介子場的作用則通過過去和未來的核子場的情況而表現出來如式 (9)。

出於意外的是：通常自由核子場的解也滿足式 (29)，(31) 和 (26)。但如維格納所指出，這未必是式 (29)，(31) 和 (26) 唯一的解。應該研究，式 (29)，(31) 和 (26) 還具有哪些共同解。

式 (27) 並不是拉氏函數唯一可能的形式。我們可以假定拉氏函數的形式是

$$\begin{aligned} L &= - \int \bar{\psi}(x) \left(\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + M \right) \psi(x) dx \\ &\quad + \frac{g^2}{2} \int \bar{\psi}(x'') \psi(x'') G(x''-x') \bar{\psi}(x') \psi(x') dx' dx''. \end{aligned} \quad (32)$$

從式 (32) 得到的運動方程是：

$$\left(\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + M \right) \psi(x) = \frac{g^2}{2} \int \left\{ \bar{\psi}(x') \psi(x'), \psi(x) \right\} G(x-x') dx', \quad (33a)$$

$$\left(-\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + M \right) \bar{\psi}(x) = \frac{g^2}{2} \int \left\{ \bar{\psi}(x), \bar{\psi}(x') \psi(x') \right\} G(x'-x) dx'. \quad (33b)$$

從式 (33) 推得的總動量和總能量也和式 (31) 不同，是

$$P_\mu = P_\mu^0 + P_\mu^{in};$$

其中

$$P_\mu^{in} = \frac{g^2}{4} \int dx' dx'' G(x''-x') \epsilon(t-t') \left[\frac{\partial \bar{\psi}(x'')}{\partial x''^\mu} \left\{ \bar{\psi}(x') \psi(x'), \psi(x'') \right\} \right.$$

$$+ \left\{ \bar{\psi}(x') \psi(x'), \bar{\psi}(x'') \right\} \frac{\partial \psi(x'')}{\partial x''^{\mu}} \Bigg], \quad (34)$$

P_{μ}^0 則和式 (31) 中的 P_{μ}^0 一樣。

顯然,自由核子場的解並不滿足式 (33), (34) 和 (26)。因此不僅應該研究式 (33), (34) 和 (26) 具有哪些共同解;而且需要先研究式 (33), (34) 和 (26) 是否具有共同解,式 (33), (34) 和 (26) 之間是否存在着矛盾等問題。

參 考 文 獻

- [1] Блохинцев, Д. И., Основы квантовой механики, Москва, 1949.
- [2] Френкель, Я. И., Усп. физ. нау. **41** (1951), 110.
- [3] Jánossy, L., Acta Phys. Acad. Hung. **1** (1952), 423.
- [4] Pauli, W., Nuovo Cim. **10** (1953), 648.
- [5] Pais, A., Phys. Rev. **86** (1952), 663.
- [6] Yukawa, H., Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, **17** (1935), 48.
- [7] ———, Phys. Rev. **77** (1950), 219.
- [8] ———, Phys. Rev. **80** (1950), 1047.
- [9] Bopp, F., Ann. d. Phys. **38** (1940), 345.
- [10] Pais, A. and Uhlenbeck, G. E., Phys. Rev. **79** (1950), 145.
- [11] ———, Physica, **19** (1954), 869.
- [12] Heisenberg, W., Nachr. Akad. Gött. **8** (1953).
- [13] ———, Zs. f. Naturf. **9a** (1954), 292.
- [14] Yang, C. N. and Feldman, D., Phys. Rev. **79** (1950), 972.
- [15] Feynman, R. P., Phys. Rev. **80** (1950), 440.
- [16] ———, Rev. Mod. Phys. **20** (1948), 367.
- [17] Медведев, Б. В., ДАН, **100** (1955), 433.
- [18] Peierls, R. E., Proc. Roy. Soc. A **223** (1954), 468.
- [19] Блохинцев, Д. И., ЖЭТФ, **18** (1948), 566.
- [20] MacManus, H., Proc. Roy. Soc. A **195** (1948), 323.
- [21] Whittaker, E. T., Analytical Dynamics, Ch. X.
- [22] Bloch, C., D. Kgl. Danske. Vid. Sels. Math-fys. Medd. **27**, No. 8 (1952).
- [23] Wigner, E. P., Phys. Rev. **77** (1950), 711.

JANOSSY'S WAVE EQUATION AS A THEORY OF NUCLEI OR AS A THEORY OF ELEMENTARY PARTICLES

TZU HUNG-YÜAN

(Institute of Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

It is shown that the modified Schrödinger equation proposed by Janossy cannot describe the behavior of the electron correctly. However, it is further shown that the equation can be regarded as a model of a possible phenomenological theory of nuclei or as a model of a possible theory of elementary particles. The quantization of the equation is discussed.