物 理 學 報

第 12 卷 第 5 期 1956 年 9 月

高能電子對原子核彈性散射的一個近似計算法*

金 星 南

(中國科學院物理研究所)

一. 導 言

在高能電子對原子核彈性散射的現象中,我們不能把原子核作爲點電荷來處理,而必須把有關原子核結構的某些因素,如原子核半徑的大小與原子核內電荷分佈的情況,同時考慮進去.

這方面的實驗,首先是由萊曼 (Lyman) 等開始做的[1]. 他們用能量爲 20 Mev 的電子來做對鋁、銀、金等原子核的散射實驗. 在這種能量下的電子對原子核散射時,只能決定原子核半徑的大小,而不能決定原子核內電荷分佈的情況. 霍夫斯塔脫 (Hofstadter) 等[2] 利用直線電子加速器所發出的能量在 100 Mev—200 Mev 的電子研究了對原子核的彈性散射現象. 在這種能量下的彈性散射現象,不僅與原子核的半徑的大小有關,並且還與原子核內的電荷分佈情況有關. 這方面的實驗曾由葉尼 (Yennie)、拉文哈爾 (Ravenhall)、威爾遜 (Wilson)[3] 以及勃朗 (Brown)、愛爾頓 (Elton)[4] 用正確的數字計算分析過.

爲了對於高能電子對原子核的彈性散射實驗能獲得定性方面的了解,近似計算方法還是需要用到的. 希夫 (Schiff)[5] 與司密斯 (Smith)[6] 曾用波恩近似分析了高能電子對原子核的彈性散射. 巴朗速 (Baranger)[7] 與海姆司 (Heims)、葉尼、拉文哈爾[8] 用 WKB 近似分析了高能電子對原子核的彈性散射. 這樣高能的電子對原子核的散射,用波恩近似來計算,正確性是比較差的. WKB 近似計算是一種半古典的計算方法,用這種方法計算時,只有頭上很少幾個相移與對點電荷散射時的相移不同,而其餘的相移都與對點電荷散射時的相移相同.

在電子對原子核的散射過程中,電子的 S 波的相移改變當最爲顯著. 在我們這方

* 1956 年 5 月 14 日收到.

中国知网 https://www.cnki.net

法中,我們用變分法計算 S 波的相移,電子波的其餘部分對於散射截面所產生的效應則用波恩近似來計算.

我們用這方法計算了高能電子(能量約 125 Mev)對於汞原子核的彈性散射.

二. 高能電子的狄喇克方程

設電子的波函數 ψ 適合狄喇克方程:

$$(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p}+\beta m-V+E)\psi=0 \tag{1}$$

(在這方程中,我們取 $\hbar=c=1$, $\boldsymbol{\alpha}$ 與 β 爲四行四列的狄喇克矩陣),我們知道如果波函數 ψ 按照電子的軌角動量 l 分爲部分波,則具有軌角動量 l 的電子的部分波的波函數的徑向部分 $\frac{g_l(r)}{r}$ 與 $\frac{f_l(r)}{r}$ 的函數 $g_l(r)$ 與 $f_l(r)$ 應適合下列方程組[9]:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dr}g_l(r)-\frac{l+1}{r}g_l(r)+(E+m-V)f_l(r)=0,\\&\frac{d}{dr}f_l(r)+\frac{l+1}{r}f_l(r)-(E-m-V)g_l(r)=0.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

在 (2) 式中, $E=\sqrt{k^2+m^2}$, k 爲電子的動量. 當 $E\gg m$ 時,我們可把 (2) 式中的 m 略去,而寫爲

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dr}g_l(r)-\frac{l+1}{r}g_l(r)+(E-V)f_l(r)=0,\\&\frac{d}{dr}f_l(r)+\frac{l+1}{r}f_l(r)-(E-V)g_l(r)=0.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

因爲遠離原子核的時候,我們所有的是庫侖場 ($V=-\frac{Ze^2}{r}$, Ze 是原子核的電荷),所以 $g_l(r)$, 與 $f_l(r)$ 的漸近式當爲:

$$\left.\begin{aligned}&g_l(r)\to k^{\frac{1}{2}}\cos\{\rho+Ze^2\log 2\rho-\frac{l+1}{2}\pi+\eta_l\},\\&f_l(r)\to k^{\frac{1}{2}}\sin\{\rho+Ze^2\log 2\rho-\frac{l+1}{2}\pi+\eta_l\},\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

式中 $\rho=kr$.

將 (3) 式施以變換:

$$\left.\begin{aligned}&g_l(r)=\frac{1}{2}\sqrt{k}\,(\sigma_l+\bar{\sigma}_l),\\&f_l(r)=\frac{i}{2}\sqrt{k}\,(\sigma_l-\bar{\sigma}_l)\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

後,我們得到:

中国知网 https://www.cnki.net

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d\sigma_l}{dr}-\frac{l+1}{r}\bar{\sigma}_l+i(k-V)\sigma_l=0,\\&\frac{d\bar{\sigma}_l}{dr}-\frac{l+1}{r}\sigma_l-i(k-V)\bar{\sigma}_l=0.\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

而 σ_l 與 $\bar{\sigma}_l$ 的漸近式爲

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_l\to\exp\{-i(\rho+Ze^2\log 2\rho-\frac{l+1}{2}\pi+\eta_l)\},\\&\bar{\sigma}_l\to\exp\{i(\rho+Ze^2\log 2\rho-\frac{l+1}{2}\pi+\eta_l)\}.\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

三. 變　分　法

我們的求方程 (3) 的解的相移 η_l 的問題，現在成爲求方程 (6) 的解的相移 η_l 的問題.

假定函數 $\Phi_l(r)$ 與 $\bar{\Phi}_l(r)$ 是適合下列邊界條件的嘗試函數:

$$\left.\begin{aligned}&\Phi_l(0)=\bar{\Phi}_l(0)=0,\\&\Phi_l(r)|_{r\to\infty}\to\exp\{-i(\rho+Ze^2\log 2\rho-\frac{l+1}{2}\pi+\eta_l)\},\\&\bar{\Phi}_l(r)|_{r\to\infty}\to\exp\{i(\rho+Ze^2\log 2\rho-\frac{l+1}{2}\pi+\eta_l)\}.\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

在 $\Phi_l(r)$ 與 $\bar{\Phi}_l(r)$ 中除相移 η_l 外，還含有其它參數 α_i, $\bar{\alpha}_i$ $(i=1,2,\cdots)$. 考慮積分:

$$I(\Phi_l,\bar{\Phi}_l)=\frac{1}{2i}\int_0^\infty\left\{\Phi_l\frac{d\bar{\Phi}_l}{dr}-\bar{\Phi}_l\frac{d\Phi_l}{dr}-2i\Phi_l\bar{\Phi}_l(k-V)-\right.$$
$$\left.-\frac{l+1}{r}\Phi_l^2+\frac{l+1}{r}\bar{\Phi}_l^2\right\}dr,\tag{9}$$

按照巴成 (Parzen) 的結果[10]，相移 η_l 以及 Φ_l 與 $\bar{\Phi}_l$ 中的所有參數 α_i, $\bar{\alpha}_i$ 當由下列方程系來決定:

$$\left.\begin{aligned}&I=0,\\&\frac{\partial I}{\partial\alpha_i}=0,\quad\frac{\partial I}{\partial\bar{\alpha}_i}=0.\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

四. 高能電子 (能量約爲 125 Mev) 對於汞原子核 (Z=80) 散射時 S 波的相移的計算

爲簡單起見，我們取汞原子核的電荷分佈是均勻的，卽我們取汞原子核的電荷密度的分佈 D 如下:

中国知网 https://www.cnki.net

$$\left.\begin{aligned} D &= \frac{3Ze}{4\pi R^3}, \qquad \text{當 } 0 \leqslant r \leqslant R, \\ D &= 0, \qquad \text{當 } R < r, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

其中 R 爲汞原子核的半徑. 這樣,我們有

$$\left.\begin{aligned} V(r) &= -\frac{3Ze^2}{2R}\left(1-\frac{r^2}{3R^2}\right) \qquad \text{當 } 0 \leqslant r \leqslant R, \\ V(r) &= -\frac{Ze^2}{r} \qquad \text{當 } R < r. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

在 $r < R$ 的區域內,函數 Φ_0 與 $\bar{\Phi}_0$ 取爲 χ_0 與 $\bar{\chi}_0$, 而 χ_0 與 $\bar{\chi}_0$ 的形式爲:

$$\left.\begin{aligned} \chi_0 &= [c_0\rho + c_1\rho^2]\, e^{-\rho}, \\ \bar{\chi}_0 &= [\bar{c}_0\rho + \bar{c}_1\rho^2]\, e^{-\rho}, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

其中 c_0、$\bar{c}_0$、c_1、$\bar{c}_1$ 爲未定常數, $\bar{c}_0$ 與 $\bar{c}_1$ 爲 c_0 與 c_1 的共軛複數. 在 $r > R$ 的區域內,我們取函數 Φ_0 與 $\bar{\Phi}_0$ 爲 ψ_0 與 $\bar{\psi}_0$, 而 ψ_0 與 $\bar{\psi}_0$ 的形式爲:

$$\left.\begin{aligned} \psi_0 &= \varphi_0 + \alpha e^{-\rho+i\rho}, \\ \bar{\psi}_0 &= \bar{\varphi}_0 + \bar{\alpha} e^{-\rho-i\rho}, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

其中 α 與 $\bar{\alpha}$ 爲參數, $\bar{\alpha}$ 是 α 的共軛複數, $\bar{\varphi}_0$ 是 φ_0 的共軛複函數,而

$$\varphi_0 = A(2\rho)^\gamma F(\gamma+1-iZe^2, 2\gamma+1, -2i\rho)\, e^{i(\rho-\eta)}, \tag{15}$$

在 (15) 式中的 $F(a, b, c)$ 是合流超幾何級數,

$$A = i\frac{\Gamma(\gamma+1-iZe^2)}{\Gamma(2\gamma+1)} e^{-i\frac{\pi}{2}\gamma+\frac{\pi}{2}Ze^2},$$

$$\gamma = \sqrt{1-Z^2e^4}.$$

ψ_0 [(14) 式] 中的第一部分 φ_0 是電子對點電荷的波函數, 第二部分 $\alpha e^{-\rho+i\rho}$ 是由原子核有限大小而加上的修正部分.

在 (13) 式中的 c_0、$\bar{c}_0$、c_1、$\bar{c}_1$ 是由函數 Φ_0 與 $\bar{\Phi}_0$ 以及他們的導數在 $r = R$ 時是連續的條件來決定的:

$$\left.\begin{aligned} &\chi_0(R) = \psi_0(R), \qquad \bar{\chi}_0(R) = \bar{\psi}_0(R), \\ &\left.\frac{d\chi_0}{dr}\right|_{r=R} = \left.\frac{d\psi_0}{dr}\right|_{r=R}, \qquad \left.\frac{d\bar{\chi}_0}{dr}\right|_{r=R} = \left.\frac{d\bar{\psi}_0}{dr}\right|_{r=R}. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

用波函數 (13) 與 (14) 來計算積分 (9), 我們得到

$$I(\Phi_0, \bar{\Phi}_0) = I(\chi_0, \bar{\chi}_0) + I(\psi_0, \bar{\psi}_0). \tag{17}$$

在 (17) 式中的 $I(\chi_0, \bar{\chi}_0)$ 與 $I(\psi_0, \bar{\psi}_0)$ 爲

中国知网 https://www.cnki.net

$$
\begin{aligned}
I(\chi_0, \bar{\chi}_0) = & -\frac{i}{2}\Big\{(\bar{c}_0^2 - c_0^2)\left[\frac{1}{4} - e^{-2\tau}\left(\frac{\tau}{2} + \frac{1}{4}\right)\right] + \\
& + [c_0\bar{c}_1 - \bar{c}_0 c_1 - 2c_0 c_1 + 2\bar{c}_0\bar{c}_1 - 2ic_0\bar{c}_0 X]\left[\frac{1}{4} - e^{-2\tau}\left(\frac{\tau^2}{2} + \frac{\tau}{2} + \frac{1}{4}\right)\right] + \\
& + [\bar{c}_1^2 - c_1^2 - 2i(\bar{c}_0 c_1 + c_0\bar{c}_1)X]\left[\frac{3}{8} - e^{-2\tau}\left(\frac{\tau^3}{2} + \frac{3\tau^2}{4} + \frac{3\tau}{4} + \frac{3}{8}\right)\right] + \\
& + [ic_0\bar{c}_0 Y - 2ic_1\bar{c}_1 X]\left[\frac{3}{4} - e^{-2\tau}\left(\frac{\tau^4}{2} + \tau^3 + \frac{3\tau^2}{2} + \frac{3\tau}{2} + \frac{3}{4}\right)\right] + \\
& + i(\bar{c}_0 c_1 + c_0\bar{c}_1)Y\left[\frac{15}{8} - e^{-2\tau}\left(\frac{\tau^5}{2} + \frac{5\tau^4}{4} + \frac{5\tau^3}{2} + \frac{15\tau^2}{4} + \frac{15\tau}{4} + \frac{15}{8}\right)\right] + \\
& + ic_1\bar{c}_1 Y\left[\frac{45}{8} - e^{-2\tau}\left(\frac{\tau^6}{2} + \frac{3\tau^5}{2} + \frac{15\tau^4}{4} + \frac{15\tau^3}{2} + \right.\right. \\
& \left.\left. + \frac{45\tau^2}{4} + \frac{45\tau}{4} + \frac{45}{8}\right)\right]\Big\}, \qquad (18)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I(\psi_0, \bar{\psi}_0) = & \frac{i}{2}\int_\tau^\infty \Big\{4i\alpha\bar{\alpha}e^{-2\rho} + 2iZe^2\alpha\bar{\alpha}\frac{e^{-2\rho}}{\rho} + (\alpha^2 e^{2i\rho} - \bar{\alpha}^2 e^{-2i\rho})\frac{e^{-2\rho}}{\rho} + \\
& + \left(1 + 3i + 2i\frac{Ze^2}{\rho}\right)\bar{\alpha}\varphi_0 e^{-\rho-i\rho} - \left(1 - 3i - 2i\frac{Ze^2}{\rho}\right)\alpha\bar{\varphi}_0 e^{-\rho+i\rho} + \\
& + \frac{2\alpha}{\rho}\varphi_0 e^{-\rho+i\rho} - \frac{2\bar{\alpha}}{\rho}\bar{\varphi}_0 e^{-\rho-i\rho} - \alpha e^{-\rho+i\rho}\frac{d\bar{\varphi}_0}{d\rho} + \\
& + \bar{\alpha}e^{-\rho-i\rho}\frac{d\varphi_0}{d\rho}\Big\}d\rho, \qquad (18')
\end{aligned}
$$

在 (18) 式中的 $X = 1 + \frac{3}{2}\frac{Ze^2}{\tau}$，$Y = \frac{Ze^2}{\tau^3}$，　$\tau = kR$.

在 $I(\psi_0, \bar{\psi}_0)$ 中的含有合流超幾何函數的積分，我們是用下列方法計算的：現在敍述一下計算積分

$$\int_\tau^\infty \varphi_0 e^{-\rho-i\rho}d\rho$$

的方法，作爲示例.

上面的積分可分爲兩個積分：

$$
\begin{aligned}
\int_\tau^\infty \varphi_0 e^{-\rho-i\rho}d\rho = & A e^{-i\eta}\int_0^\infty (2\rho)^\gamma F(\gamma + 1 - iZe^2, 2\gamma + 1, -2i\rho)e^{-\rho}d\rho - \\
& - A e^{-i\eta}\int_0^\tau (2\rho)^\gamma F(\gamma + 1 - iZe^2, 2\gamma + 1, -2i\rho)e^{-\rho}d\rho. \qquad (19)
\end{aligned}
$$

在第一個積分中的合流超幾何級數，我們用它的積分表示代入，在第二個積分中的合流超幾何級數，我們用它的級數表示代入[11]，我們就有

中国知网 https://www.cnki.net

$$\int_\tau^\infty \varphi_0 e^{-\rho-i\rho}\,d\rho = A e^{-i\eta}\,\frac{\Gamma(2\gamma+1)\,\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1-i\,Ze^2)\,\Gamma(\gamma+i\,Ze^2)}\,2^\gamma\int_0^1 \frac{t^{\gamma-iZe^2}(1-t)^{\gamma+iZe^2-1}}{(1+2\,i\,t)^{\gamma+1}}\,dt -$$

$$- A e^{-i\eta}\,\frac{\Gamma(2\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1-i\,Ze^2)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\gamma+1-i\,Ze^2+n)}{\Gamma(2\gamma+1+n)}\,\frac{(-i)^n}{n\,!}\int_0^\tau (2\rho)^{n+\gamma}e^{-\rho}\,d\rho\,. \quad (20)$$

(20) 式中的積分均用數字求積分法算得，在該式第二項中的級數，我們一般地取二十項. 在我們的計算中，我們取 $\tau = 4$; 這相當於能量爲 125 Mev 的電子對汞原子核的散射的情況，而 $r_0 = \frac{R}{(200)^{1/3}} \doteq 1.1\times10^{-13}$ 厘米. 這樣我們就可算出

$$I(\Phi_0, \bar{\Phi}_0) = I(c_0, \bar{c}_0, c_1, \bar{c}_1;\ \alpha, \bar{\alpha};\ \eta)\,. \quad (21)$$

如用 WKB 方法算得的 $\eta_0 = -0.9746$ 作爲第一近似值，則由 (16) 可以決定以 α 與 $\bar{\alpha}$ 爲參數的 c_0、$\bar{c}_0$、c_1、$\bar{c}_1$. 把這些值代入 (21)，我們得到一僅含 α 與 $\bar{\alpha}$ 的函數 $I(\alpha, \bar{\alpha})$，命這函數對 α 與 $\bar{\alpha}$ 的導數等於零: $\frac{\partial I}{\partial \alpha} = 0$, $\frac{\partial I}{\partial \bar{\alpha}} = 0$，則我們就可決定 α 與 $\bar{\alpha}$. 因此就決定了 c_0、$\bar{c}_0$、c_1、$\bar{c}_1$. 把所求得的 α、$\bar{\alpha}$、c_0、$\bar{c}_0$、c_1、$\bar{c}_1$ 代入 (23) 式中，則由方程

$$I(\Phi_0, \bar{\Phi}_0) = I(\eta) = 0 \quad (22)$$

可求得 $\eta_0 = -1.0849$.

五. 散射截面

能量爲 E 的電子對於電荷密度分佈爲 (11) 的原子核散射時在波恩近似下的散射振幅，按照洛斯[12] 與希夫[5] 爲

$$f^B(\vartheta) = \frac{3\,Ze^2\cos^2\frac{\vartheta}{2}}{2\,k\sin^2\frac{\vartheta}{2}}\;\frac{\sin\left(2\tau\sin\frac{\vartheta}{2}\right) - 2\tau\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\left(2\tau\sin\frac{\vartheta}{2}\right)}{8\,\tau^3\sin^3\frac{\vartheta}{2}}\,, \quad (23)$$

式中 ϑ 爲電子的散射角.

在 (23) 式中的右邊部分包含所有部分波的相移 η_l^B 對於 $f^B(\vartheta)$ 所引起的影響. 現在如果 S 波對於我們所考慮的問題的散射振幅 $f(\vartheta)$ 的影響用上面的變分法算得的 S 波的相移 η_0 來計算，而其餘部分波對 $f(\vartheta)$ 的影響用波恩近似，則其餘部分波的影響等於 $f^B(\vartheta)$ 減去在波恩近似下的 S 波的相移 η_0^B 所引起的影響，我們就得到[1)]:

$$f(\vartheta) = \frac{1}{2\,i\,k}\,(e^{2i\eta_0} - 1)\,[P_1(\cos\vartheta) + 1] + f^B(\vartheta) -$$

1) 利用費許巴哈 (Feshbach) 的結果: 在高能電子散射下 $\eta_l = \eta_{-l-2}$[13]，所以 $\eta_0 = \eta_{-2}$，由此可推得公式 (24).

中国知网 https://www.cnki.net

$$-\frac{1}{2ik}(e^{2i\eta_0^B}-1)\,[P_1(\cos\vartheta)+1]\,. \tag{24}$$

根據費許巴哈的結果[13]，我們知道散射截面爲：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=|f(\vartheta)|^2\sec^2\frac{\vartheta}{2}\,. \tag{25}$$

在（24）式中的 η_0^B，我們是用下面的方法計算的.

一般地，我們把方程（6）的第一個方程

$$\frac{d\sigma_l}{dr}+i(k-V)\sigma_l-\frac{l+1}{r}\bar{\sigma}_l=0 \tag{6i}$$

乘以 $\exp\{i(\rho+Ze^2\log 2\rho-\frac{l+1}{2}\pi)\}$，並利用恆等式

$$\exp\{i(\rho+Ze^2\log 2\rho-\frac{l+1}{2}\pi)\}\frac{d\sigma_l}{dr}=$$

$$=\frac{d}{dr}[\sigma_l\exp\{i(\rho+Ze^2\log 2\rho-\frac{l+1}{2}\pi)\}]-$$

$$-\sigma_l i\left(k+\frac{Ze^2}{r}\right)\exp\{i(\rho+Ze^2\log 2\rho-\frac{l+1}{2}\pi)\},$$

我們就有

$$\frac{d}{dr}[\sigma_l\exp\{i(\rho+Ze^2\log 2\rho-\frac{l+1}{2}\pi)\}]-$$

$$-\sigma_l i\left(k+\frac{Ze^2}{r}\right)\exp\{i(\rho+Ze^2\log 2\rho-\frac{l+1}{2}\pi)\}=$$

$$=-i(k-V)\sigma_l\exp\{i(\rho+Ze^2\log 2\rho-\frac{l+1}{2}\pi)\}+$$

$$+\frac{l+1}{r}\bar{\sigma}_l\exp\{i(\rho+Ze^2\log 2\rho-\frac{l+1}{2}\pi)\}. \tag{27}$$

將（28）式積分，積分極限爲從 0 至 ∞，並注意

$$\sigma_l(0)=0,$$

$$\sigma_l\Big|_{r\to\infty}\to\exp\{-i(\rho+Ze^2\log 2\rho-\frac{l+1}{2}\pi+\eta_l)\},$$

我們就有

$$e^{-i\eta_l}=i\int_0^\tau Ze^2\left[\frac{1}{\rho}-\frac{3}{2\tau}\left(1-\frac{\rho^2}{3\tau^2}\right)\right]\sigma_l(\rho)\exp\{i(\rho+Ze^2\log 2\rho-\frac{l+1}{2}\pi)\}\,d\rho+$$

$$+(l+1)\int_0^\infty\frac{\bar{\sigma}_l(\rho)}{\rho}\exp\{i(\rho+Ze^2\log 2\rho-\frac{l+1}{2}\pi)\}\,d\rho. \tag{25}$$

中国知网 https://www.cnki.net

如果 (29) 式中積分號下的 σ_l 與 $\bar{\sigma}_l$ 取電子對於點電荷的庫侖場的函數，則由該式所算得的 η_l 與波恩近似下的 η_l^B 相類似[1]. 我們計算了 $l=0$ 的情況，得到 $\eta_0^B = -1.0050$.

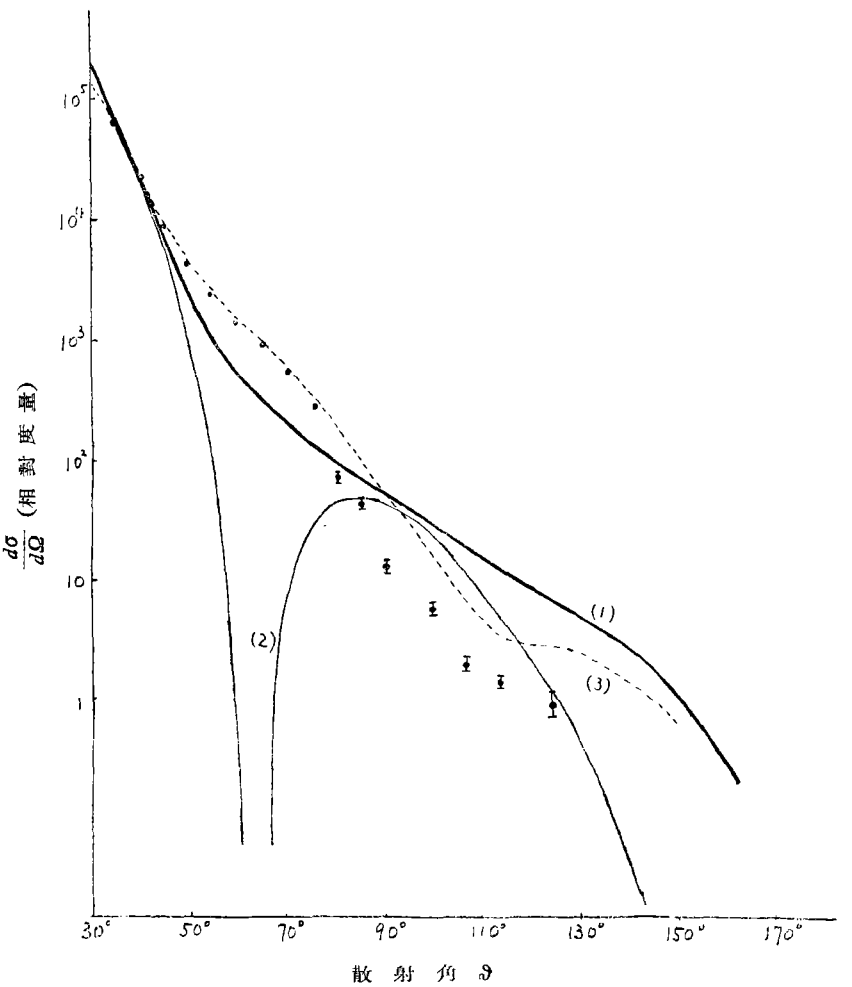

圖 1. 圖內的曲線 (1) 爲我們的計算結果，曲線 (2) 爲波恩近似，曲線 (3) 爲葉尼等用電子計算機解方程 (3) 所算得的結果，點爲實驗結果.

根據 (26) 式與 (27) 式所算得的散射截面與散射角的關係是表示在圖 1 中. 在這圖中，我們還劃出波恩近似所算得的結果以及葉尼等用電子計算機解方程 (3) 所算得的結果，以便比較. 這三曲線是在 $\vartheta = 36°$ 時使得相合的.

1) 在薛定諤方程的情況下，巴成[10]曾指出過這樣所算得的相移與波恩近似所算得的相移是類似的。

中国知网 https://www.cnki.net

六. 討　　論

我們見到在波恩近似下，如果我們所取的原子核的電荷密度分佈如 (11) 式，則電子對原子核的散射截面當散射角度在 54—72° 間以及散射角度在 144—162° 間有極小存在(實際上，散射截面在這兩散射角度範圍內的某定角度下是等於零的)．在我們的計算中，這種散射截面趨向於極小的情況不存在．這可以說在這種散射現象下，S 波對散射截面的影響是相當大的．

把我們的計算結果與葉尼等的用電子計算機解方程 (3) 所得的結果比較一下，我們見到在散射角度大的時候，我們的計算結果是比葉尼等的結果大．但是散射角度小於 90° 的時候，波恩近似中的在這種散射角度下的極小效應還能產生某種程度的影響，在這種散射角度下，我們的結果是比葉尼等的結果小．如果我們把 P 波對 $f(\vartheta)$ 的影響也做像上面那樣的 S 波對於 $f(\vartheta)$ 的影響的修正，則散射角度小的時候的散射截面可以有所增加，而散射角度大的時候的散射截面是可以有所減少的．

在這工作的過程中，曾與于敏同志，胡濟民同志討論多次，特此誌意．

參　考　文　獻

[1] Lyman, E. M., Hansen, A. O. and Scott, M. B., *Phys. Rev.* **84** (1951), 626.
[2] Hofstadter, R., Fechter, H. R. and McIntyre, J. A., *Prys. Rev.* **92** (1953,) 978; Hofstadter, R., Hahn, B., Kundsen, A. W. and McIntyre, J. A., *Phys. Rev.* **95** (1954), 512; Hahn, B., Ravenhall, D. G. and Hofstadter, R., *Phys. Rev.* **101** (1956), 1131.
[3] Yennie, D. R., Ravenhall, D. G. and Wilson, R. N., *Phys. Rev.* **95** (1954), 500; Ravenhall, D. G. and Yennie, D. R., *Phys. Rev.* **96** (1954), 239.
[4] Brenner, S., Brown, G. E. and Elton, L. R. B., *Phil. Mag.* **45** (1954), 524; Brown, G. E. and Elton, L. R. B., *Phil. Mag.* **46** (1955), 164.
[5] Schiff, L. I., *Phys. Rev.* **92** (1953), 988.
[6] Smith, J. H., *Phys. Rev.* **95** (1954), 271.
[7] Baranger, E. U., *Phys. Rev.* **93** (1954), 1127.
[8] Heims, S. P., Yennie, D. R. and Ravenhall, D. G., *Phys. Rev.* **98** (1955), 278.
[9] Ахиезер А. И. и Берестецкий, В. Б., Квантовая электродинамика (Москва, 1954), 第 11 節，第 71—77 頁; Mott, N. F. and Massey, H. S. W. The Theory of Atomic Collisions, 2nd edt. (Oxford, 1949). 第四章，第四節，第 74 頁.
[10] Parzen, G., *Phys. Rev.* **80** (1950), 261.
[11] 合流超幾何函數的積分表示，可參閱 Morse, P. M. and Feshbach, H., Methods of Theoretical Physics (New York, 1954), 第一册，第 605 頁，公式 (5、3、46)；它的級數表示可參閱同書第 604 頁，公式 (5、3、45).
[12] Rose, M. E., *Phys. Rev.* **73** (1948), 279.
[13] Feshbach, H., *Phys. Rev.* **84** (1951), 1206.

中国知网 https://www.cnki.net

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПРИБЛИЖЁННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ РАССЕЯНИЯ БЫСТРЫХ ЭЛЕКТРОНОВ НА АТОМНЫХ ЯДРАХ

Цзинь Син-нань

(*Физический институт Академии наук Китая*)

Резюме

В последнее время ряд экспериментов, посвященных рассеянию быстрых электронов на атомных ядрах показал, что мы не можем считать атомные ядра частицами с точными зарядами, но можем считать их частицами с определенными размерами и с определенными распределениями плотности заряда. Методы вычисления этого явления сделали некоторые авторы, как Иенний, Равенхал и Вилсон, Браун и Элтон, Жифф, Барангер, и т. д.

В настоящей статье мы даем один новый метод вычисления рассеяния быстрых электронов на атомных ядрах.

Радиальные функции компонента волной функции электрона $g_l(r)/r$ и $f_l(r)/r$ (l——орбитальное квантовое число компонента волной функции) удовлетворяют уравнении:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dr} g_l(r) - \frac{l+1}{r} g_l(r) + (E - V) f_l(r) = 0, \\ &\frac{d}{dr} f_l(r) + \frac{l+1}{r} f_l(r) - (E - V) g_l(r) = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\hbar = c = 1$, V——потенциал электрона, E——полная энергия электрона. В этом случае мы пренебрагаем массой электрона. Асимптотические выражения функций $g_l(r)$ и $f_l(r)$ имеют следующие формы:

$$\begin{aligned} &g_l(r) \to k^{\frac{1}{2}} \cos \{k r + Ze^2 \log 2 k r - \frac{l+1}{2} \pi + \eta_l\}, \\ &f_l(r) \to k^{\frac{1}{2}} \sin \{k r + Ze^2 \log 2 k r - \frac{l+1}{2} \pi + \eta_l\}, \end{aligned} \tag{2}$$

где k——волновое число электрона, Ze——заряд ядра.

С помощью преобразования

$$\begin{aligned} &g_l(r) = \frac{1}{2} \sqrt{k} \, (\sigma_l + \bar{\sigma}_l), \\ &f_l(r) = \frac{i}{2} \sqrt{k} \, (\sigma_l - \bar{\sigma}_l), \end{aligned} \tag{3}$$

мы получаем из (1) новые уравнения:

中国知网 https://www.cnki.net

$$\frac{d\sigma_l}{dr} - \frac{l+1}{r}\bar{\sigma}_l + i(k - V)\sigma_l = 0,$$
$$\frac{d\bar{\sigma}_l}{dr} - \frac{l+1}{r}\sigma_l - i(k - V)\bar{\sigma}_l = 0. \tag{4}$$

Составим интеграл

$$I(\Phi_l, \bar{\Phi}_l) = \frac{1}{2i}\int_0^\infty \left\{\Phi_l \frac{d\bar{\Phi}_l}{dr} - \bar{\Phi}_l \frac{d\Phi_l}{dr} - 2i\Phi_l\bar{\Phi}_l(k - V) - \right.$$
$$\left. - \frac{l+1}{r}\Phi_l^2 + \frac{l+1}{r}\bar{\Phi}_l^2\right\} dr, \tag{5}$$

и выбираем функции Φ_l и $\bar{\Phi}_l$, которые удовлетворяют условиям:

$$\Phi_l(0) = \bar{\Phi}_l(0) = 0,$$
$$\Phi_l(r)\Big|_{r\to\infty} \to \exp\{-i(kr + Ze^2\log 2kr - \frac{l+1}{2}\pi + \eta_l)\},$$
$$\bar{\Phi}_l(r)\Big|_{r\to\infty} \to \exp\{i(kr + Ze^2\log 2kr - \frac{l+1}{2}\pi + \eta_l)\}. \tag{6}$$

Функции Φ_l и $\bar{\Phi}_l$ содержат параметры α_i и $\bar{\alpha}_i$ $(i = 1, 2, \cdots)$ и фазу η_l. α_i, $\bar{\alpha}_i$ и η_l определяют уравнении:

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha_i} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial \bar{\alpha}_i} = 0, \quad I = 0. \tag{7}$$

Мы вычисляем η_0 для рассеяния электронов с энергией 125 Мэв на ядре ртути $(Z = 80)$. Распределение плотности заряда D имеет вид:

$$D = \frac{3Ze}{4\pi R^3} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant r \leqslant R,$$
$$D = 0 \quad \text{при} \quad R < r, \tag{8}$$

где R —-радиус ядра ртути. Функции в пределе 0——R будут:

$$\chi_0 = [c_0\rho + c_1\rho^2]e^{-\rho},$$
$$\bar{\chi}_0 = [\bar{c}_0\rho + \bar{c}_1\rho^2]e^{-\rho}, \tag{9}$$

где c_0, c_1, $\bar{c}_0$, $\bar{c}_1$—— параметры, $\rho = kr$. В пределе R—∞, функции имеют вид:

$$\psi_0 = \varphi_0 + \alpha e^{-\rho+i\rho},$$
$$\bar{\psi}_0 = \bar{\varphi}_0 + \bar{\alpha} e^{-\rho-i\rho}, \tag{10}$$

где $\alpha, \bar{\alpha}$——параметры, $\varphi_0 = A(2\rho)^\gamma F(\gamma + 1 - iZe^2, 2\gamma + 1, -2i\rho)\ e^{i(\rho-\eta)}$, и F——вырожденная гипергеометрическая функция, $\gamma = \sqrt{1 - Z^2e^4}$,

中国知网 https://www.cnki.net

$$A = i\frac{\Gamma(\gamma+1-iZe^2)}{\Gamma(2\gamma+1)}e^{-i\frac{\pi}{2}\gamma+\frac{\pi}{2}Ze^2}.$$

С помощью этих функции, мы получаем $\eta_0 = -1.0849$.

В борновском приближении амплитуда рассеянной волны $f^B(\vartheta)$ равна

$$f^B(\vartheta) = \frac{3Ze^2\cos^2\frac{\vartheta}{2}}{2k\sin^2\frac{\vartheta}{2}}\frac{\sin\left(2\tau\sin\frac{\vartheta}{2}\right)-2\tau\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\left(2\tau\sin\frac{\vartheta}{2}\right)}{8\tau^3\sin^3\frac{\vartheta}{2}}, \tag{11}$$

где $\tau = kR$, ϑ——угол рассеяния.

Фазу S волны в борновском приближении приблизительно получаем из следующего выражения:

$$e^{-2i\eta_0^B} = i\int_0^\tau Ze^2\left[\frac{1}{\rho}-\frac{3}{2\tau}\left(1-\frac{\rho^2}{3\tau^2}\right)\right]\sigma_0\exp\left\{i\left(\rho+Ze^2\log 2\rho-\frac{\pi}{2}\right)\right\}d\rho+$$
$$+\int_0^\infty\frac{\bar{\sigma}_0}{\rho}\exp\left\{i\left(\rho+Ze^2\log 2\rho-\frac{\pi}{2}\right)\right\}d\rho, \tag{12}$$

где σ_l и $\bar{\sigma}_l$——функции злектрона для точного заряда. Мы получаем $\eta_0^B = -1.0050$.

Сечение рассеяния равно

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\vartheta)|^2\sec^2\frac{\vartheta}{2}, \tag{13}$$

где

$$f(\vartheta) = \frac{1}{2ik}(e^{2i\eta_0}-1)[P_1(\cos\vartheta)+1]+f^B(\vartheta)-\frac{1}{2ik}(e^{2i\eta_0^B}-1)[P_1(\cos\vartheta)+1].$$

Кривая (1)——резултат нашего вычисления, кривая (2)——результат борновского приближении, кривая (3)——результат Иенний и. д. Эти кривые представляют на рис. 1. Точки——экспериментальный результат.

中国知网 https://www.cnki.net