第18卷 第4期 物 理 学 报 Vol. 18, No. 4
1962 年 4 月 ACTA PHYSICA SINICA April, 1962

关于非牛頓型流体边界层的研究*

江 体 乾

一、引 言

近年来，随着石油工业、紡織工业以及化学工业的发展，非牛頓型流体力学引起了学术界的广泛的注意[1]. 关于此类流体的边界层理論目前亦正在形成中[2,3].

本文即系从 B. B. Голубев 流体边界层一般积分关系式的概念出发，导出适合于此类流体边界层的动量方程，并借此寻求流体沿平板运动时滯流边界层发展的定量关系式.

二、非牛頓型流体边界层的动量方程

今考虑非牛頓型流体作二維流动(如图 1)，其边界层微分方程为[2]

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial \tau}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\mu_p^{1/n}}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{1/n}\right\},\\&\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

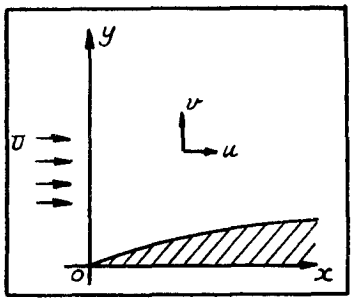

图 1. 流体边界层的发展

式中 $\mu_p^{1/n}$——非牛頓型流体的"假粘度"，其值服从指数定律：

$$\tau=\mu_p^{1/n}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{1/n},$$

而 n 为非牛頓型流体的特性指数，用以区别流体的种类. 如 $n>1$ 表示拟塑性流体；$n<1$ 表示涨流性流体；而当 $n=1$ 时，即表示通常的牛頓型流体.

沿用 B. B. Голубев 方法，在定常情况下，可以导出类似于牛頓型流体边界层的一般积分关系式：

$$\frac{1}{k+1}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta u^{k+2}dy-\frac{U^{k+1}}{k+1}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta u dy=$$

$$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\int_0^\delta u^k dy-\frac{\mu_p^{1/n}}{\rho}\left[u_0^k\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0^{1/n}+k\int_0^\delta u^{k-1}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{\frac{1}{n}+1}dy\right].\tag{2}$$

情况 1：当式(2)中 $k=1$，且 $(u)_0=0$ 时，即得此类流体边界层的能量方程为

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta u^3dy-\frac{U^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta u dy=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\int_0^\delta u dy-\frac{\mu_p^{1/n}}{\rho}\int_0^\delta\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{1+\frac{1}{n}}dy,\tag{3}$$

如上式中 $n=1$ 时，即轉变为所謂 Л. С. Лейбензон 条件[4].

情况 2：当式(2)中 $k=0$ (即先令 $k=0$) 时，则可得到非牛頓型流体边界层的动

* 1961年9月2日收到.

量方程：

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta u^2dy - U\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta udy = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\delta - \frac{\mu_p^{1/n}}{\rho}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0^{1/n}, \tag{4}$$

如将此方程与图 2 所示相互对照，则不难看出此式的物理意义．显然，当上式中的 $n=1$ 时，又可得出熟知的卡門积分条件[5]．

三、滯流边界层厚度的求取

以下将利用动量方程(4)来解决流体沿平板运动时滯流边界层厚度的发展．

如图 2 所示，設在滯流边界层中的速度分布 $u(y)$ 可以冪級数表示如下：

$$u(y) = a_0 + a_1y + a_2y^2 + a_3y^3 + a_4y^4, \tag{5}$$

式中五个系数 $a_i(i=0,1,\cdots,4)$ 可由下列边界条件决定：

$$\begin{cases} y=0 \text{ 处}, \quad u=0, \quad \dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=0, \\ y=\delta \text{ 处}, \quad u=U, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=0, \quad \dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=0. \end{cases}$$

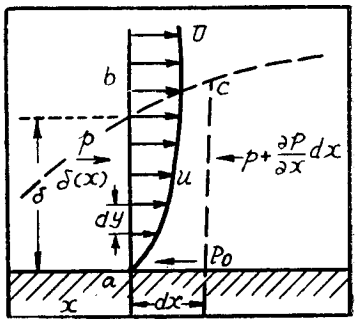

图 2．　滯流边界层内速度分布

据此可得

$$a_0=0, \quad a_1=2\frac{U}{\delta}, \quad a_2=0, \quad a_3=-2\frac{U}{\delta^3}, \quad a_4=\frac{U}{\delta^4}.$$

将其代入式(5)，并按式(4)积分則得滯流边界层厚度为

$$\delta = \left[8.5\times 2^{1/n}\times\frac{1+n}{n}\right]^{\frac{n}{1+n}}\left(\frac{\mu_p^{1/n}\cdot L}{\rho U^{2-\frac{1}{n}}}\right)^{\frac{n}{1+n}}.$$

如将广义雷諾数 $\mathrm{Re}^* = \dfrac{L^{1/n}U^{2-\frac{1}{n}}\rho}{\mu_p^{1/n}}$ 代入并整理之，則最后得

$$\frac{\delta}{L} = A\left(\frac{1}{\mathrm{Re}^*}\right)^{\frac{n}{1+n}}, \tag{6}$$

式中 $A=\left[8.5\times 2^{1/n}\times\dfrac{1+n}{n}\right]^{\frac{n}{1+n}}=f(n)$.

式(6)即为滯流边界层厚度沿平板长度发展的重要关系式．文献中虽曾有人[2]推断过 $\dfrac{\delta}{L}$ 应为 $\left(\dfrac{1}{\mathrm{Re}^*}\right)^{\frac{n}{1+n}}$ 的函数，但其定量的函数关系式于此还是首次求出．若 $n=1$ 时，則显然可見，又将回复到一般流体力学中众所周知的形式．

四、小　　結

本文沿用 B. B. Голубев 方法[6]首次推出了适用于非牛頓型流体边界层理論中的一般积分关系式，从而导出了能量与动量方程．且在此基础上求出了平板上滯流边界层厚度发展方面的第一个定量关系式．

1) 此一条件，目前仅当 $n>1$ 时，即对拟塑性流体始可証明．

参 考 文 献

[1] Metzner, A. B., "Advances in Chemical Engineering" Vol. 1 (1956).
[2] 富田幸雄,日本机械学会論文集, **26**, No. 165, (1960) 675.
[3] Schowalter, W. R., *A. I. Ch. E. J.*, **6**, No. 1, (1960) 24.
[4] Лейбензон, Л. С., Труды ЦАГИ, вып. 240 (1953).
[5] Schlichting, H., "Boundary Layer Theory" (1955).
[6] Слёзкин, Н. А., "Динамика вязкой несжимаемой жидкости" (有譯本) (1955).