第21卷 第8期 物 理 学 报 Vol. 21, No. 8
1965 年 8 月 ACTA PHYSICA SINICA August, 1965

非定域位势 $\frac{e^{-\mu r}}{r}\cdot\frac{e^{-\mu r'}}{r'}\cdot\frac{e^{-aR}}{R}$ 及 $\frac{e^{-\mu r}}{r}\cdot\frac{e^{-\mu r'}}{r'}\cdot\frac{e^{-\sqrt{\beta(r+r')}\cdot R}}{R}$ 的 Regge 渐近行为*

周龙骧 戴元本

提 要

本文证明了两个物理上有兴趣的非定域位势 $\frac{e^{-\mu r}}{r}\cdot\frac{e^{-\mu r'}}{r'}\cdot\frac{e^{-aR}}{R}$ 及 $\frac{e^{-\mu r}}{r}\cdot\frac{e^{-\mu r'}}{r'}\cdot\frac{e^{-\sqrt{\beta(r+r')}\cdot R}}{R}$ 的分波 S 矩阵元对动量变数 k 在除沿虚轴的割线 $(-\infty i, 0)$, $(\mu i, \infty i)$ 的全平面,对角动量变数 λ 在右半平面 $\mathrm{Re}\,\lambda > -\frac{1}{2}$ 的半纯性和当 k, λ 分别趋于无穷大时的渐近性质. 最后得到了 Regge 渐近行为.

引 言

在位势散射 Regge 极点问题的研究中，关于定域位势的情形已经比较清楚了[1]. 但是,同场论关系更为密切的非定域位势的研究却还刚刚开始. 作者之一在文献[2,3]中曾考虑了一类相当广泛的非定域位势，这类位势在一些方面非常象在原点的奇异比 r^{-2} 弱的定域位势.

本文是在文献 [2,3] 的基础上考虑两个具体的非定域位势的例子. 它们完全适合文献[2,3]中的要求. 对于非定域位势1) $\frac{e^{-\mu r}}{r}\cdot\frac{e^{-\mu r'}}{r'}\cdot\frac{e^{-\sqrt{\beta(r+r')}\cdot R}}{R}$，以后将要证明，当 r 大时就接近于具有指数型尾的定域位势，这是物理上所期望的. 对这两个位势我们得到大致与定域汤川势相同的结果,比文献[2,3]中较普遍的情形的结果好.

第一节我们推导出所需要的基本方程,它同文献 [2, 3] 的不同是以动量 k 作为变数的. 第二节证明了位势 $\frac{e^{-\mu r}}{r}\cdot\frac{e^{-\mu r'}}{r'}\cdot\frac{e^{-aR}}{R}$ 的分波 S 矩陣元对于动量 k 和角动量 λ 的解析性和渐近性质. 关于 λ 的渐近性质我们只在动量 k 为实数时给出，从而得到所讨论的 S 矩陣元的 Regge 渐近行为. 第三节简要地叙述了位势 $\frac{e^{-\mu r}}{r}\cdot\frac{e^{-\mu r'}}{r'}\cdot\frac{e^{-\sqrt{\beta(r+r')}\cdot R}}{R}$ 的 S 矩陣元的完全类似的结论和证明. 最后在附录中给出了第二类 Legendre 函数的两个估计式. 从我们所获得的 S 矩陣元的关系式中可以看出,同文献 [2,3] 中的一般理论一样,不排斥在第四象限出现 Regge 极点,这是同定域情形不一样的.

---

* 1964 年 8 月 18 日收到.

1) 记号的意义见文献 [2, 3].

一、基本方程

用文献 [2, 3] 中的記号考虑如下的方程：

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}-\frac{\lambda^2-\frac{1}{4}}{r^2}+k^2\right)\varphi(\lambda,k,r)=\int_0^\infty dr' V_{\lambda-\frac{1}{2}}(r,r')\varphi(\lambda,k,r'), \tag{1}$$

其中

$$\begin{aligned}V_{\lambda-\frac{1}{2}}(r,r')&=2\pi rr'\int_{-1}^{1}U(r,r',R)P_{\lambda-\frac{1}{2}}(z)\,dz=\\&=4rr'\int_{\frac{r^2+r'^2}{2rr'}}^{\infty}\operatorname{Im}U(r,r',z)Q_{\lambda-\frac{1}{2}}(z)\,dz=\\&=-4\int_0^\infty\operatorname{Im}U(r,r',iR)Q_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{r^2+r'^2+R^2}{2rr'}\right)R\,dR.\end{aligned}$$

在我們的情形下，

$$U(r,r',R)=g\frac{e^{-\mu r}}{r}\frac{e^{-\mu r'}}{r'}\frac{e^{-\alpha R}}{R},\ \alpha>0,\ R=\sqrt{r^2+r'^2-2rr'z} \tag{2}$$

及

$$U(r,r',R)=g\frac{e^{-\mu r}}{r}\frac{e^{-\mu r'}}{r'}\frac{e^{-\sqrt{\beta(r+r')}\cdot R}}{R}\qquad\beta>0. \tag{2a}$$

当 $z\geqslant\frac{r^2+r'^2}{2rr'}$ 时，

$$\operatorname{Im}U(r,r',R)=-g\frac{e^{-\mu r}}{r}\cdot\frac{e^{-\mu r'}}{r'}\cdot\frac{\cos[\alpha\sqrt{2rr'z-r^2-r'^2}]}{\sqrt{2rr'z-r^2-r'^2}} \tag{3}$$

及

$$\operatorname{Im}U(r,r',R)=-g\frac{e^{-\mu r}}{r}\cdot\frac{e^{-\mu r'}}{r'}\cdot\frac{\cos[\sqrt{\beta(r+r')}\cdot\sqrt{2rr'z-r^2-r'^2}]}{\sqrt{2rr'z-r^2-r'^2}}. \tag{3a}$$

在 $V_{\lambda-\frac{1}{2}}(r,r')$ 的表达式中，利用了 (3) 及 (3a) 式之后，我們得到下面的式子：

$$V_{\lambda-\frac{1}{2}}(r,r')=-\frac{4ge^{-\mu r-\mu r'}}{rr'}\int_0^\infty\cos\alpha R\cdot Q_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{r^2+r'^2+R^2}{2rr'}\right)dR \tag{4}$$

及

$$V_{\lambda-\frac{1}{2}}(r,r')=-\frac{4ge^{-\mu r-\mu r'}}{rr'}\int_0^\infty\cos(\sqrt{\beta(r+r')}\cdot R)\cdot Q_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{r^2+r'^2+R^2}{2rr'}\right)dR. \tag{4a}$$

显然，(4), (4a) 右端的积分在 $\operatorname{Re}\lambda\equiv\lambda_1>-\frac{1}{2}$ 时是收敛的.

利用已知的公式[4]

$$Q_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{r^2+r'^2+R^2}{2rr'}\right)=\pi\sqrt{rr'}\int_0^\infty e^{-Rx}J_\lambda(rx)J_\lambda(r'x)\,dx \tag{5}$$

及

$$\int_0^\infty \cos yR \cdot e^{-Rx} dR = \frac{x}{x^2+y^2}, \tag{6}$$

(4), (4a) 就化簡成如下的形式:

$$V_{\lambda-\frac{1}{2}}(r, r') = -\frac{4\pi g e^{-\mu r-\mu r'}}{\sqrt{rr'}} \int_0^\infty \frac{x}{x^2+\alpha^2} J_\lambda(rx) J_\lambda(r'x)\, dx \tag{7}$$

及

$$V_{\lambda-\frac{1}{2}}(r, r') = -\frac{4\pi g e^{-\mu r-\mu r'}}{\sqrt{rr'}} \int_0^\infty \frac{x}{x^2+\beta(r+r')} J_\lambda(rx) J_\lambda(r'x)\, dx. \tag{7a}$$

上式还可以写成[5]

$$V_{\lambda-\frac{1}{2}}(r, r') = -\frac{4\pi g e^{-\mu r-\mu r'}}{\sqrt{rr'}} [I_\lambda(r\alpha) K_\lambda(r'\alpha)\theta(r'-r) + \\ + I_\lambda(r'\alpha) K_\lambda(r\alpha)\theta(r-r')], \tag{7'}$$

$$V_{\lambda-\frac{1}{2}}(r, r') = -\frac{4\pi g e^{-\mu r-\mu r'}}{\sqrt{rr'}} [I_\lambda(r\sqrt{\beta(r+r')}) K_\lambda(r'\sqrt{\beta(r+r')})\theta(r'-r) + \\ + I_\lambda(r'\sqrt{\beta(r+r')}) K_\lambda(r\sqrt{\beta(r+r')})\theta(r-r')]. \tag{7a'}$$

我們引入方程(1)的自由解

$$\varphi_0(\lambda, k, r) = \sqrt{r}\, J_\lambda(kr), \tag{8}$$

$$f_0(\lambda, -k, r) = \sqrt{r}\, H_\lambda^{(1)}(kr), \tag{9}$$

它們的朗斯基行列式是

$$W \equiv W[\varphi_0(\lambda, k, r), f_0(\lambda, -k, r)] = \frac{2i}{\pi}. \tag{10}$$

从 (8), (9), (10) 即可构造方程 (1) 的等价积分方程的格临函数

$$G_\lambda(kr, kr') = \frac{1}{W} [\varphi_0(\lambda, k, r') f_0(\lambda, -k, r)\theta(r-r') + \\ + \varphi_0(\lambda, k, r) f_0(\lambda, -k, r')\theta(r'-r)] = \\ = \frac{\pi\sqrt{rr'}}{2i} [J_\lambda(kr') H_\lambda^{(1)}(kr)\theta(r-r') + \\ + J_\lambda(kr) H_\lambda^{(1)}(kr')\theta(r'-r)]. \tag{11}$$

利用已有的等式[4]

$$\int_0^\infty \frac{x}{x^2-r^2} J_\lambda(ax) J_\lambda(bx)\, dx = \begin{cases} \dfrac{\pi i}{2} J_\lambda(br) H_\lambda^{(1)}(ar), & a > b; \\ \dfrac{\pi i}{2} J_\lambda(ar) H_\lambda^{(1)}(br), & a < b, \end{cases} \tag{12}$$

(11)式可以写成

$$G_\lambda(kr, kr') = -\sqrt{rr'} \int_0^\infty \frac{k'}{k'^2-k^2} J_\lambda(k'r) J_\lambda(k'r')\, dR'. \tag{11'}$$

最后我們得到具有确定边界条件的方程(1)的等价积分方程

$$\varphi(\lambda, k, r) = \varphi_0(\lambda, k, r) + \int_0^\infty dr' G_\lambda(kr, kr') \int_0^\infty V_{\lambda-\frac{1}{2}}(r', r'')\varphi(\lambda, k, r'')\, dr'' =$$

$$= \varphi_0(\lambda, k, r) + \int_0^\infty K_\lambda(r, r'')\varphi(\lambda, k, r'')\, dr'', \tag{13}$$

其中

$$K_\lambda(r, r'') = \int_0^\infty G_\lambda(kr, kr')V_{\lambda-\frac{1}{2}}(r', r'')\, dr' =$$

$$= 4ge^{-\mu r''}\sqrt{\frac{r}{r''}}\int_0^\infty\int_0^\infty Q_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu^2 + x^2 + k'^2}{2xk'}\right)\cdot$$

$$\cdot\frac{\sqrt{x}}{x^2+\alpha^2}J_\lambda(r''x)J_\lambda(k'r)\frac{\sqrt{k'}}{k'^2-k^2}dk'\, dx \tag{14}$$

及

$$K_\lambda(r, r'') = 4ge^{-\mu r''}\sqrt{\frac{r}{r''}}\int_0^\infty\int_0^\infty Q_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu^2 + x^2 + k'^2}{2xk'}\right)\cdot$$

$$\cdot\frac{\sqrt{x}}{x^2+\beta(r'+r'')}J_\lambda(r''x)J_\lambda(k'r)\frac{\sqrt{k'}}{k'^2-k^2}dk'\, dx. \tag{14a}$$

上式的推导中我們曾利用了公式(5).

为了考虑方便，我們引进广义的 T 矩陣，其定义如下：

$$T_\lambda(\tilde{k}, k) = \int_0^\infty\int_0^\infty \varphi_0(\lambda, \tilde{k}, r_1)V_{\lambda-\frac{1}{2}}(r_1, r)\varphi(\lambda, k, r)\, dr_1\, dr. \tag{15}$$

从(13)式我們容易得 $T_\lambda(\tilde{k}, k)$ 的积分方程：

$$T_\lambda(\tilde{k}, k) = T_\lambda^0(\tilde{k}, k) - \int_0^\infty \frac{k'}{k'^2-k^2}T_\lambda^0(\tilde{k}, k')T_\lambda(k', k)\, dk' =$$

$$= T_\lambda^0(\tilde{k}, k) + \int_0^\infty K_\lambda(k; \tilde{k}, k')T_\lambda(k', k)\, dk', \tag{16}$$

其中

$$K_\lambda(k; \tilde{k}, k') = -\frac{k'}{k'^2-k^2}T_\lambda^0(\tilde{k}, k'). \tag{17}$$

上式中 $T_\lambda^0(\tilde{k}, k')$ 的表示式为

$$T_\lambda^0(\tilde{k}, k') = -\frac{4g}{\pi}\frac{1}{\sqrt{\tilde{k}k'}}\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+\alpha^2}Q_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu^2+x^2+\tilde{k}^2}{2x\tilde{k}}\right)Q_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu^2+x^2+k'^2}{2xk'}\right) \tag{18}$$

及

$$T_\lambda^0(\tilde{k}, k') = -\frac{4g}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{\tilde{k}k'}}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x^2y}Q_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{(\mu+\beta y)^2+x^2+\tilde{k}^2}{2x\tilde{k}}\right)\cdot$$

$$\cdot Q_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{(\mu+\beta y)^2+x^2+k'^2}{2xk'}\right)dx\, dy. \tag{18a}$$

我們在(18a)中利用了恆等式

$$\frac{1}{x^2+\beta(r+r')}=\int_0^\infty e^{-(x^2+\beta(r+r'))y}\,dy. \tag{19}$$

方程(16)是我們討論的出发点、它是非定域位势的 Lippmann-Schwinger 方程. 容易看出,当 $\tilde{k}=k$ 时, $T_\lambda(\tilde{k},k)$ 就还原为物理 T 矩陣.

二、S 矩陣元的解析性和漸近性質

按照积分方程的一般理論,我們写下方程(16)的解的展开式:

$$T_\lambda(\tilde{k},k)=T_\lambda^0(\tilde{k},k)+\int_0^\infty R_\lambda(k;\tilde{k},k')T_\lambda^0(k',k)\,dk', \tag{20}$$

其中 $T_\lambda^0(\tilde{k},k)$ 如(18),(18a)所示.

解核 $R_\lambda(k;\tilde{k},k')$ 表示成 Fredhslm 的形式为

$$R_\lambda(k;\tilde{k},k')=\frac{D(\lambda,k;\tilde{k},k')}{D(\lambda;k)}, \tag{21}$$

$$D(\lambda,k;\tilde{k},k')=K_\lambda(k;\tilde{k},k')+ \\ +\sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty dk_1\cdots dk_nK_\lambda\left(k;\begin{matrix}\tilde{k}\,k_1\cdots k_n\\ k'k_1\cdots k_n\end{matrix}\right), \tag{21a}$$

$$K_\lambda\left(k;\begin{matrix}\tilde{k}\,k_1\cdots k_n\\ k'k_1\cdots k_n\end{matrix}\right)=\begin{vmatrix}K_\lambda(k;\tilde{k},k')\,K_\lambda(k;\tilde{k},k_1)\cdots K_\lambda(k;\tilde{k},k_n)\\ K_\lambda(k;k_1,k')K_\lambda(k;k_1,k_1)\cdots K_\lambda(k;k_1,k_n)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ K_\lambda(k;k_n,k')K_\lambda(k;k_n,k_1)\cdots K_\lambda(k;k_n,k_n)\end{vmatrix}, \tag{21b}$$

$$D(\lambda;k)=1+\sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty dk_1\cdots dk_nK_\lambda\left(k;\begin{matrix}k_1\cdots k_n\\ k_1\cdots k_n\end{matrix}\right). \tag{21c}$$

有时解核的迭代形式是方便的,这里我們順便給出它的表达式:

$$R_\lambda(k;\tilde{k},k')=\sum_{n=1}^\infty K_\lambda^{(n)}(k;\tilde{k},k'), \tag{22}$$

$$K_\lambda^{(n)}(k;\tilde{k},k')=\left(\frac{4g}{\pi}\right)^n\sqrt{\frac{k'}{\tilde{k}}}\cdot\frac{1}{k'^2-k^2}\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty dx_1\cdots dx_n\,dk_1\cdots dk_{n-1}\cdot \\ \cdot\frac{1}{x_1^2+\alpha^2}\cdot\frac{1}{x_2^2+\alpha^2}\cdots\frac{1}{x_n^2+\alpha^2}\cdot\frac{1}{k_1^2-k^2}\cdots\frac{1}{k_{n-1}^2-k^2}\cdot Q_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu^2+x_1^2+\tilde{k}^2}{2x_1\tilde{k}}\right) \\ Q_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu^2+x_1^2+k_1^2}{2x_1k_1}\right)\cdots Q_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu^2+x_n+k_{n-1}^2}{2x_nk_{n-1}}\right)Q_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu^2+x_n^2+k'^2}{2x_nk'}\right). \tag{22a}$$

对于位势 $\frac{e^{-\mu r}}{r}\cdot\frac{e^{-\mu r'}}{r'}\cdot\frac{e^{-\sqrt{\beta(r+r')}\cdot R}}{R}$ 可以写出类似的式子.

为了証明 S 矩陣元的解析性,由(17),(18),我們需要考虑如下的积分:

$$\int_0^\infty\frac{dx}{x^2+\alpha^2}Q_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu^2+x^2+\tilde{k}^2}{2x\tilde{k}}\right)Q_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu^2+x^2+k'^2}{2xk'}\right). \tag{23}$$

对于 $\tilde{k}$, k' 的不包含点 0 和 $\pm\mu i$ 的有限区域 $\tilde{D}$, D', 取

$$\epsilon < \min\{|\pm\tilde{k}\pm i\mu|,\ |\pm k'\pm i\mu|\},$$
$$R > \max\{|\pm\tilde{k}\pm i\mu|,\ |\pm k'\pm i\mu|\},$$

拆(23)式为

$$\left(\int_0^\epsilon+\int_\epsilon^R+\int_R^\infty\right)\frac{dx}{x^2+\alpha^2}Q_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu^2+x^2+\tilde{k}^2}{2x\tilde{k}}\right)Q_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu^2+x^2+k'^2}{2xk'}\right),\tag{24}$$

积分 $\int_0^\epsilon$, $\int_R^\infty$ 的被积式在 $\tilde{D}$, D' 中是解析的. 利用在附录中証明的关于第二类 Legendre 函数的估計式

$$|Q_\nu(z)|\leqslant\frac{Ce^{\pi|\nu_2|}}{|z|^{\nu_1+1-\epsilon'}\cdot|z^2-1|^{\epsilon'/2}}\qquad z\in(-\infty,1],\ \mathrm{Re}\,\nu\equiv\nu_1>-1,$$

我們得到

$$\left|\int_0^\epsilon\frac{dx}{x^2+\alpha^2}\cdot Q_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu^2+x^2+\tilde{k}^2}{2x\tilde{k}}\right)Q_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu^2+x^2+k'^2}{2xk'}\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^\epsilon\frac{dx}{x^2+\alpha^2}\cdot\frac{C^2e^{2\pi|\lambda_2|}}{\mathscr{A}}\leqslant$$

$$\leqslant C^2e^{2\pi|\lambda_2|}\left[\int_0^\epsilon\frac{dx}{x^2+\alpha^2}\frac{1}{\left|\frac{\mu^2+x^2+\tilde{k}^2}{2x\tilde{k}}\right|^{2\lambda_1+1-2\epsilon'}\cdot\left|\frac{[\mu^2+(x+\tilde{k})^2]\,[\mu^2+(x-\tilde{k})^2]}{4x^2\tilde{k}^2}\right|^{\epsilon'}}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\int_0^\epsilon\frac{dx}{x^2+\alpha^2}\frac{1}{\left|\frac{\mu^2+x^2+k'^2}{2xk'}\right|^{2\lambda_1+1-2\epsilon'}\cdot\left|\frac{[\mu^2+(x+k')^2][\mu^2+(x-k')^2]}{4x^2k'^2}\right|^{\epsilon'}}\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant C^2e^{2\pi|\lambda_2|}\cdot2^{2\lambda_1+1}\cdot\frac{|\tilde{k}k'|^{\lambda_1+\frac{1}{2}}}{|\sqrt{\tilde{k}^2+\mu^2}\cdot\sqrt{k'^2+\mu^2}|^{\lambda_1+1}}\cdot\left[\int_0^{\frac{\epsilon}{|\sqrt{\tilde{k}^2+\mu^2}|}}\frac{dt}{t^2+\left|\frac{\alpha}{\sqrt{\tilde{k}^2+\mu^2}}\right|^2}\cdot\right.$$

$$\cdot\frac{t^{2\lambda_1+1}}{|e^{i\tilde{\Phi}}+t^2|^{2\lambda_1+1-2\epsilon'}\cdot\left|\left[\left(\frac{\mu}{|\sqrt{\tilde{k}^2+\mu^2}|}\right)^2+\left(t+\frac{\tilde{k}}{|\sqrt{\tilde{k}^2+\mu^2}|}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\mu}{|\sqrt{\tilde{k}^2+\mu^2}|}\right)^2+\left(t-\frac{\tilde{k}}{|\sqrt{\tilde{k}^2+\mu^2}|}\right)^2\right]\right|^{\epsilon'}}\cdot$$

$$\cdot\int_0^{\frac{\epsilon}{|\sqrt{k'^2+\mu^2}|}}\frac{dt}{t^2+\left|\frac{\alpha}{\sqrt{k'^2+\mu^2}}\right|^2}\cdot$$

$$\left.\cdot\frac{t^{2\lambda_1+1}}{|e^{i\Phi'}+t^2|^{2\lambda_1+1-2\epsilon'}\cdot\left|\left[\left(\frac{\mu}{|\sqrt{k'^2+\mu^2}|}\right)^2+\left(t+\frac{k'}{|\sqrt{k'^2+\mu^2}|}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\mu}{|\sqrt{k'^2+\mu^2}|}\right)^2+\left(t-\frac{k'}{|\sqrt{k'^2+\mu^2}|}\right)^2\right]\right|^{\epsilon'}}\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant C(\lambda)\frac{|\tilde{k}k'|^{\lambda_1+\frac{1}{2}}}{|\sqrt{\tilde{k}^2+\mu^2}\sqrt{k'^2+\mu^2}|^{\lambda_1+1}},\tag{25}$$

其中

$$\mathscr{A}=\left|\frac{\mu^2+x^2+\tilde{k}^2}{2x\tilde{k}}\right|^{\lambda_1+\frac{1}{2}-\epsilon'}\cdot\left|\frac{[\mu^2+(x+\tilde{k})^2]\,[\mu^2+(x-\tilde{k})^2]}{4x^2\tilde{k}^2}\right|^{\epsilon'/2}\cdot$$
$$\cdot\left|\frac{\mu^2+x^2+k'^2}{2xk'}\right|^{\lambda_1+\frac{1}{2}-\epsilon'}\cdot\left|\frac{[\mu^2+(x+k')^2]\,[\mu^2+(x-k')^2]}{4x^2k'^2}\right|^{\epsilon'/2}$$

$$\tilde{\varphi} = \arg(\tilde{k}^2 + \mu^2); \quad \varphi' = \arg(k'^2 + \mu^2); \quad C(\lambda) = C'C^2 e^{2\pi|\lambda_2|} \cdot 2^{2\lambda+1},$$

C', C 与 $\tilde{k}$, k' 无关. (25)式的推导中曾利用了 Schwartz 不等式,上式在区域 $\tilde{D}$, D' 中一致地成立.

对于积分 $\int_R^\infty$, 我們也类似地有完全相同的結論.

从而对于由积分 $\int_0^\epsilon \frac{dx}{x^2+\alpha^2} Q_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu^2+x^2+\tilde{k}^2}{2x\tilde{k}}\right) Q_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu^2+x^2+k'^2}{2xk'}\right)$ 及 $\int_R^\infty$ 所定义的 λ 和 $\tilde{k}$, k' 的函数,在区域 $\mathrm{Re}\,\lambda \equiv \lambda_1 > -\frac{1}{2}$ 和区域 $\tilde{D}$, D' 中是解析的.

現在我們来看积分

$$\int_\epsilon^R \frac{dx}{x^2+\alpha^2} Q_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu^2+x^2+\tilde{k}^2}{2x\tilde{k}}\right) Q_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu^2+x^2+k'^2}{2xk'}\right). \tag{26}$$

容許改变积分路径以避开被积函数的奇异,(26)式的被积函数的奇异为

$$\left.\begin{aligned} x &= \pm i\alpha, \\ x &= \pm\tilde{k} \pm i\mu, \\ x &= \pm k' \pm i\mu. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

当 $|\mathrm{Im}\,\tilde{k}| < \mu$, $|\mathrm{Im}\,k'| < \mu$ 时,积分路径不必挪动,积分(26)是区域 $|\mathrm{Im}\,\tilde{k}| < \mu$, $|\mathrm{Im}\,k'| < \mu$ 中的解析函数.

从区域 $|\mathrm{Im}\,\tilde{k}| < \mu$, $|\mathrm{Im}\,k'| < \mu$ 出发,进行解析开拓,限于在区域 $\tilde{D}$, D' 中考虑,则可能的奇异仅来自重迭夹攻奇异 $\tilde{k} = \pm i(\alpha+\mu)$, $k' = \pm i(\alpha+\mu)$ 和 $\tilde{k} = \pm k' \pm 2i\mu$, 其他的重迭奇异对于积分路径不是夹攻的. 端点奇异在区域 $\tilde{D}$, D' 中不会发生.

綜合以上討論我們得到,当不仅限于区域 $\tilde{D}$, D' 时,积分(23)对于 $\tilde{k}$, k' 的奇异分别是 $\tilde{k} = 0, \infty, \pm\mu i, \pm(\alpha+\mu)i, \pm k' \pm 2i\mu$ 及 $k' = 0, \infty, \pm\mu i, \pm i(\mu+\alpha), \pm\tilde{k} \pm 2i\mu$. 如果我們考虑带割綫 $(-i\infty, 0]$, $[\mu i, +\infty i)$ 的 $\tilde{k}$, k' 平面,则在这个带有割綫的 $\tilde{k}$, k' 平面上,积分(23)的奇异仅为 $\tilde{k} = \pm k' \pm 2i\mu$. 对于变数 λ, 积分(23)在右半平面 $\mathrm{Re}\,\lambda > -\frac{1}{2}$ 解析. $K_\lambda(k; \tilde{k}, k')$ 除上述奇异外,还在 $k' = \pm k$ 处有奇点.

要得到 $T_\lambda(\tilde{k}, k)$ 的解析性,需要考虑 Fredholm 展式(21)的收敛性. 为此我們給出如下的对核 $K_\lambda(k; \tilde{k}k')$ 的估計:

$$|K_\lambda(k; \tilde{k}, k')| \leqslant C''C(\lambda) \frac{|\tilde{k}|^{\lambda_1} \cdot |k'|^{\lambda_1+1}}{|\sqrt{\tilde{k}^2+\mu^2}|^{\lambda_1+1} \cdot |\sqrt{k'^2+\mu^2}|^{\lambda_1+1} \cdot |k'^2-k^2|}. \tag{28}$$

記

$$K_\lambda(k; \tilde{k}, k') = N_\lambda(k; \tilde{k}, k') \frac{|\tilde{k}|^{\lambda_1}|k'|^{\lambda_1+1}}{|\sqrt{\tilde{k}^2+\mu^2}|^{\lambda_1+1} \cdot |\sqrt{k'^2+\mu^2}|^{\lambda_1+1} \cdot |k'^2-k^2|}, \tag{29}$$

$$|N_\lambda(k; \tilde{k}, k')| \leqslant C''C(\lambda) = C_0, \tag{29$'$}$$

当 $|\lambda| < \Lambda$ 时, $C_0 < +\infty$.

由此容易得到

$$|D(\lambda, k; \tilde{k}, k')| \leqslant \left[C_0 + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n!} C_0^{n+1} M^n (n+1)^{\frac{n+1}{2}}\right] \frac{|\tilde{k}|^{\lambda_1}}{|\sqrt{\tilde{k}^2+\mu^2}|^{\lambda_1+1}} \cdot$$

$$\cdot\frac{|k'|^{\lambda_1+1}}{|\sqrt{k'^2+\mu^2}|^{\lambda_1+1}\cdot|k'^2-k^2|}, \tag{30}$$

$$|D(\lambda, k)| \leqslant 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}C_0^n M^n n^{n/2}. \tag{30a}$$

上述估計要求 k 不在积分路径上，以保証 M 是有限的正数.

估計式(30)保証了 $T_\lambda(\tilde{k}, k)$ 的 Fredholm 展式(21)的一致收斂性. 取 $\tilde{k}=k$，注意到前面关于解析性的討論，我們便得到了物理 T 矩陣 $T_\lambda(k, k)$ 在带割綫 $(-\infty i, 0]$, $[\mu i, \infty i)$ 的 k 平面的带域 $0<\operatorname{Im} k<2\mu$ 和 λ 平面的右半平面 $\operatorname{Re}\lambda>-1/2$ 的半純性，可能的极点由 $D(\lambda; k)=0$ 产生. 它有可能出現于 λ 平面的第四象限.

現在我們着手扩大物理 T 矩陣 $T_\lambda(k, k)$ 对于变数 k 的半純区. 我們从已經証明了半純性的区域 $0<\operatorname{Im} k<2\mu$ 出发进行开拓. 首先写下 $T_\lambda(k, k)$ 的 Fredholm 展式:

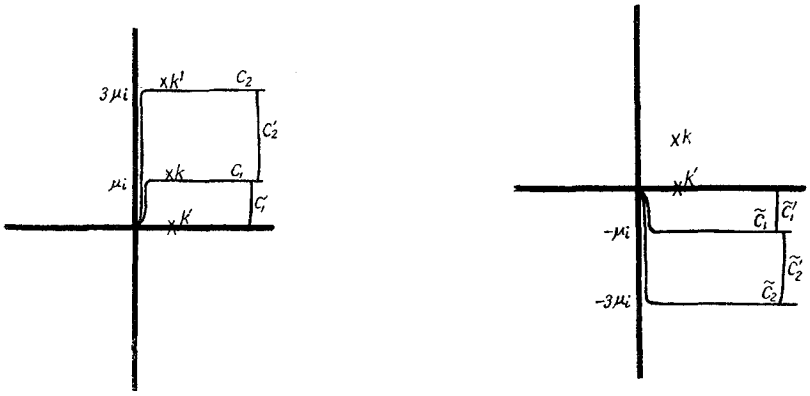
$$\begin{aligned}T_\lambda(k, k) &= T_\lambda^0(k, k)+\frac{1}{D(\lambda, k)}\int_0^\infty K_\lambda(k; k, k')T_\lambda^0(k', k)\,dk' + \\ &+\frac{(-1)}{D(\lambda; k)}\int_0^\infty dk'\int_0^\infty dk_1\begin{vmatrix}K_\lambda(k; k, k') & K_\lambda(k; k, k_1)\\ K_\lambda(k; k_1, k') & K_\lambda(k; k_1, k_1)\end{vmatrix}\cdot T_\lambda^0(k', k) + \\ &+\frac{(-1)^2}{2!\,D(\lambda; k)}\int_0^\infty dk'\int_0^\infty dk_1\int_0^\infty dk_2\begin{vmatrix}K_\lambda(k; k, k') & K_\lambda(k; k, k_1) & K_\lambda(k; k, k_2)\\ K_\lambda(k; k_1, k') & K_\lambda(k; k_1, k_1) & K_\lambda(k; k_1, k_2)\\ K_\lambda(k; k_2, k') & K_\lambda(k; k_2, k_1) & K_\lambda(k; k_2, k_2)\end{vmatrix}\cdot \\ &\cdot T_\lambda^0(k', k)+\cdots,\end{aligned} \tag{31}$$

其中 $K_\lambda(k; k, k')$ 的奇异是

$$\left.\begin{aligned}&\text{对 } k\text{: 沿虛軸的割綫 } (-\infty i, 0], [\mu i, \infty i) \text{ 及 } \pm k' \pm 2i\mu, \pm k';\\ &\text{对 } k'\text{: 沿虛軸的割綫 } (-\infty i, 0], [\mu i, \infty i) \text{ 及 } \pm k \pm 2i\mu, \pm k.\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

$T_\lambda^0(k', k)$ 的奇异是

$$\left.\begin{aligned}&\text{对 } k\text{: 沿虛軸的割綫 } (-\infty i, 0], [\mu i, \infty i) \text{ 及 } \pm k' \pm 2i\mu;\\ &\text{对 } k'\text{: 沿虛軸的割綫 } (-\infty i, 0], [\mu i, \infty i) \text{ 及 } \pm k \pm 2i\mu.\end{aligned}\right\} \tag{33}$$



(a) (b)

图 1

我們首先固定 $\operatorname{Im} k=\mu$. 对于(31)右端第二項中关于 k' 的积分的被积式奇异点是

(32)和(33). 故它关于 k' 在带域 $-\mu < \mathrm{Im}\, k' < \mu$ 中解析.

我們开拓的办法是第一步将积分路径挪到 C_1[見图 1(a)]. 这时积分在 $\mu < \mathrm{Im}\, k < 3\mu - \delta$ 中解析, δ 为小的正数. 考虑到 T_λ^0 和 K_λ 的漸近性質, 沿 C_1' 的积分是趋于零的. 第二步将 k 开拓到 k^1, $\mathrm{Im}\, k^1 = 3\mu - 2\delta$. 接下来重新再开拓对 k^1 的积分路径到 C_2, C_2' 上的积分貢献是趋于零的. 这时积分在 $3\mu < \mathrm{Im}\, k < 5\mu - \delta$ 中解析. 然后再开拓 k 到 k^2, $\mathrm{Im}\, k^2 = 5\mu - 2\delta$. 如此交替地連續进行开拓直至无穷.

对于第四象限完全类似地只需将对 k^1 的积分路径向下挪动即可[見图 1(b)]. 对于第二、第三象限, 我們利用虛軸上的間隙 $[0, \mu i]$ 就可以一直开拓过去, 所用的办法也是对积分路径和 k 交替地連續开拓. 把这样的手續一直进行, 最后我們便获得 (31) 右端第二項对 k 除去沿虛軸的割綫 $(-\infty i, 0]$, $[\mu i, \infty i)$ 之外在全平面半純, 它可能有由 $D(\lambda; k) = 0$ 而产生的极点.

現在我們看(31)右端第三項. 仍然先固定 $\mathrm{Im}\, k = \mu$. 同第二項的討論一样, 容易看出, 积分中的被积函数在 $-\mu < \mathrm{Im}\, k_1 < \mu$, $-\mu < \mathrm{Im}\, k' < \mu$ 中对 k_1 和 k' 解析.

象刚才的处理一样, 我們首先把对 k_1 的积分路径挪到 C_1, 这是第一步. 第二步把对 k^1 的积分路径挪到 C_1. 这样在 k_1, k' 看齐之后最后把 k 开拓到 k^1, $\mathrm{Im}\, k^1 = 3\mu - 2\delta_0$. 接下来再重复进行第一步对 k_1、第二步对 k' 的积分路径的挪动, 待 k_1, k' 看齐之后再开拓 k. 这种手續交替連續进行直至无穷. 于是我們便获得了 (31) 式右端第三項对 k 在除虛軸上的割綫外的全平面解析.

一般地对(31)右端任何一項都可运用上述交替連續开拓的办法, 对积分路径逐个地挪动, 待看齐之后便开拓 k. 如此一輪輪交替連續开拓, 直至无穷.

完成上述开拓手續之后, 我們得到 $T_\lambda(k, k)$ 在 λ 的半平面 $\mathrm{Re}\,\lambda > -1/2$ 和带割綫 $(-\infty i, 0]$, $[\mu i, \infty i)$ 的 k 平面所构成的拓扑积中的半純性. 可能的极点由 $D(\lambda; k) = 0$ 产生. 該极点可能出現于 λ 平面的第四象限.

以下考虑 $|\lambda| \sim \infty$ 时的漸近性質.

我們采用如下的公式[7]:

$$Q_l(z_1)Q_l(z_2) = \int_{z^+}^{\infty} dz \frac{Q_l(z)}{\sqrt{K(z_1, z_2, z)}}, \tag{34}$$

$$\left.\begin{aligned} z^+ &= z_1 z_2 + \sqrt{z_1^2 - 1}\cdot\sqrt{z_2^2 - 1}, \\ K(z_1, z_2, z) &= z_1^2 + z_2^2 + z^2 - 2z_1 z_2 z - 1. \end{aligned}\right\} \tag{34'}$$

首先考察 Born 項 $T_\lambda^0(k, k)$. 由(18)及(34)得

$$T_\lambda^0(k, k) = -\frac{4g}{\pi k}\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + \alpha^2}\left[Q_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu^2 + x^2 + k^2}{2xk}\right)\right]^2 =$$

$$= -\frac{4g}{\pi k}\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + \alpha^2}\int_{2\left(\frac{\mu^2+x^2+k^2}{2xk}\right)^2-1}^{\infty} dz \frac{Q_{\lambda-\frac{1}{2}}(z)}{\sqrt{2\left(\frac{\mu^2+x^2+k^2}{2xk}\right)^2 - 1 - 2\left(\frac{\mu^2+x^2+k^2}{2xk}\right)^2\cdot z + z^2}}. \tag{35}$$

交换积分次序, $2\left(\frac{\mu^2 + x^2 + k^2}{2xk}\right)^2 - 1$ 对于 x 的极小值在 $x_0^2 = k^2 + \mu^2$, $\left[2\left(\frac{\mu^2 + x^2 + k^2}{2xk}\right)^2 -\right.$

$-1\Big]_{k^2+\mu^2}=1+\frac{2\mu^2}{k^2}$. 令 $z=1+\frac{\nu}{2k^2}$, 則相应的 $\nu_0=4\mu^2$. 于是得到

$$T_\lambda^0(k,k)=-\frac{4g}{\pi k}\int_{4\mu^2}^{\infty}\frac{d\nu}{\sqrt{\nu}}Q_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{\nu}{2k^2}\right)\int_{x_-^2}^{x_+^2}\frac{dx^2}{x^2+\alpha^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{-(x^2-x_+^2)(x^2-x_-^2)}}=$$

$$=-\frac{4g}{\pi k}\int_{4\mu^2}^{\infty}\frac{d\nu}{\sqrt{\nu}}Q_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{\nu}{2k^2}\right)\cdot\frac{\pi}{\sqrt{(\alpha^2+x_+^2)(\alpha^2+x_-^2)}},\tag{36}$$

其中

$$x_\pm^2=\frac{2k^2+\nu-2\mu^2\pm\sqrt{(\nu-4\mu^2)(\nu+4k^2)}}{2}.\tag{37}$$

利用周知的 Legendre 函数 Q_ν 的渐近式[5]:

$$Q_\nu(z)\underset{|\nu|\sim\infty}{\sim}\sqrt{\frac{\pi}{2\nu\,\mathrm{sh}\,\zeta}}\exp\left[-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\zeta\right],\ |\arg(z-1)|<\pi,|\arg\nu|\leqslant\pi-\delta\qquad\delta>0,\tag{38}$$

其中 $z=\mathrm{ch}\,\zeta$, $\zeta=\xi+i\eta$. 选定 $\xi\geqslant0$, $-\pi<\eta\leqslant\pi$ 使当 $z\in(-\infty,1]$ 时被唯一定出.

代(38)入(36),則我們有

$$T_\lambda^0(k,k)\underset{|\lambda|\sim\infty}{\sim}-\frac{4g}{\pi k}\int_{4\mu^2}^{\infty}\frac{d\nu}{\sqrt{\nu}}\sqrt{\frac{\pi}{(2\lambda-1)\sqrt{\left(2+\frac{\nu}{2k^2}\right)\frac{\nu}{2k^2}}}}\exp\left[-\lambda\,\mathrm{ch}^{-1}\left(1+\frac{\nu}{2k^2}\right)\right]\cdot$$

$$\cdot\frac{\pi}{\sqrt{(\alpha^2+x_+^2)(\alpha^2+x_-^2)}}.\tag{39}$$

当 $k>0$ 时,上式积分的主要貢献在积分的下限 ($\lambda_1\geqslant0$), 故将緩变的函数提出后得到

$$T_\lambda^0(k,k)\underset{|\lambda|\sim\infty}{\sim}-\frac{4g}{\pi k}\sqrt{\frac{\pi^3}{(2\lambda-1)4\mu^2(\alpha^2+\mu^2+k^2)^2\sqrt{\left(2+\frac{2\mu^2}{k^2}\right)\frac{2\mu^2}{k^2}}}}\cdot$$

$$\cdot\int_{4\mu^2}^{\infty}d\nu\,\exp\left[-\lambda\,\mathrm{ch}^{-1}\left(1+\frac{\nu}{2k^2}\right)\right]\sim$$

$$\sim-\frac{4g}{(2\mu)^{3/2}}\sqrt{\pi}\,\frac{1}{(k^2+\mu^2)^{1/4}(\alpha^2+\mu^2+k^2)}\cdot\frac{1}{\lambda^{3/2}}\exp\left[-\lambda\,\mathrm{ch}^{-1}\left(1+\frac{2\mu^2}{k^2}\right)\right].\tag{40}$$

当 k 为复数而 $\lambda>0$ 时也有如(40)的結論.

对于非 Born 項采用对于 Born 項相似的处理办法,我們得到

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+\alpha^2}Q_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu^2+x^2+\tilde{k}^2}{2x\tilde{k}}\right)Q_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu^2+x^2+k'^2}{2xk'}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_{4\mu^2}^{\infty}\frac{d\nu}{\sqrt{\nu}}Q_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{\nu+\tilde{k}^2+k'^2}{2\tilde{k}k'}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{(\alpha^2+x_+^2)(\alpha^2+x_-^2)}},\tag{41}$$

其中

$$x_\pm^2=\frac{1}{2}(\nu+\tilde{k}^2+k'^2-2\mu^2)\mp$$

$$\mp\frac{1}{2}\sqrt{\nu^2+2\nu(\tilde{k}^2+k'^2-2\mu^2)+(\tilde{k}^2+k'^2-2\mu^2)^2-\frac{4\mu^2}{\nu}(\tilde{k}^2-k'^2)^2-4[\mu^4+\mu^2(\tilde{k}^2+k'^2)+\tilde{k}^2k'^2]}. \tag{42}$$

当 $\tilde{k}, k'>0$ 时,

$$\left|\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+\alpha^2} Q_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu^2+x^2+\tilde{k}^2}{2x\tilde{k}}\right) Q_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu^2+x^2+k'^2}{2xk'}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant\left\{\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+\alpha^2}\left[Q_{\lambda_1-\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu^2+x^2+\tilde{k}^2}{2x\tilde{k}}\right)\right]^2\cdot\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+\alpha^2}\left[Q_{\lambda_1-\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu^2+x^2+k'^2}{2xk'}\right)\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\pi}{2}\left[\int_{4\mu^2}^\infty \frac{d\nu}{\sqrt{\nu}} Q_{\lambda_1-\frac{1}{2}}\left(\frac{\nu+2\tilde{k}^2}{2\tilde{k}^2}\right)\frac{1}{\sqrt{(\alpha^2+\tilde{x}_+^2)(\alpha^2+\tilde{x}_-^2)}}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\int_{4\mu^2}^\infty \frac{d\nu}{\sqrt{\nu}} Q_{\lambda_1-\frac{1}{2}}\left(\frac{\nu+2k'^2}{2k'^2}\right)\frac{1}{\sqrt{(\alpha^2+x_+'^2)(\alpha^2+x_-'^2)}}\right]^{\frac{1}{2}}\underset{\lambda_1\to\infty}{\sim}$$

$$\underset{\lambda_1\to\infty}{\sim}\frac{\pi}{2}\left[\sqrt{\frac{\pi}{2\lambda_1-1}}\frac{\tilde{k}}{(2\mu)^{3/2}(\alpha^2+\mu^2+\tilde{k}^2)(\mu^2+\tilde{k}^2)^{1/4}}\cdot\frac{\exp\left[-\lambda_1\operatorname{ch}^{-1}\left(1+\frac{2\mu^2}{\tilde{k}^2}\right)\right]}{\lambda_1}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2\lambda_1-1}}\frac{k'}{(2\mu)^{3/2}(\alpha^2+\mu^2+k'^2)(\mu^2+k'^2)^{1/4}}\cdot\frac{\exp\left[-\lambda_1\operatorname{ch}^{-1}\left(1+\frac{2\mu^2}{k'^2}\right)\right]}{\lambda_1}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{43}$$

其中,我們利用了不等式

$$\left|Q_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu^2+x^2+\tilde{k}^2}{2x\tilde{k}}\right)\right|\leqslant Q_{\lambda_1-\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu^2+x^2+\tilde{k}^2}{2x\tilde{k}}\right)\leqslant\left[Q_{\lambda_1-\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu^2+2x^2}{2x^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\cdot$$

$$\cdot\left[Q_{\lambda_1-\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu^2+2\tilde{k}^2}{2\tilde{k}^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{44}$$

注意到(18)式,利用(43)式所推导的結果,我們得到

$$|T_\lambda^0(\tilde{k},k')|\leqslant 2g\left[\sqrt{\frac{\pi}{2\lambda_1-1}}\frac{1}{(2\mu)^{3/2}(\alpha^2+\mu^2+\tilde{k}^2)(\mu^2+\tilde{k}^2)^{1/4}}\cdot\right.$$

$$\cdot\frac{\exp\left[-\lambda_1\operatorname{ch}^{-1}\left(1+\frac{2\mu^2}{\tilde{k}^2}\right)\right]}{\lambda_1}\cdot$$

$$\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2\lambda_1-1}}\frac{1}{(2\mu)^{3/2}(\alpha^2+\mu^2+k'^2)(\mu^2+k'^2)^{1/4}}\cdot$$

$$\left.\cdot\frac{\exp\left[-\lambda_1\operatorname{ch}^{-1}\left(1+\frac{2\mu^2}{k'^2}\right)\right]}{\lambda_1}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{45}$$

上式在 $|\lambda|\sim\infty$, $|\arg\lambda|<\frac{\pi}{2}$ 时成立.

将(45)代入(17),得

$$|K_\lambda(k;\tilde{k},k')|\leqslant 2g\frac{k'}{|k'^2-k^2|}\left[\sqrt{\frac{\pi}{2\lambda_1-1}}\frac{1}{(2\mu)^{3/2}(\alpha^2+\mu^2+\tilde{k}^2)(\mu^2+\tilde{k}^2)^{1/4}}\cdot\right.$$

$$\cdot\frac{\exp\left[-\lambda_1\operatorname{ch}^{-1}\left(1+\frac{2\mu^2}{\tilde{k}^2}\right)\right]}{\lambda_1}\cdot$$

$$\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2\lambda_1-1}}\frac{1}{(2\mu)^{3/2}(\alpha^2+\mu^2+k'^2)(\mu^2+k'^2)^{1/4}}\cdot\frac{\exp\left[-\lambda_1\operatorname{ch}^{-1}\left(1+\frac{2\mu^2}{k'^2}\right)\right]}{\lambda_1}\Bigg]^{\frac{1}{2}}, \tag{46}$$

(46)式成立的条件同(45)式.

为了估計(21a)和(21c)，我們需要考虑如下的积分：

$$\int_0^\infty\frac{k_j}{(\alpha^2+\mu^2+k_j^2)(\mu^2+k_j^2)^{1/4}}\exp\left[-\lambda_1\operatorname{ch}^{-1}\left(1+\frac{2\mu^2}{k_j^2}\right)\right]\cdot\frac{dk_j}{|k_j^2-k^2|}. \tag{47}$$

采用和 Jaffe[6] 类似的做法，使积分在 $k_j=k$ 点附近沿一半径为 $r(\lambda_1)$ 的半圓进行，易得(47)不超过下式：

$$\frac{1}{r(\lambda_1)}\int_0^\infty\frac{k_j}{(\alpha^2+\mu^2+k_j^2)(\mu^2+k_j^2)^{1/4}}\exp\left[-\lambda_1\operatorname{ch}^{-1}\left(1+\frac{2\mu^2}{k_j^2}\right)\right]\frac{dk_j}{k_j+k}\leqslant\frac{C}{r(\lambda_1)},$$

其中 $|\lambda|\sim\infty$，$|\arg\lambda|<\frac{\pi}{2}$，而 $r(\lambda_1)$ 取为 $\lambda_1^{-\epsilon}$.

于是我們得到在上述条件下的估計：

$$|D(\lambda,k;\tilde{k},k')|\leqslant\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}(n+1)^{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{2g\sqrt{\pi}}{(2\mu)^{3/2}}\cdot\frac{C}{\lambda_1^{3/2-\epsilon}}\right)^n\right]\cdot$$

$$\cdot\frac{2g\sqrt{\pi}}{(2\mu)^{3/2}}\cdot\frac{1}{\lambda_1^{3/2}}\left\{\frac{1}{(\alpha^2+\mu^2+\tilde{k}^2)(\alpha^2+\mu^2+k'^2)(\mu^2+\tilde{k}^2)^{1/4}(\mu^2+k'^2)^{1/4}}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\exp\left[-\lambda_1\operatorname{ch}^{-1}\left(1+\frac{2\mu^2}{\tilde{k}^2}\right)-\lambda_1\operatorname{ch}^{-1}\left(1+\frac{2\mu^2}{k'^2}\right)\right]\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{48}$$

$$|D(\lambda;k)|\leqslant 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}n^{n/2}\left(\frac{2g\sqrt{\pi}}{(2\mu)^{3/2}}\cdot\frac{C}{\lambda_1^{3/2-\epsilon}}\right)^n. \tag{48a}$$

利用(45)和(48)，(48a)并注意到(20)式，我們得到

$$|T_\lambda(\tilde{k},k)|\leqslant\frac{2g\sqrt{\pi}}{(2\mu)^{3/2}}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{\lambda_1^{3/2}}\left\{\frac{1}{(\alpha^2+\mu^2+\tilde{k}^2)(\alpha^2+\mu^2+k^2)(\mu^2+\tilde{k}^2)^{1/4}(\mu^2+k^2)^{1/4}}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\exp\left[-\lambda_1\operatorname{ch}^{-1}\left(1+\frac{2\mu^2}{\tilde{k}^2}\right)-\lambda_1\operatorname{ch}^{-1}\left(1+\frac{2\mu^2}{k^2}\right)\right]\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{49}$$

上式同样要求 $|\lambda|\sim\infty$，$|\arg\lambda|<\frac{\pi}{2}$. 进而取 $\tilde{k}=k$ 时有

$$T_\lambda(k,k)\sim T_\lambda^0(k,k)\sim-\frac{4g}{(2\mu)^{3/2}}\sqrt{\pi}\frac{1}{(\alpha^2+\mu^2+k^2)(\mu^2+k^2)^{1/4}}\frac{1}{\lambda^{3/2}}\cdot$$

$$\cdot\exp\left[-\lambda\operatorname{ch}^{-1}\left(1+\frac{2\mu^2}{k^2}\right)\right]. \tag{50}$$

对于 λ 为純虛数时的情形 $\lambda=i\lambda_2$，对 $T_\lambda(\tilde{k},k)$ 的漸近行为的估計要稍不同一些.

将 $Q_{\lambda-\frac{1}{2}}$ 的漸近展式代入(41)，我們得到当 $|\lambda|\sim\infty$ 时

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+\alpha^2} Q_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu^2+x^2+\tilde{k}^2}{2x\tilde{k}}\right) Q_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu^2+x^2+k'^2}{2xk'}\right)\sim$$

$$\sim \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2\lambda-1}}\int_{4\mu^2}^\infty \frac{\exp\left[-\lambda\,\mathrm{ch}^{-1}\dfrac{\nu+\tilde{k}^2+k'^2}{2\tilde{k}k'}\right]}{\left\{\dfrac{(\nu+\tilde{k}^2+k'^2)^2}{4\tilde{k}^2k'^2}-1\right\}^{1/4}}\cdot\frac{d\nu}{\sqrt{\nu(\alpha^2+x_+^2)(\alpha^2+x_-^2)}}.$$

分部积分一次略去 $\left|\dfrac{1}{\lambda}\right|$ 的高阶項得

$$\sim \frac{\pi}{2\mu\lambda}\sqrt{\frac{\pi}{2\lambda-1}}\frac{\tilde{k}k'\left\{\dfrac{(4\mu^2+\tilde{k}^2+k'^2)^2}{4\tilde{k}^2k'^2}-1\right\}^{\frac{1}{4}}}{\alpha^2+\mu^2+\dfrac{\tilde{k}^2}{2}+\dfrac{k'^2}{2}}\exp\left[-\lambda\,\mathrm{ch}^{-1}\frac{4\mu^2+\tilde{k}^2+k'^2}{2\tilde{k}k'}\right].$$

故在 $\lambda=i\lambda_2$, $\tilde{k}$, $k'>0$ 时漸近地有

$$\left|\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+\alpha^2} Q_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu^2+x^2+\tilde{k}^2}{2x\tilde{k}}\right) Q_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu^2+x^2+k'^2}{2xk'}\right)\right|\sim$$

$$\sim \frac{\pi}{2\sqrt{2}\,\mu|\lambda|}\left|\sqrt{\frac{\pi}{2\lambda-1}}\right|\frac{\sqrt{\tilde{k}k'}\cdot\sqrt{4\mu^2+\tilde{k}^2+k'^2}}{\alpha^2+\mu^2+\dfrac{\tilde{k}^2}{2}+\dfrac{k'^2}{2}}\qquad |\lambda|\sim\infty. \tag{51}$$

而

$$\left[\frac{4\mu^2+\tilde{k}^2+k'^2}{\left(\alpha^2+\mu^2+\dfrac{\tilde{k}^2}{2}+\dfrac{k'^2}{2}\right)^2}\right]^1_{\tilde{k}^2}=\frac{\alpha^2-3\mu^2-\dfrac{\tilde{k}^2}{2}-\dfrac{k'^2}{2}}{\left(\alpha^2+\mu^2+\dfrac{\tilde{k}^2}{2}+\dfrac{k'^2}{2}\right)^3}.$$

当 $\tilde{k}^2$ 充分大时，恆小于零．所以取 M_0 为大的正数时有

$$\left|\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+\alpha^2} Q_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu^2+x^2+\tilde{k}^2}{2x\tilde{k}}\right) Q_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu^2+x^2+k'^2}{2xk'}\right)\right|\leqslant\frac{C\pi}{2\sqrt{2}\,\mu|\lambda|}\cdot$$

$$\cdot\left|\sqrt{\frac{\pi}{2\lambda-1}}\right|\frac{\sqrt{\tilde{k}k'}\sqrt{4\mu^2+M_0^2+k'^2}}{\alpha^2+\mu^2+\dfrac{M_0^2}{2}+\dfrac{k'^2}{2}}. \tag{52}$$

代入(17)卽得当 $\lambda=i\lambda_2$, $|\lambda|\sim\infty$, $\tilde{k}$, $k'>0$ 时，

$$|K_\lambda(k;\tilde{k},k')|\leqslant\frac{C\sqrt{2}\,g}{\mu|\lambda|}\left|\sqrt{\frac{\pi}{2\lambda-1}}\right|\frac{k'}{|k'^2-k^2|}\cdot\frac{\sqrt{4\mu^2+M_0^2+k'^2}}{\alpha^2+\mu^2+\dfrac{M_0^2}{2}+\dfrac{k'^2}{2}}\sim$$

$$\sim C'g\frac{1}{|\lambda|^{3/2}}\frac{k'}{|k'^2-k^2|}\cdot\frac{\sqrt{4\mu^2+M_0^2+k'^2}}{\alpha^2+\mu^2+\dfrac{M_0^2}{2}+\dfrac{k'^2}{2}}. \tag{53}$$

用証明对 $\tilde{k}$ 的解析性以及上一段証明的完全类似的办法，卽可得到

$$|D(\lambda k;\tilde{k},k')|\leqslant\left[1+\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n!}C_1^n(n+1)^{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{C'g}{|\lambda|^{3/2}}\right)^n\right]\frac{C'g}{|\lambda|^{3/2}}\cdot\frac{k'}{|k'^2-k^2|}.$$

$$\cdot\frac{4\mu^2+M_0^2+k'^2}{\alpha^2+\mu^2+\frac{M_0^2}{2}+\frac{k'^2}{2}}, \tag{54}$$

$$|D(\lambda;k)|\leqslant 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}C_1^n n^{n/2}\left(\frac{C'g}{|\lambda|^{3/2}}\right)^n. \tag{55}$$

由此我們得到当 $\lambda=i\lambda_2$, $|\lambda|\sim\infty$, $\tilde{k}=k'$ 时 (50) 式也是正确的.

利用以上証明的結果，从周知的 Watson-Sommerfeld 积分表达式出发，我們即可获得 $k>0$ 时总散射振幅的 Regge 渐近行为.

三、非定域位势 $\frac{e^{-\mu r}}{r}\cdot\frac{e^{-\mu r'}}{r'}\cdot\frac{e^{-\sqrt{\beta(r+r')}\cdot R}}{R}$

在这一节里我們研究在物理上更加有兴趣的非定域位势 $U(r,r',R)=g\frac{e^{-\mu r}}{r}\cdot\frac{e^{-\mu r'}}{r'}\cdot\frac{e^{-\sqrt{\beta(r+r')}\cdot R}}{R}$. 对于这个位势我們也将有同位势 $\frac{e^{-\mu r}}{r}\cdot\frac{e^{-\mu r'}}{r'}\cdot\frac{e^{-\alpha R}}{R}$ 相同的結論. 由于証明过程中所采用的办法几乎是一样的，所以我們在这里将只簡要地写出相应的式子.

首先我們看 r 大时位势 $g\frac{e^{-\mu r}}{r}\cdot\frac{e^{-\mu r'}}{r'}\cdot\frac{e^{-\sqrt{\beta(r+r')}\cdot R}}{R}$ 的形状.

我們已經有(7′)式，故

$$\int_0^\infty V_{\lambda-\frac{1}{2}}(r,r')\varphi(\lambda,k,r')\,dr'=-4\pi g\left[\int_0^r\frac{e^{-\mu r-\mu r'}}{\sqrt{rr'}}I_\lambda(\alpha r')K_\lambda(\alpha r)\varphi(\lambda,k,r')\,dr'+\right.$$
$$\left.+\int_r^\infty\frac{e^{-\mu r-\mu r'}}{\sqrt{rr'}}K_\lambda(\alpha r')I_\lambda(\alpha r)\varphi(\lambda,k,r')\,dr'\right], \tag{56}$$

其中 $\alpha=\sqrt{\beta(r+r')}$.

当 r 大时，

$$\int_0^r\frac{e^{-\mu r-\mu r'}}{\sqrt{rr'}}I_\lambda(\alpha r')K_\lambda(\alpha r)\varphi(\lambda,k,r')\,dr'\sim$$
$$\sim\frac{e^{-\mu r}}{2r}\int_0^r e^{-\mu r'\pm ikr'}\frac{\exp[-\sqrt{\beta(r+r')}(r-r')]}{\sqrt{\beta(r+r')}\cdot r}\,dr'\sim$$
$$\sim\frac{e^{-\mu r}}{2\sqrt{2\beta}r^{5/2}}\int_0^r\exp[-\mu r'\pm ikr'-\sqrt{\beta(r+r')}(r-r')]\,dr'. \tag{57}$$

令 $r+r'=R$, $r'-r=R-2r$,

$$\int_0^r\exp[-\mu r'\pm ikr'-\sqrt{\beta(r+r')}(r-r')]\,dr'=$$
$$=\int_r^{2r}\exp[\sqrt{\beta R}(R-2r)-(\mu\mp ik)R]\,dR\cdot\exp(\mu r\mp ikr), \tag{58}$$

而

$$\frac{d}{dR}\left(\frac{\exp[\sqrt{\beta R}(R-2r)-(\mu\mp ik)\cdot R]}{\sqrt{R}}\right)=$$

$$= \frac{\exp[\sqrt{\beta R}(R-2r)-(\mu \mp ik)\cdot R]}{\sqrt{R}}\left[O\left(\frac{1}{R}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(-\mu \pm ik+\frac{d}{dR}(\sqrt{\beta R}(R-2r))\right)\right],$$

$$\frac{d}{dR}(\sqrt{\beta R}(R-2r))=\sqrt{\beta}\left(\frac{3}{2}\sqrt{R}-\sqrt{\frac{1}{R}}\cdot r\right)\sim\sqrt{\beta R}.$$

故当 r 大时近似地有

$$\int_0^r \exp[-\mu r' \pm ikr' - \sqrt{\beta(r+r')}(r-r')]\,dr' \sim$$

$$\sim \frac{1}{\sqrt{\beta}}\left(\frac{\exp[\sqrt{\beta R}(R-2r)-(\mu \mp ik)R]}{\sqrt{R}}\right)\Bigg|_r^{2r}\cdot \exp(\mu r \mp ikr) \sim$$

$$\sim \frac{\exp(-\mu r \pm ikr)}{\sqrt{2\beta r}}. \tag{59}$$

同理可得

$$\int_r^\infty \exp[-\mu r' \pm ikr' + \sqrt{\beta(r+r')}(r-r')]\,dr' \sim \frac{\exp(-\mu r \pm ikr)}{\sqrt{2\beta r}}. \tag{60}$$

于是从(59),(60)及(56),(57)我們得到在 r 大时有

$$\int_0^\infty V_{\lambda-\frac{1}{2}}(r, r')\varphi(\lambda, k, r')\,dr' \sim -\frac{\pi g}{\beta}\frac{\exp(-2\mu r)}{r^3}\varphi(\lambda, k, r), \tag{61}$$

亦卽証明了当 r 很大时，非定域位势 $U(r, r', R)=g\cdot\frac{\exp(-\mu r)}{r}\cdot\frac{\exp(-\mu r')}{r'}\cdot\frac{\exp[-\sqrt{\beta(r+r')}\cdot R]}{R}$ 就接近于具湯川尾的定域位势的形状，这个性質是物理上所希望的。

現在我們給出几个对于非定域位势 $U(r, r', R)=g\cdot\frac{\exp(-\mu r)}{r}\cdot\frac{\exp(-\mu r')}{r'}\cdot\frac{\exp[-\sqrt{\beta(r+r')}\cdot R]}{R}$ 的証明中要用的式子和相应的說明。

同位势 $\frac{\exp(-\mu r)}{r}\cdot\frac{\exp(-\mu r')}{r'}\cdot\frac{\exp(-\alpha R)}{R}$ 相似，在証明 S 矩陣元对动量 k 的解析性时我們需要考察下列积分：

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \exp(-x^2y)\,dx\,dy\,Q_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{(\mu+\beta y)^2+x^2+\tilde{k}^2}{2x\tilde{k}}\right)Q_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{(\mu+\beta y)^2+x^2+k'^2}{2xk'}\right). \tag{62}$$

从(62)的端点和重迭夹攻奇异所导致的对 $\tilde{k}$, k' 的奇异与积分(23)完全相同。于是前面关于 $\tilde{k}$, k' 的开拓的手續可以逐字逐句地重复进行。最后卽可得到对于非定域位势 $U(r, r', R)=g\frac{\exp(-\mu r)}{r}\cdot\frac{\exp(-\mu r')}{r'}\cdot\frac{\exp[-\sqrt{\beta(r+r')}\cdot R]}{R}$ 的物理 T 矩陣对于动量变数 k 除沿虛軸的割綫 $(-\infty i, 0]$, $[\mu i, \infty i)$ 之外的全平面的半純性和对于 λ 的右半平面 $\mathrm{Re}\,\lambda\equiv\lambda_1>-\frac{1}{2}$ 的半純性，可能的极点由 $D(\lambda; k)=0$ 产生。在 λ 平面的第四象限不

能排斥这些极点的可能出現.

在 $|\lambda|\sim\infty$ 的渐近性质的估計中是从下面的式子出发的:

$$\left|\int_0^\infty\int_0^\infty dx\,dy\exp(-x^2y)Q_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{(\mu+\beta y)^2+x^2+\tilde{k}^2}{2x\tilde{k}}\right)Q_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{(\mu+\beta y)^2+x^2+k^2}{2xk}\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left[\int_0^\infty\int_0^\infty dx\,dy\,\exp(-x^2y)\left(Q_{\lambda_1-\frac{1}{2}}\left(\frac{(\mu+\beta y)^2+x^2+\tilde{k}^2}{2x\tilde{k}}\right)\right)^2\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\int_0^\infty\int_0^\infty dx\,dy\,\exp(-x^2y)\left(Q_{\lambda_1-\frac{1}{2}}\left(\frac{(\mu+\beta y)^2+x^2+k^2}{2xk}\right)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\underset{\lambda_1\sim\infty}{\sim}$$

$$\underset{\lambda_1\sim\infty}{\sim}\left[\frac{1}{2}\int_0^\infty dy\int_{4(\mu+\beta y)^2}^\infty\frac{d\nu}{\sqrt{\nu}}Q_{\lambda_1-\frac{1}{2}}\left(\frac{\nu+2\tilde{k}^2}{2\tilde{k}^2}\right)\int_{\tilde{x}_-^2}^{\tilde{x}_+^2}\frac{dx^2\cdot\exp(-x^2y)}{\sqrt{-(x^2-\tilde{x}_+^2)(x^2-\tilde{x}_-^2)}}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{1}{2}\int_0^\infty dy\int_{4(\mu+\beta y)^2}^\infty\frac{d\nu}{\sqrt{\nu}}Q_{\lambda_1-\frac{1}{2}}\left(\frac{\nu+2k^2}{2k^2}\right)\int_{x_-^2}^{x_+^2}\frac{dx^2\cdot\exp(-x^2y)}{\sqrt{-(x^2-x_+^2)(x^2-x_-^2)}}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{63}$$

在右端的渐近式中,調換积分的次序,得上式等于

$$\left[\frac{1}{2}\int_{4\mu^2}^\infty\frac{d\nu}{\sqrt{\nu}}\int_{\frac{\sqrt{\nu}}{2\beta}-\frac{\mu}{\beta}}^\infty dy\,Q_{\lambda_1-\frac{1}{2}}\left(\frac{\nu+2\tilde{k}^2}{2\tilde{k}^2}\right)\int_{\tilde{x}_-^2}^{\tilde{x}_+^2}\frac{dx^2\cdot\exp(-x^2y)}{\sqrt{-(x^2-\tilde{x}_+^2)(x^2-\tilde{x}_-^2)}}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{1}{2}\int_{4\mu^2}^\infty\frac{d\nu}{\sqrt{\nu}}\int_{\frac{\sqrt{\nu}}{2\beta}-\frac{\mu}{\beta}}^\infty dy\,Q_{\lambda_1-\frac{1}{2}}\left(\frac{\nu+2k^2}{2k^2}\right)\int_{x_-^2}^{x_+^2}\frac{dx^2\cdot\exp(-x^2y)}{\sqrt{-(x^2-x_+^2)(x^2-x_-^2)}}\right]^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left[\int_{4\mu^2}^\infty Q_{\lambda_1-\frac{1}{2}}\left(\frac{\nu+2\tilde{k}^2}{2\tilde{k}^2}\right)f(\nu,\tilde{k})\,d\nu\cdot\int_{4\mu^2}^\infty Q_{\lambda_1-\frac{1}{2}}\left(\frac{\nu+2k^2}{2k^2}\right)f(\nu,k)\,d\nu\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{64}$$

其中

$$f(\nu,\tilde{k})=\frac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{\nu}}{2\beta}-\frac{\mu}{\beta}}^\infty dy\int_{\tilde{x}_-^2}^{\tilde{x}_+^2}dx^2\frac{\exp(-x^2y)}{\sqrt{-(x^2-\tilde{x}_+^2)(x^2-\tilde{x}_-^2)\cdot\nu}}. \tag{65}$$

利用 $Q_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{\nu+2\tilde{k}^2}{2\tilde{k}^2}\right)$ 当 $|\lambda|\sim\infty$ 时的渐近行为,知积分(64)的主要貢献在下限. 将緩变的函数提出,我們得到

$$\left|\int_0^\infty\int_0^\infty dx\,dy\exp(-x^2y)Q_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{(\mu+\beta y)^2+x^2+\tilde{k}^2}{2x\tilde{k}}\right)Q_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{(\mu+\beta y)^2+x^2+k^2}{2xk}\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left[\sqrt{\frac{\pi\tilde{k}^2}{(2\lambda_1-1)\cdot2\mu\sqrt{\tilde{k}^2+\mu^2}}}\cdot\frac{\pi}{4\mu\tilde{x}_0^2}\int_{4\mu^2}^\infty\exp\left[-\lambda_1\operatorname{ch}^{-1}\left(\frac{\nu+2\tilde{k}^2}{2\tilde{k}^2}\right)\right]d\nu\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\sqrt{\frac{\pi k^2}{(2\lambda_1-1)\cdot2\mu\sqrt{k^2+\mu^2}}}\cdot\frac{\pi}{4\mu^2x_0^2}\int_{4\mu^2}^\infty\exp\left[-\lambda_1\operatorname{ch}^{-1}\left(\frac{\nu+2k^2}{2k^2}\right)d\nu\right]^{\frac{1}{2}}\sim\right.$$

$$\sim\left[\left(\frac{\pi}{2\mu}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{1}{2\lambda_1-1}}\frac{\tilde{k}}{2(\mu^2+\tilde{k}^2)^{5/4}}\frac{1}{\lambda_1}\exp\left[-\lambda_1\operatorname{ch}^{-1}\left(1+\frac{2\mu^2}{\tilde{k}^2}\right)\right]\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left(\frac{\pi}{2\mu}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{1}{2\lambda_1-1}}\cdot\frac{k}{2(\mu^2+k^2)^{5/4}}\cdot\frac{1}{\lambda_1}\exp\left[-\lambda_1\operatorname{ch}^{-1}\left(1+\frac{2\mu^2}{k^2}\right)\right]\right]^{\frac{1}{2}},$$

其中考虑了

$$f(4\mu^2, \tilde{k}) = \frac{1}{2}\int_0^\infty dy \cdot \frac{1}{2}\int_C dx \frac{2\exp(-x^2y)}{2\mu\sqrt{-(x^2-\tilde{x}_0^2)(x^2-\tilde{x}_0^2)}} =$$
$$= \frac{1}{8\mu}\int_0^\infty dy \cdot 2\pi i \frac{\exp(-\tilde{x}_0^2 y)}{i} = \frac{\pi}{4\mu\tilde{x}_0^2},$$

而 $\tilde{x}_0^2 = \mu^2 + \tilde{k}^2$. 围道 C 表示按反时針方向繞 $\tilde{x}_0^2$ 的一个小圓.

对于 Born 項,(18)利用上述的办法得到

$$T_\lambda^0(k, k) \underset{|\lambda|\sim\infty}{\sim} -\frac{2g}{(2\mu)^{3/2}}\sqrt{\pi}\frac{1}{(\mu^2+k^2)^{5/4}}\frac{\exp\left[-\lambda\,\mathrm{ch}^{-1}\left(1+\frac{2\mu^2}{k^2}\right)\right]}{\lambda^{3/2}}.$$

对于一般項,我們可以很容易地照搬关于位势 $U(r, r', R) = g\frac{\exp(-\mu r)}{r}\cdot\frac{\exp(-\mu r')}{r'}\cdot\frac{\exp(-\alpha R)}{R}$ 的証明办法以获得 S 矩陣元当 $k>0$, $|\arg\lambda| \leqslant \frac{\pi}{2}$, $|\lambda|\sim\infty$ 时的漸近性質,此时 $T_\lambda(k, k) \sim T_\lambda^0(k, k)$.

利用所証得的結果,沿用熟知的方法,即可得到对于非定域位势 $U(r, r', R) = g\frac{\exp(-\mu r)}{r}\cdot\frac{\exp(-\mu r')}{r'}\cdot\frac{\exp(-\sqrt{\beta(r+r')}\cdot R}{R}$ 的总散射振幅的 Regge 漸近行为.

附 录

在这个附录里,我們証明第二类 Legendre 函数的两个估計式.

我們从下列第二类 Legendre 函数的积分表达式开始:

$$Q_\nu(z) = \int_0^\infty \frac{dt}{(z+\sqrt{z^2-1}\,\mathrm{ch}\,t)^{\nu+1}} \qquad z\in(-\infty, 1],\ \mathrm{Re}\,\nu\equiv\nu_1 > -1. \tag{A.1}$$

令 $\arg z = \psi$, $\arg(z+1) = \varphi_1$, $\arg(z-1) = \varphi_2$, 于是由作图法得

$$|\arg z - \arg(\sqrt{z^2-1}\,\mathrm{ch}\,t)| = |\arg z - \arg\sqrt{z^2-1}| =$$
$$= \left|\frac{(\psi-\varphi_1)-(\varphi_2-\psi)}{2}\right| \leqslant \frac{\pi}{2}. \tag{A.2}$$

故

$$|z+\sqrt{z^2-1}\,\mathrm{ch}\,t| \geqslant \frac{|z|}{|\sqrt{z^2-1}\,\mathrm{ch}\,t|}. \tag{A.3}$$

由 (A.1) 即得

$$|Q_\nu(z)| \leqslant \int_0^\infty \frac{dt}{|(z+\sqrt{z^2-1}\,\mathrm{ch}\,t)^{\nu+1}|} \leqslant \exp(\pi|\nu_2|)\int_0^\infty \frac{dt}{|z+\sqrt{z^2-1}\,\mathrm{ch}\,t|^{\nu_1+1}} =$$
$$= \exp(\pi|\nu_2|)\int_0^\infty \frac{dt}{|z|^{\nu_1+1-\epsilon}\cdot|z^2-1|^{\epsilon/2}\,\mathrm{ch}^\epsilon t} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C\exp(\pi|\nu_2|)}{|z|^{\nu_1+1-\epsilon}|z^2-1|^{\epsilon/2}} \qquad \mathrm{Im}\,\nu\equiv\nu_2 \tag{A.4}$$

或

$$|Q_\nu(z)| \leqslant \exp(2\pi|\nu_2|)\int_0^\infty \frac{dt}{|z^2-1|^{\frac{\nu_1+1}{2}}\,\mathrm{ch}^{\nu_1+1}t} \leqslant \frac{C\exp(\pi|\nu_2|)}{|z^2-1|^{\frac{\nu_1+1}{2}}}. \tag{A.5}$$

参 考 文 献

[1] Bottino, A. B., Longoni, A. M. and Regge, T., *Nuovo Cimento*, **23** (1962), 954; 戴元本：物理学报，**20** (1964), 863; Limic, N., *Nuovo Cimento*, **26** (1962), 581.

[2] 戴元本，物理学报，**20** (1964), 947.

[3] 戴元本，物理学报，**21** (1965), 765.

[4] Watson, G. N., Theory of Bessel Functions, Second edition, 1944.

[5] A. 爱尔台里主编，高级超越函数.

[6] Jaffe, A. M. and Kim, Y. S., *Phys. Rev.*, **129** (1963), 2818.

[7] Арбузов, Б. А., Логунов, А. А., Филиппов, А. Т., Хрусталев, О. А., *ЖЭТФ*, **46** (1964), 1266.

THE ASYMPTOTIC REGGE BEHAVIOUR FOR THE NONLOCAL POTENTIALS $\frac{e^{-\mu r}}{r}\cdot\frac{e^{-\mu r'}}{r'}\cdot\frac{e^{-\alpha R}}{R}$ AND $\frac{e^{-\mu r}}{r}\cdot\frac{e^{-\mu r'}}{r'}\cdot\frac{e^{-\sqrt{\beta(r+r')}\cdot R}}{R}$

Chou Lon-shiang Dai Yuan-ben

(*Academia Sinica*)

Abstract

For the nonlocal potentials

$$U(r, r', R) = \frac{e^{-\mu r}}{r}\cdot\frac{e^{-\mu r'}}{r'}\cdot\frac{e^{-\alpha R}}{R}$$

and

$$U(r, r', R) = \frac{e^{-\mu r}}{r}\cdot\frac{e^{-\mu r'}}{r'}\cdot\frac{e^{-\sqrt{\beta(r+r')}\cdot R}}{R}$$

it is proved that the S matric element $S(\lambda, k)$ is meromorphic in the topological product of the half λ -plane $\mathrm{Re}\lambda > -\frac{1}{2}$ and the whole k plane cut along $(-i\infty, 0)$ and $(i\mu, +i\infty)$ and that for large $|\lambda|$, $S(\lambda, k) - 1 = O\left\{\frac{1}{\lambda^{3/2}}\exp\left[-\lambda\,\mathrm{ch}^{-1}\left(1+\frac{\mu^2}{2k^2}\right)\right]\right\}$ for $k > 0$ and $|\arg\lambda| \leqslant \frac{\pi}{2}$.