第21卷 第10期 物 理 学 报 Vol. 21, No. 10
1965 年 10 月 ACTA PHYSICA SINICA Oct., 1965

在介质系数随时間变化的电磁介质中等速运动电荷的能量輻射問題*†

張 金 如

一、介质系数与度规张量

只需把通常的宏观电动力学方程组与一般协变形式下的 Maxwell 方程组作一比较，就不难得出电磁介质的介质系数 ε, μ 与空间的度规张量 $g_{\alpha\beta}$ 之间纯粹形式上的联系.

在 Minkowski 时空中，介质中的宏观电动力学方程组是

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{div}\mathbf{B}=0, \quad \operatorname{curl}\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},\\ &\operatorname{div}\mathbf{D}=0, \quad \operatorname{curl}\mathbf{H}=\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t},\\ &\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}, \qquad \mathbf{B}=\mu\mathbf{H}; \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

其中 ε, μ 都假设是标量. 与此相应，一般协变形式下的 Maxwell 方程组乃是

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^{\rho}}+\frac{\partial F_{\beta\rho}}{\partial x^{\alpha}}+\frac{\partial F_{\rho\alpha}}{\partial x^{\beta}}=0,\\ &\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\left[\sqrt{|g|}\,F^{\alpha\beta}\right]=0, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

其中

$$F_{\alpha\beta}=-F_{\beta\alpha}, \quad F^{\alpha\beta}=g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma}F_{\rho\sigma}.$$

而 $g_{\alpha\beta}$ 表示某个黎曼空间的度规张量，即

$$ds^2=g_{\alpha\beta}\,dx^{\alpha}\,dx^{\beta}.$$

在此处，为了以后的应用，我们须令该黎曼空间的维数为 5，即 $\alpha, \beta, \rho, \sigma = 1, 2, 3, 4, 5$ (下仿此)；并设 $x^1=x$, $x^2=y$, $x^3=z$, $x^4=t$, 它们代表空间及时间坐标.

不难求得使(1)，(2)两式彼此一致的条件，它们是

$$\left.\begin{aligned} &F_{\alpha\beta}=\begin{bmatrix} 0 & B_z & -B_y & E_x & 0\\ -B_z & 0 & B_x & E_y & 0\\ B_y & -B_x & 0 & E_z & 0\\ -E_x & -E_y & -E_z & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\\ &\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^5}=0, \quad \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^5}=0; \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

---

* 1964 年 7 月 29 日收到.

† 本文内容在华中工学院 1963 年科学讨论会上报告过.

及

$$\left.\begin{aligned} &g_{\alpha\beta}=0, \quad \alpha\neq\beta;\\ &g^{11}=g^{22}=g^{33}=-1;\\ &\sqrt{|g|}g^{11}g^{11}=\frac{1}{\mu};\quad \sqrt{|g|}g^{11}g^{44}=-\varepsilon. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

因此,可以把介质系数解释为某种假想空间的度规特性.

根据条件(3),(4),显然有

$$\sqrt{|g|}F^{\alpha\beta}=\begin{bmatrix} 0 & H_z & -H_y & -D_x & 0\\ -H_z & 0 & H_x & -D_y & 0\\ H_y & -H_x & 0 & -D_z & 0\\ D_x & D_y & D_z & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

而坡印亭矢量 $\mathbf{E}\times\mathbf{H}$ 的面积分

$$P=\oint \mathbf{E}\times\mathbf{H}\cdot d\mathbf{s} \tag{5}$$

则可表为

$$P=\oint T_4^k\sqrt{|g|}ds_k, \qquad k=1,2,3\ (\text{下仿此}); \tag{6}$$

其中 ds_k 表示垂直于 k 轴的面元, T_4^k 代表

$$T_4^k=\frac{[\mathbf{E}\times\mathbf{H}]_k}{\sqrt{|g|}}=-F_{4\alpha}F^{k\alpha}; \tag{7}$$

例如

$$T_4^1=\frac{[\mathbf{E}\times\mathbf{H}]_1}{\sqrt{|g|}}=\frac{E_yH_z-E_zH_y}{\sqrt{|g|}}=-F_{4\alpha}F^{1\alpha}.$$

式(7)实际上可由张量

$$T_\alpha^\beta=-F_{\alpha\sigma}F^{\beta\sigma}+\frac{1}{4}\delta_\alpha^\beta F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} \tag{8}$$

直接推出. 注意, 在(8)中, α 或 $\beta=5$ 的部分是没有物理意义的; $\alpha,\beta\neq5$ 的部分代表电磁场的能量-动量张量.

下面讨论 $F_{\alpha\beta}$, T_4^k, 以及方程(2)和 $g_{\alpha\beta}$ 在坐标变换下的特性. 由于 x^5 不具有物理意义,所以在对变换后的量进行物理诠释时必须十分小心. 我们将证明,在下列变换下:

$$\left.\begin{aligned} &x'^k=x^k, \quad x'^4=f(x^4), \quad \frac{\partial f}{\partial x^4}>0,\\ &x'^5=e^{x^5}\phi(x^1,x^2,x^3,x^4), \quad \phi>0; \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

变换后的量 $F'_{\alpha\beta}(\alpha,\beta\neq5)$, T'^k_4 以及相应的方程仍然具有原先的物理意义. 事实上, 命 $A,B,C,D=1,2,3,4$, 由(9)及(3)则有 ($\alpha,\beta,\rho,\sigma=1,2,3,4,5$, 同前)

$$\left.\begin{aligned} F'_{AB}&=\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^A}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^B}F_{\alpha\beta}=\frac{\partial x^C}{\partial x'^A}\frac{\partial x^D}{\partial x'^B}F_{CD},\\ F'_{5\alpha}&=\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^5}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\alpha}F_{\rho\sigma}=\frac{\partial x^A}{\partial x'^5}\frac{\partial x^B}{\partial x'^\alpha}F_{AB}=0, \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial F'_{\alpha\beta}}{\partial x'^5}=0,\\ &\text{及}\\ &F'^{AB}=\frac{\partial x'^A}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x'^B}{\partial x^\beta}F^{\alpha\beta}=\frac{\partial x'^A}{\partial x^C}\frac{\partial x'^B}{\partial x^D}F^{CD};\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

故可把 F'_{AB} 及 F'^{AB} 解释为 x' 系中四维时空的电磁场. 此外尚有(因 $F^{5\alpha}=0$)

$$\sqrt{|g'|}F'^{A5}=\left|\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta}\right|\sqrt{|g|}\frac{\partial x'^A}{\partial x^\rho}\frac{\partial x'^5}{\partial x^\sigma}F^{\rho\sigma}=$$

$$=\frac{\partial x^4}{\partial x'^4}\frac{\partial x^5}{\partial x'^5}\frac{\partial x'^A}{\partial x^C}\frac{\partial x'^5}{\partial x^D}F^{CD}=\left(\frac{\partial x^4}{\partial x'^4}\frac{\partial x'^A}{\partial x^C}\right)\left(\phi^{-1}\frac{\partial\phi}{\partial x^D}\right)F^{CD},$$

故

$$\frac{\partial\sqrt{|g'|}F'^{A5}}{\partial x'^5}=0;\tag{11}$$

式中 $\left|\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta}\right|$ 代表变换(9)的雅可比行列式(函数行列式). 自(9),(8)及(3)又有(因 $T_5^A=0$)

$$T'^k_4=\frac{\partial x'^k}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^4}T^\alpha_\beta=\frac{\partial x'^k}{\partial x^A}\frac{\partial x^B}{\partial x'^4}T^A_B,\tag{12}$$

故 T'^k_4 可解释为 x' 系中电磁场的能量-动量张量的冲量部分,至于方程(2),它变为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial F'_{\alpha\beta}}{\partial x'^\rho}+\frac{\partial F'_{\beta\rho}}{\partial x'^\alpha}+\frac{\partial F'_{\rho\alpha}}{\partial x'^\beta}=0,\\ &\frac{\partial}{\partial x'^\beta}[\sqrt{|g'|}F'^{\alpha\beta}]=0.\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

请注意公式(10)及(11),故可把式(13)解释为 x' 系中四维时空的电动力学方程组[1],其相应的介质系数乃是

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon'=-\sqrt{|g'|}g'^{11}g'^{44},\\ &\frac{1}{\mu'}=\sqrt{|g'|}g'^{11}g'^{11}.\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

式中 $g'_{\alpha\beta}$ 的数值如下[据(9)及(4)]:

$$\left.\begin{aligned}&g'^{AB}=0,\quad A\neq B;\quad g'^{11}=g'^{22}=g'^{33}=-1,\\ &g'^{44}=\left(\frac{\partial f}{\partial x^4}\right)^2g^{44};\quad\sqrt{|g'|}=\left|\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta}\right|\sqrt{|g|}=e^{-x^5}\left(\phi\frac{\partial f}{\partial x^4}\right)^{-1}\sqrt{|g|};\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

其中 $\sqrt{|g'|}$ 是 x^5 的函数;因为坐标 x^5 是假想的,故可指定

$$x^5=\text{const.}>0,\tag{16}$$

则 ε', μ' 由(14),(15)和(16)完全决定.

二、等速运动电荷的能量辐射問題

本节证明下述命题: 在某些介质系数随时间变化的电磁介质中, 等速运动的电荷可

1) 当把 x' 系解释为 Minkowski 空间时, x 系当然就不是 Minkowski 空间了.

以辐射能量.

証：根据电动力学，在眞空中 (ε_0, μ_0) 作加速运动的点电荷必然辐射能量. 用方程(2),(3),(4)来描述该电荷的电磁场，而用

$$x^1 = f(x^4), \qquad \frac{\partial f}{\partial x^4} > 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial (x^4)^2} \neq 0 \tag{17}$$

来描述该电荷的运动. 由(5),(6)则有

$$P = \oint T_4^k \sqrt{|g|}\, ds_k > 0, \tag{18}$$

式中的闭合曲面应当把电荷包含在内，曲面离电荷应当充分的远.

现在引入变换(9)把坐标变为 x' 系，并把 x'^1、x'^2、x'^3、x'^4 解释为 Minkowski 空间的空间及时间坐标. 则据上节所证，在 x' 系里，电磁场可用(13),(14),(15)和(16)来描述.

在 x' 系里，仿(5)和(6)，能量的辐射应当为

$$P' = \oint T_4'^k \sqrt{|g'|}\, ds'_k,$$

据(12),(15)及(9)，

$$P' = \left(\frac{\partial x^4}{\partial x'^4}\right)^2 \oint \phi^{-1} T_4^k \sqrt{|g|}\, e^{-x^5} ds_k.$$

设在离电荷充分远处 ϕ 只是时间的函数，即

$$\phi|_{x^k=\infty} = \psi(t), \tag{19}$$

则由(18)，

$$P' = \left(\frac{\partial x^4}{\partial x'^4}\right)^2 \psi^{-1} \oint T_4^k \sqrt{|g|}\, e^{-x^5} ds_k > 0. \tag{20}$$

在 x' 系中，电荷的运动方程(17)变为

$$x'^1 = x'^4, \qquad \frac{\partial^2 x'^1}{\partial (x'^4)^2} = 0, \tag{21}$$

即电荷作等速运动.

在 x' 系中，相应的介质系数 ε', μ' 由式(14),(15)及(16)决定，即

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon' &= e^{-x^5} \phi^{-1} \frac{\partial f}{\partial x^4} g^{44} \sqrt{|g|}, \\ \frac{1}{\mu'} &= e^{-x^5} \left(\phi \frac{\partial f}{\partial x^4}\right)^{-1} \sqrt{|g|}. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

今因

$$\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial x^4} = 0, \qquad \frac{\partial \mu_0}{\partial x^4} = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial (x^4)^2} \neq 0;$$

故无论怎样选择 ϕ 及 f，都不能使 ε', μ' 与时间无关. 既然 ϕ 及 f 在很大程度上可以任意指定，则满足条件(22)的介质应当能够在物理上近似地实现(例如把介质压缩或加热).

根据(16), (20)及(21)，则在介质 ε', μ' 中，等速运动的电荷必可辐射能量. 命题得证.