

高度奇异位势 S 矩阵元的一个表示式*

周 龙 驤
(中国科学院)

提 要

本文给出了在原点附近高度奇异、在无穷远的行为比任何指数下降更快的位势,其分波 S 矩阵元对能量的一个表示式。

最近戴元本^[1]证明了对于在原点比离心势更奇异的位势,其分波 S 矩阵元关于角动量变数具有如下表达式:

$$S(\lambda, k) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^{*2}}}{1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}} \cdot e^{i\pi(\lambda-a)}. \quad (1)$$

位势在原点不奇异的情况下,分波 S 矩阵元对角动量变数的表达式是由 B. R. Deasi 和 R. G. Newton^[2] 给出的,其形式为

$$S(\lambda, k) = S(0, k) e^{-2i\lambda \operatorname{Im} a(k)} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_n^*} \cdot \frac{\lambda - \lambda_n^*}{\lambda - \lambda_n} e^{2i\lambda \operatorname{Im} \left(\frac{1}{\lambda_n}\right)}. \quad (2)$$

非相对论的分波 S 矩阵元关于能量的表达式最初是由胡宁^[3]提出的。他在位势的力程很短的假定下不加证明地写出了如下的式子:

$$S(k) = \pm e^{iCk} \prod_{\lambda} \frac{k - k_{\lambda}^*}{k - k_{\lambda}} \prod_r \frac{(k - k_r^*)(k + k_r)}{(k - k_r)(k + k_r^*)}, \quad (3)$$

其中 k_{λ} 表示虚轴上的极点, k_r 表示虚轴右方的极点。

在非相对论的位势散射的情形下,首先严格地证明(3)型式子的是 T. Regge^[4]。在假定原点处的奇异不超过离心势,而当 $r > a$ 时, $V(r)=0$ 的情形下,证明了 Jost 函数 $f(k)$ 的一个表示式:

$$f(k) = e^{-iakf(0)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{k}{k_n}\right). \quad (4)$$

R. G. Newton 在[5]中也引出了 T. Regge 的结果(4)式。

我们在本文中考虑戴元本类型的位势^[1]。为了获得对于能量的解析性,我们加上位势在远处比任意指数下降更快的假定。在这种附有在远处的行为的高度奇异位势的情形下,我们证明分波 S 矩阵元关于能量的类如(3)型的式子。它同 N. Limic^[6] 在一类特殊

* 1965年11月22日收到。

例子下证明的, 以及后来 Yu. M. Lomsadze^[7] 在一般情形下指出的¹⁾ 能量 k 的无穷远点是 $S(\lambda, k)$ 的本性奇点是一致的. 这里给出的式子比(3)给出更多的知识.

二

我们从熟知的分波径向薛定格方程出发:

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + k^2 - \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{z^2} - V(z) \right] \psi(\lambda, k, z) = 0. \quad (5)$$

这里假定

(A) $V(z) \sim z^{-n}$ (当 $z \sim 0$ 时, $n > 2$);

(B) $V(z)$ 在 $\operatorname{Re} z > 0$ 解析;

(C) $\int_a^\infty |e^{\tau z} V(z)| dz < +\infty$ (对任何 τ 成立, $a > 0$).

例如 $V(z) \sim e^{-\mu z^{1+\varepsilon}}$ (当 $z \rightarrow \infty$, $\varepsilon > 0$). 上述假定与文献 [1] 不同处仅在于加强了假定(C).

根据无穷远的渐近条件定义的 Jost 解为^[6]

$$f(\lambda, k, z) = f_1(\lambda, k, z) + \frac{1}{2ik} \int_{z, \Gamma}^\infty [f_1(\lambda, k, z') f_2(\lambda, k, z) - f_2(\lambda, k, z') f_1(\lambda, k, z)] \frac{Q''(\lambda, k, z')}{Q(\lambda, k, z')} f(\lambda, k, z') dz', \quad (6)$$

其中

$$f_1(\lambda, k, z) = (-k^2)^{\frac{1}{2}} Q(\lambda, k, z) e^{-ikz + \int_{z, \Gamma}^\infty (Q^{-2} - ik) dz'}, \quad (7)$$

$$f_2(\lambda, k, z) = 2ik f_1 \cdot \int_{0, \Gamma}^z f_1^{-2} dz', \quad (8)$$

$$Q(\lambda, k, z) = \left(-k^2 + \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{z^2} + V(z) \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (9)$$

我们考虑 $|k|$ 很大时的情形, 故 Q 的枝点只发生在 z 很小时. 所以, 当 $|k| \rightarrow \infty$ 时, 则枝点为

$$z \sim k^{-\frac{2}{n}} = |k|^{-\frac{2}{n}} e^{-i\frac{2\varphi}{n}}.$$

我们的积分路径 Γ 需要取得避开这 n 个枝点. 该 n 个枝点以 $|k|^{-\frac{2}{n}}$ 为半径围绕原点而分布着, 所张的幅角是 $\frac{2\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}j$, $j = 1, \dots, n$. 当 $|k| \rightarrow \infty$ 时, 它们都趋于零.

显然^{[6] 2)}

$$f_1(\lambda, k, z) f_2(\lambda, k, z) = ik Q^2 \rightarrow 1 \quad (\text{当 } z \rightarrow \infty).$$

1) 他并没有给出证明.

2) 在文献 [6] 的证明中没有明确指出该式成立的要求, 事实上, 要求积分路径 Γ 在趋于零的那一头须界于角域

$$-\frac{\pi}{n-2} < \arg z < \frac{\pi}{n-2}, \quad z \in \Gamma, \quad z \sim 0.$$

令

$$g(\lambda, k, z) = \frac{f(\lambda, k, z)}{f_1(\lambda, k, z)}, \quad (10)$$

则(6)式化为

$$\begin{aligned} g(\lambda, k, z) &= 1 + \frac{1}{2ik} \int_{z, \Gamma}^{\infty} \left[\frac{f_1(\lambda, k, z') f_2(\lambda, k, z)}{f_1(\lambda, k, z)} - \right. \\ &\quad \left. - f_1(\lambda, k, z') f_2(\lambda, k, z') \right] \frac{Q''}{Q} g(\lambda, k, z') dz' = \\ &= 1 + \int_{z, \Gamma}^{\infty} G(\lambda, k, z, z') g(\lambda, k, z') dz'. \end{aligned} \quad (11)$$

我们估计(11)的核

$$\frac{f_1(\lambda, k, z')}{f_1(\lambda, k, z)} = \frac{Q(\lambda, k, z')}{Q(\lambda, k, z)} \cdot e^{-\int_{z, \Gamma}^{z'} Q^{-1} dz''},$$

故

$$\left| \frac{f_1(\lambda, k, z')}{f_1(\lambda, k, z)} \right| = \left| \frac{-k^2 + \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{z'^2} + V(z')}{-k^2 + \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{z^2} + V(z)} \right|^{-\frac{1}{2}} e^{-\operatorname{Re} \left[\int_{z, \Gamma}^{z'} \left(-k^2 + \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{z''^2} + V(z'') \right)^{\frac{1}{2}} dz'' \right]};$$

而当 $|k| \rightarrow \infty$, z_1, z_2 为有限时,

$$\begin{aligned} &\int_{z_1, \Gamma}^{z_2} \left(-k^2 + \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{z''^2} + V(z'') \right)^{\frac{1}{2}} dz'' \\ &\sim e^{\frac{i\pi}{2}} k \int_{z_1, \Gamma}^{z_2} dz''. \end{aligned}$$

记 $\arg k = \varphi$, $\arg \Gamma_{z_1, z_2} \sim \theta$, 则只要选取积分道路 Γ , 使在 $z_1 z_2$ 段上的近似的幅角 θ 满足

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi + \theta + \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2},$$

即

$$-\pi - \varphi \leq \theta \leq -\varphi,$$

这种积分路径 Γ 的选取是可能的, 事实上只要避开 n 个趋于零的枝点 Γ 的选取是沒有限制的.

当 $z' \sim \infty$ 时,

$$\begin{aligned} &\int \left(-k^2 + \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{z''^2} + V(z'') \right)^{\frac{1}{2}} dz'' \\ &\sim \int_{\Gamma}^{\infty} ik dz'', \end{aligned}$$

这只需选取积分路径 Γ 的趋于无穷时的尾巴的渐近幅角 θ 满足

$$-\pi - \varphi \leq \theta \leq -\varphi.$$

这里为了醒目我们略去了标记 λ, k . 而

$$\begin{aligned} f_1(z')f_2'(z) &= \frac{f_1'(z')}{f_1'(z)} (f_1(z)f_1'(z)f_2(z) + 2ikf_1(z)) \\ &= \frac{f_1'(z')}{f_1'(z)} (Q(z)Q'(z) + 1) \cdot ikf_1(z), \end{aligned} \quad (27)$$

$$f_1(z')f_2(z')f_1'(z) = ikQ^2(z')f_1(z) \left(\frac{Q'(z)}{Q(z)} - Q^{-2}(z) \right). \quad (28)$$

当 $|k| \rightarrow \infty, |z| > \delta > 0$ 时, 利用(12), QQ' 表示式以及(20), 得到(27)的估计式:

$$|f_1'(z')f_2'(z)| \leq CM^2|k|e^{|k|\cdot|z|} < B|k|e^{|k|\cdot|z|}. \quad (29)$$

同样有(28)的估式

$$|f_1(z')f_2(z')f_1'(z)| \leq B_1|k|^2e^{|k|\cdot|z|} \cdot |Q^2(z')|. \quad (30)$$

从而利用估式(29), (30)并考虑到(18)及项式

$$\frac{Q''(z')}{Q(z')} = \frac{5}{16} \frac{\left(-2 \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{z'^3} + V'(z') \right)^2}{\left(-k^2 + \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{z'^2} + V(z') \right)^2} - \frac{1}{4} \frac{6 \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{z'^4} + V''(z')}{\left(-k^2 + \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{z'^2} + V(z') \right)}, \quad (31)$$

我们得到

$$\begin{aligned} |f'(z)| &\leq |f_1'(z)| + B_2|k|e^{|k|\cdot|z|} \\ &\leq B_3|k|e^{|k|\cdot|z|}. \end{aligned} \quad (32)$$

利用以上对 Jost 解的估计, 若我们采用文献[6]中关于 S 矩阵元的定义的式子

$$S(\lambda, k) = e^{i\pi(\lambda - \frac{1}{2})} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(\lambda, k, z)}{f(\lambda_1 - k, z)},$$

则易见 k 的无穷远点是 $S(\lambda, k)$ 的本性奇点.

类似地, 根据在原点的渐近条件定出的散射解为

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda, k, z) &= \phi_1(z) - \frac{1}{2} \int_0^z [\phi_1(z')\phi_{II}(z) - \phi_{II}(z')\phi_1(z)] \cdot \\ &\quad \cdot \left[k^2 - \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{z'^2} - V'(z') \right] \varphi(\lambda, k, z') dz', \end{aligned} \quad (33)$$

其中^[8] $V = V_s + V'$, $|V' \cdot z^2| < +\infty$. 当 $z \sim 0$ 时

$$\phi_{I, II} \sim z^{\frac{\pi}{4}} e^{\mp \int_0^z \sqrt{V_s(x')} dx'}. \quad (34)$$

当 $z < \delta$, δ 充分小时, 利用 Titchmarsh 引理得

$$\begin{aligned} |\varphi| &\leq |\phi_I| + C \int_0^z |\phi_1(z') \phi_{II}(z')| \cdot \left| k^2 - \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{z'^2} - V' \right| \cdot |\varphi| dz' \\ &\leq |\phi_I| e^{C \int_0^z |\phi_1 \phi_{II}| \cdot \left| k^2 - \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{z'^2} - V' \right| dz'} \\ &\leq C''(z) |\phi_I(z)| e^{C'|k|^2} \quad (C''(z) < +\infty). \end{aligned} \quad (35)$$

当 $z \sim 0$ 时,

$$\int_{z, \Gamma} \left(-k^2 + \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{z'^2} + V(z'') \right)^{\frac{1}{2}} dz'' \\ \sim \int_{z, \Gamma} \frac{dz''}{z''^{\frac{n}{2}}},$$

应当要求所选取的积分道路 Γ 在原点附近的幅角 θ 适合

$$-\frac{\pi}{n-2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{n-2}.$$

显而易见, 对于 z_1, z_2 为有限, $z' \sim \infty$ 及 $z \sim 0$ 三种情形, Γ 的选取是彼此相容的. 从而在这样选定的积分道路 Γ 之下, 对 z, z' 和 k 一致地有

$$\left| \frac{f_1(\lambda, k, z')}{f_1(\lambda, k, z)} \right| < M, \quad (12)$$

其中 $|z'| > |z|$, z, z' 不取 Q 的枝点. 又

$$\frac{f_2(\lambda, k, z)}{f_2(\lambda, k, z')} = \frac{f_1(\lambda, k, z')}{f_1(\lambda, k, z)} \cdot \frac{Q^2(\lambda, k, z)}{Q^2(\lambda, k, z')},$$

故由(12), 即有(其中 z, z' 不取 Q 的枝点)

$$\left| \frac{f_2(\lambda, k, z)}{f_2(\lambda, k, z')} \right| < M \quad (\text{当 } |z'| > |z| \text{ 时}). \quad (13)$$

所以

$$|f_1(\lambda, k, z') f_2(\lambda, k, z)| = \left| \frac{f_2(\lambda, k, z)}{f_2(\lambda, k, z')} f_1(\lambda, k, z') f_2(\lambda, k, z') \right| \\ < M |Q^2(\lambda, k, z')|. \quad (14)$$

从而对任何 z, z', k , 当 $|z'| > |z|$ 时估计式

$$|G(\lambda, k, z, z')| < M' |Q''(\lambda, k, z') Q(\lambda, k, z')| \quad (15)$$

成立, 其中 z, z' 不取 Q 的枝点.

显式地写出上式右端我们有

$$Q''Q = \frac{5}{16} \frac{\left(-2 \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{z'^3} + V'(z') \right)^2}{\left(-k^2 + \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{z'^2} + V(z') \right)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{4} \frac{6 \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{z'^4} + V''(z')}{\left(-k^2 + \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{z'^2} + V(z') \right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (16)$$

(16)在以下的估计中是有用的.

利用 Titchmarsh 引理于(11)得到

$$|g(\lambda, k, z)| \leq e^{\int_{|z|, \Gamma}^{\infty} |G| dz'}. \quad (17)$$

只要 $|z| > 0, |z| \neq 0$, 利用(16)得

$$|g| \leq e^{M'' |k|^{-3}}. \quad (18)$$

若 $z \sim 0$, 则有

$$|g| \leq C e^{M'' |k|^{-3}} \rightarrow C, \quad (\text{当 } |k| \rightarrow \infty). \quad (19)$$

利用(10), 当 $|k| \rightarrow \infty$ 时

$$f(\lambda, k, z) \sim f_1(\lambda, k, z).$$

再考虑到(7),(9)就得

$$\begin{aligned} |f(\lambda, k, z)| &< C |e^{-ikz + \int_{z,\Gamma}^{\infty} (Q^{-2} - ik) dz'}| \\ &\leq C e^{|k| \cdot |z|} e^{\operatorname{Re} \int_{z,\Gamma}^{\infty} (Q^{-2} - ik) dz'}. \end{aligned}$$

当 $|z| > \delta > 0$, $|k| \rightarrow \infty$ 时

$$\int_{z,\Gamma}^{\infty} (Q^{-2} - ik) dz' \sim \int_{z,\Gamma}^{\infty} \frac{i}{2k} \left(\frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{z'^2} + V(z') \right) dz'.$$

代入上式, 我们得到在上述条件下估计式

$$|f(\lambda, k, z)| \leq C e^{|k| \cdot |z|} \quad (20)$$

成立; 如果允许 $z \sim 0$, 则

$$|f(\lambda, k, z)| \leq C e^{C'|k|^2}. \quad (21)$$

Jost 解的导函数的式子是

$$\begin{aligned} f'(\lambda, k, z) &= f_1'(\lambda, k, z) + \frac{1}{2ik} \int_{z,\Gamma}^{\infty} [f_1(\lambda, k, z') f_2'(\lambda, k, z) - \\ &\quad - f_2(\lambda, k, z') f_1'(\lambda, k, z)] \frac{Q''(\lambda, k, z')}{Q(\lambda, k, z')} f(\lambda, k, z') dz', \end{aligned} \quad (22)$$

其中撇表示对 z 求导. 而

$$\begin{aligned} f_1(\lambda, k, z) &= (-k^2)^{\frac{1}{4}} Q' e^{-ikz + \int_{z,\Gamma}^{\infty} (Q^{-2} - ik) dz'} - (k^2)^{\frac{1}{4}} Q^{-1} e^{-ikz + \int_{z,\Gamma}^{\infty} (Q^{-2} - ik) dz'}, \\ f_2(\lambda, k, z) &= 2ik f_1' \int_{0,\Gamma}^z f_1^{-2} dz' + 2ik f_1^{-1}, \end{aligned}$$

把以上导函数式子用 f_1 来表出即有

$$f_1'(\lambda, k, z) = \frac{Q'}{Q} f_1 - Q^{-2} f_1, \quad (23)$$

$$f_2'(\lambda, k, z) = \frac{f_1'}{f_1} f_2 + 2ik f_1^{-1}. \quad (24)$$

利用(20)及(9)并考虑到

$$Q' = -\frac{1}{4} \left[-k^2 + \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{z^2} + V(z) \right]^{-\frac{5}{4}} \left(-2 \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{z^3} + V'(z) \right)$$

知

$$|f_1'(\lambda, k, z)| \leq C |k| e^{|k| \cdot |z|}, \quad (25)$$

$|z| > \delta > 0$.

为了估计(22)式, 我们把它适当改写如下:

$$\begin{aligned} f'(z) &= f_1'(z) + \frac{1}{2ik} \int_{z,\Gamma}^{\infty} [f_1'(z') f_2'(z) - f_1(z') f_2'(z') f_1'(z)] \cdot \\ &\quad \cdot \frac{Q''(z')}{Q(z')} dz', \end{aligned} \quad (26)$$

散射解的导函数方程为

$$\varphi'(\lambda, k, z) = \phi_1'(z) - \frac{1}{2} \int_0^z [\phi_1 \phi_1' - \phi_{11} \phi_1'] \left[k^2 - \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{z'^2} - V'(z') \right] \cdot \varphi(\lambda, k, z') dz'. \quad (36)$$

故由(35)式得

$$|\varphi'| \leq |\phi_1'| + C \int_0^z |\phi_{11}(z') \phi_1'(z)| \cdot \left| k^2 - \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{z'^2} - V'(z') \right| \cdot |\varphi| dz' \\ \leq C'''(z) |k|^2 e^{C'|k|^2} |\phi_1'(z)|, \quad C'''(z) < +\infty. \quad (37)$$

按照 Jost 函数的定义

$$f(\lambda, k) = W[f(\lambda, k, z), \varphi(\lambda, k, z)]. \quad (38)$$

由(22), (32), (35)和(37)式知, 当 $|k|$ 相当大时估计式

$$|f(\lambda, k)| \leq C |k|^2 e^{B|k|+D|k|^2} \\ < C |k|^2 e^{D_1|k|^2} \quad (39)$$

成立. 类似地有

$$|f(\lambda, -k)| < C' |k|^2 e^{D_1'|k|^2}. \quad (40)$$

按照文献[5, 6]的方法, 我们易证在本文对位势的假定(C)之下, Jost 函数 $f(\lambda, k)$ 是 k 的整函数. 利用估计式(39), 由 Lindelöf^[9] 定理, Jost 函数 $f(\lambda, k)$ 的 Hadamard 展式为

$$f(\lambda, k) = f(\lambda, 0) \cdot k^\sigma e^{c_1 k + c_2 k^2} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{k}{k_m} \right) e^{\frac{k}{k_m} + \frac{1}{2} \left(\frac{k}{k_m} \right)^2}, \quad (41)$$

其中 k_m 为 $f(\lambda, k)$ 的零点; $f(\lambda, 0)$, c_1 , c_2 , σ 待定. 从而

$$S(\lambda, k) = e^{i\pi(\lambda - \frac{1}{2})} \in j^\sigma e^{2c_1 k} \prod_{m=1}^{\infty} \left(\frac{k_m - k}{k_m + k} \right) e^{\frac{2k}{k_m}}, \quad (42)$$

其中 σ , c_1 待定.

现在我们来考察 Jost 函数 $f(\lambda, k)$ 的零点的性质, 以便使表示式(41), (42)更为精确化. 为此我们需要写下 Jost 函数关于变量 k 的一些性质.

根据(33)我们有

$$\varphi(\lambda, k, z) = \varphi(\lambda, -k, z). \quad (43)$$

由(6), (7), (8), (9)式及 $H_\lambda^{(1),(2)}(kz)$ 的性质知道, 当 k 为实数时

$$f(\lambda, e^{-i\pi} k, z) = f^*(\lambda, k, z). \quad (44)$$

再利用散射解同 Jost 解之间的关系即得

$$f(\lambda, e^{-i\pi} k) = f^*(\lambda, k), \quad (45)$$

从而对于同实轴相联通的关于 k 解析的区域均有

$$f(\lambda, e^{-i\pi} k) = f^*(\lambda, k^*). \quad (46)$$

完全类似于[5]的讨论, 我们有如下的结论:

1) $f(\lambda, k)$ 无非零实零点.

2) $f(\lambda, k)$ 在 k 的下半平面的零点必在虚轴上, 它们都是单重零点. 它们关于实轴对称的点必非 $f(\lambda, k)$ 的零点.

故 $f(\lambda, k)$ 的零点或者在下半虚轴上, 或者在上半平面. 实轴上只有 $k = 0$ 可能是零点.

根据以上讨论, (41) 式可以改写为

$$f(\lambda, k) = f(\lambda, 0) k^\sigma e^{c_1 k + c_2 k^2} \prod_{l'=1}^{\infty} \left(1 - \frac{k}{i\chi_m}\right) \left(1 - \frac{k}{k_l}\right) \left(1 + \frac{k}{k_l^*}\right) \cdot e^{\frac{k}{i\chi_m} + \frac{k}{k_l} - \frac{k}{k_l^*} - \frac{1}{2} \left(\frac{k}{\chi_m}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{k}{k_l}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{k}{k_l^*}\right)^2} \quad (47)$$

(42) 式可以改成

$$S(\lambda, k) = e^{i\pi(\lambda - \frac{1}{2})} (-)^{\sigma} e^{2c_1 k} \cdot \prod_{l'=1}^{\infty} \frac{\chi_m + ik}{\chi_m - ik} \cdot \frac{k_l - k}{k_l + k} \cdot \frac{k_l^* + k}{k_l^* - k} \cdot e^{2\frac{k}{i\chi_m} + 2\frac{k}{k_l} - 2\frac{k}{k_l^*}}, \quad (48)$$

其中 $\chi_m < 0$, χ_m 各不相同. 当 $k_l = i\chi$ 时, $\chi \approx -\chi_m$, $\chi > 0$. k_l 全位于上半平面.

作者感谢戴元本同志的帮助.

参 考 文 献

- [1] Dai Yuan-ben, *Scientia Sinica*, **14** (1965), 689.
- [2] Deasi, B. R. and Newton, R. G., *Phys. Rev.*, **129** (1963), 1445.
- [3] Hu, N., *Phys. Rev.*, **74** (1948), 131.
- [4] Regge, T., *Nuovo Cimento*, **8** (1958), 67.
- [5] Newton, R. G., *J. Math. Phys.*, **1** (1960), 319.
- [6] Limić, N., *Nuovo Cimento*, **26** (1962), 581.
- [7] Lomsadze, Y. M., *Nuovo Cimento*, **38** (1965), 1291.
- [8] Dai Yuan-Ben, *Scientia Sinica*, **12** (1963), 1395.
- [9] Boas, R. P., *Entire functions* (New York, Academic Press Inc. Publishers).

A REPRESENTATION OF THE S MATRIX ELEMENT FOR A HIGHLY SINGULAR POTENTIAL

CHOU LON-SHIANG

(*Academia Sinica*)

ABSTRACT

In this paper we have obtained a representation of the S matrix element for a potential with the following properties:

- 1) it possesses a singularity higher than r^{-2} near the origin.
- 2) it asymptotically decreases faster than any exponent at infinity.