第 24 卷 第 3 期 物 理 学 报 Vol. 24, No. 3
1975 年 5 月 ACTA PHYSICA SINICA May, 1975

浅海表面声道中的简正波声场*

张 仁 和

提 要

本文讨论简谐点源在浅海表面声道中的声场，给出简正波的近似解. 假定海水声速随深度单调增加，利用在反转点连结的 WKB 近似，导出简正波极点方程与振幅函数的近似表式，得到简正波的群速与指数衰减系数. 这些表式形式上都很简单，物理意义清楚，并便于计算. 对于两个具体例子分别计算了近似解与精确解的数值，比较结果表明，近似解具有一定的准确性.

一、引 言

在水声传播实验中，人们发现在冬季或夜间海洋上层常常出现波导传播的现象. 由于海水受冷空气的影响，加上风力与湍流的搅混，在海水中形成表面等温层或微弱的正温度梯度，海水声速由于静压力而随深度缓慢增加，这种情况称为表面声道.

在深海中，表面声道之下是很强的负梯度. 最近几年已发表过一些深海表面声道的理论与实验的论文[1-4]，这些论文中皆假定折射率的平方是双直线型，采用了类似于文献[5]中分析电磁波沿地表面波导传播的方法. 在简正波理论中，即使对这样简化的双直线模型求解也是十分困难的. 给定了具体的模型参数，虽然可以借助于电子计算机求数值解，但其结果往往缺乏清晰的物理图象.

在浅海中，表面声道之下是海底. 海底使介质出现不连续性并存在很强的吸收，使得浅海表面声道问题更为复杂. 我们认为，在浅海声传播问题中除对于个别情况需要求严格的精确解外，在一般情况下求出具有清晰的物理意义且便于计算的近似解是很必要的. 在文献[6]中我们应用 WKB 近似讨论过负梯度浅海问题，本文用类似的方法来分析浅海表面声道中的声场.

在简正波理论中最困难的问题是计算简正波的极点（本征值）与振幅函数（本征波函数），本文将 WKB 近似用于解复数极点方程以及计算振幅函数，得到了简正波群速与指数衰减系数的简单表式，所得结果具有清晰的物理意义，并适用于具有分层结构与吸收的海底.

二、简正波声场的一般表达式

为便于讨论，这里列出简正波声场的一般表达式. 浅海表面声道的模型如图 1 所示，

* 1974 年 3 月 22 日收到.

海面为绝对软边界，海水声速 $c(z)$ 是随深度单调增加的缓变函数(具有连续的一、二阶微商)，海水密度为常数 ρ，海底声速与密度为常数 c_1 与 ρ_1，c_1 一般为复数(存在吸收)．这里虽然假定海底是均匀半空间，由于在最后结果中海底的影响仅通过海底反射系数表现出来，因此不难推广到具有分层结构的海底．以下采用柱坐标，海面位于 $z=0$，简谐点源位于 z_0(时间因子 $e^{-i\omega t}$ 省略)，海深为 h，我们的任务是计算水层中 $(0\leqslant z\leqslant h)$ 的声场．

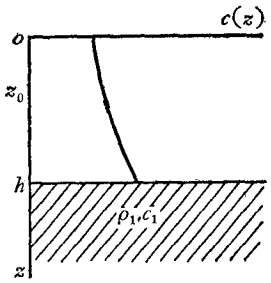

图　1

众所周知，用傅里叶-贝塞耳变换可得到点源声场的积分表达式，然后选取适当的分支割线并改变积分路线，积分路线所扫过的极点的留数就是简正波，沿分支割线的积分得到旁侧波[7]．旁侧波声压按 $\frac{1}{r^m}e^{-\alpha r}$ 衰减 $(1\leqslant m\leqslant 2$，α 是海底的声吸收系数)，一般可以忽略不计．简正波声场的表达式为

$$P=2\pi i\sum_l \Psi(z_0,\nu_l)\Psi(z,\nu_l)H_0^{(1)}(\nu_l r)\nu_l, \tag{1}$$

其中

$$\Psi(z,\nu_l)=\frac{F_1(z,\nu_l)F_2(0,\nu_l)-F_2(z,\nu_l)F_1(0,\nu_l)}{F_2(0,\nu_l)\left[W(F_1,F_2)\dfrac{d\phi(\nu)}{d\nu}\right]^{1/2}_{\nu_l}}, \tag{2}$$

$$\phi(\nu)=\frac{\rho_1F_1'(h,\nu)-i\rho\sqrt{k_1^2-\nu^2}F_1(h,\nu)}{\rho_1F_2'(h,\nu)-i\rho\sqrt{k_1^2-\nu^2}F_2(h,\nu)}-\frac{F_1(0,\nu)}{F_2(0,\nu)}, \tag{3}$$

$W(F_1,F_2)$ 是朗司基行列式，$F_1'(z,\nu)=\dfrac{\partial F_1(z,\nu)}{\partial z}$，$k_1=\dfrac{\omega}{c_1}$，$H_0^{(1)}(\nu_l r)$ 是汉克尔函数，$\Psi(z,\nu_l)$ 称为简正波的振幅函数，极点 ν_l 是方程

$$\phi(\nu)=0 \tag{4}$$

的根．上述公式中函数 $F_1(z,\nu)$ 与 $F_2(z,\nu)$ 是一维波动方程

$$\frac{\partial^2F}{\partial z^2}+[k^2(z)-\nu^2]F=0 \tag{5}$$

的任一组线性独立解，方程中 $k(z)=\dfrac{\omega}{c(z)}$．在表面声道情况下，$k(z)$ 是单调下降的函数．

在简正波声场的计算中，最重要的是求极点方程的根 ν_l 与振幅函数 $\Psi(z,\nu_l)$．分析脉冲传播时还需计算简正波的群速．由于极点方程(4)一般都是超越方程，而且在海底具有吸收的情况下极点皆是复数，求极点方程的精确解是十分困难的．我们应用在反转点连结的 WKB 近似作为一维波动方程的近似解，从而导出极点方程与振幅函数的近似表达式，得到了物理意义比较清晰的结果．

三、极点方程与振幅函数的近似解

由于海底吸收(k_1 为复数)的影响，极点一般为复数．以下用 $\nu_l=\mu_l+i\beta_l$ 表示复数

极点. 实际上，对声场起主要作用的那些简正波其极点的虚部 β_l 皆很小，因而 $\frac{\beta_l}{\mu_l} \ll 1$. 在浅海表面声道情况下，按极点实部 μ_l 的大小可将简正波分为三类，分别讨论如下.

1. 第 I 类简正波 [$k(h) < \mu_l < k(0)$]

设 $\nu = \mu + i\beta$, $k(h) < \mu < k(0)$, $\frac{\beta}{\mu} \ll 1$; 这时一维波动方程(5)的一组近似解为

$$F_1(z, \nu) = \begin{cases} \dfrac{1}{[k^2(z) - \nu^2]^{1/4}} [e^{iu} - ie^{-iu}] & (0 \leqslant z < \zeta), \\ \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} \left|\dfrac{2}{3b}\right|^{1/6} e^{i\frac{\pi}{4}} u^{1/3} H_{1/3}^{(1)}(u) & (z \simeq \zeta), \\ \dfrac{1}{[k^2(z) - \nu^2]^{1/4}} e^{iu} & (\zeta < z \leqslant h); \end{cases} \tag{6}$$

$$F_2(z, \nu) = \begin{cases} \dfrac{1}{[k^2(z) - \nu^2]^{1/4}} e^{-iu} & (0 \leqslant z < \zeta), \\ \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} \left|\dfrac{2}{3b}\right|^{1/6} e^{-i\frac{7\pi}{12}} u^{1/3} H_{1/3}^{(2)}(u) & (z \simeq \zeta), \\ \dfrac{1}{[k^2(z) - \nu^2]^{1/4}} e^{-iu} & (\zeta < z \leqslant h). \end{cases} \tag{7}$$

公式(6)与(7)中 ζ 称为反转点，它由 $k(\zeta) = \mu$ 确定; $u = \int_\zeta^z \sqrt{k^2(y) - \nu^2}\, dy$, $H_{1/3}^{(1)}(u)$ 与 $H_{1/3}^{(2)}(u)$ 是 1/3 阶汉克尔函数; $b = \left.\dfrac{dk^2(z)}{dz}\right|_\zeta$, 在表面声道情况下 $b < 0$. 公式(6)与(7)在反转点之外即是通常的 WKB 近似，在反转点邻近的表达式由 $k^2(z)$ 取直线近似而得到[7,8]. 我们用 $|u| \leqslant 1$ 作为“在反转点邻近”的判据，当 $|u| > 1$ 时就用“反转点之外”的 WKB 近似.

我们约定第 I 类简正波的反转点离开海底足够远（否则属于第 II, III 类简正波），即满足条件

$$\int_\zeta^h \sqrt{\mu^2 - k^2(z)}\, dz > 1. \tag{8}$$

将(6)与(7)式代入(3)式，就得到

$$\phi(\nu) = e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{-i2\int_0^\zeta \sqrt{k^2(z) - \nu^2}\, dz} - V(\nu) e^{-2\int_\zeta^h \sqrt{\nu^2 - k^2(z)}\, dz}, \tag{9}$$

式中

$$V(\nu) = \frac{\rho_1 \sqrt{k^2(h) - \nu^2} - \rho \sqrt{k_1^2 - \nu^2}}{\rho_1 \sqrt{k^2(h) - \nu^2} + \rho \sqrt{k_1^2 - \nu^2}}, \tag{10}$$

$V(\nu)$ 是平面波的海底反射系数[7]. 由于(8)式和(9)式右边第三项很小，即

$$|V(\nu) e^{-2\int_\zeta^h \sqrt{\nu^2 - k^2(z)}\, dz}| \ll 1, \tag{11}$$

同时，注意到 $\frac{\beta}{\mu} \ll 1$ 时有近似公式:

$$\int_0^\zeta \sqrt{k^2(z) - (\mu + i\beta)^2}\, dz = \int_0^\zeta \sqrt{k^2(z) - \mu^2}\, dz - i\beta \int_0^\zeta \frac{\mu dz}{\sqrt{k^2(z) - \mu^2}}, \tag{12}$$

于是，由(9)式就可得到第 I 类简正波的极点方程：

$$\int_0^{\zeta_l}\sqrt{k^2(z)-\mu_l^2}\,dz=\left(l+\frac{3}{4}\right)\pi \qquad l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots, \tag{13}$$

$$\beta_l=\frac{\mathrm{Im}\,V(\mu_l)}{S_l}\,e^{-2\int_{\zeta_l}^{h}\sqrt{\mu_l^2-k^2(z)}\,dz}, \tag{14}$$

式中 ζ_l 由 $k(\zeta_l)=\mu_l$ 确定，Im 表示虚数部分，

$$S_l=2\int_0^{\zeta_l}\frac{\mu_l dz}{\sqrt{k^2(z)-\mu_l^2}}. \tag{15}$$

不难看出，我们所得到的极点方程已将极点的实部与虚部分开，实部 μ_l 的方程 (13) 容易求解，虚部 β_l 直接由(14)式给出.

由于第 I 类简正波 $k(h)<\mu_l<k(0)$，并满足(8)式，故第 I 类简正波的数目是有限的，而且

$$l<\left[\frac{1}{\pi}\int_0^h\sqrt{k^2(z)-k^2(h)}dz-\frac{3}{4}\right]_{\text{整数部分}}. \tag{16}$$

此外，还可证明，当 $\mu_l>k(h)$ 时海底反射系数 $V(\mu_l)$ 的虚部大于或等于零($\mathrm{Im}V(\mu_l)\geqslant 0$)，故 $\beta_l\geqslant 0$.

再将(6)和(7)式代入(2)式，就得到第 I 类简正波的振幅函数：

$$\Psi(z,\nu_l)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}\sin\left[\int_0^z\sqrt{k^2(y)-\nu_l^2}dy\right]}{\sqrt{S_l}\,[k^2(z)-\nu_l^2]^{1/4}} & (0\leqslant z\leqslant\zeta_l),\\[2ex] \dfrac{(-1)^l}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{S_l}}\left|\dfrac{2}{3b}\right|^{1/6}iu^{1/3}H_{1/3}^{(1)}(u) & (z\simeq\zeta_l),\\[2ex] \dfrac{(-1)^l\exp\left[-\int_{\zeta_l}^z\sqrt{\nu_l^2-k^2(y)}dy\right]}{\sqrt{2S_l}\,[\nu_l^2-k^2(z)]^{1/4}} & (\zeta_l<z\leqslant h).\end{cases} \tag{17}$$

简正波的群速 v_l 等于 $\dfrac{d\omega}{d\mu_l}$，由(13)式求微商就可得到第 I 类简正波的群速表达式：

$$v_l=\frac{S_l}{T_l}, \tag{18}$$

其中 S_l 由(15)式给出，T_l 的表式为

$$T_l=2\int_0^{\zeta_l}\frac{k(z)dz}{c(z)\sqrt{k^2(z)-\mu_l^2}}. \tag{19}$$

2. 第 II 类简正波 [$\mu_l\simeq k(h)$]

当极点的实部 $\mu\simeq k(h)$ 并使得 $\left|\int_\zeta^h\sqrt{k^2(z)-\mu^2}dz\right|<1$ 时为第 II 类简正波，这时反转点位于海底附近 ($\zeta\simeq h$)，一维波动方程的近似解(6)和(7)式在 $z=h$ 应当用第二行的表达式，于是得

$$\phi(\nu)=-V_t(\nu)-e^{-i2\int_0^{\zeta}\sqrt{k^2(z)-\nu^2}\,dz}, \tag{20}$$

此处 $V_t(\nu)$ 是平面波在海底附近反转时的反射系数，其近似表达式为

$$V_t(\nu)=e^{-i\frac{5\pi}{6}}\frac{\rho_1\left|\frac{3b}{2}\right|^{1/3}e^{i\frac{\pi}{3}}+\rho\gamma\sqrt{\nu^2-k_1^2}}{\rho_1\left|\frac{3b}{2}\right|^{1/3}e^{-i\frac{\pi}{3}}+\rho\gamma\sqrt{\nu^2-k_1^2}},\quad \gamma=\frac{\Gamma(1/3)}{2^{1/3}\Gamma(2/3)}. \tag{21}$$

反射系数 $V_t(\nu)$ 随 ν 变化缓慢，当 $\frac{\beta}{\mu}\ll 1$ 时，近似地有 $V_t(\nu)=|V_t(\mu)|e^{-i\varphi_t}$，这里 $\varphi_t=-\arg V_t(\mu)$. 由(20)式不难得到第 II 类简正波的极点方程：

$$\int_0^{\zeta_l}\sqrt{k^2(z)-\mu_l^2}\,dz=\left(l+\frac{1}{2}\right)\pi+\frac{\varphi_t}{2}\qquad l=l_1,\ (l_1+1),\ \cdots, \tag{22}$$

$$\beta_l=\frac{-\ln|V_t(\mu_l)|}{S_l}. \tag{23}$$

由于第 II 类简正波的 μ_l 要满足 $\left|\int_{\zeta_l}^{h}\sqrt{k^2(z)-\mu_l^2}\,dz\right|<1$，故第 II 类简正波的数目也是有限的. 例如，对于 $h=50$ 米，$a=1.2\times10^{-5}$ 米$^{-1}$ 的表面声道，频率 5 千赫时第 I 类简正波有 6 个，第 II 类简正波只有 2 个.

第 II 类简正波的振幅函数为

$$\Psi(z,\nu_l)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}\sin\left[\int_0^z\sqrt{k^2(y)-\nu_l^2}dy\right]}{\sqrt{S_l}[k^2(z)-\nu_l^2]^{1/4}} & (0\leqslant z<\zeta_l),\\[2ex] \dfrac{(-1)^l}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{S_lV_t}}\left|\dfrac{2}{3b}\right|^{1/6}e^{i\frac{\pi}{4}}u^{1/3}[H_{1/3}^{(1)}(u)+(i+V_t)e^{-i\frac{5\pi}{6}}H_{1/3}^{(2)}(u)]_{\nu l} & (z\simeq\zeta_l).\end{cases} \tag{24}$$

由(22)式可得到第 II 类简正波的群速，其表达式与(18)式相同.

3. 第 III 类简正波 [$\mu_l<k(h)$]

当 $\mu<k(h)$ 时，在水层中 $(0\leqslant z\leqslant h)$ 不存在反转点. 这时方程(5)的一组近似解可取为

$$F_1(z,\nu)=\frac{1}{[k^2(z)-\nu^2]^{1/4}}e^{i\int_0^z\sqrt{k^2(y)-\nu^2}\,dy}, \tag{25}$$

$$F_2(z,\nu)=\frac{1}{[k^2(z)-\nu^2]^{1/4}}e^{-i\int_0^z\sqrt{k^2(y)-\nu^2}\,dy}. \tag{26}$$

将(25)与(26)式代入(3)式得

$$\phi(\nu)=-1-V(\nu)e^{i2\int_0^h\sqrt{k^2(z)-\nu^2}\,dz}, \tag{27}$$

此处 $V(\nu)$ 是平面波的海底反射系数，它由 (10) 式给出. 当 ν 为具有微小虚部的复数时 $\left(\frac{\beta}{\mu}\ll1\right)$，可取近似如下：

$$V(\nu)=|V(\mu)|e^{-i\varphi(\mu)+\beta\delta}, \tag{28}$$

式中 $\varphi(\mu)=-\arg V(\mu)$，$\delta=\frac{\partial\varphi(\mu)}{\partial\mu}$. δ 具有长度的量纲，它相当于波束反射时的位移[7].

由(27)和(28)式就得到第 III 类简正波的极点方程：

$$\int_0^h \sqrt{k^2(z)-\mu_l^2}\,dz=\left(l+\frac{1}{2}\right)\pi+\frac{\varphi(\mu_l)}{2}\qquad l=l_2,\ (l_2+1),\ \cdots, \tag{29}$$

$$\beta_l=\frac{-\ln|V(\mu_l)|}{S_l+\delta_l}, \tag{30}$$

式中 $\varphi(\mu_l)=-\arg V(\mu_l)$，$\delta_l=\dfrac{\partial\varphi(\mu_l)}{\partial\mu_l}$，$S_l$ 由

$$S_l=2\int_0^h\frac{\mu_l dz}{\sqrt{k^2(z)-\mu_l^2}} \tag{31}$$

给出.

第 III 类简正波的振幅函数为

$$\Psi(z,\ \nu_l)=\frac{\sqrt{2}\sin\left[\int_0^z\sqrt{k^2(y)-\nu_l^2}\,dy\right]}{\sqrt{S_l+\delta_l}[k^2(z)-\nu_l^2]^{1/4}}\qquad(0\leqslant z\leqslant h), \tag{32}$$

由(29)式可得到第 III 类简正波的群速表达式：

$$v_l=\frac{S_l+\delta_l}{T_l+\tau_l}, \tag{33}$$

此处 S_l 由(31)式给出，$\tau_l=-\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial\omega}\right)_{\mu_l}$，

$$T_l=2\int_0^h\frac{k(z)dz}{c(z)\sqrt{k^2(z)-\mu_l^2}}, \tag{34}$$

τ_l 具有时间的量纲．不难证明，它相当于脉冲波束反射时的时间延迟.

四、近似解与精确解的比较

下面讨论两个具体例子，对近似解与精确解进行比较.

1. 爱泼斯坦（Epstein）型表面声道

这时整个半空间（$z>0$）介质密度为常数，$k^2(z)=\dfrac{\alpha^2}{\mathrm{ch}^2(z/H)}+k_\infty^2$，其中 α，H 与 k_∞ 为波导参数．文献[9]中讨论过这类波导，得到了精确解的解析式.

由前节的公式得到近似解的极点 ν_l 与振幅函数如下：

$$\nu_l=k_\infty\left[1+\frac{\alpha^2}{k_\infty^2}\left(1-\frac{2l+\frac{3}{2}}{H\alpha}\right)^2\right]^{1/2}\qquad l=0,\ 1,\ 2\cdots, \tag{35}$$

$$\Psi(z,\ \nu_l)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}\sin\left\{H\alpha\left[\arcsin\left(\dfrac{\mathrm{th}\,y}{\mathrm{th}\,y_l}\right)-\dfrac{1}{\mathrm{ch}\,y_l}\arcsin\left(\dfrac{\mathrm{sh}\,y}{\mathrm{sh}\,y_l}\right)\right]\right\}}{\sqrt{\pi H\nu_l}\,[(\mathrm{ch}^2\,y_l/\mathrm{ch}^2\,y)-1]^{1/4}} & (0\leqslant z<\zeta_l),\\ \dfrac{(-1)^l}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{S_l}}\left|\dfrac{2}{3b}\right|^{1/6}iu^{1/3}H_{1/3}^{(1)}(u) & (z\simeq\zeta_l),\end{cases} \tag{36}$$

$$\left|\frac{(-1)^l\exp\left\{-H\alpha\left[\frac{1}{\mathrm{ch}\,y_l}\mathrm{arc\,ch}\left(\frac{\mathrm{sh}\,y}{\mathrm{sh}\,y_l}\right)-\mathrm{arc\,ch}\left(\frac{\mathrm{th}\,y}{\mathrm{th}\,y_l}\right)\right]\right\}}{\sqrt{\pi H\nu_l}\,[1-(\mathrm{ch}^2\,y_l/\mathrm{ch}^2\,y)]^{1/4}}\right| \qquad (\zeta_l<z),$$

上式中 $y_l=\dfrac{\zeta_l}{H}$, $S_l=\dfrac{\pi H\nu_l\,\mathrm{ch}\,y_l}{\alpha}$, $b=-\dfrac{2\alpha^2\mathrm{th}\,y_l}{H\,\mathrm{ch}^2\,y_l}$, $\zeta_l=H\,\mathrm{arc\,ch}\left[1-\dfrac{2l+\frac{3}{2}}{H\alpha}\right]^{-1}$.

可以证明,当 $\alpha H\gg 1$ 时,(35)和(36)式是精确解的很好近似.

数值例子: 设 $\alpha H=99.75$, $\dfrac{k_\infty^2}{k_0^2}=1-2\times10^{-3}$, $k_0^2=\alpha^2+k_\infty^2$. 这时有 5 个实数极点, 近似解与精确解的极点数值列于表 1, 第 1 号简正波 ($l=0$) 振幅函数的精确值与近似值列于表 2.

表 1 $(k_0-\nu_l)/k_0$ 的精确值与近似值

l	0	1	2	3	4
精确值	2.757×10^{-4}	5.766×10^{-4}	7.973×10^{-4}	9.378×10^{-4}	9.980×10^{-4}
近似值	2.779×10^{-4}	5.782×10^{-4}	7.984×10^{-4}	9.384×10^{-4}	9.981×10^{-4}

表 2 $\sqrt{\pi H\nu_0}\,\Psi(z,\nu_0)$ 的精确值与近似值

z/H	0.01	0.03	0.05	0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50
精确值	0.096	0.286	0.473	0.915	1.596	1.803	1.913	1.875	1.594
近似值	0.094	0.300	0.468	0.906	1.597	1.820	1.863	1.853	1.583
z/H	0.60	0.65	0.70	0.80	0.90	1.00	1.20	1.40	1.60
精确值	1.211	1.018	0.838	0.537	0.322	0.183	0.051	0.013	0.003
近似值	1.206	1.015	0.836	0.535	0.326	0.188	0.052	0.013	0.002

从表 2 看出,振幅函数近似值与精确值之差不超过其最大值的 3%.

2. 直线型表面声道

设整个半空间 ($z>0$) 介质密度为常数,在表层 ($0<z<h$) 中, $k^2(z)=k_0^2(1-2az)$, 在 $z>h$ 中, $k_1^2=k_0^2(1-2ah)$. 为简略起见, 这里不再写出计算公式, 仅列举数值例子. 取 $ah=4\times10^{-4}$, $k_0h=8\times10^2$, 计算了极点与振幅函数的值, 5 个实数极点的精确值与近似值列于表 3. 计算结果表明, 振幅函数近似值与精确值之差不超过其最大值的 3%.

表 3 $(k_0-\bar{\nu}_l)/k_0$ 的精确值与近似值

l	0	1	2	3	4
精确值	1.169×10^{-4}	2.044×10^{-4}	2.761×10^{-4}	3.393×10^{-4}	3.937×10^{-4}
近似值	1.160×10^{-4}	2.041×10^{-4}	2.759×10^{-4}	3.393×10^{-4}	3.937×10^{-4}

从以上例子看出,近似解具有一定的准确性.

五、关于简正波的讨论

1. 简正波的折射线

为使前面的结果具有清晰的几何图象，以便于对简正波的一些特征量（如群速、指数衰减系数）作物理解释，我们引入简正波的折射线这一概念. 对应于每一简正波，其折射线按下列方式确定：

（1）折射线在水层中（$0 < z < h$）按照折射定律发生弯曲. 设 $\alpha_l(z)$ 是折射线与水平面的夹角，折射线的方程为

$$k(z)\cos\alpha_l(z) = \mu_l, \tag{37}$$

此处 μ_l 是简正波极点的实部；

（2）折射线碰到海面时发生镜向反射；

（3）在浅海表面声道情况下，第 I 类简正波的折射线在水层中反转，第 II 类简正波的折射线在海底附近反转，第 III 类简正波的折射线与海底相交并移动 δ_l 之后向上反射，图 2 为三类简正波折射线的示意图.

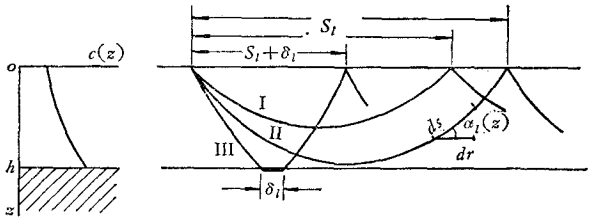

图　2

2. 频散方程与群速

我们称简正波极点的实部 μ_l 所满足的方程为频散方程，简正波的相速 $\left(\frac{\omega}{\mu_l}\right)$ 与群速 $\left(\frac{d\omega}{d\mu_l}\right)$ 皆由频散方程确定. 将(37)式代入(13)，(22)与(29)式，就得到如下形式的频散方程：

$$\begin{aligned}
&\text{I} && 2\int_0^{z_l} k(z)\sin\alpha_l(z)dz - \pi - \frac{\pi}{2} = 2l\pi,\\
&\text{II} && 2\int_0^{z_l} k(z)\sin\alpha_l(z)dz - \pi - \varphi_t = 2l\pi,\\
&\text{III} && 2\int_0^{h} k(z)\sin\alpha_l(z)dz - \pi - \varphi = 2l\pi.
\end{aligned} \tag{38}$$

此方程中各项的物理意义是很清楚的，第一项是沿折射线一个循环在 z 方向的相积分，第二项是海面反射的相移，第三项是反转或海底反射的相移. 频散方程(38)亦可看成是简正波折射线的方程，因此可借助于声线计算方法求数值解.

将(37)式代入(15)和(31)式，注意到

$$\frac{\mu_l dz}{\sqrt{k^2(z) - \mu_l^2}} = \frac{\cos\alpha_l(z)}{\sin\alpha_l(z)}dz = dr,$$

dr 就是折射线元 ds 的水平距离(见图 2),因此,S_l (对第 I, II 类简正波)与 $S_l+\delta_l$ (对第 III 类简正波)就是折射线的一个循环的水平距离,我们称它为简正波(折射线)的跨度.

将(37)式代入(19)和(34)式. 注意到

$$\frac{k(z)dz}{c(z)\sqrt{k^2(z)-\mu_l^2}}=\frac{ds}{c(z)}=dt,$$

dt 相当于声波沿折射线经过 ds 所花的时间,因此,T_l (对第 I, II 类简正波)与 $T_l+\tau_l$ (对第 III 类简正波)可看成是声波沿折射线经过一个循环所花的时间. 这样一来,(18)和(33)式就可解释为:简正波的群速正好等于声波沿折射线传播的平均速度.

这里指出,在一般浅海中,对于几百赫以上的频率 δ_l 与 τ_l 的作用是很小的 (即 $\delta_l \ll S_l$, $\tau_l \ll T_l$);但在高声速海底 $\left(\frac{c_1}{c(h)}>1\right)$ 的情况下,对于很低的频率 (例如几十赫),δ_l 与 τ_l 不可忽略.

3. 简正波的指数衰减

简正波极点的虚数部分 β_l 引起指数衰减 $e^{-\beta_l r}$. 对于第 III 类简正波,由(30)式得到

$$e^{-\beta_l r}=|v(\mu_l)|^{\frac{r}{S_l+\delta_l}}.$$

此式表明,简正波在一个跨度 $(S_l+\delta_l)$ 的距离上的指数衰减正好等于一次反射损失. 对于第 II 类简正波有类似的结果. (23) 和 (30)式表明,简正波的指数衰减系数明显地依赖于海水声速分布与海底声学性质,声速分布决定 S_l,海底特性决定反射系数 $|V(\mu_l)|$ 与 δ_l. 测量表明[10],海底对声波有很强的吸收,其吸收系数比海水高几个数量级. 入射到海底的声能部分地被吸收与散射,使反射系数 $|V_i(\mu_l)|$ 与 $|V(\mu_l)|$ 小于 1,这就是导致第 II, III 类简正波出现指数衰减的物理原因.

第 I 类简正波的指数衰减系数在形式上略有不同,从(14)式看出,跨度 S_l 越大、反转点 ζ_l 离海底越远、反射系数 $\mathrm{Im}\,V(\mu_l)$ 越小,则指数衰减系数越小. 从物理上说,第 I 类简正波的指数衰减是由于声能“透射”到海底所引起的. 例如图 3 所示的低声速海底

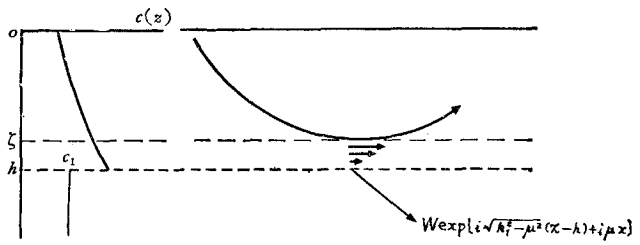

图 3

$\left(\frac{c_1}{c(h)}<1\right)$, 当 $k(h)<\mu_l<k_1$ 时,虽然平面波在 ζ_l 发生反转,但仍有一部分声能透射到海底中去,透射波的振幅 $|W|$ 正比于 $\mathrm{Im}\,V(\mu_l)e^{-2\int_{\zeta_l}^{h}\sqrt{\mu_l^2-k^2(z)}\,dz}$, 此情况类似于量子力学中粒子贯穿势垒. 在实际问题中,第 I 类简正波的指数衰减系数一般是很小的;因为

$$\mathrm{Im}\,V(\mu_l)<1 \text{ 和 } \int_{\zeta_l}^{h}\sqrt{\mu_l^2-k^2(z)}\,dz>1,$$

故

$$\beta_l < \frac{1}{S_l} e^{-2}. \tag{39}$$

例如，对于 $h = 50$ 米，$a = 1.2 \times 10^{-5}$ 米$^{-1}$ 的浅海表面声道，$\beta_l < 0.023$/公里$^{-1}$. 因此，当存在第 I 类简正波时声场呈现出近似波导传播的性质，声强随距离的衰减近似于柱面扩散. 从(13)式可推出，存在第 I 类简正波的必要条件为

$$f > f_0 = \frac{3}{8} \int_0^h \sqrt{\frac{1}{c^2(z)} - \frac{1}{c^2(h)}}\, dz, \tag{40}$$

此处 f 是声波的频率.

参　考　文　献

[1] M. A. Pedersen, D. F. Gorden, *J. Acoust. Soc. Amer.*, **37** (1965), 105.
[2] A. C. Kibblewhite, R. N. Denham, *J. Acoust. Soc. Amer.*, **38** (1965), 63.
[3] M. A. Pedersen, D. F. Gorden, *J. Acoust. Soc. Amer.*, **47** (1970), 304.
[4] F. M. Labianca, *J. Acoust. Soc. Amer.*, **53** (1973), 1137.
[5] D. E. Kerr, Propagation of Short Radio Wave (1951), Chap. 2.
[6] 张仁和，声学学报，**2** (1965)，24.
[7] Б. А. 布列霍夫斯基赫，分层介质中的波，科学出版社 (1960).
[8] R. E. Langer, *Phys. Rev.*, **51** (1937), 669.
[9] Ю. Л. Газарян, *Аку. Жур.*, **2** (1956), 133.
[10] G. Shumway, *Geophysics*, **25** (1960), 451.