

直角稜镜谐振腔的共振模*

王之江 方洪烈

由两个全反射直角稜镜构成的光学谐振腔与普通的光学谐振腔相比, 具有一些十分特殊的性质. 恰当地选择两稜镜稜线的夹角, 可以获得十分良好的模选择性能.

一、圆形平面谐振腔

圆形平面谐振腔的本征方程是^[1]

$$bu(r, \varphi) = \frac{ik}{2\pi L} e^{-ikL} \int_0^a \int_0^{2\pi} r' dr' d\varphi' u(r', \varphi') \cdot \exp \left\{ -ik \left[\frac{1}{2L} (r^2 + r'^2) - \frac{rr'}{L} \cos(\varphi' - \varphi) \right] \right\}. \quad (1)$$

取

$$u(r, \varphi) = R_m(r) e^{-im\varphi} \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

$e^{-im\varphi}$ 本身满足角向自再现条件. 将(2)式代入(1)式得到圆形平面谐振腔的径向简缩积分方程为

$$b_m R_m(r) = \int_0^a K_m(r, r') R_m(r') r' dr', \quad (3)$$

积分核

$$K_m(r, r') = i^{m+1} \frac{k}{L} J_m \left(k \frac{rr'}{L} \right) \exp \left(-ik \frac{r^2 + r'^2}{2L} \right), \quad (4)$$

其中 L 为腔长, k 为传播常数, $J_m(x)$ 是第一类 m 阶贝塞耳函数; a 为谐振腔口径的一半.

方程(3)已有很多人研究过^[2-4], 它的近似解为

$$u_{mn}(r, \varphi) = J_m \left(\frac{v_{mn} r}{a \left(1 + \beta \frac{1+i}{M} \right)} \right) e^{-im\varphi}, \quad (5)$$

其中 v_{mn} 为满足方程 $J_m(x) = 0$ 的第 n 个正根, $M^2 = 8\pi N$, N 是谐振腔的费涅耳数, 而 β 是一个小于1的数.

二、由直角稜镜构成的谐振腔

现在来考察一个这样的谐振腔. 它是由两个全反射直角稜镜组成的. 我们这样放置

* 1973年1月20日收到.

两直角棱镜,使它们的底面彼此平行,并且通过两棱镜稜线中点的直线与稜镜的底面垂直(因此也与稜线垂直),两稜线相距为 L ,而两稜线之间有一个夹角为 Θ ,见图 1.

选择两个直角坐标系 $O-XYZ$ 和 $O-\xi\eta Z$ 如下,取通过两稜线中点的直线为 Z 轴,坐标原点 O 位于 Z 轴上两稜线交点的中间.坐标轴 Y 与稜镜 M_1 的稜线平行,而 η 轴与稜镜 M_2 的稜线平行. Y 轴方向与 η 轴方向夹角为 Θ .坐标系 $O-XYZ$ 的单位矢量选为 (i, j, k') ,而坐标系 $O-\xi\eta Z$ 的单位矢量选为 (e, f, k') ;它们之间的关系如下:

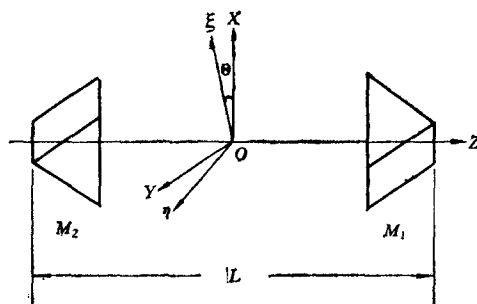


图 1 直角棱镜谐振腔

$$e = i \cos \Theta + j \sin \Theta, \quad f = -i \sin \Theta + j \cos \Theta, \quad k' = k' \quad (6)$$

以及

$$i = e \cos \Theta - f \sin \Theta, \quad j = e \sin \Theta + f \cos \Theta, \quad k' = k'. \quad (6')$$

稜镜 M_1 底面上任意点 P_1 , 在 $O-XYZ$ 坐标系内的坐标为 (X, Y, Z) . P_1 点也可以用矢量 $r + k'z$ 来表征它,其中 $r = ix + jy$ 是 XY 平面内的极矢量. 而稜镜 M_2 底面上任意点 P_2 , 在 $O-\xi\eta Z$ 坐标系内的坐标为 (ξ, η, ζ) . P_2 点也可以用矢量 $A + k'\zeta$ 来表征它,其中 $A = e\xi + f\eta$ 是 $\xi\eta$ 平面内的极矢量.

下面定义一个空间反射算符 I_x 如下:

$$I_x f(x, y, z) \equiv f(-x, y, z), \quad (7)$$

对任意函数 $f(x, y, z)$ 均成立. 在圆柱坐标系 (r, φ, z) 中有

$$I_x f(r, \varphi, z) \equiv f(r, \pi - \varphi, z). \quad (8)$$

取适当的措施(如镀增透膜等)可以使稜镜底面的反射对场的贡献很少,以致可以忽略不计. 因此我们只讨论由稜镜全反射的场.

谐振腔本征方程的一般形式可表为

$$bu(x, y) = \int_{(s)} K(x, y; \xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (9)$$

积分核为

$$K(x, y; \xi, \eta) = \frac{ik}{2\pi L} e^{-ik\rho}, \quad (10)$$

其中 ρ 为两镜面上任意两点 p_1 和 p_2 的距离. 那么 ρ 可选为

$$\rho = r + k'z - A - k'\zeta.$$

于是

$$\rho^2 = \rho \cdot \rho = (z - \zeta)^2 + (r - A) \cdot (r - A) = L^2 + r^2 + A^2 - 2rA \cos(r, A), \quad (11)$$

其中 (r, A) 表示两矢量 r 和 A 的夹角. 矢量 r 在 XY 坐标中的平面极坐标为 (r, φ) ; 而矢量 A 在 $\xi\eta$ 坐标中的平面极坐标为 (A, ϕ) . 又因为 X 轴与 ξ 轴的夹角为 Θ , 因此

$$\cos(r, A) = \cos(\varphi - \phi - \Theta).$$

于是

$$\rho^2 = L^2 + r^2 + \Lambda^2 - 2r\Lambda \cos(\varphi - \phi - \Theta).$$

当考虑到直角棱镜的空间反射作用,在光通过谐振腔的一次行程中只发生一次时,便有

$$\rho^2 = (I_{\xi}\rho) \cdot (I_{\xi}\rho) = L^2 + r^2 + \Lambda^2 - 2r\Lambda \cos(\varphi + \phi - \pi - \Theta).$$

最后得到

$$\rho = L + \frac{1}{2L}(r^2 + \Lambda^2) - \frac{r\Lambda}{L} \cos(\varphi + \phi - \pi - \Theta). \quad (12)$$

对于通光孔为半径等于 a 的圆形直角棱镜谐振腔的本征方程为

$$bu(r, \varphi) = \frac{ik}{2\pi L} e^{-ikL} \int_0^a \int_{-\Theta}^{2\pi-\Theta} \Lambda d\Lambda d\phi u(\Lambda, \phi) \cdot \exp\left\{-ik\left[\frac{1}{2L}(r^2 + \Lambda^2) - \frac{r\Lambda}{L} \cos(\phi - \pi - \Theta + \varphi)\right]\right\}. \quad (13)$$

这个方程与圆形平面谐振腔的本征方程(1)的差别在于 $\cos$ 符号下的因子不同. 因此对 $u(r, \varphi)$ 作(2)式的分解已不再能满足角向自再现条件. 为此我们取

$$u(r, \varphi) = R_m(r)(e^{-im\varphi} \pm e^{im\varphi}) \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (14)$$

将(14)式代入方程(13),便得到角向自再现条件如下:

$$\begin{aligned} e^{-im\varphi} + e^{im\varphi} &= e^{-im(\varphi-2\Theta)} + e^{im(\varphi-2\Theta)}, \\ e^{-im\varphi} - e^{im\varphi} &= e^{im(\varphi-2\Theta)} - e^{-im(\varphi-2\Theta)}. \end{aligned} \quad (15)$$

满足(15)式的条件是

$$(1) \quad m = 0; \quad (16)$$

$$(2) \quad \Theta = \frac{l\pi}{m}; \quad (17)$$

$$(3) \quad \Theta = \frac{(2l+1)\pi}{2m} \quad l = 0, 1, 2, \dots. \quad (18)$$

由此看到,对于某一组整数 (m, l) 使得(17)式成立时,谐振腔的模是

$$u_{m'l}(r, \varphi) = R_{m'l}(r)(e^{-im'\varphi} + e^{im'\varphi}) \quad m' = lm, l = 0, 1, 2, \dots.$$

而对于某一组整数 (m, l) 使得(18)式成立时,谐振腔的模就是

$$u_{m'l}(r, \varphi) = R_{m'l}(r)(e^{-im'\varphi} - e^{im'\varphi}) \quad m' = lm, l = 0, 1, 2, \dots,$$

其中 $R_{m'l}(r)$ 就是满足方程(3)的解.

如果没有一组整数 (m, l) 能使得(17)式或(18)式之一成立时,也就是两直角棱镜棱线的夹角 Θ 以 π 为单位取无理数时,只有满足(16)式的模才存在. 也就是此时谐振腔只有零次角向模存在. 并且是

$$u_{0n}(r, \varphi) = R_{0n}(r).$$

这就是说,由两个全反射直角棱镜构成的谐振腔的共振模与两棱镜棱线的夹角 Θ 密切相关. 当 $\Theta = 0$ 时,谐振腔的模与圆形平面谐振腔的模是完全相同的. 它存在着任意次的角向模与径向模. 当 $\Theta \neq 0$ 但以 π 为单位取有理数时,除存在主模外还有少量的高次角向模,而有些高次角向模则被压缩掉了. 而当 Θ 取无理数时,谐振腔只有零次角向模存在,全部高次角向模均被压掉了.

因此,这样一种谐振腔是一个十分特殊的谐振腔.它具有十分优异的选模性能.与其他具有高损耗间距的谐振腔(如不稳定腔)相比,此种腔的模损耗间距等于无穷大.因为它根本不存在高次角向模.而不稳定腔还是存在着高次角向模的.

这样一个结果的出现,是由于谐振腔本身具有空间反射不变性所决定的.

三、具有一度空间反射的球面谐振腔

如果在上述谐振腔中放置一个透镜,或者将直角稜镜的底面加工成球面而构成一个等价球面谐振腔时(假定两反射镜相同),它的本征方程为

$$b_{mn}u_{mn}(r, \varphi) = \frac{ik}{2\pi L} e^{-ikL} \int_0^g \int_0^{2\pi} \Lambda d\Lambda d\phi u_{mn}(\Lambda, \phi) \cdot \exp \left\{ -ik \left[\frac{g}{2L} (r^2 + \Lambda^2) - \frac{r\Lambda}{L} \cos(\phi + \varphi - \pi - \Theta) \right] \right\}, \quad (19)$$

其中 $g = 1 - L/R$, R 是等效腔面曲率半径. 这个方程除要求同样的角向自再现条件外,其径向部分与一般球面谐振腔的方程是完全相同的. 特别是当 g 处于不稳定区时亦是如此. 即不稳定稜镜谐振腔具有更好的特性.

四、几何解释

关于稜镜腔的上述特点,可以用几何光路的特点得到解释.

对于平面腔而言,垂直于腔面的光线多次反射不引起位移. 对于稜镜腔则不同,光线将随反射而位移. 图 2 表示 Z 轴方向的光线和两稜线在垂直于 Z 轴的平面内的投影. 由于反射的结果,光线成为对称于 η 轴(或 Y 轴)的另一线. 显然这些点都处在以原点 O 为中心的圆周上,每两次反射圆心角变化 2Θ , 由此可知,当 Θ 不是 π 的有理分数时,光线将经过圆周上所有各点,或者说,只有所有这些光线组成的光线汇才是腔的特征态. 从解边界值问题的渐近理论^[5]来看,这和前数节的结论是相同的.

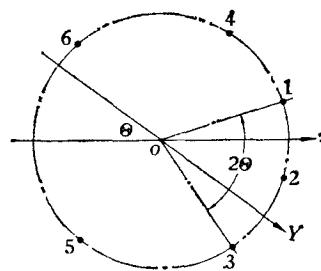


图 2 光线反射图

参 考 文 献

- [1] A. G. Fox, T. Li, *Bell. Syst. Techn. J.*, **40** (1961), 453.
- [2] Л. А. Вайнштейн, *Открытые резонаторы и открытые волноводы*, изд. сов. радио (1966).
- [3] В. А. Киселев, *Опт. и спектр.*, **32** (1972), 125.
- [4] Le. Bergstein, *Appl. Opt.*, **7** (1968), 495.
- [5] J. B. Keller, *Ann. Phys.*, **9** (1960), 24.