

小孔耦合的能量问题及等效激发场*

钱 景 仁

提 要

首先用与 Bethe^[1] 类似的方法,分析无限大导电平面上小孔的绕射,导出了与辐射能量有关的场量,并用此定义一等效激发场;利用它可以很方便地将无限大平面上小孔耦合结果推广用于有限空间(波导、空腔、带状线等系统);最后用具体例子说明采用等效激发场可以用统一的办法来处理各种不同系统的小孔耦合问题,方法较简便,而且得到的结果在确定的近似程度下,符合能量守恒定律。

一

Bethe 最早分析无限大平面上小孔的电磁场绕射,他的结果后来就很快地在微波技术中利用来设计各种小孔耦合问题。在使用中往往是未加证明地将无限大平面上小孔耦合的结果直接用于有限空间。另外,如果细致分析,还会发现在确定的近似程度下,激发场与被激发场的电磁能量是不守恒的。Collin^[2] 虽然直接推导出了波导系统中小孔耦合的公式,证明了 Bethe 的结果能用于波导系统,但能量仍然不守恒。

在他们的这些做法中,通常把无孔时相应于孔处的场称作未微扰场,用它来确定被激发系统中作为场源的小孔等效电磁偶极子,从而求得被激发系统中的场。但这样的办法是有缺陷的,它不能完整地体现电磁场通过小孔相互作用的过程;它只表达了激发场对被激发场的作用,而没有能体现被激发场对激发场的反作用,因此被激发场虽然获得了通过小孔耦合过来的电磁能量,而激发场却没有因此而失去这部分能量,所以整个耦合系统能量没有达到平衡。

本文从无限大导电平面小孔附近电磁场的表达式出发,保留了一项与辐射能量有关的场量,这一项在 Bethe 的原著中是忽略不计的。这里保留它有两个目的,其一是使能量达到平衡,并能由此计算辐射阻抗;其二便于当分析有限空间情况下小孔耦合时找到相应的项。按这样的表达式,再利用小孔面上场的连续性,导出了决定小孔面上磁荷与磁流的积分方程,得到了与磁荷、磁流相关的等效电磁偶极子的表达式。与原来 Bethe 结果不同的是:不是以未微扰场作为电磁偶极子的激发源,而是以未微扰场加上上述与辐射能量有关的修正项作为激发源,我们叫它等效激发场。

当我们将无限大导电平面上小孔耦合的结果推广用于有限空间(波导、带状线和空腔等)时,所不同的只是等效激发场中各项取法不同,特别是上述的修正项。

* 1973年8月7日收到。

这样,不论是无限空间情况或是有限空间情况,采用了等效激发场就可以用统一的办法来处理各种小孔耦合问题.方法简便,只需运用代数运算.文中就以这样的办法来处理各种不同系统的小孔耦合,证明在确定近似程度下能量是守恒的,而且能清晰地表明被激发系统的变迁(波导中被激发波的传输或抑制;空腔中被激发模式的振荡或消失等)对激发源的影响.最后的例子是分析矩形波导宽边开小孔而引起的辐射阻抗,得到了与用十分繁复方法^[3]推得的同样的结果.

等效激发场曾用来解决波导与空腔的小孔耦合问题,得到了符合实际的结果^[4],它比 Blandel^[5] 处理同一问题时要简便得多,而结果是一致的.

二

在分析无限大导电平面上小孔绕射问题时,先假定该平面是无限薄的,导电是无限的,且两边是空气介质.于是将电磁场分为两部分:一部分为未微扰场,即当小孔为导电壁代替时,小孔左边的场,用 $\mathbf{H}_0, \mathbf{E}_0$ 表示(设小孔右边无源,因此场为零);另一部分为小孔开后左右两边引起的场,分别用 $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ 及 $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$ 表示.

满足无限大平面上(除孔面外)边界条件 $\mathbf{E}_t = 0$ 的 $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ 场按文献[1]可以表示为¹⁾

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_Q \mathbf{K}^*(\mathbf{r}') \times \nabla \varphi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) dQ', \quad (1a)$$

$$\mathbf{H}_1(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_Q [j\omega\epsilon_0 \mathbf{K}^*(\mathbf{r}') \varphi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) + \frac{\eta^*(\mathbf{r}')}{\mu_0} \nabla \varphi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)] dQ', \quad (1b)$$

其中 $\mathbf{K}^*(\mathbf{r}')$ 及 $\eta^*(\mathbf{r}')$ 分别代表小孔面上等效的磁流和磁荷; $\mathbf{r}$ 是观察点的坐标, $\mathbf{r}'$ 是孔面上场源的坐标; $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ 为观察点到场源的距离; Q 代表小孔面积.又其中

$$\varphi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = \frac{e^{-jk(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (2)$$

这里 $k = 2\pi/\lambda = \omega^2\mu_0\epsilon_0$, λ 是工作波长, ϵ_0 与 μ_0 分别为空气的介电常数和磁导率.

Bethe 用了准静态近似,故取 $\varphi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$, 又忽略(1b)式中的第一项,推得小孔面上的场:

$$\mathbf{n}E_{1n}^0 = \frac{1}{4\pi} \int_Q \mathbf{K}^*(\mathbf{r}') \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dQ', \quad (3a)$$

$$\mathbf{H}_{1t}^0 = -\frac{1}{4\pi\mu_0} \nabla \left[\int_Q \eta^*(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dQ' \right], \quad (3b)$$

式中上标零表示小孔处的场, $\mathbf{n}$ 是外法向单位矢量,下标 n 及 t 分别表示法向及切向分量.(3)式与(1)式相比,忽略了比(3)式右边至少低 $(a/\lambda)^2$ 倍的所有各项(这里 a 是小孔横向尺寸).保留与(3)式右边相位差 $\pi/2$ 的项是十分重要的,因为它与能量辐射有关,其量级随不同问题而异.由下面分析可知,在这里量级为(3a), (3b)式的 $(a/\lambda)^3$ 倍.

1) 我们这里取的是合理化的单位制,且时间变化采用 $e^{j\omega t}$ 的因子.

由于待求的是小孔面上的场量, 因此 $k|r-r'| \ll 1$, (2)式可以展开为

$$\varphi(|r-r'|) = \frac{1}{|r-r'|} (1 - jk|r-r'| - \frac{k^2|r-r'|^2}{2} + \frac{jk^3|r-r'|^3}{6} + \dots). \quad (4)$$

将(4)式代入(1)式, 除得到(3)式右边的项外, 还保留了与它相位差为 $\pi/2$ 的量级最高项:

$$\mathbf{E}_1(r) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbf{K}^*(r') \times \nabla \frac{1}{|r-r'|} d\Omega' - j \frac{k^3}{6} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \mathbf{K}^*(r') \times \mathbf{r}' d\Omega', \quad (5a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1(r) = & -\frac{1}{4\pi\mu_0} \nabla \left[\int_{\Omega} \eta^*(r') \frac{1}{|r-r'|} d\Omega' \right] - \frac{jk^3}{12\pi\mu_0} \int_{\Omega} \eta^*(r') (\mathbf{r}-\mathbf{r}') d\Omega' \\ & - \frac{k\omega\epsilon_0}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbf{K}^*(r') d\Omega'. \end{aligned} \quad (5b)$$

因此小孔左边的场可以分为两部分, 一部分是准静场, 同(3)式是一致的; 另一部分是与辐射有关的场, 与前者有 $\pi/2$ 的相位差.

在小孔面上, (5)式可写为

$$E_{1n}^0 = E_{1n}'^0 + E_{1n}''^0, \quad (6)$$

$$\mathbf{H}_{1t}^0 = \mathbf{H}_{1t}'^0 + \mathbf{H}_{1t}''^0,$$

其中 $E_{1n}''^0$ 与 $\mathbf{H}_{1t}''^0$ 分别用(3a)及(3b)式表示, 而

$$\mathbf{n}E_{1n}'^0 = -j \frac{k^3}{6\pi\epsilon_0} \mathbf{P}, \quad (7a)$$

$$\mathbf{H}_{1t}'^0 = -j \frac{k^3}{6\pi} \mathbf{M}. \quad (7b)$$

这里利用了关系¹⁾:

$$j\omega\mu_0\mathbf{M} = \int_{\Omega} \mathbf{K}^*(r') d\Omega' = j\omega \int_{\Omega} \mathbf{r}' \eta^*(r') d\Omega', \quad (8a)$$

$$\mathbf{P}/\epsilon_0 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{K}^*(r') \times \mathbf{r}' d\Omega', \quad (8b)$$

$$\int_{\Omega} \eta^*(r') d\Omega' = 0. \quad (8c)$$

小孔右边的场 $E_{2n}^0, \mathbf{H}_{2t}^0$ 与 $E_{1n}^0, \mathbf{H}_{1t}^0$ 对导电平面而言是反对称的^[1]. 因此, 如果小孔右面的场表示为

$$E_{2n}^0 = E_{2n}'^0 + E_{2n}''^0, \quad (9a)$$

$$\mathbf{H}_{2t}^0 = \mathbf{H}_{2t}'^0 + \mathbf{H}_{2t}''^0, \quad (9b)$$

那么其中 $E_{2n}''^0$ 与 $\mathbf{H}_{2t}''^0$ 就分别用(3a)与(3b)式的负值表示, 而

$$\mathbf{n}E_{2n}'^0 = j \frac{k^3}{6\epsilon_0} \mathbf{P}, \quad (10)$$

$$\mathbf{H}_{2t}'^0 = j \frac{k^3}{6\pi} \mathbf{M}.$$

小孔面上场的连续性条件为

$$E_{0n} + E_{1n}^0 = E_{2n}^0, \quad (11a)$$

1) 见文献[2]的7.3节中的公式. 这里定义磁矩 $\mathbf{M}$ 与电矩 $\mathbf{P}$ 的方法与 Bethe 不同, 另外用的单位制也不一样, 所以表达式有出入.

$$\mathbf{H}_{0t} + \mathbf{H}_{1t}^0 = \mathbf{H}_{2t}^0, \quad (11b)$$

其中 E_{0n} 与 $\mathbf{H}_{0t}$ 为未微扰场在孔面上的场值. 将(6),(9)式代入(11)式, 并利用(3)式, 得积分方程

$$-\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbf{K}^*(r') \times \nabla \frac{1}{|r-r'|} d\Omega' = \frac{1}{2} (E_{0n} + E_{1n}^0 - E_{2n}^0) \mathbf{n}, \quad (12a)$$

$$\frac{1}{4\pi\mu_0} \int_{\Omega} \eta^*(r') \nabla \frac{1}{|r-r'|} d\Omega' = \frac{1}{2} (\mathbf{H}_{0t} + \mathbf{H}_{1t}^0 - \mathbf{H}_{2t}^0). \quad (12b)$$

由于小孔的尺寸比波长小得多, 因此 E_{0n} , $\mathbf{H}_{0t}$ 在小孔面上可以认为是常量; 另外(7),(10)式右边也是一常量, 因此(12)式右边是一不随 r 而变的常数. 这种情况下, (12)式中 $\mathbf{K}^*(r')$, $\eta^*(r')$ 是容易解的, 它的解可以利用已有的结果^[4,3].

将解 $\mathbf{K}^*$, η^* 代入(8a)式及(8b)式, 在小圆孔的情况下, 可得小孔处等效电磁偶极子的电矩和磁矩:

$$\mathbf{P}/\varepsilon_0 = -\frac{4}{3} a^3 [E_{0n} + E_{1n}^0 - E_{2n}^0] \mathbf{n} = -\frac{4}{3} a^3 E_{0N} \mathbf{n}, \quad (13a)$$

$$\mathbf{M} = \frac{8}{3} a^3 [\mathbf{H}_{0t} + \mathbf{H}_{1t}^0 - \mathbf{H}_{2t}^0] = \frac{8}{3} a^3 \mathbf{H}_{0T}, \quad (13b)$$

这里 a 为圆孔半径. 这样按(13)式就可以确定无限大导电平面上由于开孔而引起邻近的场及远区的辐射场. 与 Bethe 结果相比较, (13)式右边不是用未微扰场, 而是用未微扰场加上两项与电磁偶极子本身辐射有关的修正项, 这里把

$$E_{0N} = E_{0n} + E_{1n}^0 - E_{2n}^0, \quad (14a)$$

$$\mathbf{H}_{0T} = \mathbf{H}_{0t} + \mathbf{H}_{1t}^0 - \mathbf{H}_{2t}^0 \quad (14b)$$

称为等效激发场.

现在来看等效激发场(14)式中修正项的作用. 将(7)式, (10)式代入(13)式, 得

$$\mathbf{P}/\varepsilon_0 = -\frac{4}{3} a^3 E_{0n} \left[1 + j \frac{4}{9} k^3 a^3 \right] \mathbf{n}, \quad (15a)$$

$$\mathbf{M} = \frac{8}{3} a^3 \mathbf{H}_{0t} \left[1 - j \frac{8}{9} k^3 a^3 \right]. \quad (15b)$$

可见偶极矩引起一量级为 $(a/\lambda)^3$ 的时间相角, 这在计算小孔右边被激发场时是可忽略的, 因此在这种情况下修正似乎是不必要的. 但在计算开孔对左边激发场的影响时, 偶极矩的这一微小时间相角将使投射来的电磁场失去一部分能量, 从而使激发系统与被激发系统的总能量保持平衡. 从后面的例子中可以很明显地看出这一点, 这也就是为什么在(5)式中保留了与右边第一项相位差 $\pi/2$ 的项, 而忽略了同相(或反相)的其他项, 后者仅引起偶极矩绝对大小有微小的变动. 由于小孔辐射电阻直接与能量损失有关, 因此偶极矩的这一微小相角, 使计算辐射电阻才有可能; 而偶极矩的绝对大小的微小变化会影响小孔电阻值的变动, 由于这一变化至多是 $(a/\lambda)^2$ 量级的, 因此可以忽略.

从下一节讨论中可见, 在分析有限空间系统中电磁场小孔耦合时, 仍将出现等效激发场(14)式, 所不同的是表达式及其量级是不同的.

三

现在将无限大导电平面上小孔耦合的结果推广用于有限空间的情况.

当小孔的一边或两边用波导(包括带状线)或空腔代替时, 只要腔壁或波导壁离开小孔足够远, 小孔邻近的近区场的准静态分布可以认为仍然不变. 但在稍远处, 由于波导壁(或腔壁)的存在, 原来的辐射场(波)形成了传输波型(或振荡模), 这些波型(或模)的波动场一直伸展到小孔面上. 因此可以将场分为两部分, 例如在孔的左边,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_l(r) &= \mathbf{E}_l'(r) + \mathbf{E}_l''(r), \\ \mathbf{H}_l(r) &= \mathbf{H}_l'(r) + \mathbf{H}_l''(r).\end{aligned}\quad (16)$$

如果孔的左边是波导或带状线, $\mathbf{E}_l'(r)$, $\mathbf{H}_l'(r)$ 是指传输波型的场, 而 $\mathbf{E}_l''(r)$, $\mathbf{H}_l''(r)$ 则是指无限个消失波之和. 如果孔的左边是空腔, $\mathbf{E}_l'(r)$, $\mathbf{H}_l'(r)$ 是管量场 ($\nabla \cdot \mathbf{E}_l' = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{H}_l' = 0$), 而 $\mathbf{E}_l''(r)$, $\mathbf{H}_l''(r)$ 则是势量场 ($\nabla \times \mathbf{E}_l'' = 0$, $\nabla \times \mathbf{H}_l'' = 0$). 波导内的无限个消失波和空腔内的势量场同准静场一样, 在离开小孔处很快地消失, 因此小孔面上的这部分场 $E_{ln}'^0$, $\mathbf{H}_{ln}'^0$ 同前面无限大导电平面上小孔的场一样可以用(3a)式, (3b)式表示. 而 $\mathbf{E}_l'$, $\mathbf{H}_l'$ 在小孔处的场 $E_{ln}'^0$, $\mathbf{H}_{ln}'^0$ 在波导及带状线情况是指传输波型在小孔处的场值; 在空腔情况原则上是指无限个模式在小孔处场值的总和, 但当工作频率接近其中一个或二个模的振荡频率时, 其他模的场值与振荡模相比都可以忽略不计, 因此 $E_{ln}'^0$, $\mathbf{H}_{ln}'^0$ 就是振荡模在孔处的场值. 由于小孔的尺寸要比波长小得多, 在小孔面上的场值可以认为是常量.

在小孔右边的场也可以作同样的处理. 于是利用连续性条件(11)式, 同样可得(12)式, 小孔处的等效电矩与磁矩、等效激发场也仍用(13), (14)式表达, 其中 E_{0n} , $\mathbf{H}_{0t}$ 为未微扰场; $E_{ln}'^0$, $\mathbf{H}_{ln}'^0$ 及 $E_{2n}'^0$, $\mathbf{H}_{2t}'^0$ 分别为小孔左边及右边传输波型或振荡模在小孔处的场值.

但如果小孔两边的介质不相同, 这种情况往往发生在带状线的系统内, 例如带状线接地板上开孔, 孔的两边介质就不同. 假如分别用 ϵ_1 , μ_1 和 ϵ_2 , μ_2 来表示两边介质的特性, 则(3), (5)–(9)式中常量 ϵ_0 , μ_0 , k_0 相应地改为 ϵ_1 , μ_1 , k_1 或 ϵ_2 , μ_2 , k_2 . 连续性条件(11a)式应改用电位矢量的法向分量, 即

$$D_{0n} + D_{ln}'^0 = D_{2n}'^0, \quad (11c)$$

因此积分方程(12a)式, (12b)式变为

$$-\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbf{K}^*(r') \times \nabla \frac{1}{|r-r'|} dQ' = \frac{\epsilon_1 E_{0n} + \epsilon_1 E_{ln}'^0 - \epsilon_2 E_{2n}'^0}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \mathbf{n}, \quad (12c)$$

$$\frac{1}{4\pi} \int \eta^*(r') \nabla \frac{1}{|r-r'|} dQ' = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} (\mathbf{H}_{0t} + \mathbf{H}_{lt}'^0 - \mathbf{H}_{2t}'^0). \quad (12d)$$

由此得到的电矩和磁矩在小圆孔两边是不同的, 分别用下标号 1, 2 分辨:

$$\mathbf{P}_{1,2}/\epsilon_{1,2} = -\frac{8}{3} a^3 \frac{\epsilon_1 E_{0n} + \epsilon_1 E_{ln}'^0 - \epsilon_2 E_{2n}'^0}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \mathbf{n}, \quad (13c)$$

$$\mathbf{M}_{1,2} = \frac{16}{3} a^3 \frac{\mu_{2,1}}{\mu_1 + \mu_2} (\mathbf{H}_{0t} + \mathbf{H}_{lt}'^0 - \mathbf{H}_{2t}'^0). \quad (13d)$$

等效激发场也相应改为

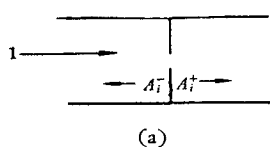
$$E_{0N} = \frac{2(\epsilon_1 E_{0n} + \epsilon_1 E'_{1n} - \epsilon_2 E'_{2n})}{\epsilon_1 + \epsilon_2}, \quad (14c)$$

$$(\mathbf{H}_{0T})_{1,2} = \frac{2\mu_{2,1}}{\mu_1 + \mu_2} (\mathbf{H}_{0t} + \mathbf{H}'_{1t} - \mathbf{H}'_{2t}). \quad (14d)$$

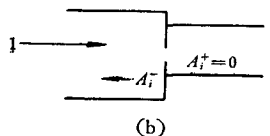
这样,就将无限大平面上小孔耦合的结果推广于有限空间的情况,亦即小孔所激发的场可以等效为由电磁偶极子激发的场,而激励偶极子的场不是用未微扰场,而是用等效激发场。

四

现在利用前面所述的办法,统一处理各种小孔耦合问题,亦即把小孔等效为场源,它的偶极矩可由(13)式决定,而等效激发场中的各场量则按具体问题来决定。



(a)



(b)

图 1

在波导间小孔耦合的问题上,直接应用 Bethe 的结果来计算耦合度似乎没有发生什么障碍,那么采用等效激发场能得到什么新的结果呢?

为了说明这一问题,必须考虑近似程度. 由于我们应用了类似于 Bethe 的办法,单孔耦合幅度只能正确到 $(a/\lambda)^3$, 耦合功率最高能正确到 $(a/\lambda)^6$. 下面就在这一近似程度下,用具体例子证明采用等效激发场后,激发系统与被激发系统的能量是守恒的,并能反映出被激发系统变迁对激发源的影响。

先看最简单的例子[见图 1(a)],在波导中放入一无限薄的小圆孔膜片,假定波导从左向右投射一单位幅度最低阶磁波,小孔而引起的向左右传输波型的幅度按文献[6]中的(11-92)及(11-93)¹⁾式:

$$A_i^+ = A_i^- = \frac{1}{2} j\omega\mu_0 \mathbf{M} \cdot \mathbf{H}_{it}^{+0}, \quad (17)$$

其中 $\mathbf{H}_{it}^{+0}$ 为该正向磁波归一化横向磁场在小孔中央处的值. 等效磁耦极矩 $\mathbf{M}$ 按 Bethe 的取法,即

$$\mathbf{M} = \frac{8}{3} a^3 \mathbf{H}_{0t},$$

未微扰场 $\mathbf{H}_{0t} = 2\mathbf{H}_{it}^{+0}$. 将 $\mathbf{M}$ 代入(17)式得

$$A_i^+ = A_i^- = j \frac{8}{3} \omega\mu_0 a^3 (H_{it}^{+0})^2. \quad (18)$$

由于膜片反射系数为 $(A_i^- - 1)$, 传输系数为 A_i^+ , 反射功率与传输功率的总和 $|A_i^- - 1|^2 + |A_i^+|^2 = 1 + (a/\lambda)^6 > 1$ (这里等号右边第二项代表数量级), 即表明在确定的近似程度上,总功率大于投射功率,因此功率没有平衡。

如果采用等效激发场,将 $\mathbf{H}_{it}^{+0} = A_i^- \mathbf{H}_{it}^{+0}$, $\mathbf{H}_{it}^{+0} = A_i^+ \mathbf{H}_{it}^{+0}$ 代入(14)式,得

1) 原文有误,两式等号右边的负号都应改为正号。

$$\mathbf{H}_{0T} = 2\mathbf{H}_{it}^{+0} + A_i^- \mathbf{H}_{it}^{-0} - A_i^+ \mathbf{H}_{it}^{+0}, \quad (19)$$

再由(13b)式及(17)式, 并利用 $\mathbf{H}_{it}^{+0} = -\mathbf{H}_{it}^{-0}$, 可得

$$A_i^+ = A_i^- = \frac{j \frac{8}{3} a^3 \omega \mu_0 (H_{it}^{+0})^2}{1 + j \frac{8}{3} a^3 \omega \mu_0 (H_{it}^{+0})^2}. \quad (20)$$

(20) 式中保留了量级为 $(a/\lambda)^6$ 的项, 它与主要项相差 $\pi/2$, 这一项对计算 $|A_i^+|^2$ 是可以忽略的, 但在计算 $|A_i^- - 1|^2$ 是不可少的. 不难证明 $|A_i^- - 1|^2 + |A_i^+|^2 = 1$, 因此功率达到平衡. 按反射系数与分路电纳间的关系, 可得分路电纳

$$B = \frac{2(1 - A_i^-)}{jA_i^-} = -\frac{3}{4\omega\mu_0 a^3 (H_{it}^{+0})^2}. \quad (21)$$

如果象图 1(b) 所示, 右边波导与左边波导不同, 是截止波导, 则 $A_i^+ = 0$, 代入(19)式, 按同样步骤可得

$$A_i^- = \frac{j \frac{8}{3} \omega \mu_0 a^3 (H_{it}^{+0})^2}{1 + j \frac{4}{3} \omega \mu_0 a^3 (H_{it}^{+0})^2}. \quad (22)$$

波导的归一化终端阻抗:

$$Z_{in} = \frac{A_i^-}{2 - A_i^-} = j \frac{4}{3} a^3 \omega \mu_0 (H_{it}^{+0})^2 \quad (23)$$

是纯电抗的, 因此反射系统等于 1, 表示能量全部反射. 但如果用 Bethe 的取法, A_i^- 仍由(18)式决定, 反射切率 $|A_i^- - 1|^2 > 1$, 这是不合理的.

如果图 1 中右边波导截面比左边的大, 可以传输多个波型, 用同样的办法可计算反射波和右边波导各传输波型的幅度, 并能证明功率是平衡的. 所不同的是, 在推导中等效激发场(19)式中第三项应为右边波导各传输波型的总和.

如果图 1 中右边波导用一半无限大空间代替 (见图 2), 在波导终端是一无限大导电平面. 这时 (19) 式中前两项不变, 第三项由(10)式决定, 因此

$$\mathbf{H}_{0T} = 2\mathbf{H}_{it}^{+0} + A_i^- \mathbf{H}_{it}^{-0} - j \frac{k^3}{6\pi} \mathbf{M}, \quad (24)$$

将(24)式代入(13)式, 再由(17)式可得

$$A_i^- = \frac{j \frac{8}{3} a^3 \omega \mu_0 (H_{it}^{+0})^2}{1 + j \frac{4}{3} a^3 \omega \mu_0 (H_{it}^{+0})^2 + j \frac{4}{9\pi} (ka)^3}, \quad (25)$$

反射功率

$$|A_i^- - 1|^2 = 1 - \frac{16}{27\pi} k^4 a^6 \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} (2H_{it}^{+0})^2$$

小于 1, 它的减少部分(即上式中右边第二项)恰好等于由(13b)式决定的磁偶极子向半无

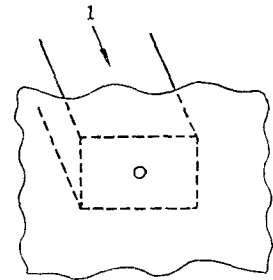


图 2

限大空间辐射的功率¹⁾。终端阻抗

$$Z_{in} = \frac{A_i^-}{2 - A_i^-} = j \frac{4}{3} a^3 \omega \mu_0 (H_{it}^{+0})^2 + \frac{16}{27\pi} k^4 a^6 \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} (H_{it}^{+0})^2 \quad (26)$$

与(23)式相比,可知增加了一项由于向半无限大空间辐射而引起的辐射电阻。

如果波导的终端是一个与波导通过小孔耦合的空腔,这种情况已在文献[4]中研究过,这里取其部分结果并证明功率的平衡。按文献[4]的(18)式,终端阻抗

$$Z_{in} = j \frac{4}{3} a^3 \omega \mu_0 (H_{it}^{+0})^2 + \frac{1/Q_R}{i \left(\frac{\omega}{\omega_i'} - \frac{\omega_i'}{\omega} \right) + \frac{1}{Q_u}}, \quad (27)$$

这里 Q_R 为空腔的外界品质因素, Q_u 为无载品质因素, ω_i' 为空腔中某一振荡模的振荡频率。终端反射的功率为反射系数的平方:

$$\left| \frac{Z_{in} - 1}{Z_{in} + 1} \right|^2 = 1 - \frac{4/Q_u Q_R}{\left[\frac{X_i}{Q_u} + \left(\frac{\omega}{\omega_i'} - \frac{\omega_i'}{\omega} \right) \right]^2 + \left[\frac{1}{Q_u} + \frac{1}{Q_R} - X_i \left(\frac{\omega}{\omega_i'} - \frac{\omega_i'}{\omega} \right) \right]^2},$$

式中第二项可以证明等于空腔自身损耗的功率,即 $\omega W_i/Q_u$ 。这里 W_i 为空腔中振荡波型的储能, $X_i = \frac{4}{3} \omega \mu_0 a^3 (H_{it}^{+0})^2$ 。因此反射功率的减少等于空腔消耗的功率,功率达到平衡。

从(21)式,(23)式,(26)式及(27)式可见,在各种不同的耦合情况下,小孔膜片引起一固定电抗 jX_i ,它与被激发系统无关,这是因为在各种不同情况下, E_{1n}'' , H_{1t}'' 及 E_{2n}'' , H_{2t}'' 都是用准静态场(3a)式,(3b)式表示。终端阻抗的第二项随着等效激发场(19)式中第三项不同的取法而改变,它体现了被激发系统对激发系统的影响,主要是功率方面的影响。

最后分析矩形波导宽边开小孔向半无限大空间辐射问题。假定波导中从左边输入一单位幅度的 H_{10} 波,在小孔处同时存在切向磁场 H_t^{+0} 及法向电场 E_n^{+0} 。由于小孔的存在,电磁场除了在波导中向左右两边激发起幅度为 A_i^- 及 A_i^+ 的波外,还向半无限空间辐射[见图3(a)]。

分析这一问题时,首先决定等效激发场,将 $E_{0n} = E_n^{+0}$, $H_{0t} = H_t^{+0}$; $E_{1n}' = \frac{1}{2} (A_i^+ E_n^{+0})$

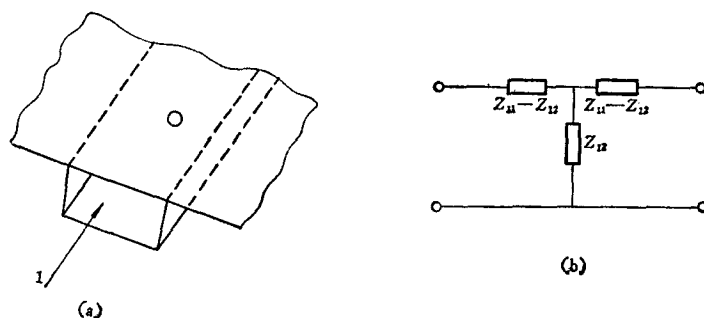


图 3

1) 文献[1]的(47)式表示了这一功率,但要注意单位制的不同。

+ $A_i^- E_{in}^{-0}$), $\mathbf{H}_{in}^0 = \frac{1}{2} (A_i^+ \mathbf{H}_i^{+0} + A_i^- \mathbf{H}_i^{-0})$ 及(10)式代入(13)式, 可得

$$\mathbf{P}/\varepsilon_0 = \frac{-1}{1 - j\frac{2}{9\pi} k^3 a^3} \frac{4}{3} a^3 \left[1 + \frac{1}{2} (A_i^+ + A_i^-) \right] E_{in}^{+0} \mathbf{n}, \quad (28)$$

$$\mathbf{M} = \frac{1}{1 + j\frac{4}{9\pi} k^3 a^3} \frac{8}{3} a^3 \left\{ \mathbf{H}_{it}^{+0} \left[1 + \frac{1}{2} (A_i^+ - A_i^-) \right] + H_{iz}^{+0} \left[1 + \frac{1}{2} (A_i^+ + A_i^-) \right] \mathbf{i}_z \right\}.$$

这里利用了关系 $E_{in}^{+0} = E_{in}^{-0}$, $\mathbf{H}_{it}^{+0} = -\mathbf{H}_{it}^{-0}$, $H_{iz}^{+0} = H_{iz}^{-0}$ 及 $\mathbf{H}_i^{+0} = \mathbf{H}_{it}^{+0} + H_{iz}^{+0} \mathbf{i}_z$, 其中 $\mathbf{i}_z$ 为波导传输方向单位矢量.

将(28)式代入文献[6]中的(7-60)式

$$A_i^\pm = \frac{j}{2} \omega \mu_0 \mathbf{H}_i^{\mp 0} \cdot \mathbf{M} - \frac{j}{2} \omega E_i^{\mp 0} \mathbf{n} \cdot \mathbf{p},$$

可得

$$\begin{aligned} A_i^+ &= -j(X_t - X_n - X_z) - [X_t^2 + (X_n + X_z)^2] - \frac{2(ka)^3}{9\pi} [2X_t + X_n - 2X_z], \\ A_i^- &= j(X_t + X_n + X_z) + X_t^2 - (X_n + X_z)^2 + \frac{2(ka)^3}{9\pi} [2X_t - X_n + 2X_z], \end{aligned} \quad (29)$$

其中

$$X_t = \frac{2}{3} \omega \mu_0 a^3 (H_{it}^{+0})^2, \quad X_n = \frac{1}{3} \omega \varepsilon_0 a^3 (E_{in}^{+0})^2, \quad X_z = \frac{2}{3} \omega \mu_0 a^3 (H_{iz}^{+0})^2.$$

现在来校核功率平衡, 传输功率为 $|1 + A_i^+|^2$, 反射功率为 $|A_i^-|^2$, 它们的总和(正确到 a^6/λ^6):

$$\begin{aligned} |A_i^+ + 1|^2 + |A_i^-|^2 &= 1 - \frac{16}{27\pi} k^4 a^6 \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} (H_{it}^{+0})^2 - \frac{4}{27\pi} k^4 a^6 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} (E_{in}^{+0})^2 \\ &\quad + \frac{16}{27\pi} k^4 a^6 \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} (H_{iz}^{+0})^2, \end{aligned} \quad (30)$$

上式的后三项恰好是电磁偶极子向半无限大空间辐射的功率, 因此功率达到平衡, 这里要注意的是 H_{iz}^{+0} 是虚数, 所以式中最后一项是负值.

将(29)式代入文献[4]中的(A8)式, 可得小孔的等效 T 形网络的参数[见图 3(b)],

$$\begin{aligned} Z_{11} - Z_{12} &= jX_t + \frac{4}{9\pi} (ka)^3 X_t, \\ \frac{1}{Z_{12}} &= -j2(X_n + X_z) + \frac{4}{9\pi} (ka)^3 (X_n - 2X_z). \end{aligned} \quad (31)$$

可见四端网络的串联分支仅与 H_{10} 波的横向磁场有关, 而并联分支是与该波型的纵向磁场与横向电场有关.

从(20)式, (22)式, (25)式及(29)式可见, 用了等效激发场将使小孔右边激发场幅度增加一量级为 $(a/\lambda)^6$ 的项, 因此如果只需要计算耦合的绝对大小, 这一项对量级为 $(a/\lambda)^3$ 的主要项是可以忽略的, 因此意味着在计算偶极矩时只需用未微扰场而无需修正项. 这就是以往用 Bethe 的结果计算小孔耦合时并未经常发生困难的缘因. 但须注意到这一量级为 $(a/\lambda)^6$ 的项比主要项时间上滞后 $\pi/2$, 而与未微扰情况下在孔处的反射波反相(在最后

的例子中,与投射波反相),因此在计算反射功率时(或投射功率时)会得出量级为 $(a/\lambda)^6$ 的项,从而使功率在 $(a/\lambda)^6$ 的量级上得到平衡. 由于等效网络电参量中的电导部分直接与能量损耗有关,因此只有在满足功率平衡的情况下,才能求得正确的电导,这一点从(26)式以及最后的例子是很明显的.

实用意义不仅在能量守恒这一点上,主要是等效激发场不仅能体现激发场对被激发场的作用,而且还能体现被激发场的反作用. 后者在研究波导与空腔的小孔耦合,以及空腔间的小孔耦合时特别明显,因为空腔中的振荡模的谐振会使(14)式中 E_{10}^0 , H_{10}^0 及 E_{20}^0 , H_{20}^0 大到与未微扰场同样的量级. 而在分析波导系统的小孔耦合以及通过小孔向无限大空间辐射时,修正项为未微扰场的 $(a/\lambda)^3$ 的量级,如前所述在一些情况下是可以忽略的. 但实用上也往往遇到多孔(多缝隙)情况,被激发系统场的幅度由于许多孔作用的叠加而变得与激发场同一量级,这时修正项不可忽略,而需要采用等效激发场. 这里最明显的例子是多孔强耦合定向耦合器,这种情况下主波导与付波导中的场量是同一量级的. 由于 Bethe 结果中没有考虑被激发场的反作用,因此基于这一结果的弱耦合定向耦合器理论已不再适用了^[7],必须采用别的办法,而以上介绍的办法能解决这一困难.

五

等效激发场的引入是满足小孔面上场的连续性条件;它体现出激发场与被激发场的相互作用;在确定近似程度下使耦合系统的电磁场符合能量守恒定则,因此也就在这个近似下正确地反映了物理实际.

在分析具体问题时,采用等效激发场就可以用统一的办法来处理各种小孔耦合问题,方法简便,容易掌握,无需作象文献[3]及[5]中那样复杂的运算,而仅是简单的代数运算. 此外,这一办法能用来分析各种较复杂的小孔耦合系统,例如波导与空腔间的多孔(缝隙)耦合、多波型波导的多孔(缝隙)波型激发器、多孔强耦合定向耦合器、波导的多孔膜片、复杂空腔系统的小孔耦合问题^[8],另外还能用来计算缝隙天线的辐射阻抗,空腔开孔向外辐射等问题.

在分析各种问题时,必须注意到前已提及的限制条件. 首先是其他扰动(包括波导壁、其他小孔等)要离小孔有足够的距离,按文献[3],这距离是在 $\lambda/2\pi$ 的量级;其次是小孔的尺寸要远小于波长;再次是小孔的壁厚必须极薄,因此可以忽略不计. 在实际情况下后两个条件往往不能完全满足,这时可以采用适当的修正,将(13)式右边乘上一修正因子^[7]:

$$\frac{\operatorname{tg}(\pi f/2f_c)}{\pi f/2f_c} \cdot \exp\left[\frac{-2\pi t A}{\lambda_c} \sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}\right]. \quad (32)$$

对于(13a)式,这里 f_c 是小孔短截波导中最低阶电波的截止频率;对于(13b)式, f_c 是它的最低阶磁波的截止频率; $\lambda_c = c/f_c$; t 为小孔壁厚; A 是由耦合系统、孔的大小形状决定的因子,通常由实验决定. 在圆孔情况, A 稍大于 1, 在窄缝时约为 3.

最后,虽然上述举例和讨论是在小圆孔的情况下作的,但同样适用于其他形状的小孔,这时(13)式中偶极矩的极化率要改变,几种不同形状小孔极化率的值可查阅著作[6]

的表 7-1、

参 考 文 献

- [1] H. A. Bethe, *Phys. Rev.*, **66** (1944), 163.
- [2] R. E. Collin, *Field Theory of Guided Waves*, McGraw-Hill Book Company (1960).
- [3] J. Van Blandel, *Proc. IEE*, **118** (1971), 43.
- [4] 钱景仁, 电子学报, 第三期 (1965), 262 页.
- [5] J. Van Blandel, *Proc. IEE*, **117** (1970), 1098.
- [6] 黄宏嘉, 微波原理 (卷 I, II), 科学出版社 (1963).
- [7] P. Levy, *IEEE Trans.*, *MTT-16* (1968), 995.
- [8] E. F. Goodenough, *The Marconi Review*, **23** (1960), 85.