

关于超导弱连接的电流阶跃*

姚 希 贤

(南京大学物理系)

提 要

在电池电源和辐射场作用下,对超导弱连接可采取电流源驱动的分路约瑟夫逊结模型。在上述模型下,本文对弱连接发生的常电压电流阶跃提供一个一般的判据,据此还讨论了分谐波电流阶跃的存在问题;在小辐射场情形下给出了电流阶跃高度的表示式,在中等辐射场的情形下还给出了电流阶跃高度依赖于辐射场强度的数值计算结果。

一、引 言

点接触、Dayem 桥和邻近效应桥被称为弱连接。与隧道结一样,弱连接也呈现约瑟夫逊效应^[1]。在电池电源和辐射场作用下,对弱连接采用电流源模型能给出与实验定量符合的结果^[2],由于弱连接之间的电容很小,通常都采用电阻分路约瑟夫逊结模型^[3],简称 RSJ 模型。其等效电路如图 1 所示。如果采用无量纲参数,约瑟夫逊结满足的方程如下:

$$i_s = \sin \varphi, \quad (1)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = v. \quad (2)$$

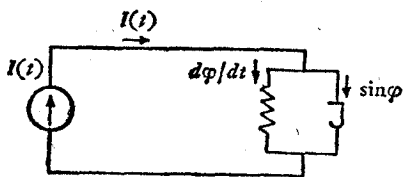


图 1 RSJ 模型的等效电路

在电池电源和辐射场作用下,外界提供的电流源 i 为

$$i(t) = i_0 + i_1 \cos \Omega t, \quad (3)$$

此时 φ 所满足的方程为

$$\frac{d\varphi}{dt} + \sin \varphi = i_0 + i_1 \cos \Omega t. \quad (4)$$

(4) 式是高度非线性的,很难求得解析解,于是求助于模拟计算机求解^[4,5]。当 $i_1 = 0$ 时,(4) 式可求得解析解。因此在 $i_1 \ll 1$ 时,可用微扰法求解 (4) 式^[6,7]。我们在文献 [9] 中已求得 (4) 式的某种解析解,实际上求得的是 $\exp(j\varphi)$, 其中 $j = \sqrt{-1}$, 其形式为

$$\exp(j\varphi) = 2Qj \sum_n [Ca_n(s_1 + n)e^{j(s_1+n)\Omega t} + b_n(s_2 + n)e^{j(s_2+n)\Omega t}] / \sum_n [Ca_n e^{j(s_1+n)\Omega t} + b_n e^{j(s_2+n)\Omega t}]. \quad (5)$$

上式中求和是对整数 n 进行,从 $-\infty$ 到 ∞ , C 是积分常数,由初始条件确定, $s_1 a_n$ 和 $s_2 b_n$

* 1978 年 5 月 23 日收到。

是两组常数, s_1 和 s_2 是下列代数方程的解:

$$4Q^2s^2 - 4Q_{i_0}s + 1 - 2Q_{i_1}(s+1)a_1 - 2Q_{i_1}(s-1)a_{-1} = 0, \quad (6)$$

而 a_n 可表示为 s 的某种连续分式:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{2Q_{i_1}(s+n-1)}{4Q^2(s+n)^2 - 4Q_{i_0}(s+n) + 1} - \frac{(2Q_{i_1})^2(s+n+1)(s+n)}{4Q^2(s+n+1)^2 - 4Q_{i_0}(s+n+1) + 1} - \frac{(2Q_{i_1})^2(s+n+2)(s+n+1)}{4Q^2(s+n+2)^2 - 4Q_{i_0}(s+n+2) + 1} - \dots$$

当 $n = 1, 2, \dots$, (7)

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2Q_{i_1}(s+n+1)}{4Q^2(s+n)^2 - 4Q_{i_0}(s+n) + 1} - \frac{(2Q_{i_1})^2(s+n-1)(s+n)}{4Q^2(s+n-1)^2 - 4Q_{i_0}(s+n-1) + 1} - \frac{(2Q_{i_1})^2(s+n-2)(s+n-1)}{4Q^2(s+n-2)^2 - 4Q_{i_0}(s+n-2) + 1} - \dots$$

当 $n = -1, -2, \dots$. (8)

考虑到可以取 $a_0 = 1$, 下面我们特别写出 a_1 和 a_{-1} :

$$a_1 = \frac{2Q_{i_1}s}{4Q^2(s+1)^2 - 4Q_{i_0}(s+1) + 1} - \frac{(2Q_{i_1})^2(s+2)(s+1)}{4Q^2(s+2)^2 - 4Q_{i_0}(s+2) + 1} - \frac{(2Q_{i_1})^2(s+3)(s+2)}{4Q^2(s+3)^2 - 4Q_{i_0}(s+3) + 1} - \dots; \quad (9)$$

$$a_{-1} = \frac{2Q_{i_1}s}{4Q^2(s-1)^2 - 4Q_{i_0}(s-1) + 1} - \frac{(2Q_{i_1})^2(s-2)(s-1)}{4Q^2(s-2)^2 - 4Q_{i_0}(s-2) + 1} - \frac{(2Q_{i_1})^2(s-3)(s-2)}{4Q^2(s-3)^2 - 4Q_{i_0}(s-3) + 1} - \dots. \quad (10)$$

求解 s 需要联立方程 (6) 和 (9), (10) 两式. 当求得两个解 s_1 和 s_2 后, 即可求得所有的 a_n 和 b_n .

在 RSJ 模型中, 关于 i_0 - v 特性曲线上出现常电压电流阶跃的问题, Russer 曾用模拟计算机方法求得电流阶跃高度依赖辐射场强度 i_1 的关系^[4], 与实验结果符合得很好. 在小辐射场情形下, 可用微扰法求得电流阶跃高度依赖于 i_1 的关系, 例如在小辐射场 $i_1 \sin(\omega t + \alpha)$ 作用下, 文献 [8] 求得的基频电流阶跃高度正比于 $i_1 \sin \alpha$. 这个结果看来不能令人满意, 因为实验结果表明电流阶跃高度与辐射场的初始位相 α 是无关的. 本文将提出另一种处理 RSJ 模型中电流阶跃问题的方法. 在第二节中我们提出一个判定出现电流阶跃的判据, 并讨论分谐波电流阶跃的存在问题. 作为应用上述判据的一个例证, 我们在第三节中计算了小辐射场情形下电流阶跃高度依赖于 i_1 的关系. 在第四节中, 我们讨论任意 i_1 下推求电流阶跃高度的方法, 将所得结果与 Russer 所得的以及实验结果进行了比较.

二、出现电流阶跃的判据

在文献 [9] 中, 我们曾经就小辐射场情形下指出, 当 s_1 和 s_2 为复数时将出现电流阶

跃. 这里将给出一个一般的判据: 当 i_0 在某个范围内变化时, 如果 s_1 和 s_2 总是复数, 这时将出现电流阶跃, 并且跨过弱连接的平均电压将被辐射场锁定在其谐频(包括基频)所相应的电压上. 下面来论证这个判据.

由于(6), (9) 和 (10) 式中 s 前面的系数均是实数, 当 s 出现复数根时必然是成对的, 可令

$$\text{Im}s_1 > 0, \quad \text{Im}s_2 < 0. \quad (11)$$

此时, 指数函数 $\exp(j s_1 \Omega t)$ 将随时间 t 的增大而衰减,

$$\exp(j s_1 \Omega t) \sim \exp[-\text{Im}s_1(\Omega t)] \rightarrow 0 \quad \text{当 } t \rightarrow \infty \text{ 时}. \quad (12)$$

所以当 t 很大时, (5) 式可简化为

$$\exp(j\varphi) = 2\Omega j \sum_n b_n(s_2 + n) \exp(jn\Omega t) / \sum_n b_n \exp(jn\Omega t),$$

或者写为

$$\exp(j\varphi) = 2\Omega j s_2 + 2\Omega j \left[\sum_n n b_n e^{jn\Omega t} / \sum_n b_n e^{jn\Omega t} \right]. \quad (13)$$

(13) 式右边第二项仍可以展开成傅里叶级数, 但其中不存在常数项. 只要把此项写为如下形式, 没有常数项是显然的:

$$2\Omega j \left[\sum_n b_n n e^{jn\Omega t} / \sum_n b_n e^{jn\Omega t} \right] = 2 \frac{d}{dt} \ln \left(\sum_n b_n e^{jn\Omega t} \right).$$

于是(13)式可以改写为

$$\exp(j\varphi) = 2\Omega j s_2 + \sum_{n \neq 0} B_n e^{jn\Omega t}, \quad (14)$$

其中 B_n 是新的傅里叶级数的系数, 不过并不需要知道它的具体表式, 只须指出它是复数并与 c 无关, 即与初始状态无关. 对(14)式两边求虚部可得

$$\sin \varphi = 2\Omega \text{Re}s_2 + \sum_{n \neq 0} j(B_n^* - B_n) e^{jn\Omega t} \quad \text{当 } t \text{ 很大时}. \quad (15)$$

用上式中的 $\sin \varphi$ 的表示式代入(4)式, 可得

$$\frac{d\varphi}{dt} = i_0 - 2\Omega \text{Re}s_2 + i_1 \cos \varphi - \sum_{n \neq 0} j(B_n^* - B_n) e^{jn\Omega t} \quad \text{当 } t \text{ 很大}. \quad (16)$$

上式积分可得

$$\varphi = (i_0 - 2\Omega \text{Re}s_2)t + \frac{i_1}{\Omega} \sin \Omega t - \sum_{n \neq 0} (B_n^* - B_n)(n\Omega)^{-1} e^{jn\Omega t} + \beta \quad \text{当 } t \text{ 很大}, \quad (17)$$

其中 β 为某个积分常数.

由于已经求得 t 很大时 φ 和 $\sin \varphi$ 的解, 所以可以得到如下的结论, 当 s_1 和 s_2 为复数时,

1. 由于 $\sin \varphi$ 代表弱连接中通过的超电流, (15) 式表明当 t 很大时, 超电流中的振荡电流只存在如下频率: 或是辐射场的基频, 或者辐射场的谐频. 这就意味着超流中的约瑟夫逊振荡电流将被辐射场的谐频(包括基频)所锁定;

2. 由于 $\left\langle \frac{d\varphi}{dt} \right\rangle$ 代表跨过弱连接的平均电压 $\bar{v}$, 根据(17)式可知

$$\bar{v} = \left\langle \frac{d\varphi}{dt} \right\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\varphi(T)}{T} = i_0 - 2\Omega \text{Re}s_2, \quad (18)$$

并且 $\bar{v}$ 一定等于 Ω 的某个整倍数, 即 $\bar{v}$ 一定等于 $m\Omega$, 其中 m 为某个整数.

要论证这一点很简单, 只要对 (17) 式两边乘以 i 并取指数, 可得

$$\exp(j\varphi) = \exp \left\{ j\beta + j\bar{v}t + \frac{j\bar{I}_1}{\Omega} \sin \Omega t - \sum_{n \neq 0} j(B_{-n}^* - B_n)(n\Omega)^{-1} e^{jn\Omega t} \right\}, \quad (19)$$

考虑到贝塞耳-傅里叶展开式^[10]

$$\exp(j\alpha \sin \Omega t) = \sum_k J_k(\alpha) \exp(jk\Omega t),$$

$$\exp(j\alpha \cos n\Omega t) = \sum_k J_k(\alpha) \exp(jkn\Omega t),$$

可知 (19) 式的右边具有以下形式:

$$\sum_n A_n \exp(j\bar{v}t + jn\Omega t), \quad (20)$$

其中 A_n 是些复常数, 比较 (14) 和 (19) 两式可知, $\bar{v}$ 必然是 Ω 的某个整倍数, 否则 (14) 和 (19) 两式相矛盾. 这就意味着跨过弱连接的平均电压 $\bar{v}$ 将被辐射场的某个谐频相应的电压所锁定.

这样, 我们就论证了如下结果, 当 i_1 和 Ω 给定时, s_1 和 s_2 就是 i_0 的函数, 如果 i_0 在某个区间中变化时, s_1 和 s_2 均具有复数解, 那么在 $I-V$ 特性曲线上将出现电流阶跃, 阶跃处的电压 $\bar{v}$ 等于辐射场的某个谐频 $n\Omega$. 同时, 也证明了在 RSJ 模型中是不存在分谐波电流阶跃, 这个结论在 Renne 等人的工作中已经被证明是正确的^[11].

为了说明分谐波电流阶跃的现象, Sullivan 等早就指出, 除了计入分路电阻外, 还需要考虑弱连接上有串联的电感和并联的电容^[12]. 近几年, Dempsey 等人用模拟计算机方法计算上述问题^[13], 证明只有在串联电感和并联电容在振荡过程中储存能量与弱连接的约瑟夫逊能量可以相比时才会出现分谐波电流阶跃. 上述工作与本文所得结果是相符的.

三、小辐射场作用下的电流阶跃高度

作为上述判据的一个具体例子, 下面将计算小辐射场情形下的电流阶跃高度. 此时 $i_1 \ll 1$, 我们只限于给出 $n=0$ 和 $n=1$ 的电流阶跃高度的计算, 并且限于最低的近似.

为书写简单起见, 引入 x 代替 s , 令

$$x = 2\Omega s, \quad (21)$$

确定 s 值的 (6), (9) 和 (10) 式分别变为

$$x^2 - 2i_0x + 1 - i_1(x + 2\Omega)a_1 - i_1(x - 2\Omega)a_{-1} = 0, \quad (22)$$

$$a_1 = \frac{i_1x}{(x + 2\Omega)^2 - 2i_0(x + 2\Omega) + 1} - \frac{i_1^2(x + 4\Omega)(x + 2\Omega)}{(x + 4\Omega)^2 - 2i_0(x + 4\Omega) + 1} - \dots, \quad (23)$$

$$a_{-1} = \frac{i_1x}{(x - 2\Omega)^2 - 2i_0(x - 2\Omega) + 1} - \frac{i_1^2(x - 4\Omega)(x - 2\Omega)}{(x - 4\Omega)^2 - 2i_0(x - 4\Omega) + 1} - \dots. \quad (24)$$

现在来求作为参变量 i_0 的函数 x , 在 i_0 的什么范围内具有复数根.

1. $n = 0$ 时的电流阶跃高度

由于 $i_1 \ll 1$, 把 x 和 i_0 按 i_1 的幂来展开, 对求解 x 是有好处的, 为此我们把 x 和 i_0 分别写为

$$x = x_0 + x_1 + x_2 + \cdots, \quad (25)$$

$$i_0 = \bar{i}_0 + \Delta i_1 + \Delta i_2 + \cdots, \quad (26)$$

上两式右边各量的足标表示其比例于 i_1 的幂次, 把它们代入 (22), (23) 和 (24) 式, 对 a_1 和 a_{-1} 而言, 只需保留到 i_1 的一次幂, 从而求得近似到 i_1 二次幂的 (22) 式.

$$\begin{aligned} & x_0^2 + 2x_0x_1 + 2x_0x_2 + x_1^2 - 2\bar{i}_0x_0 - 2\bar{i}_0x_1 - 2\bar{i}_0x_2 - 2x_0\Delta i_1 - 2x_0\Delta i_2 - 2x_1\Delta i_1 + 1 \\ &= \frac{i_1^2(x_0 + 2Q)x_0}{(x_0 + 2Q)^2 - 2\bar{i}_0(x_0 + 2Q) + 1} + \frac{i_1^2(x_0 - 2Q)x_0}{(x_0 - 2Q)^2 - 2\bar{i}_0(x_0 - 2Q) + 1}. \end{aligned} \quad (27)$$

上式中 i_1 零次幂相等的项给出

$$x_0^2 - 2\bar{i}_0x_0 + 1 = 0, \quad (28)$$

显然, $\bar{i}_0 = \pm 1$ 是 (33) 式的分界点: 当 $|\bar{i}_0| > 1$ 时, x_0 具有实数根; $|\bar{i}_0| < 1$ 时, x_0 具有复数根, 如果把 x_0 的两根分别记为 x_0 和 $\bar{x}_0$, 则

$$x_0 = \bar{i}_0 - j(1 - \bar{i}_0^2)^{1/2}, \quad \bar{x}_0 = \bar{i}_0 + j(1 - \bar{i}_0^2)^{1/2} \quad \text{当 } |\bar{i}_0| < 1. \quad (29)$$

由于 $\bar{i}_0$ 在区间 $[-1, 1]$ 之间变化时, x_0 具有复数根, 所以在零级近似下, $n = 0$ 的电流阶跃高度等于 2. 不过一般在定义 $n = 0$ 时的阶跃高度是从 $\bar{i}_0 = 0$ 开始计算的, 所以应该取其阶跃高度为 1.

现在来推求阶跃高度的修正项. 不难看到, 当 $|\bar{i}_0| < 1$ 时修正项不会改变 x 具有复数根的性质, 所以我们令 $\bar{i}_0 = 1$ (在 $\bar{i}_0 = -1$ 时的讨论完全类似). 当 $\bar{i}_0 = 1$ 时, x_0 具有重根其值为 1, 计及于此, (27) 式中 i_1 的一次幂相等的项给出

$$\Delta i_1 = 0. \quad (30)$$

于是 (27) 式 i_1 的二次幂相等的项给出

$$x_1^2 = 2\Delta i_2 + \frac{i_1^2}{2Q^2}. \quad (31)$$

(31) 式告诉我们, $\Delta i_2 = -i_1^2/4Q^2$ 是其分界点: 当 $\Delta i_2 > -i_1^2/4Q^2$ 时, x_1 为实数根; 当 $\Delta i_2 < -i_1^2/4Q^2$ 时, x_1 将为复数根, 如把 x_1 的两根分别记为 x_1 和 $\bar{x}_1$, 则

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{2}j\left(-\Delta i_2 - \frac{i_1^2}{4Q^2}\right), \quad \bar{x}_1 = -\sqrt{2}j\left(-\Delta i_2 - \frac{i_1^2}{4Q^2}\right) \\ &\text{当 } \Delta i_2 < -\frac{i_1^2}{4Q^2} \text{ 时.} \end{aligned} \quad (32)$$

所以在准确到 i_1 的二次幂近似下, 当

$$i_0 = \bar{i}_0 + \Delta i_2 = 1 + \Delta i_2 < 1 - \frac{i_1^2}{4Q^2} \quad (33)$$

时, $x = x_0 + x_1$ 具有复数根, 相应的电流阶跃高度等于 $1 - \frac{i_1^2}{4Q^2}$.

电流阶跃高度更高的 i_1 幕次的修正, 完全可以仿照上述做法继续下去, 这里就不再赘述了。

在按上述方法求解 x 的根时, 发现一个有趣的事实。我们看到, 当 $i_0 = 1$ 时, 在零级近似下 x 的两根都等于 1, 发生重根情况(重根是 s 的两根之差等于整数的一种特殊情况), 当 $i_0 < 1$ 时两根等于复数, $i_0 > 1$ 时两根等于实数, 出现重根的 i_0 值恰恰是区分 x 为实根或复根的分界点。值得指出, 在计及修正项时重根情况将自动消除。在近似到 i_1 二次幕时, 当 $i_0 = 1 - i_1^2/4Q^2$ 时, $x_1 = 0$, $x = x_0 + x_1$ 又将出现重根情况, 这里的 i_0 值又起着分界点的作用, 小于它时 x 为复根, 大于它时 x 为实根, 并且在计及更高级的修正项时重根情况又将自动消除。看来, 在近似到 i_1 的更高幕次近似下, 上述情况将反复出现。由于 x 为复根时, 在 $i_0 - \bar{v}$ 特性曲线上将出现电流阶跃, 所以 x 出现重根(在一般情形下应改为 s 的两根之差等于整数)下的 i_0 值将把 $i_0 - \bar{v}$ 特性曲线分割为两段光滑曲线, 在连接处导数 $d\bar{v}/di_0$ 是不连续的。另外需要指出, s 的两根之差为整数时(包括相等), 人们只能求得一组独立的 s, a_n 。另一个解需用朗斯基行列式来求得。但是从上面的讨论中可以看出, 如果我们用近似方法来算得 x 的根时, 这个情况在实际上是不必考虑的。

2. $n = 1$ 时的电流阶跃高度

为了计算 $n = 1$ 的电流阶跃高度, 须要考虑 $\bar{i}_0 > 1$ 。此时零级近似下的两个根都是实根, 分别等于

$$x_0 = \bar{i}_0 - (\bar{i}_0^2 - 1)^{1/2}, \quad (34)$$

$$\bar{x}_0 = \bar{i}_0 + (\bar{i}_0^2 - 1)^{1/2}. \quad (35)$$

当 $\bar{i}_0$ 等于 $(Q^2 + 1)^{1/2}$ 时, $(\bar{i}_0^2 - 1)^{1/2} = Q$, 此时两根之差等于 $2Q$, 相应于 s 的两根之差等于整数 1。可以预期当 i_0 处在它的邻近时将出现复根。计算表明复根将体现在 i_1 的一次幕上, 为此下面的计算将只限于近似到 i_1 一次幕。先来求解根

$$x_0 = \bar{i}_0 - Q \quad (36)$$

的一级修正项。注意到

$$(x_0 + 2Q)^2 - 2\bar{i}_0(x_0 + 2Q) + 1 = x_0^2 - 2\bar{i}_0x_0 + 1 = 0, \quad (37)$$

由 (23) 式给出的准确到最低幕次的 a_1 为

$$a_1 = \frac{i_1 x}{(x + 2Q)^2 - 2\bar{i}_0(x + 2Q) + 1} = \frac{i_1(\bar{i}_0 - Q)}{2Qx_1 - 2(\bar{i}_0 + Q)\Delta i_1}. \quad (38)$$

把 (38) 式代入 (22) 式, 同时考虑到 $a_{-1} \sim i_1$, 所以近似到 i_1 一次幕下的 (22) 式变为

$$x_0^2 - 2\bar{i}_0x_0 + 1 + 2x_0x_1 - 2\bar{i}_0x_1 - 2x_0\Delta i_1 - \frac{i_1^2(x_0 + 2Q)(\bar{i}_0 - Q)}{2Qx_1 - 2(\bar{i}_0 + Q)\Delta i_1} = 0. \quad (39)$$

考虑到 (36) 和 (37) 式, 经过简单的运算, (39) 式变为

$$4Q^2x_1^2 - 8Q^2\Delta i_1x_1 - 4(\Delta i_1)^2 + i_1^2 = 0. \quad (40)$$

不难验证, 对另一个根 $\bar{x}_0 = \bar{i}_0 + Q$ 来求一级修正项 $\bar{x}_1$, $\bar{x}_1$ 满足的方程也是 (40) 式。从 (40) 式可以看到, 当 $(\Delta i_1)^2$ 满足下式时

$$(\Delta i_1)^2 < i_1^2/4(Q^2 + 1),$$

或者 Δi_1 满足下式时

$$-\frac{i_1}{2(Q^2+1)^{1/2}} < \Delta i_1 < \frac{i_1}{2(Q^2+1)^{1/2}}, \quad (41)$$

(40) 式的两个根 x_1 和 $\bar{x}_1$ 是复根, 分别等于

$$x_1 = \Delta i_1 - \frac{j}{2Q} [i_1^2 - 4(Q^2+1)(\Delta i_1)^2]^{1/2}, \quad (42)$$

$$\bar{x}_1 = \Delta i_1 + \frac{j}{2Q} [i_1^2 - 4(Q^2+1)(\Delta i_1)^2]^{1/2}. \quad (43)$$

由于出现复数根时将出现电流阶跃, 根据 (41) 式可知 $n=1$ 时, 近似到 i_1 一次幂时的电流阶跃高度等于

$$i_1/(Q^2+1)^{1/2}, \quad (44)$$

此时相应的平均电压 $\bar{v}$ 为

$$\bar{v} = i_0 - 2Q \operatorname{Re} s_2 = \bar{i}_0 + \Delta i_1 - \operatorname{Re}(x_0 + x_1) = Q. \quad (45)$$

四、任意 i_1 下的电流阶跃高度

从上节可知, 当 $i_1 \ll 1$ 时, 可以用把各量按 i_1 幂展开的方法来求得根 x , 同时求得电流阶跃高度. 从实际的展开过程所得结果看来, 展开是按 i_1/Q 幂来进行的. 所以当 i_1/Q 变得与 1 相差不大时, 收敛可能是很慢的, 甚至会发散的. 因此在任意 i_1 下, 求根 x 和电流阶跃高度应该直接求解 (22) 式.

为了求得任意 i_1 下的阶跃高度, 只要算出分界点 i_0 值即可, 因为正是这个分界点的 i_0 值处在电流阶跃的端点. 我们知道, 当平均电压 $\bar{v}$ 处在某个 nQ 值时, 作为 i_0 的函数 x 具有复根, 随着 i_0 的增大(或减小), x 的虚部将逐渐变小而趋向于零, 此时 i_0 值就达到了分界点. 根据以上的讨论可知, 在 $\bar{v} = nQ$ 时对应于 x 为实根的 i_0 应该就是分界点. 所以第 n 个电流阶跃的端点满足以下两个条件.

i) x 的虚部趋向于零, x 变为实根;

ii) 其平均电压 $\bar{v}$ 等于 nQ , 根据 (18) 式有

$$\bar{v} = i_0 - 2Q \operatorname{Re} s_2 = i_0 - x = nQ. \quad (46)$$

利用 (46) 式, 把 $x = i_0 - nQ$ 代入 (22) 式, 得到 i_0 为分界点值时的方程

$$(i_0 - nQ)^2 - 2i_0(i_0 - nQ) + 1 - i_1[i_0 - (n-2)Q]a_1 - i_1[i_0 - (n+2)Q]a_{-1} = 0. \quad (47)$$

上式中的 a_1 和 a_{-1} 仍然由 (23) 和 (24) 式表示, 其中的 x 也要用 $i_0 - nQ$ 代入, 所以

$$a_1 = \frac{i_1(i_0 - nQ)}{(i_0 - nQ + 2Q)^2 - 2i_0(i_0 - nQ + 2Q) + 1 - \frac{i_1^2(i_0 - nQ + 4Q)(i_0 - nQ + 2Q)}{(i_0 - nQ + 4Q)^2 - 2i_0(i_0 - nQ + 4Q) + 1 - \dots}}, \quad (48)$$

$$a_{-1} = \frac{i_1(i_0 - nQ)}{(i_0 - nQ - 2Q)^2 - 2i_0(i_0 - nQ - 2Q) + 1 - \frac{i_1^2(i_0 - nQ - 4Q)(i_0 - nQ - 2Q)}{(i_0 - nQ - 4Q)^2 - 2i_0(i_0 - nQ - 4Q) + 1 - \dots}}. \quad (49)$$

把(48)和(49)式代入(47)式,我们就得到一个有关 i_0 的代数方程。其中出现三个参变量 n , Q 和 i_1 , n 代表阶跃的序数, Q 为辐射场的规一化频率, i_1 为辐射场的规一化电流强度。

图2和图3是我们用数值计算解得的 i_0 依赖于 i_1 的关系。图2相应于 $Q=1$ 。图2(a)是 $n=0$ 时 i_0 依赖于 i_1 的关系,我们在图中只画出了 i_0 等于正根时的曲线, i_0 值就是 $n=0$ 时的电流阶跃高度。从(47)至(49)式不难看出,在 $n=0$ 时,如果 i_0 是方程的根,那么 $(-i_0)$ 也是方程的根,所以与此相应的曲线就没有在图上画出来。图2(c)是 $n=1$ 时 i_0 依赖于 i_1 的关系,在给定的 i_1 下,存在两个根 i_0 ,相应于两个分界点。我们知道当

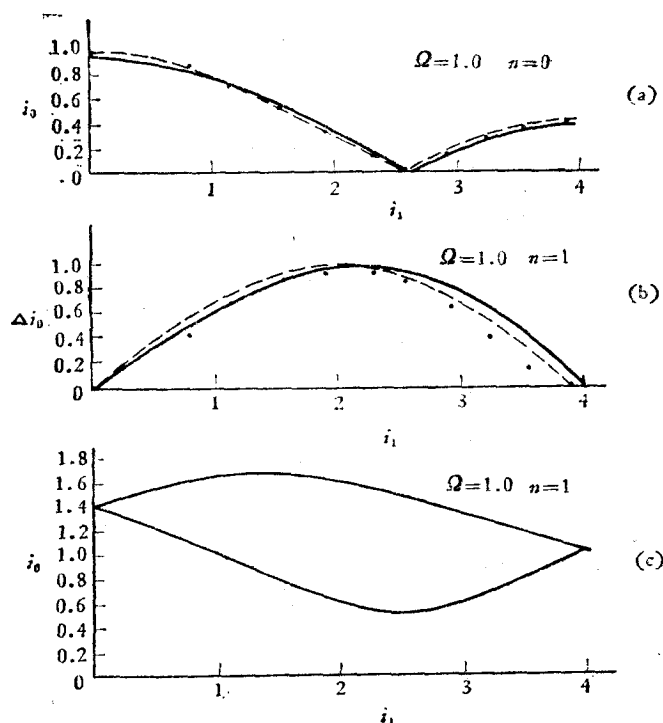


图2 (a)和(c)是分界点的 i_0 值依赖于 i_1 的关系;(b)中的实线是根据(c)中两条实线之差画得;图中的实线是本文用数值计算的结果;黑点是Harris和Laibowitz的实验数据;虚线是Russer的计算结果(二者都引自文献[14])

所加直流电流处在两个分界点之内时, x 为复数根,这相应于出现电流阶跃的情况。所以两个分界点之间的距离即是 $n=1$ 时的电流阶跃高度。 $n=1$ 时电流阶跃高度依赖于 i_1 的关系画在图2(b)上。图3相应于 $Q=0.4$ 的情形。

为了把所计算的结果与实验进行比较,在图2(a)(b)和图3(a)(b)上标上了Harris和Laibowitz的实验数据^[14]。从图上可以看出,我们的结果与Harris等人的实验数据是符合得好的。另外,我们亦在图上画出Russer用模拟计算机的计算结果^[4],以资对照。

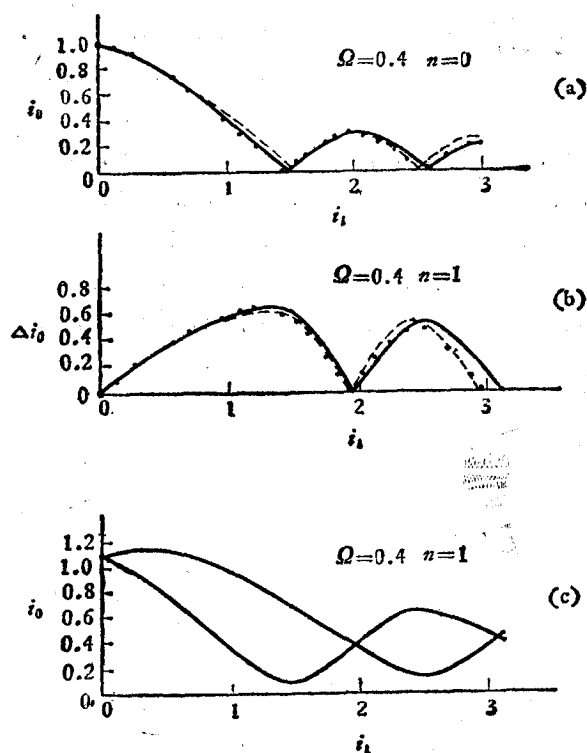


图3 图例说明同图2

参 考 文 献

- [1] A. H. Dayem, J. J. Wigand, *Phys. Rev.*, 155 (1967), 419; C. C. Grimes, S. Shapiro, *Phys. Rev.*, 169 (1968), 397.
- [2] R. L. Richards, F. Auracher, T. V. Duzer, *Proc. IEEE*, 61 (1973), 36.
- [3] D. E. Mc. Cumber, *J. Appl. Phys.*, 39 (1968), 3113.
- [4] P. Russer, *J. Appl. Phys.*, 43 (1972), 2008.
- [5] C. A. Hamilton, *J. Appl. Phys.*, 44 (1973), 2371.
- [6] H. Kanter, F. L. Vernon, Jr., *J. Appl. Phys.*, 43 (1972), 3174.
- [7] A. N. Vystavkin *et al.*, *Rev. Appl. Phys.*, 9 (1974), 79.
- [8] M. T. Levinsen, B. T. Ulrich, *IEEE. Trans. Mag.*, MAG-11 (1975), 807.
- [9] 姚希贤, *物理学报*, 27 (1978), 559.
- [10] A. Gray, T. M. MacRobert, *Bessel Functions and Their Applications to Physics* (1931).
- [11] M. T. Renne, D. Polder, *Rev. Phys. Appl.*, 9 (1974), 25.
- [12] D. B. Sullivan *et al.*, *J. Appl. Phys.*, 41 (1970), 4865.
- [13] D. G. Dempsey, M. T. Levinsen, B. T. Ulrich, *IEEE. Trans. Mag.*, MAG-11 (1975), 811.
- [14] E. P. Harris, R. B. Laibowitz, *IEEE. Trans. Mag.*, MAG-13 (1977), 724.

THE CURRENT STEPS IN SUPERCONDUCTING WEAKLINKS

YAO XI-XIAN

(Department of Physics, Nanjing University)

ABSTRACT

In the presence of a battery source and a radiation field, a superconducting weaklink can be represented by a simplified model consisting of a resistance shunted Josephson junction driven by a constant current source. Using such a model, we give a general criterion for the occurring of constant voltage current steps in the current-voltage characteristics of the weaklink. Following this criterion, we have also discussed the absence of sub-harmonic current steps. For the case while the radiation field is very weak, the current step heights are calculated by perturbation method. The current step heights are also obtained by numerical computation for the case of strong field.