第29卷 第8期 物 理 学 报 Vol. 29, No. 8
1980 年 8 月 ACTA PHYSICA SINICA Aug., 1980

阻尼谐振子的量子力学处理

彭 桓 武
(中国科学院理论物理研究所)

1979 年 11 月 28 日收到

提 要

本文假设量子力学中也允许引入阻尼力的描述，给出对与速度成正比的阻尼系统用正则化变换的处理方法，以一维谐振子为例作了具体计算．结果与经典力学比较表明是合理的．

用经典力学处理多自由度系统时，常唯象地引入阻尼力以描述能量从某特定自由度向其它多个自由度的耗散．未知在量子力学中是否根本不允许这种描述．至少在用单自由度近似处理多自由度问题时，类似的描述似乎值得注意．姑且允许这种描述并设阻尼力与速度成正比，本文以一维阻尼谐振子为例探讨其量子力学处理方法．

以振子的物理变量(位移 x，动量 p) 表达，一维阻尼谐振子的运动方程为

$$\dot{x} = p/M, \quad \dot{p} = -Cp/M - Kx + f(t), \tag{1}$$

式中常数 M，C，K 分别为振子质量，阻尼力与振子速度的比值，恢复力与振子位移的比值，而外力 $f(t)$ 则为时间 t 的任意函数．作量子力学处理时，在海森堡图象中，运动方程形式(1)不变，但 x 与 p 则理解为非对易量，它们将满足某一定的对易关系，也就是量子化条件．我们注意，从(1)式可推出

$$\frac{d}{dt}(xp - px) = \dot{x}p - p\dot{x} + x\dot{p} - \dot{p}x = -\frac{C}{M}(xp - px),$$

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{p}}{\partial p} = -\frac{C}{M}. \tag{2}$$

当有阻尼 $C \neq 0$ 时，后式表明 x 与 p 在经典力学中不再构成正则共轭变量，前式表明通常的量子化条件即正则对易关系必须修改．很可能修改为下列阻尼对易关系：

$$xp - px = i\hbar e^{-Ct/M}, \tag{3}$$

因为这满足(2)式，因而与运动方程(1) 相容，并当 $C = 0$ 时(无阻尼时 x 与 p 构成正则共轭变量) 这还原为通常的正则对易关系．这启示我们考虑从非正则变量 x 与 p 到正则共轭变量 X 与 P 的变换(我们称这种变换为正则化变换)．我们要求对于正则变量有正则对易关系

$$XP - PX = i\hbar \tag{4}$$

和哈密顿正则方程

$$\dot{X} = \frac{\partial H}{\partial P} = \frac{XH - HX}{i\hbar}, \quad \dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial X} = \frac{PH - HP}{i\hbar}. \tag{5}$$

不难验证，对于运动方程(1)，的确存在这种变换，如

$$x = Xe^{-Ct/2M},\ p = (P - CX/2)e^{-Ct/2M}, \tag{6}$$

其相应的哈密顿量为

$$H = \frac{1}{2M}P^2 + \frac{1}{2}\left(K - \frac{C^2}{4M}\right)X^2 - Xf(t)e^{Ct/2M}. \tag{7}$$

从(6)和(4)式便得到(3)式．正则化变换允许任意正则变换，我们已利用这点，选择(6)式，使(7)式尽量简单．通过正则化变换，即可沿用通常的量子力学处理．

作具体计算时，从上面的海森堡图象转换到薛定谔图象更为方便．解薛定谔波动方程

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H\Psi, \tag{8}$$

求得 $\Psi = \Psi(X, t)$ 后，对于任何物理量，譬如振子的位移 x 之类，通过正则化变换以正则变量表示之(系数明显依赖于 t)，再利用波函数计算其统计平均值以与实验测量值比较，譬如

$$\bar{x}(t) = \frac{\int \Psi^*(X, t)Xe^{-Ct/2M}\Psi(X, t)dX}{\int \Psi^*(X, t)\Psi(X, t)dX}.$$

在阻尼不足 ($C^2 < 4MK$) 的情况，令

$$K - \frac{C^2}{4M} = M\Omega^2 > 0, (\Omega \text{ 为实数}).$$

不妨取单位使 $\hbar = M = \Omega = 1$ (复原这些因子时可从物理量的量纲定出)．如果取 X 与 P 的线性组合作为变量("$*$"对算符表示厄米共轭)

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - iP),\quad \xi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + iP);$$

即

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \xi^*),\ P = \frac{1}{\sqrt{2}}(i\xi - i\xi^*); \tag{9}$$

则对易关系(4)式化为

$$\xi^*\xi - \xi\xi^* = 1, \tag{10}$$

而哈密顿量(7)式化为

$$H = \xi\xi^* + \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \xi^*)f(t)e^{Ct/2}. \tag{11}$$

在 ξ-表象中，ξ^* 可以看作向右作用的对 ξ 的微分算符，薛定谔方程(8)化为一阶方程：

$$-\frac{\partial\Psi}{i\partial t} = \left[\xi\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi + \frac{\partial}{\partial\xi}\right)f(t)e^{Ct/2}\right]\Psi. \tag{12}$$

设外力从 $t = 0$ 时刻起开始作用．在 $t \leqslant 0$ 区间，$f(t) = 0$，(12)式的解可以表达为定态解的线性叠加，系数 a_n 为常数：

$$\Psi(\xi, t) = \sum a_n\Psi_n(\xi, t)\quad (t \leqslant 0); \tag{13}$$

$$\Psi_n(\xi, t) = \phi_n(\xi)e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)t},$$

$$\phi_n(\xi) = \xi^n/\sqrt{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots). \tag{14}$$

注意(14)式构成正交归一系,有标乘积关系[1]

$$\int \Psi_m^*(\xi^*, t)\Psi_n(\xi, t) = \int \phi_m^*(\xi^*)\phi_n(\xi) = \delta_{mn}. \tag{15}$$

在 $t \geqslant 0$ 区间,与(12)式相联系的常微分方程组有两个积分 (C_1 和 C_2 为积分常数):

$$\xi e^{-it} + i\beta = C_1,$$

$$\ln\Psi + \frac{i}{2}t - i\beta^* C_1 - \alpha^* = \ln C_2.$$

此处我们引入了缩写

$$\beta = \int_0^t e^{-iv}\frac{1}{\sqrt{2}}f(v)e^{Cv/2}dv,$$

$$\alpha = \int_0^t e^{-iu}\frac{1}{\sqrt{2}}f(u)e^{Cu/2}du\int_0^u e^{iv}\frac{1}{\sqrt{2}}f(v)e^{Cv/2}dv \tag{16}$$

和其复数共轭. 其间有恒等式

$$\alpha + \alpha^* = \beta^*\beta. \tag{17}$$

将 C_2 表示为 C_1 的任意函数 $C_2 = \phi(C_1)$, 并代回 C_1, C_2, 便得(12)式的通解:

$$\Psi(\xi, t) = e^{-\alpha-\frac{i}{2}t+i\beta^*\xi e^{-it}}\phi(i\beta + \xi e^{-it}) \quad (t \geqslant 0). \tag{18}$$

将这两区的解在其交点 $t = 0$ 处连接,便定出

$$\phi(\xi) = \sum a_n\xi^n/\sqrt{n!}. \tag{19}$$

将(19)式代入(18)式,再对 ξ 展开. 结果可写为

$$\Psi = \sum\sum\Psi_m G_{mn}a_n,$$

其中系数 G_{mn} 与路迳积分计算结果一致[2].

在计算标乘积(O 代表任意物理量)

$$\int \Psi^* O\Psi = \int \Psi^*(\xi^*, t)O(\xi, \xi^*, t)\Psi(\xi, t)$$

时,代入(18)式和其共轭后,不妨理解左右两端各省写了一个单位因子. 我们可以利用对易关系(10)式把 $\Psi^*(\xi^*, t)$ 中的指数因子移到最右侧去,根据 (g 代表任意函数) 下述规则进行:

$$e^{-ib\xi^*}g(\xi, \xi^*) = g(\xi - ib, \xi^*)e^{-ib\xi^*},$$

最右侧的指数因子作用在单位因子上仍为单位因子. 同样把 $\Psi(\xi, t)$ 中的指数因子移到最左侧去而被左端的单位因子吸收. 注意到(17)式得

$$\int \Psi^* O\Psi = \int \phi^*(\xi^* e^{it})O(\xi - i\beta e^{it}, \xi^* + i\beta^* e^{-it}, t)\phi(\xi e^{-it}).$$

再引入作用在 a_n 等系数上的如下定义的算符

$$Aa_n = \sqrt{n}\,a_{n-1},\ a_n^* A^* = a_{n-1}^*\sqrt{n}, \tag{20}$$

则有

$$\xi e^{-it}\phi(\xi e^{-it}) = \sum\sqrt{n}\,a_{n-1}\frac{1}{\sqrt{n!}}(\xi e^{-it})^n = A\phi(\xi e^{-it}).$$

所以，连同上式的共轭，得

$$\int \Psi^* O \Psi = \int \phi^*(\xi^* e^{it}) O((A - i\beta)e^{it},\ (A^* + i\beta^*)e^{-it},\ t)\phi(\xi e^{-it}). \tag{21}$$

注意算符 A 只作用在 a_n 上而与 ξ 无关，所以代入 (19) 式后，标乘积只消用正交归一关系 (15)式即可．最后得

$$\int \Psi^* O \Psi = \sum a_n^* O((A - i\beta)e^{it},\ (A^* + i\beta^*)e^{-it},\ t)a_n. \tag{22}$$

取特例 $O = 1$，则有

$$\int \Psi^* \Psi = \sum a_n^* a_n. \tag{23}$$

对于振子位移 x，相应的 $O(\xi, \xi^*, t)$ 为 $\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \xi^*)e^{-Ct/2}$，得

$$\int \Psi^* x \Psi = \sum a_n^* \frac{1}{\sqrt{2}}[(A - i\beta)e^{it} + (A^* + i\beta^*)e^{-it}]e^{-Ct/2}a_n. \tag{24}$$

将(24)式除以(23)式得振子位移的统计平均值为

$$\bar{x}(t) = \frac{\int \Psi^* x \Psi}{\int \Psi^* \Psi} = \frac{1}{\sqrt{2}}[(\bar{A} - i\beta)e^{it} + (\bar{A}^* + i\beta^*)e^{-it}]e^{-Ct/2}, \tag{25}$$

$$\bar{A} = \frac{\sum a_n^* A a_n}{\sum a_n^* a_n} = \frac{\sum a_n^* \sqrt{n}\, a_{n-1}}{\sum a_n^* a_n},$$

$$\bar{A}^* = \frac{\sum a_n^* A^* a_n}{\sum a_n^* a_n} = \frac{\sum a_{n-1}^* \sqrt{n}\, a_n}{\sum a_n^* a_n} = \bar{A}^*. \tag{26}$$

与外力作用有关的部分，代入缩写的(16)式后，为

$$\begin{aligned}\bar{x}_f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[-i\beta e^{it} + i\beta^* e^{-it}]e^{-Ct/2} \\ &= \int_0^t [e^{-C(t-v)/2}\sin(t - v)]f(v)dv.\end{aligned} \tag{27}$$

这就是经典力学阻尼谐振子运动方程

$$\ddot{x} + C\dot{x} + \left(1 + \frac{C^2}{4}\right)x = f(t) \tag{28}$$

满足始值条件 $t = 0$ 时 $x = 0$，$\dot{x} = 0$ 的特解，它的贡献主要来自当时及前不久的外力策动．将(25)式分为两部分：

$$\bar{x}(t) = \bar{x}_f(t) + \bar{x}_a(t), \tag{29}$$

其另外部分

$$\bar{x}_a(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\bar{A}e^{-it} + \bar{A}^* e^{it}]e^{-Ct/2}, \tag{30}$$

则满足(28)式的齐次方程，相当于补解．如果认为常数 a_n 等描述波函数的始值条件，这部分只依赖于始值条件，并和经典力学处理中的一样，是衰减的．根据量纲恢复 $\hbar$，M，Ω 后(25)式为

$$\bar{x}(t)=\frac{1}{M\Omega}\int_0^t[e^{-C(t-t')/2M}\sin\Omega(t-t')]f(t')dt'$$

$$+\sqrt{\frac{\hbar}{M\Omega}}\,e^{-Ct/2M}\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\sum a_n^*\sqrt{n}\,a_{n-1}}{\sum a_n^* a_n}e^{i\Omega t}+*\right]. \tag{31}$$

注意在量子处理中，因子 $\sqrt{\hbar}\,e^{-Ct/2M}$ 与算符 A 结合出现，这表明量子效应与始值条件相联系，并且总是衰减的.

对于其它物理量，譬如振子的动量 p，振子的总能量 $E=p^2/2M+Kx^2/2$，振子耗散功率 $\mathscr{P}_C=Cp^2/M^2$，外力作功功率 $\mathscr{P}_f=f(t)p/M$ 等，可同样地求其统计平均值. 结果可以由(31)式推出，例如

$$\bar{p}(t)=M\frac{d}{dt}\bar{x}(t)$$

$$=\int_0^t\left[e^{-C(t-t')/2M}\left\{\cos\Omega(t-t')-\frac{C}{2M\Omega}\sin\Omega(t-t')\right\}\right]f(t')dt'$$

$$+\sqrt{\hbar M\Omega}\,e^{-Ct/2M}\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(i-\frac{C}{2M\Omega}\right)\bar{A}e^{i\Omega t}+*\right].$$

在计算 $\bar{E}(t)$ 和 $\bar{\mathscr{P}}_C(t)$ 时，将出现下列平均值:

$$\bar{A}^2=\frac{\sum a_n^*\sqrt{n}\sqrt{n-1}\,a_{n-2}}{\sum a_n^* a_n},$$

$$\frac{1}{2}(\overline{AA^*+A^*A})=\frac{\sum a_n^*\left(n+\frac{1}{2}\right)a_n}{\sum a_n^* a_n},$$

而与这结合将有因子 $\hbar e^{-Ct/M}$ 出现. 注意零点振动能(这是量子效应)也受阻尼而衰减.

我们的哈密顿量比文献[3,4]中的简单，计算容易，解释也无困难，这表明对具有正则化变换的阻尼系统是可以作量子力学处理的.

参 考 文 献

[1] P. A. M. Dirac. *Proc. Roy. Soc. London*, **180**(1942), 1, H. W. Peng. *Proc. Roy. Irish Acad.*, **51A8**(1947), 113.

[2] R. P. Feymann and A. R. Hibbs, "Quantum Mechanics and Path Integrals", McGraw-Hill, (1965) p. 234.

[3] H. Feshbach and Y. Tikochinsky, Contribution to a Festschrift for I. I. Rabi, ed. by L. Motz (New York Acad. of Sciences, New York, 1977).

[4] D. M. Greenberger, *J. Math. Phys.*, **20**(1979), 762; D. C. Khandekar and S. V. Lawande, *J. Math. Phys.*, **20**(1979), 1870.

QUANTUM MECHANICAL TREATMENT OF A DAMPED HARMONIC OSCILLATOR

PENG HUAN-WU

(Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

Assuming a damping force proportional to the velocity, it is shown that the usual quantum condition between the physical variables, namely the displacement and the momentum, has to be modified by the damping. However, it is possible to change to new variables which are canonical. Then we can apply the usual quantum mechanics and use the usual physical interpretation through the statistical average values. The case of a one-dimensional damped harmonic oscillator under the action of an arbitrary external force has been worked out as an example. No difficulty arises and the results are reasonable.