

反常耗散对俘获粒子模的影响

夏 蒙 芬

(北京大学物理系)

1980 年 2 月 7 日收到

提 要

本文分析了随机磁场和静电湍流引起的反常耗散效应对耗散俘获粒子模的影响。结果表明,这种反常耗散效应可以抑制耗散俘获电子不稳定性 and 耗散俘获离子不稳定性。这为 PLT 的实验结果提供了一种可能的解释。

一、引 言

在各种俘获粒子不稳定性中,人们首先关心的是耗散俘获电子不稳定性与耗散俘获离子不稳定性^[1]。这是因为理论上预期当托卡马克装置的温度进一步提高进入俘获粒子区时,将会激发这些模式,并可导致强烈的反常输运过程。

但是,PLT 装置已经使等离子体深深地进入俘获粒子区,然而并未出现联系于俘获粒子模的输运规律^[2],这个结果是令人鼓舞的,但其原因尚不十分清楚。

另一方面,托卡马克中的等离子体内始终存在着比经典输运强得多的反常输运过程。这对俘获粒子模会有什么影响呢?这就是本文所要讨论的问题。

在通常的耗散俘获粒子模中,碰撞耗散起着基本的作用。可以设想,反常输运也可对俘获粒子模的波场起耗散作用。当这种反常耗散效应足够强时,将会改变色散关系。本文的结果表明,反常耗散效应可以抑制耗散俘获粒子不稳定性,从而为 PLT 的实验结果提供了一种可能的解释。

二、反常耗散效应

反常输运可通过不同的方式对波发生影响。粒子的零级轨道将受到随机性扰动,这会影响波与粒子之间的共振效应,同时还可产生类似于有限迴旋半径效应的作用;波场中密度扰动引起的梯度将导致反常扩散过程,这也会对波的电荷平衡发生影响。本文将讨论波场中的反常扩散效应对耗散俘获电子模和耗散俘获离子模的影响。

假定反常扩散过程可以近似地用一准稳态的局域的横向(即垂直于磁场方向)扩散系数 D_i 描写(i 标志等离子体中不同的成分),则衡量反常耗散与碰撞耗散的相对强度的参量为

$$b_i = k_{\perp}^2 D_i / \nu_{\text{eff}i} \quad (1)$$

我们把 b_i 称为反常耗散参量, $k_\perp$ 是横向波数, $\nu_{i\text{eff}}$ 是有效碰撞频率. 横向波长越短, 则反常耗散越强. 若估计 $k_\perp \sim \rho_i^{-1}$, (ρ_i 是离子平均回旋半径), 则

$$b_i \sim D_i / (\rho_i^2 \nu_{i\text{eff}}), \quad b_e \sim D_e / \left(\rho_e^2 \frac{m_i}{m_e} \nu_{e\text{eff}} \right).$$

在实际情形中, 经常有 $b_i \gtrsim 1$, 即反常耗散与碰撞耗散可比. 因而, 反常耗散可能起重要作用.

反常扩散可起源于静电湍流. 这种情形中, 扩散是自动双极的: $D_e = D_i$, 记为 D_a . 由于 $\nu_{e\text{eff}} \gg \nu_{i\text{eff}}$, 故有 $b_e \ll b_i$. 因此, 这种反常耗散将主要影响离子成分.

反常扩散还可由随机磁场^[3-5]引起, 其平均输运系数为 $D_i \sim D_0 \nu_i$ (D_0 是描写随机磁场的参量, ν_i 为平均热速度). 随机磁场引起的扩散不是自动双极的. 在稳态的输运问题中, 由于形成了双极电场而使电子扩散降至离子扩散的水平. 在这种情况下, $D_0 \nu_e$ 是标志电子热导的, 而扩散以 $D_0 \nu_i$ 衡量. 在一般的条件下, 可能有 $D_0 \nu_e > D_a > D_0 \nu_i$, 稳态扩散由 D_a 决定. 但在波场中, 扰动电场与扰动密度梯度之间的关系与稳态输运的情形不同. 在这种情形下, 虽然扰动电场可与扰动密度梯度有同量级的贡献, 但是, 电子扩散水平仍以 $D_0 \nu_e$ 标志, 并不降至离子扩散的水平. 于是, 电子和离子的反常耗散参量 b_e 与 b_i 具有相同的量级, 故电子和离子的反常耗散效应同样是重要的.

我们曾导出一个描写随机磁场中的等离子体的动力学方程^[5], 它比通常的动力学方程多一项 $S_i(f_i)$:

$$\begin{aligned} S_i(f_i) = & \left(v_\parallel \frac{\partial}{\partial y} + a_i \frac{\partial}{\partial v_\parallel} \right) \frac{D_0 a_i v_\parallel}{2(v_\parallel^2 + v_{0i}^2)^{3/2}} f_i \\ & + \left(v_\parallel \frac{\partial}{\partial y} + a_i \frac{\partial}{\partial v_\parallel} \right) \left(v_\parallel \frac{\partial}{\partial y} + a_i \frac{\partial}{\partial v_\parallel} \right) \frac{D_0}{(v_\parallel^2 + v_{0i}^2)^{1/2}} f_i. \end{aligned} \quad (2)$$

这里, 为简单起见, 假定了只有磁场的 y 分量有随机性, 磁场的平均方向在 z 方向, 而 x 方向是指零级梯度方向. 在 (2) 式中, $v_\parallel$ 是平行于磁力线的速度分量; $a_i = Z_i e E / m_i$ 是联系于横向扰动电场的加速度 (Z_i 与 m_i 为粒子的电荷数与质量, 对电子 $Z_e = -1$); v_{0i} 是与碰撞效应及随机磁场有关的参量, $v_{0i} \ll v_i = \sqrt{3T_i/m_i}$.

(2) 式适用于准稳态局域输运过程. 令随机磁场的特征关联时间为 t_s , 特征关联长度为 L_s , 则运用 (2) 式要求 t_s 和 L_s 小于所考虑的问题中的特征时间和沿磁力线的特征长度. 由于 t_s 与 L_s 一般很小, 对于象俘获粒子模这种低频模式的波场, 我们假定 (2) 式是适用的. 对于俘获粒子的扩散, 还要求 L_s 小于两反转点之间磁力线的长度. 假定对于大多数俘获粒子来说, 这条件也是满足的. 这时, $v_\parallel$ 代表在 L_s 长度内的平均值.

在讨论反常耗散效应对波的影响时, 将只考虑相应模式的最基本的因素, 略去其它各种复杂的效应.

三、耗散俘获离子模

当不考虑反常耗散时, 耗散俘获离子模的色散关系为^[1]

$$\omega = \frac{\epsilon^{1/2}}{(1 + \Delta)} \omega_* + i \left(\frac{\epsilon^2 \omega_*^2}{(1 + \Delta)^2 \bar{\nu}_e} - \frac{\bar{\nu}_i}{\epsilon} \right). \quad (3)$$

这是强耗散的情形: $\bar{\nu}_e > \epsilon^{3/2} \omega_*$. 其中 $\Delta = T_e/T_i$, $\epsilon = r/R$ 为纵横比, $\bar{\nu}_i$ 为平均碰撞频率, 而

$$\omega_* = \frac{-k_y c T_e}{e B_0} \frac{1}{r_0} \frac{dr_0}{dx}. \quad (4)$$

由 (3) 式可确定一个临界碰撞频率 ν_{c_0} , 当 $\Delta = 1$ 时有

$$\nu_{c_0} = \frac{1}{2} \epsilon^{3/2} \omega_* \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/4}. \quad (5)$$

不稳定性只出现于 $\bar{\nu}_e < \nu_{c_0}$ 的情形.

当考虑随机磁场扩散效应后, 对于强耗散情形

$$\bar{\nu}_e + \epsilon^{3/2} k_y^2 D_0 \nu_e > \epsilon^{3/2} \omega_*, \quad (6)$$

得到色散关系近似为

$$\begin{aligned} \omega \cong & \frac{\epsilon^{1/2} \omega_*}{(1 + \Delta)} \left[\frac{1}{1 + \frac{\epsilon^{3/2} k_y^2 D_0 \nu_e / 6 \epsilon^{1/2}}{(1 + \Delta)(\bar{\nu}_e + \epsilon^{3/2} k_y^2 D_0 \nu_e)}} \right] \\ & + i \left\{ \frac{\epsilon^2 \omega_*^2}{(1 + \Delta)^2 (\bar{\nu}_e + \epsilon^{3/2} k_y^2 D_0 \nu_e) \left[1 + \frac{\epsilon^{3/2} k_y^2 D_0 \nu_e / 6 \epsilon^{1/2}}{(1 + \Delta)(\bar{\nu}_e + \epsilon^{3/2} k_y^2 D_0 \nu_e)} \right]^2} \right. \\ & \left. - \frac{\bar{\nu}_i + \epsilon^{3/2} k_y^2 D_0 \nu_i}{\epsilon} \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

假定 $6(1 + \Delta)\epsilon^{1/2} > 1$, 则

$$\omega \cong \frac{\epsilon^{1/2}}{(1 + \Delta)} \omega_* + i \left[\frac{\epsilon^2 \omega_*^2}{(1 + \Delta)^2 (\bar{\nu}_e + \epsilon^{3/2} k_y^2 D_0 \nu_e)} - \frac{\bar{\nu}_i + \epsilon^{3/2} k_y^2 D_0 \nu_i}{\epsilon} \right]. \quad (8)$$

由 (8) 式同样可得到一个临界碰撞频率, 当 $\Delta = 1$ 时,

$$\nu_c = \frac{\epsilon^{3/2} \omega_*}{2} \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/4} - \epsilon^{3/2} k_y^2 D_0 \nu_e, \quad (9)$$

与 (5) 式比较, 看到有

$$\nu_c = \nu_{c_0} - \epsilon^{3/2} k_y^2 D_0 \nu_e. \quad (10)$$

这说明反常耗散效应使临界碰撞频率降低, 不稳定区向碰撞更稀少的区域推移. 而且当反常耗散足够强, 使得

$$k_y^2 D_0 \nu_e > \frac{\omega_*}{2} \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/4}$$

时, 不稳定区消失. 在这个意义上, 可以说反常耗散对耗散俘获离子模起稳定作用.

但当碰撞足够稀少, 耗散以反常扩散为主 ($\bar{\nu}_e < \epsilon^{3/2} k_y^2 D_0 \nu_e$) 时, 色散关系为

$$\omega \cong \frac{\epsilon^{1/2}}{(1 + \Delta)} \omega_* + i \left[\frac{\epsilon^{1/2} \omega_*^2}{(1 + \Delta)^2 k_y^2 D_0 \nu_e} - \epsilon^{1/2} k_y^2 D_0 \nu_i \right]. \quad (11)$$

此式形式与 (3) 式相似, 表明不稳定性可被反常耗散所驱动, 不稳定性出现于

$$k_y^2 D_0 \nu_e < \frac{\omega_*}{(1 + \Delta)} \left(\frac{m_i \Delta}{m_e} \right)^{1/4}. \quad (12)$$

由以上可以看出,对耗散俘获离子模来说,随机磁场引起的反常耗散与碰撞耗散有相似的作用,在(8)式中二者处于并列的地位. 碰撞效应是使俘获粒子与飞行粒子之间发生转变,其趋势是向平衡分布弛豫. 而在俘获离子模中随机磁场的主要效应也是向平衡分布弛豫,因此其作用与碰撞相同. 但由于耗散俘获离子模的横向波长一般较长($k_y \rho_i < 1$),这种反常耗散效应一般是比较弱的.

当 $D_a > D_0 v_i$ 时,对耗散俘获离子模来说,静电湍流引起的反常耗散比随机磁场效应更重要. 此时,只须考虑离子的反常耗散,电子的反常耗散可略去. 这种反常耗散的作用与碰撞耗散不同,相应色散关系为(假定 D_a 与 v 无关)

$$\omega \cong \frac{\epsilon^{1/2} \omega_*}{(1 + \Delta)} + i \left[\frac{\epsilon^2 \omega_*^2}{(1 + \Delta)^2 \bar{v}_e} - \frac{\bar{v}_i}{\epsilon} - k_y^2 D_a \right]. \quad (13)$$

由(13)式看出,这种反常耗散提供纯粹的稳定效应. 当 $D_a > D_0 v_i$ 时,它可比随机磁场扩散更有效地抑制耗散俘获离子模. 稳定的一个充分条件可表达为

$$k_y^2 D_a > \epsilon^2 \omega_*^2 / [(1 + \Delta)^2 \bar{v}_e],$$

由(4)式, $\omega_*^2 \sim k_y^2 \rho_e^2 v_e^2 / \epsilon^2 R^2$, 故稳定条件可写成

$$D_a > \frac{\epsilon^{-3/2}}{(1 + \Delta)^2 v_e^*} D_{cp}, \quad (14)$$

其中,

$$D_{cp} = q^2 \rho_e^2 \frac{v_e}{qR}$$

是新经典平台区电子输运系数的量级, q 是安全因子,

$$v_e^* = \bar{v}_e / \left(\frac{\epsilon^{3/2} v_e}{qR} \right)$$

是碰撞参量. 由(14)式看出,稳定条件与 k_y 无关. 对于 $v_e^* \sim 0.1$ 情形,抑制耗散俘获离子模要求 D_a 比 D_{cp} 大两个量级左右,这种可能性是存在的.

四、耗散俘获电子模

当不考虑反常耗散时,色散关系为^[4]

$$\omega \cong \omega_* + i \epsilon^{1/2} \omega_*^2 \eta \left\langle \frac{\left(\frac{m_e v^2}{2T_e} - \frac{3}{2} \right) v_{et}}{\omega_*^2 + v_{et}^2} \right\rangle, \quad (15)$$

其中 $\eta = d \ln T_e / d \ln n_0$, $\langle \cdots \rangle$ 是对麦氏分布平均, v_{et} 是俘获电子的有效碰撞频率,近似有 $v_{et} \sim v_e / \epsilon$, $v_e \cong v_0 v_e^3 / (v_e^3 + v^2)^{3/2}$, 因此有

$$\gamma \cong \epsilon^{3/2} \omega_*^2 \eta \left\langle \frac{\left(\frac{m_e v^2}{2T_e} - \frac{3}{2} \right) v_e}{\epsilon^2 \omega_*^2 + v_e^2} \right\rangle. \quad (16)$$

由于 $\left(\frac{m_e v^2}{2T_e} - \frac{3}{2} \right)$ 的平均值为零,故若乘上一个随 v 增大的函数,则平均值为正,否则为负. v_e 随 v 的增大而下降. 在弱碰撞情形,分母中 v_e 项可略去,所乘因子随 v 增大而下

降,故平均值为负.而在强耗散情形,分母中 $\epsilon^2 \omega_*^2$ 项可略去,所乘因子为 ν_e^{-1} ,随 ν 增大而增大,则平均值为正.因此,当 $\eta > 0$ 时不稳定性出现于强耗散情形:

$$\bar{\nu}_e > \epsilon \omega_*. \quad (17)$$

这种不稳定性也联系于碰撞引起的俘获电子与飞行电子之间的转变,但它并不是决定于向平衡分布弛豫的平均效应,而是取决于耗散效应随 ν 变化的规律.

当存在随机磁场引起的反常耗散时,我们得到色散关系近似为

$$\begin{aligned} \omega \cong \omega_* + i \left\{ \epsilon^{1/2} \omega_*^2 \eta \left\langle \frac{\left(\frac{m_e \nu^2}{2T_e} - \frac{3}{2} \right) (\nu_{et} + k_y^2 D_0 |\nu_{||}|)}{\omega_*^2 + (\nu_{et} + k_y^2 D_0 |\nu_{||}|)^2} \right\rangle \right. \\ \left. - \epsilon^{1/2} \omega_*^2 \left\langle \frac{[k_y^2 D_0 \nu_{||}^2 / (\nu_{||}^2 + \nu_{oe}^2)^{3/2}] \cdot \nu_e^2 / 6}{\omega_*^2 + (\nu_{et} + k_y^2 D_0 |\nu_{||}|)^2} \right\rangle \right\}, \end{aligned} \quad (18)$$

其中 $|\nu_{||}|$ 是俘获电子纵向速度绝对值对反跳周期的平均.原则上,存在随机磁场时会对零级分布函数带来修正,因此,(18)式中平均的意义应与(15)式有所不同.但由于随机磁场引起的分布函数畸变主要是在 $|\nu_{||}|$ 大的地方有一定的相对偏离^[5],而此处由于分布函数中的指数因子,其绝对值很小,因而对平均值的贡献是不重要的.对(18)式中的平均仍取为对麦氏分布的平均.由(18)式,近似地可以得到增长率为

$$\begin{aligned} \gamma \cong \epsilon^{3/2} \omega_*^2 \eta \left\langle \frac{\left(\frac{m_e \nu^2}{2T_e} - \frac{3}{2} \right) (\nu_e + \epsilon^{3/2} k_y^2 D_0 |\nu|)}{\epsilon^2 \omega_*^2 + (\nu_e + \epsilon^{3/2} k_y^2 D_0 |\nu|)^2} \right\rangle \\ - \epsilon^2 \omega_*^2 \frac{k_y^2 D_0 \nu_e / 6}{\epsilon^2 \omega_*^2 + (\bar{\nu}_e + \epsilon^{3/2} k_y^2 D_0 \nu_e)^2}, \end{aligned} \quad (19)$$

其中,第二项是随机磁场引起的阻尼项,出现这一项是由于随机磁场引起的耗散并不是向严格的平衡分布弛豫.在第一项中,反常扩散耗散与碰撞耗散处于并列地位,反映了向平衡分布弛豫的效应.但由于两种耗散效应随 ν 的变化趋势是相反的,当 ν 增大时,碰撞耗散减弱而反常扩散耗散增强,因而二者在耗散俘获电子模中的作用并不相同.以下分不同情况讨论.

在弱耗散

$$(\bar{\nu}_e + \epsilon^{3/2} k_y^2 D_0 \nu_e) < \epsilon \omega_* \quad (20)$$

情形,有

$$\gamma \cong \epsilon^{-1/2} \eta \left\langle \left(\frac{m_e \nu^2}{2T_e} - \frac{3}{2} \right) (\nu_e + \epsilon^{3/2} k_y^2 D_0 |\nu|) \right\rangle - \frac{k_y^2 D_0 \nu_e}{6}. \quad (21)$$

相似于得到(17)式时所作的讨论,容易看出,对 $\eta > 0$ 的情形,第一项中碰撞耗散是稳定因素,而反常扩散耗散是不稳定因素.但因还存在一个反常扩散引起的稳定项(第二项),因此,在一般情形下,耗散俘获电子模对弱耗散情形是稳定的.

在强耗散

$$(\bar{\nu}_e + \epsilon^{3/2} k_y^2 D_0 \nu_e) > \epsilon \omega_* \quad (22)$$

情形,有

$$\gamma \cong \epsilon^{3/2} \omega_*^2 \eta \left\langle \frac{\frac{m_e v^2}{2T_e} - \frac{3}{2}}{v_e + \epsilon^{3/2} k_y^2 D_0 |v|} \right\rangle - \frac{\epsilon^2 \omega_*^2 k_y^2 D_0 v_e / 6}{(\bar{v}_e + \epsilon^{3/2} k_y^2 D_0 v_e)^2}. \quad (23)$$

同样可得到当 $\eta > 0$ 时, 碰撞耗散是不稳定因素, 而反常扩散在两项中均提供稳定效应. 分两种情形:

以反常扩散耗散为主的情形 ($\epsilon^{3/2} k_y^2 D_0 v_e > \bar{v}_e$ 及 $\epsilon^{3/2} k_y^2 D_0 v_e > \epsilon \omega_*$) 有

$$\gamma \cong \omega_*^2 \eta \left\langle \frac{\frac{m_e v^2}{2T_e} - \frac{3}{2}}{k_y^2 D_0 |v|} \right\rangle - \frac{\omega_*^2}{6 \epsilon k_y^2 D_0 v_e}. \quad (24)$$

当 $\eta > 0$ 时, 两项均为负, 模是稳定的.

以碰撞耗散为主时 ($\epsilon^{3/2} k_y^2 D_0 v_e < \bar{v}_e$ 及 $\bar{v}_e > \epsilon \omega_*$) 是唯一可能出现不稳定性的情形, 此时

$$\gamma \cong \epsilon^{3/2} \omega_*^2 \eta \left\langle \frac{\frac{m_e v^2}{2T_e} - \frac{3}{2}}{v_e} \right\rangle - \frac{\epsilon^2 \omega_*^2}{6 \bar{v}_e^2} k_y^2 D_0 v_e. \quad (25)$$

上式第一项是无反常耗散时的增长率, 近似为 $\frac{\epsilon^{3/2} \omega_*^2 \eta}{\bar{v}_e}$, 而第二项是反常耗散引起的阻尼效应. 这时, 出现不稳定性的必要条件是

$$\bar{v}_e > \frac{1}{6 \eta \epsilon} \epsilon^{3/2} k_y^2 D_0 v_e. \quad (26)$$

与 $D_0 = 0$ 时的不稳定区 $\bar{v}_e > \epsilon \omega_*$ 比较, 可以看到当反常耗散足够强, 使

$$k_y^2 D_0 v_e > 6 \eta \epsilon^{1/2} \omega_* \quad (27)$$

时, 不稳定区缩小. 由于在俘获电子区有

$$\bar{v}_e < \epsilon \omega_b = \epsilon^{3/2} v_e / qR, \quad (28)$$

ω_b 是俘获电子平均反跳频率. 由 (26) 式与 (28) 式可得到反常耗散效应使耗散俘获电子模完全稳定的条件是

$$k_y^2 D_0 v_e > 6 \eta \epsilon \frac{v_e}{qR}. \quad (29)$$

由于耗散俘获电子模增长最快的是短波模 ($k_y \rho_i \gtrsim 1$), 稳定条件 (29) 式是可能满足的. 以 $k_y \sim \rho_i^{-1}$ 估计, (29) 式可写成

$$D_0 v_e > \left(\frac{6 \eta \epsilon}{q^2} \frac{m_i}{m_e} \right) D_{cp}, \quad (30)$$

$D_{cp} = q^2 \rho_e^2 v_e / qR$ 是新经典电子平台区输运系数的量级. 一般有 $\left(\frac{6 \eta \epsilon}{q^2} \frac{m_i}{m_e} \right) \sim 10^2$. 前面已指出, $D_0 v_e$ 标志电子反常热导的输运系数. 在实验上, 达到 (30) 式所要求的反常倍数是可能的.

五、结 论

本文分析了反常耗散效应对耗散俘获离子模与耗散俘获电子模的影响. 结果表明,

除在碰撞很稀少的情形下,随机磁场的反常扩散耗散可激发耗散俘获离子模外,一般条件下,反常耗散对俘获粒子模均起稳定作用. 对耗散俘获离子模而言,静电湍流引起的自动双极的反常扩散可能是主要的耗散机制,有重要的稳定作用. 而对耗散俘获电子模,随机磁场引起的反常扩散可能是主要的反常耗散机制,有重要的稳定作用. 在托卡马克的实验条件下,虽然存在着多种复杂的因素,但反常输运现象一般都是相当强的,因此,总是存在着反常耗散对耗散俘获粒子模的重要的稳定效应. 耗散俘获粒子模可能基本上被反常耗散机制所抑制. 这就为 PLT 的实验结果提供了一种可能的解释.

参 考 文 献

- [1] B. B. Kadomtsev, O. P. Pogutse, *Nucl. Fusion*, 11(1971), 67.
- [2] H. Eubank *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, 43(1979), 270.
- [3] T. H. Stix, *Nucl. Fusion*, 18(1978), 353.
- [4] A. B. Rechester, M. N. Rosenbluth, *Phys. Rev. Lett.*, 40(1978), 38.
- [5] 夏蒙芬、胡慧玲,物理学报,29(1980),1254.

THE EFFECTS OF ANOMALOUS DISSIPATION ON THE DISSIPATIVE-TRAPPED-PARTICLE MODES

XIA MENG-FEN

(Department of Physics, Peking University)

ABSTRACT

In this paper the effects of anomalous dissipative effects on the dissipative-trapped-particle modes are discussed. The results show that the dissipative-trapped-electron mode and the dissipative-trapped-ion mode can be stabilized by the anomalous dissipative effects.