

# 非线性电子磁漂移波

章 扬 忠

(中国西南物理研究所)

1981年4月24日收到

## 提 要

本文采用重整化方法处理了无剪切磁场漂移近似下的非线性电子磁漂移波,并分析了它与托卡马克电子反常输运之间的关系。所得到的扩散系数  $D_{\perp} \sim (\omega_{pe} T_e / c B_0 L_n k_{\perp}^2)$  与现有托卡马克实验结果大致符合。

## 一、引 言

托卡马克上所出现的电子反常热传导是长期以来未予解决的一个难题<sup>[1]</sup>。这个问题对于未来堆条件下托卡马克的重要意义是众所周知的<sup>[2]</sup>。通常认为,电子反常热传导是由等离子体的集体相互作用所引起。作为一种简单的考虑,人们起先集中了较大的力量来研究静电波,特别是托卡马克中的静电漂移不稳定性所导致的电子反常热传导问题<sup>[3]</sup>。但是自1978年以来,由于认识到剪切磁场对静电漂移波的稳定作用之后<sup>[4]</sup>,发现仅在某些特殊情况下才能使这种漂移波得到激发<sup>[5]</sup>。因而人们又开始寻找有可能导致电子反常热传导的新的不稳定机制。Rosenbluth曾建议采用随机磁场模型来处理这个问题<sup>[6]</sup>。不过该模型中所采用的空间随机性磁场究竟是怎样产生的在当时还不很清楚。最近 Drake等人建议<sup>[7-9]</sup>,漂移撕裂模可以导致随机磁场;因而有可能作为导致电子反常热传导的一种机制。他们同时指出,这种模式是在平板位形下导致低频微观不稳定性的为数不多的模式之一<sup>[8]</sup>。但是撕裂模的激发仅对剪切磁场才存在;它的色散关系应由剪切效应产生的边界层内外区解的匹配关系决定,这相当于边界层的整体性处理方式。然而对同样的方程也存在定域性色散关系;所对应的波激发并不一定要求存在剪切磁场。本文把这种波称为电子磁漂移波。

电子磁漂移波与托卡马克上所出现的电子反常热传导之间的关系可以通过以下的物理讨论来理解。最简单的方式即是采用随机行走模型。设涨落电场为  $\tilde{E}$ , 那末在恒定磁场  $B_0$  中粒子的电漂移速度为  $v_D = (c\tilde{E}_{\perp}/B_0)$ 。粒子在涨落场中的随机行走频率  $\nu_s = (\delta t)^{-1}$ , 对应的行走步长则为  $\delta r \sim (c\tilde{E}_{\perp}/B_0\nu_s) = (c\tilde{E}_{\perp}/B_0)\delta t$ 。随机行走导致粒子扩散系数  $D_{\perp} \sim (\delta r)^2/(\delta t) \sim (c\tilde{E}_{\perp}/B_0)^2\delta t$ 。可以设想粒子受到波峰的一次推动即相当于一次行走,这时  $\delta t$  即为一个粒子漂移一个波长所需的时间,即  $\delta t \sim (B_0/k_{\perp}\tilde{E}_{\perp}c)$ , 代入后即得到

$$D_{\perp} \sim (c\tilde{E}_{\perp}/B_0k_{\perp}). \quad (1.1)$$

如果把(1.1)式直接应用于静电漂移波的情况立即可以看出,它对于电子和离子给出同样的效应. 为说明电子的扩散系数特别大是很难用  $\tilde{E}_\perp$  为静电场来解释的. 但如果把  $\tilde{E}_\perp$  理解为由带电粒子在涨落磁场中所感受到的洛伦兹电场,即  $\tilde{E}_\perp \rightarrow (\tilde{B}v/c)$ , 那末立即可以看出,由于电子和离子的热运动速度不同而导致电子和离子的湍性扩散系数有数量级上的差别. 这时由(1.1)式得到带电粒子在涨落磁场中的扩散系数为

$$D_\perp \sim (\tilde{B}/B_0)(v/k_\perp). \quad (1.2)$$

对托卡马克上的典型数据来说,  $T_e \sim 1\text{keV}$ ,  $k_\perp \sim (1-10)\text{cm}^{-1}$ ,  $(\tilde{B}/B_0) \sim 10^{-4}-10^{-5}$ , 所得到的  $D_\perp \sim 10^4\text{cm}^2/\text{s}$ ; 它与实验上所观察到的数量级相符合. 而  $T_i \leq T_e$  导致离子的湍性扩散系数比电子的小五十倍左右. 如果离子的湍性扩散系数不超过它的新经典输运系数或和其同数量级,那末反常电子热传导就可以得到解释. 这个简单的物理模型向我们启示了在研究电子反常热传导时将只寻求离子运动和静电波的效应为不重要时的解.

另一方面,按照  $D_\perp$  的数量级,对应的湍性碰撞频率  $\Gamma_k \sim k_\perp^2 D_\perp$  将大约在  $10^4-10^6$  Hz 之间的范围. 而一般现有托卡马克上的电子-离子的两体碰撞频率  $\nu_{ei} \sim 10^5\text{Hz}$ . 这个情况之所以重要是因为按照漂移撕裂模的概念<sup>[7]</sup>,即便是处于无碰撞区和半碰撞区之间的电子,由于湍性碰撞的出现,其物理图象也要受到重要的修正. 为处理方便起见,本文仅考虑  $\Gamma_k > \nu_{ei}$  的情况,并把两体碰撞效应略去. 由于有这样高的湍性碰撞频率,在对电子漂移波做非线性处理时必须考虑重整化效应. 这是本文与文献[8]中所做非线性处理的主要不同之处.

## 二、非线性漂移动力方程

由于电磁漂移波的频率  $\omega \sim \omega^*$  远小于电子的迴旋频率,它的波长远大于电子的拉摩半径,故而漂移动力方程是一个很好的近似. 为了说明漂移动力方程的物理意义,这里先给出启发式的推导,然后再用  $(1/B_0)$  展开方法做严格处理.

在漂移近似下,由刘维定理出发,电子导向中心在恒定磁场  $B_0$  中所满足的 Bragov 方程在  $(1/B_0)$  近似下可写为

$$\{\partial_t + v \cdot (\nabla + q\tilde{E}\partial_\epsilon) + p\partial_\epsilon\}f = 0, \quad (2.1)$$

其中  $\partial_t \equiv \partial/\partial t$ ,  $\partial_\epsilon \equiv \partial/\partial \epsilon$ ,  $\epsilon \equiv (mv^2/2)$ ,

$$v = v_\parallel + v_D. \quad (2.2)$$

这里  $v_D$  是导向中心的漂移速度,  $v_\parallel = v_\parallel b_0$ ,  $b_0 \equiv B_0/|B_0|$ .  $v \cdot q\tilde{E}$  代表运动粒子在涨落电场中所做的功. 而  $p$  则代表非电场性质的功. 由于漂移近似下磁矩守恒,故和  $\partial_{\mu_0} \equiv \partial/\partial \mu_0$  有关的项不出现.

在恒定磁场中导向中心在  $(1/B_0)$  近似下的漂移速度由以下诸项组成: 非均匀磁场中的曲率漂移和梯度漂移,扰动电场的电漂移. 应当注意,在出现扰动磁场的情况下,除了实验室坐标系中的电场之外,还有粒子沿磁力线运动时在涨落磁场中所感受到的洛伦兹电场. 因此有

$$v_D = (1/mQ_0)b_0 \times [\mu_0 \nabla B_0 + mv_\parallel^2 b_0 \cdot \nabla b_0 - q\tilde{E} - (q/c)(v_\parallel \times \tilde{B})]. \quad (2.3)$$

涨落磁场的存在使得磁矩在磁场的非均匀方向上受到一个力. 这个力所做的功就是  $p$  的来源. 对于磁矩系统来说, 如果磁矩是由于外场  $\mathbf{B}$  磁化而形成的 (当  $\mathbf{B}$  撤除时  $\mu$  消失), 则对应的自由能为  $dF = -\boldsymbol{\mu} \cdot d\mathbf{B}$ . 由于等离子体的逆磁性质,  $\boldsymbol{\mu} = -\mu \mathbf{b}_0$ . 故而功为:  $p = dF/dt = \mu \mathbf{b}_0 \cdot (d\mathbf{B}/dt) = \mu \mathbf{b}_0 \cdot \dot{\mathbf{B}}$ . 在  $(1/B_0)$  近似下,  $\mu = (mv_{\perp}^2/2B) \sim (mv_{\perp}^2/2B_0) \equiv \mu_0$ , 故有

$$p = \mu_0(\dot{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{b}_0). \quad (2.4)$$

因此(2.1)–(2.4)式即为  $(1/B_0)$  近似下的漂移动力方程.

下面给出用  $(1/B_0)$  展开方法求漂移动力方程的主要步骤. 单粒子的 Bragov 方程为

$$\{\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla + (q/m)\tilde{\mathbf{E}} \cdot \boldsymbol{\partial} + (q/mc)(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \boldsymbol{\partial} + (q/mc)(\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) \cdot \boldsymbol{\partial}\} f = 0. \quad (2.5)$$

这时采用  $(\epsilon, \mu_0, \phi, \sigma)$  坐标系, 按  $(1/B_0)$  展开并对  $\phi$  求平均. 速度空间中的坐标关系如图 1 所示. 按坐标变换容易证明:

$$(q/m)\tilde{\mathbf{E}} \cdot \boldsymbol{\partial} = q(\mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{E}})\partial_{\epsilon} + (q/B_0)(\mathbf{v}_{\perp} \cdot \tilde{\mathbf{E}})\partial_{\mu_0} + (q/mv_{\perp})\tilde{\mathbf{E}} \cdot (\cos \phi \boldsymbol{\tau}_0 + \sin \phi \mathbf{n}_0)\partial_{\phi}, \quad (2.6)$$

$$(q/mc)(\mathbf{v} \times \tilde{\mathbf{B}}) \cdot \boldsymbol{\partial} = (q/mc)\tilde{\mathbf{B}} \cdot \{ (mv_{\parallel}v_{\perp}/B_0)(\sin \phi \mathbf{n}_0 - \cos \phi \boldsymbol{\tau}_0)\partial_{\mu_0} + [(\mathbf{v}_{\parallel}/v_{\perp})(\cos \phi \mathbf{n}_0 + \sin \phi \boldsymbol{\tau}_0) - \mathbf{b}_0]\partial_{\phi} \}, \quad (2.7)$$

$$(q/mc)(\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) \cdot \boldsymbol{\partial} = -\Omega_0 \partial_{\phi}. \quad (2.8)$$

这里  $\Omega_0 \equiv (qB_0/mc)$  为带电粒子在磁场  $B_0$  中的拉摩频率.

由于  $\mu_0$  和  $\phi$  通过  $B_0$  和  $\boldsymbol{\tau}_0, \mathbf{n}_0$  而与空间有关, 则

$$\nabla = \nabla' + (\nabla \mu_0)\partial_{\mu_0} + (\nabla \phi)\partial_{\phi}, \quad (2.9)$$

其中  $\nabla' \equiv (\partial/\partial \mathbf{r})_{\mu_0, \phi}$ . 容易证明:

$$\nabla \mu_0 = (-1/B_0)\{mv_{\parallel}v_{\perp}(\cos \phi \mathbf{n}_0 + \sin \phi \boldsymbol{\tau}_0) \cdot \nabla \mathbf{b}_0 + \mu_0 \nabla B_0\}, \quad (2.10)$$

$$\nabla \phi = \mathbf{n}_0 \cdot \nabla \boldsymbol{\tau}_0 + (v_{\parallel}/v_{\perp})(\cos \phi \mathbf{b}_0 \cdot \nabla \boldsymbol{\tau}_0 - \sin \phi \mathbf{b}_0 \cdot \nabla \mathbf{n}_0). \quad (2.11)$$

采用  $(1/B_0)$  近似后, (2.5) 式中左方的前四项作为  $(1/\Omega_0)$  的一级量, 再使  $f = f^{(0)} + f^{(1)} + \dots$  作为  $(1/\Omega_0)$  的零级量, 一级量  $\dots$  后, 得到方程链为

$$\Omega_0 \partial_{\phi} f^{(0)} = 0, \quad (2.12)$$

$$\{\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla + (q/m)(\tilde{\mathbf{E}} \cdot \boldsymbol{\partial}) + (q/mc)(\mathbf{v} \times \tilde{\mathbf{B}}) \cdot \boldsymbol{\partial}\} f^{(n)} = \Omega_0 \partial_{\phi} f^{(n+1)}, \quad (2.13)$$

( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). 取(2.13)式中  $n = 0$ , 并对  $\phi$  取平均, 即

$$\langle f \rangle \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi f, \quad (2.14)$$

则得到

$$(\partial_t + v_{\parallel} \nabla' + qv_{\parallel} \tilde{\mathbf{E}}_{\parallel} \partial_{\epsilon}) f^{(0)} = 0. \quad (2.15)$$

该式说明  $f^{(0)}$  与  $\mu_0$  无关. 把  $n = 0$  的(2.13)式对  $\phi$  做不定积分得到

$$f^{(1)} = \Omega_0^{-1} v_{\perp} (\sin \phi \mathbf{n}_0 - \cos \phi \boldsymbol{\tau}_0) \cdot (\nabla' + q \tilde{\mathbf{E}} \partial_{\epsilon}) f^{(0)} + C. \quad (2.16)$$

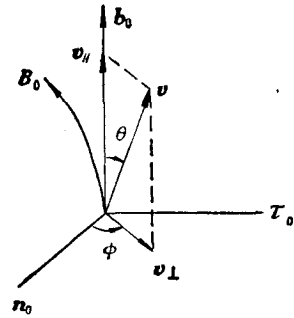


图 1

这里  $C$  是积分常数. 令

$$f^{(1)} = \langle f^{(1)} \rangle + \tilde{f}^{(1)}, \quad (2.17)$$

并把它代入(2.13)式中  $n = 1$  的方程, 并对  $\phi$  平均后即得到  $\langle f^{(1)} \rangle$  所满足的方程为

$$(\partial_t + v_{\parallel} \nabla_{\parallel} + q v_{\parallel} \tilde{E}_{\parallel} \partial_e) \langle f^{(1)} \rangle + \langle \{ \partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla + (q/m)(\tilde{\mathbf{E}} \cdot \boldsymbol{\theta}) + (q/mc)(\mathbf{v} \times \tilde{\mathbf{B}}) \cdot \boldsymbol{\theta} \} \tilde{f}^{(1)} \rangle = 0. \quad (2.18)$$

经过并不难的代数运算后即得到

$$(\partial_t + v_{\parallel} \nabla_{\parallel} + q v_{\parallel} \tilde{E}_{\parallel} \partial_e) \langle f^{(1)} \rangle + (\mathbf{v}_D + \mathbf{v}_{D\parallel}) \cdot (\nabla' + q \tilde{\mathbf{E}} \partial_e) f^{(0)} + \mu_0 (\tilde{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{b}_0) \partial_e f^{(0)} = 0, \quad (2.19)$$

其中  $\mathbf{v}_D$  即为(2.3)式所示, 而

$$\mathbf{v}_{D\parallel} = (\mu_0 c / q) \mathbf{b}_0 \cdot (\nabla \times \mathbf{b}_0) \mathbf{b}_0. \quad (2.20)$$

它是由  $B_0$  的剪切效应引起的平行漂移速度.

在一级近似内, 利用(2.15)式及  $\langle f \rangle = \langle f^{(0)} \rangle + \langle f^{(1)} \rangle$  后即得到(2.1)–(2.4)式, 只不过其中的  $\mathbf{v}_D$  应变为  $\mathbf{v}_D \rightarrow \mathbf{v}_D + \mathbf{v}_{D\parallel}$ .

本节中的符号  $\phi$ ,  $\langle \cdots \rangle$  及  $\sim$  所代表的意义仅在本节之内有效.

### 三、线性电子磁漂移波

为今后讨论方便起见, 这里给出有剪切平板模型中准稳电磁场的电子漂移动力方程. 平板模型的位形为

$$\mathbf{B}_0 = B_0 [\mathbf{z}_0 + (x/L_s) \mathbf{y}_0]. \quad (3.1)$$

在  $(x/L_s)$  的一级近似下,  $\mathbf{b}_0 \sim \mathbf{z}_0 + (x/L_s) \mathbf{y}_0$ . 这时曲率漂移和梯度漂移在同级近似下也为零而剪切效应导致的平行漂移速度  $v_{D\parallel} \sim (\mu_0 c / q L_s) \sim (\rho / L_s) v_{\perp}$ . 它在本文考虑的情况下远小于粒子的自由速度, 故将其略去. 为以下分析方便起见将采用势的描述:

$$\tilde{\mathbf{E}} = -\nabla \phi - (\dot{\tilde{\mathbf{A}}} / c), \quad \tilde{\mathbf{B}} = \nabla \times \tilde{\mathbf{A}}.$$

这里  $\phi$  代表静电势,  $\sim$  代表涨落量.

按照引言所述的观点, 仅寻求静电势和离子运动为不重要的解. 这时扰动电流仅由电子所贡献. 电子电流由平行运动电流和横向漂移电流组成: 感生电场形成的横向漂移电流可表为  $e v_p (\tilde{B} / B_0)$ , 这里  $v_p$  是波的相速, 而洛伦兹电场形成的横向漂移电流可表示为  $e v_e (\tilde{B} / B_0)$ , 这里  $v_e$  代表电子的热速度. 对低  $\beta$  等离子体来说,  $(\tilde{B} / B_0)$  是一个很小的量. 因此  $\tilde{j}_{e\parallel} \gg \tilde{j}_{e\perp}$ . 取库仑规范  $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{A}} = 0$  后, 由准稳电磁场的安培定律可知  $\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{A}_{\parallel} \mathbf{b}_0$ . 这里立刻看出, 感生电场  $\tilde{\mathbf{E}} \sim -(\dot{\tilde{\mathbf{A}}}_{\parallel} / c) \mathbf{b}_0$  和  $\mathbf{b}_0$  平行, 它将不引起漂移, 即

$$\mathbf{v}_D \rightarrow (v_{\parallel} / B_0) (\nabla \tilde{A}_{\parallel} \times \mathbf{b}_0). \quad (3.2)$$

也就是说, 在略去静电势后, 漂移运动仅由洛伦兹电场所引起, 它和感生电场垂直, 因而也不做功. 这时  $\tilde{\mathbf{B}} \sim \nabla \tilde{A}_{\parallel} \times \mathbf{b}_0$ . 磁矩在涨落场中不做功. 即  $\tilde{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{b}_0 = 0$ . 因此平板模型中电子磁漂移波的基本方程为

$$\{ \partial_t + v_{\parallel} \nabla_{\parallel} + (v_{\parallel} / B_0) (\nabla \tilde{A}_{\parallel} \times \mathbf{b}_0) \cdot \nabla + (e / mc) \dot{\tilde{\mathbf{A}}}_{\parallel} \partial_{\parallel} \} f = 0. \quad (3.3)$$

$$\nabla^2 \tilde{A}_{\parallel} = \frac{4\pi e}{c} \int d v_{\parallel} v_{\parallel} \tilde{f}. \quad (3.4)$$

在均匀磁场的情况可以取平衡分布函数  $f_0$  为

$$f_0 = \sqrt{\frac{m}{2\pi T}} n \exp\left(-\frac{mv_{\parallel}^2}{2T}\right). \quad (3.5)$$

它满足条件  $(\partial_t + v_{\parallel} \nabla_{\parallel})f_0 = 0$ . 这时  $\mathbf{b}_0 \rightarrow \mathbf{z}_0$ , 于是(3.3)式变为

$$\begin{aligned} & \{\partial_t + v_{\parallel} \nabla_{\parallel} + (v_{\parallel}/B_0)(\nabla \tilde{A}_{\parallel} \times \mathbf{z}_0) \cdot \nabla + (e/mc)\tilde{A}_{\parallel} \partial_{\parallel}\} f_0 \\ & = -(v_{\parallel}/B_0)(\nabla \tilde{A}_{\parallel} \times \mathbf{z}_0) \cdot \nabla f_0 - (e/mc)\tilde{A}_{\parallel} \partial_{\parallel} f_0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

注意到对均匀磁场  $\nabla \tilde{A}_{\parallel} \times \mathbf{z}_0 = \tilde{\mathbf{B}}$ , 因此漂移项即相当于粒子沿扰动磁场  $\tilde{\mathbf{B}}$  的运动. 本文以下的处理中仅考虑密度(在  $x$  方向的梯度所引起的)漂移, 即  $\nabla f_0 = -(\mathbf{x}_0/L_n)f_0$ . 于是(3.6)式的线性化方程和(3.4)式给出了定域色散关系为

$$e_k = 1 + \frac{4\pi e^2}{T c^2 k^2} (\omega - \omega_n^*) \int_c dv_{\parallel} v_{\parallel}^2 f_0 (\omega - k_{\parallel} v_{\parallel})^{-1} = 0, \quad (3.7)$$

式中  $\omega_n^* \equiv (T c k_{\parallel} / e B_0 L_n)$  即为电子的逆磁频率. (3.7)式中的积分路径  $c$  应按推迟解的始值条件选择, 于是按标准的处理方法可由(3.7)式得到线性色散关系和增长率.

对电子的运动, (3.7)式中的主值积分应取低相速近似. 这时得到

$$\omega_{\pm}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \{\omega_n^* \pm \sqrt{\omega_n^{*2} + \Omega^2}\}, \quad (3.8)$$

式中  $\Omega \equiv (\sqrt{2} v_e c |\mathbf{k}| k_{\parallel} / \omega_{pe})$ ,  $\omega_{pe}$  为电子等离子体频率. 对应的线性增长率为

$$\gamma_{\pm}(\mathbf{k}) = -\frac{\sqrt{\pi} \Omega^2}{8 k_{\parallel} v_e} \left(1 \pm \frac{\omega_n^*}{\sqrt{\omega_n^{*2} + \Omega^2}}\right). \quad (3.9)$$

这时可以看出, 对于(3.8)式给出的两个分支, 仅当  $k_{\parallel} < 0$  时才是不稳定的; 对于正频波分支, 不稳定的波相速和磁场反平行, 而对于负频波分支, 不稳定波相速和磁场平行.

$k_{\parallel}$  的存在对于波的激发是必要的. 如果在(3.7)式中取  $k_{\parallel} = 0$ , 则得到的是临界稳定模式:

$$\omega_0 = \omega_n^* \left(1 + \frac{c^2 k^2}{\omega_{pe}^2}\right)^{-1}. \quad (3.10)$$

这在物理上是显然的, 因为对于电子磁漂移波来说, 波的激发机制仅由波-粒子共振效应产生, 如果  $k_{\parallel} = 0$ , 那末这种共振机制消失, 波不能激发或阻尼.

#### 四、相干重整化与非线性色散关系

正如引言中所指出的那样, 对于高湍性碰撞频率的情况, 在研究非线性电子磁漂移波时需要采用重整化处理方式. 在文献[10]中曾建议了一种完全重整化理论——相干重整化. 这个理论的主要特点在于: (1)它给出了在微扰论上自洽的, 彻底的重整化程序. 该理论已被证明是完全可重整化的. (2)把扰动分布函数分解为相干部份和绝对非相干部份; 前者决定了非线性媒质的性质给出色散关系, 而后者决定了非线性源而将给出湍流谱和能量饱和机制. (3)它保证了漂移波在横向漂移电流无功时的能量守恒<sup>[11]</sup>.

对于电子磁漂移波来说, 由于它的基本方程(3.3)和(3.4)式在形式上与漂移近似下的

Власов-Poisson 方程十分类似,因此可以直接把静电波的相干重整化理论推广到电子磁漂移波。在傅里叶变换之后,扰动分布函数写为

$$f_k = G_k \hat{L}_0(k) f_0 A_k + \sum_{k_1} G_k \hat{L}(k, k_1) A_{k_1} f_{k-k_1} + i G_k \Gamma_k f_k, \quad (4.1)$$

式中

$$G_k \equiv (\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} + i \Gamma_k)^{-1}, \quad (4.2)$$

$$\hat{L}_0(k) \equiv (e/Tc)(\omega - \omega^*) v_{\parallel}, \quad (4.3)$$

$$\hat{L}(k, k_1) \equiv -(e\omega_1/mc) \partial_{\parallel} - i(\mathbf{k} \times \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{z}_0(v_{\parallel}/B_0). \quad (4.4)$$

在以上的处理中利用了时空均匀性。为简单起见,我们自此之后略去傅里叶表示中扰动量的波纹记号 $\sim$ 和 $A$ 的平行记号 $\parallel$ 。今后波纹记号 $\sim$ 仅代表绝对非相干分布函数。把文献[10]中的 $\phi_k$ 理解为 $A_k$ 来表示波纹线,把波-粒子相互作用顶点,取为(4.4)式,把静态激发顶点 $\bullet$ 取为(4.3)式,则(4.1)式的重整化迭代程序将和文献[10]完全相同,由于图形的结构相同,可重整化性的证明以及对应物理量的图形表示也完全相同。按照文献[10]的记法,

$$f_k = f_k^{(c)} + \tilde{f}_k. \quad (4.5)$$

这里 $f_k^{(c)}$ 代表扰动分布函数的相干部份。可记为 $f_k^{(c)} = \mathcal{A}_k A_k$ , 而 $\tilde{f}_k$ 则代表扰动分布函数的绝对非相干部份。把(4.5)式代入安培定律,并把相干部份取为媒质效应后得到重整化导电率

$$\sigma_k = -\frac{ice}{\omega} \int dv_{\parallel} v_{\parallel} \mathcal{A}_k. \quad (4.6)$$

对应的非线性色散关系为

$$1 + \frac{4\pi e}{ck^2} \int dv_{\parallel} v_{\parallel} \mathcal{A}_k = 0. \quad (4.7)$$

$\mathcal{A}_k$ 可用图形表示为

$$\mathcal{A}_k = \text{[Diagram 1]} + \text{[Diagram 2]} + \dots \quad (4.8)$$

而相干重整化给出的湍性碰撞频率为

$$-i\Gamma_k = \text{[Diagram 3]} + \dots \quad (4.9)$$

下面讨论非线性色散关系的求解。为此仅考虑 $\mathcal{A}_k$ 的最低级近似。这时在(4.7)式对 $v_{\parallel}$ 的积分中把 $(\omega/\Gamma_k)$ 取到一级近似而把 $(k_{\parallel} v_{\parallel}/\Gamma_k)$ 取到二级近似。在饱和情况下 $\omega$ 仅有实部,于是解出饱和时的色散关系为

$$\omega = \frac{1}{2} \left\{ \omega_n^* \pm \sqrt{\omega_n^* - \frac{4c^2 k^2 \Gamma_k^2}{\omega_{pe}^2}} \right\} \quad (4.10)$$

及

$$(k_{\parallel} v_e / \Gamma_k)^2 = \frac{2}{3}. \quad (4.11)$$

(4.10) 式决定了湍性碰撞频率的上界为

$$\Gamma_k \leq \frac{\omega_{pe} \omega_n^*}{2c k_{\perp}}. \quad (4.12)$$

而(4.11)式给出了  $\Gamma_k$  和  $k_{\parallel}$  之间的关系, 这相当于谱所满足的条件. 正如下面将要证明的  $\Gamma_k \sim k_{\perp}^2 D_{\perp}$  (见(5.2)式), 则(4.11)和(4.12)式决定了  $k_{\parallel}$  的条件和横向扩散系数. 这时

$$D_{\perp} \sim \frac{\omega_{pe} T_e}{e B_0 L_n k_{\perp}^2}. \quad (4.13)$$

按托卡马克上的典型数据:  $B_0 \sim 10^5 \text{Gs}$ ,  $T_e \sim 1 \text{keV}$ ,  $k_{\perp} \sim 10 \text{cm}^{-1}$ ,  $L_n > 10 \text{cm}$ ,  $n \sim 10^{14} \text{cm}^{-3}$  估计出  $D_{\perp} \sim 10^4 \text{cm}^2/\text{s}$ , 和实验给出的量级相符合. 这些数据同时预言了  $k_{\parallel} \sim 10^{-3} \text{cm}^{-1}$ , 它和下一节的讨论所给的关系在数量上是相容的.

## 五、 $\Gamma_k$ 的 Марков 近似

除了上面给出的微扰论处理方法外, 还可以利用统计模型来得到某些有用的结论. 这方面的讨论和 Dupree 讨论静电漂移波的情况类似<sup>[12]</sup>. 在文献 [13] 中曾给出了 Gauss 过程中单粒子传播函数所满足的方程, 它在横向 Марков 近似下可写为

$$(\partial_t + v_{\parallel} \nabla_{\parallel} - \nabla_{\perp}^2 D_{\perp}^{\mu\nu} \nabla_{\perp}^2) G = 0. \quad (5.1)$$

对应的傅里叶表示为

$$G_k = (\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} + i k_{\perp}^2 D_{\perp}^{\mu\nu} k_{\perp}^2)^{-1}. \quad (5.2)$$

由此可知, 由横向漂移运动所决定的湍性碰撞频率为  $\Gamma_k = k_{\perp}^2 D_{\perp}^{\mu\nu} k_{\perp}^2$ . 在二维各向同性近似下即有  $\Gamma_k \sim k_{\perp}^2 D$ . 在(5.1)式中的  $D_{\perp}^{\mu\nu}$  定义为<sup>[13]</sup>

$$D_{\perp}^{\mu\nu} = \tau^{\mu\nu\rho\sigma} \left( \frac{c}{B_0} \right)^2 \int_0^{\infty} d\tau \langle E^{\rho}(\mathbf{r}, t) E^{\sigma}(\mathbf{r}(t-\tau), t-\tau) \rangle. \quad (5.3)$$

张量  $\tau^{\mu\nu\rho\sigma}$  的非零部份仅为  $\tau^{1122} = \tau^{2211} = 1$ ,  $\tau^{1221} = \tau^{2112} = -1$ . 其中  $\mathbf{r}(t-\tau)$  代表粒子在湍性场中的真实轨道,  $\mathbf{E}$  代表形成电漂移运动的等效电场, 对电子磁漂移波来说, 它即是洛伦兹电场  $\mathbf{E} = (v_{\parallel}/c)(\nabla \tilde{A}_{\parallel} \times \mathbf{b}_0)$ ,  $\langle \cdots \rangle$  代表系综平均. 利用傅里叶变换后,

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} d\tau \langle E^{\rho}(\mathbf{r}, t) E^{\sigma}(\mathbf{r}(t-\tau), t-\tau) \rangle \\ &= (v_{\parallel}/c)^2 \int_0^{\infty} d\tau \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 (i\mathbf{k}_1 \times \mathbf{z}_0)^{\rho} (i\mathbf{k}_2 \times \mathbf{z}_0)^{\sigma} \\ & \quad \times \exp[-i\omega t_1 + i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - i\omega_2(t-\tau)] \cdot \langle A_{k_1} A_{k_2} e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}(t-\tau)} \rangle. \end{aligned} \quad (5.4)$$

为计算  $\langle \cdots \rangle$ , 可利用 Новиков 公式<sup>[14]</sup>, 得到

$$\begin{aligned} \langle A_{k_1} A_{k_2} e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}(t-\tau)} \rangle &= \int d\mathbf{k} \langle A_{k_1} A_{\mathbf{k}} \left\langle \frac{\delta}{\delta A_{\mathbf{k}}} A_{k_2} e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}(t-\tau)} \right\rangle \rangle \\ &= \langle A_{k_1} A_{k_2} \rangle \langle e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}(t-\tau)} \rangle \end{aligned}$$

$$+ \int dk \langle A_{k_1} A_k \rangle \left\langle A_{k_2} e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}(t-\tau)} i\mathbf{k}_2 \cdot \frac{\delta}{\delta A_k} \mathbf{r}(t-\tau) \right\rangle. \quad (5.5)$$

(5.5)式中右方第二项将属于  $A_k$  的高次项,它与重整化传播量的四级近似(图2)相联系.在三级微扰之内将它略去.利用

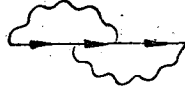


图 2

$$\langle e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(t-\tau)} \rangle = \int d\mathbf{r} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \langle \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t-\tau)) \rangle. \quad (5.6)$$

这里  $\langle \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t-\tau)) \rangle$  即为单粒子平均格林函数<sup>[13]</sup>,由它所满足的方程(5.1)式即可求出

$$\langle e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(t-\tau)} \rangle = \exp\{ik_{\parallel}v_{\parallel}(t-\tau) + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - k_{\perp}^2 D_{\perp}^{\mu\nu} k_{\perp}^{\nu}\}. \quad (5.7)$$

把(5.4)–(5.7)式代入(5.3)式后,利用时空均匀性,并对  $\tau$  积分后即得到

$$D_{\perp}^{\mu\nu} = \text{Re} \left\{ \tau^{\mu\nu\rho\sigma} \left( \frac{v_{\parallel}}{B_0} \right)^2 \int d\mathbf{k} \frac{i(\mathbf{k} \times \mathbf{z}_0)^{\rho} (\mathbf{k} \times \mathbf{z}_0)^{\sigma}}{\omega - k_{\parallel}v_{\parallel} + ik_{\perp}^2 D_{\perp}^{\mu\nu} k_{\perp}^{\nu}} |A_k|^2 \right\}. \quad (5.8)$$

利用二维各向同性可写为

$$D_{\perp} = \left( \frac{v_{\parallel}}{B_0} \right)^2 \sum_k \frac{k_{\perp}^2 D_{\perp}}{(\omega - k_{\parallel}v_{\parallel})^2 + (k_{\perp}^2 D_{\perp})^2} k_{\perp}^2 |A_k|^2. \quad (5.9)$$

(5.9)式即表示出由于湍性扰动所引起的共振加宽效应<sup>[12]</sup>.对  $k_{\perp}$  取典型值并利用低相速近似后即得到

$$D_{\perp} = \left( \frac{v_{\parallel}}{B_0} \right) |A_k| \left( 1 - \frac{k_{\parallel}^2 B_0^2}{|A_k|^2 k_{\perp}^4} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.10)$$

该式给出湍性扩散的条件为

$$|A_k| \geq (k_{\parallel} B_0 / k_{\perp}^3) \text{ 或 } (\tilde{B}/B_0) \geq (k_{\parallel} / k_{\perp}). \quad (5.11)$$

由 Марков 近似求出的湍性碰撞频率为

$$\Gamma_k \sim (v_e k_{\perp}^3 / B_0) |A_k| \sim (v_e k_{\perp}) (\tilde{B}/B_0). \quad (5.12)$$

这时不难看出,用 Марков 近似导出的(5.11)和(5.12)式与由非线性色散关系导出的(4.11)和(4.12)式是相容的,即由后者估计出  $(k_{\parallel} / k_{\perp}) \sim 10^{-4}$  导致(5.11)式给出  $(\tilde{B}/B_0) \sim 10^{-4}$  和实验观察在量级上符合.且由(5.13)式决定出  $\Gamma_k \sim 10^6 \text{Hz}$  也与(4.13)式的估计值在量级上符合.这种相容性可以作为理论合理性的一个有趣的佐证.

## 六、高阶修正与物理讨论

下面讨论非线性色散关系的高阶修正问题.即讨论在求解(4.7)式时若把  $\omega_k$  表达式,(4.8)式中右方第二项包括进去后所引起的修正问题.该项对色散关系的贡献相当于在(4.7)式中附加

$$\Delta = \frac{4\pi e}{c k^2} \int d v_{\parallel} v_{\parallel} G_k \sum_k \hat{L}(k, k_1) G_{k-k_1} \hat{L}(k, k_1) G_{-k_1} \hat{L}_0(k_1) f_0 |A_{k_1}|^2. \quad (6.1)$$



令

$$i\Gamma(k, k_1) = \hat{L}(k, k_1)G_{k-k_1}\hat{L}(k, k_1)|A_{k_1}|^2, \quad (6.2)$$

则有

$$i\Gamma_k = \sum_{k_1} i\Gamma(k, k_1). \quad (6.3)$$

为了估计由于  $\Lambda$  所引入的修正效应, 将仅做半定量的计算. 这时把  $\Gamma_k$  中的  $v_{\parallel}$  用它的典型值  $v_e$  来代替. 在对  $v_{\parallel}$  的积分中仍取  $(\omega/\Gamma_k)$  的一级近似和  $(k_{\parallel}v_{\parallel}/\Gamma_k)$  的二级近似并利用(4.11)式的结果, 然后得到  $\Lambda$  的实部和虚部分别为

$$\text{Re}\Lambda = \frac{\omega_{pe}^2}{c^2 k^2} \sum_{k_1} \Gamma(k, k_1)(\omega_1 - \omega_{1,n}^*) \frac{1}{\Gamma_k \Gamma_{-k_1}} \left( \frac{\omega}{\Gamma_k} - \frac{\omega_1}{\Gamma_{-k_1}} \right) \quad (6.4)$$

$$\text{Im}\Lambda = \frac{\omega_{pe}^2}{c^2 k^2} \sum_{k_1} \Gamma(k, k_1)(\omega_1 - \omega_{1,n}^*) \frac{1}{\Gamma_k \Gamma_{-k_1}}. \quad (6.5)$$

为了估计修正效应可取  $k_1 \rightarrow k$  的典型值. 则(6.4)式表明  $\text{Re}\Lambda \rightarrow 0$ , 即对于色散关系没有定性修正, 而  $\text{Im}\Lambda \rightarrow 0(\omega_{pe}^2(\omega - \omega_n^*)/c^2 k^2 \Gamma_k)$ . 这时色散关系的虚部修正效应给出

$$\frac{3}{2} (k_{\parallel} v_e / \Gamma_k)^2 \sim O(1). \quad (6.6)$$

这些结果表明,  $\mathcal{A}_k$  的下一级项加入以后仅对于第四节的结果有数量上的修正而没有定性的修正. 这个情况说明对电子磁漂移波来说, 第四节中所给出的非线性色散关系的最低级计算在微扰论上是可信的. 这一点和静电漂移波的情况很不相同. 对于静电漂移波来说, 为了保证能量守恒, 在  $\Gamma_k$  和  $\mathcal{A}_k$  的微扰级数选择上必须匹配. 在文献[15, 16]中已证明, 当  $\Gamma_k$  选择到二级微扰时(这是重整化的最低级微扰),  $\mathcal{A}_k$  必须选择到三级微扰(即必须加入(4.8)式右方第二项)才能保证能量守恒, 否则将会出现物理上不合理的结论. 而在文献[11]中已证明, 当  $i\Gamma_k$  选择到四级微扰时,  $\mathcal{A}_k$  必须选择到五级微扰. 同时还要考虑到绝对非相干源的效应才能保证能量守恒. 但是这种限制对于电子磁漂移波并不存在. 因为容易证明, 尽管洛伦兹电漂移所诱导的横向漂移电流在感生电场中是无功的, 但是这种无功性对于它的每一个单独  $k$  分量均成立. 这样, 对应功的每一个图形均自身为零, 而不必通过图的微扰级数匹配选择而把各个图的贡献互相消去的问题.

与静电漂移波所不同的另一个方面是, 假定静电漂移波真有单个  $k$  分量无功, 那末当  $k_{\parallel} \rightarrow 0$  时一定要要求  $D_{\perp} \rightarrow 0$ . 这个性质对于电子磁漂移波并不存在(见(4.13)式). 这是因为静电波的有功电场一定和  $k_{\parallel}$  相联系, 而电子磁漂移波的有功电场当  $k_{\parallel} \rightarrow 0$  时也是存在的. 换句话说, 尽管  $k_{\parallel} = 0$  时电子磁漂移波没有线性激发, 但是它却有非线性激发效应. 因此使  $k_{\parallel} \rightarrow 0$  后的效果仅是消去了(4.11)和(5.11)式的条件, 而不影响(4.13)和(5.12)式的结论.

文献[8]中所估计的  $D_{\perp}$  和本文用 Марков 近似所估计的  $D_{\perp}$  在形式上很类似, 所不同之处仅在于文献[8]的  $v_e$  相当于本文的  $\Gamma_k$ , 但是对  $(\tilde{B}/B_0)$  的估计上有所不同. 按本文的结果应有

$$(\tilde{B}/B_0) \sim (\omega_{pe}/ck_{\perp})(\rho_e/L_n). \quad (6.7)$$

而文献[8]给出  $(\tilde{B}/B_0) \sim (\rho_e/L_n)$ . 从特征值上看它比本文的估计值要小. 事实上, 仅

靠求解非线性色散关系是不能决定扩散系数定标律的; $K_{\perp}$ 的特征值也不能仅由线性理论决定。这是因为  $K_{\perp}$  存在非线性激发机构。为此需要讨论非线性相互作用所决定的能量输运过程和绝对非相干项所决定的湍流谱问题。这将另文讨论。

### 参 考 文 献

- [1] N. T. Gladd, J. F. Drake, C. L. Chang, C. S. Liu, *Phys. Fluids*, **23**(1980), 1182.
- [2] H. P. Furth, *Nucl. Fusion*, **15**(1975), 487.
- [3] W. M. Tang, *Nucl. Fusion*, **18**(1978), 1089.
- [4] D. W. Ross, S. M. Mahajan, *Phys. Rev. Lett.*, **40**(1978), 324.
- [5] C. L. Chang, J. F. Drake, N. T. Gladd, C. S. Liu, *Phys. Fluids*, **23**(1980), 1998.
- [6] A. B. Rechester, M. N. Rosenbluth, *Phys. Rev. Lett.*, **40**(1978), 38.
- [7] J. F. Drake, Y. C. Lee, *Phys. Fluids*, **20**(1977), 1341.
- [8] J. F. Drake, N. T. Gladd, C. S. Liu, C. L. Chang, *Phys. Rev. Lett.*, **44**(1980), 994.
- [9] D. A. D'Ippolito, Y. C. Lee, J. F. Drake, *Phys. Fluids*, **23**(1980), 771.
- [10] 章扬忠, 物理学报, **30**(1981), 1020.
- [11] 章扬忠, 物理学报, **30**(1981), 1565.
- [12] T. H. Dupree, *Phys. Fluids*, **10**(1967), 1049.
- [13] 章扬忠, 物理学报, **30**(1981), 584.
- [14] E. A. Новиков, *ЖЭТФ*, **47**(1964), 1919.
- [15] J. A. Krommes, *Phys. Fluids*, **23**(1980), 736.
- [16] T. H. Dupree, D. T. Tetreault, *Phys. Fluids*, **21**(1978), 425.

## NON-LINEAR ELECTRON MAGNETIC-DRIFT WAVES

ZHANG YANG-ZHUNG

(Southwestern Institute of Physics, China)

### ABSTRACT

In this paper, the electron magnetic-drift waves have been treated by the renormalization theory in the drift approximation with shear-free magnetic field, and its relations with the anomalous electron transport on Tokamak's analyzed. The resultant diffusion coefficient  $D_{\perp} \sim (\omega_{pe} T / e B_0 L_n k_{\perp}^2)$  roughly agrees with the present Tokamak experiments.