第31卷 第11期 物 理 学 报 Vol. 31, No. 11
1982年11月 ACTA PHYSICA SINICA Nov., 1982

仿激光开系的阻尼振子量子化方案

谭 维 翰
(中国科学院上海光学精密机械研究所)

王学文[1)] 谢成钢[2)] 张冠梅[3)]
(上海科学技术大学)

1982年1月19日收到

提 要

激光全量子理论对激光开系采用热浴模型进行了量子化. 近两年来，文献[1,2]又报道了两种阻尼振子的量子化方案，与激光开系热浴模型[3,4]比较，迥然不同.本文在简要介绍激光开系热浴模型后，便与文献[1, 2]方案进行分析比较，指出这后两种方案存在的困难，并提出仿激光开系的阻尼振子量子化方案.最后求得仿开系方案的 Hamiltonian 及相应的 Schrödinger 方程的解及力学量平均值的计算. 在量子起伏项不再出现阻尼因子.

一、激光开系的热浴模型

包括激光场、热浴及其相互作用在内的 Hamiltonian 为

$$\begin{aligned} &H = H_L + H_B + H_{L-B}, \\ &H_L = \Sigma \hbar\omega_\lambda b_\lambda^+ b_\lambda, \quad H_B = \Sigma \hbar\omega B_\omega^+ B_\omega, \\ &H_{L-B} = \Sigma g_{\omega_\lambda \omega} \hbar b_\lambda^+ B_\omega e^{-i\omega t} + \Sigma g_{\omega_\lambda \omega}^+ \hbar b_\lambda B_\omega^+ e^{i\omega t}. \end{aligned} \tag{1}$$

b_λ, b_λ^+; B_ω, B_ω^+ 分别为激光场与热浴的湮没、产生算符. λ 为激光模式指标. $g_{\omega_\lambda\omega}$, $g_{\omega_\lambda\omega}^+$ 为激光场与热浴的耦合系数. 设 $|g_{\omega_\lambda\omega}|^2 \simeq g_\lambda^2$ 近似地与 ω 无关，则可求出 b_λ, b_λ^+ 的运动方程为

$$\begin{aligned} &\frac{db_\lambda}{dt} = (-i\omega_\lambda - \varkappa_\lambda) b_\lambda + F_\lambda(t), \quad \varkappa_\lambda = \pi g_\lambda^2, \quad F_\lambda = -i\Sigma g_{\omega_\lambda\omega} B_\omega(t_0) e^{-i\omega t}; \\ &\frac{db_\lambda^+}{dt} = (i\omega_\lambda - \varkappa_\lambda) b_\lambda^+ + F_\lambda^+(t), \quad F_\lambda^+ = i\Sigma g_{\omega_\lambda\omega}^+ B_\omega^+(t_0) e^{i\omega t}. \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &\langle F_\lambda^+(t) F_\lambda(t')\rangle = 2\varkappa_\lambda n_{\omega_\lambda}\delta(t-t'), \quad \langle F_\lambda(t') F_\lambda^+(t)\rangle = 2\varkappa_\lambda (n_{\omega_\lambda}+1)\delta(t-t') \\ &\langle F^+ b\rangle = \varkappa_\lambda n_{\omega_\lambda}, \quad \langle F b^+\rangle = \varkappa_\lambda (n_{\omega_\lambda}+1), \\ &\langle [F_\lambda(t), F_\lambda^+(t')]\rangle = 2\varkappa_\lambda \delta(t-t'), \\ &\langle [F, b^+]\rangle = \langle [b, F^+]\rangle = \varkappa_\lambda. \end{aligned} \tag{3}$$

[ ] 为泊松括号，⟨ ⟩ 指对无规力求平均. 由(2),(3)式可证

1) 2) 3) 王学文、谢成钢、张冠梅为上海科学技术大学1981年应届毕业生.

$$\frac{d}{dt}\langle[b_\lambda, b_\lambda^+]\rangle = 2\varkappa_\lambda(1 - \langle[b_\lambda, b_\lambda^+]\rangle). \tag{4}$$

由 $[b_\lambda, b_\lambda^+]_0 = 1$，按 (4) 式便得 $\langle[b_\lambda, b_\lambda^+]\rangle = 1$. (2)，(3) 式表明阻尼系数 $\varkappa_\lambda$ 及无规力 $F_\lambda(t)$，$F_\lambda^+(t)$ 都是由耦合系数 $g_{\omega_\lambda\omega}$ 及作用于热浴的算子 B_ω，B_ω^+ 等决定的，不是任意给定的.

二、激光开系量子化方法与文献[1,2]两种阻尼谐振子量子化方法的比较及仿激光开系量子化方案

为行文方便起见，我们仍采用文献[1,2]的记号，并简要叙述文献[1,2]的结果和存在的问题.

1. 文献[1]的量子化方案

一维阻尼谐振子的运动方程为

$$\dot{x} = p/M, \quad \dot{p} = -Kx - cp/M + f(t). \tag{5}$$

由此得

$$\frac{d}{dt}(xp - px) = -\frac{c}{M}(xp - px) + (xf - fx).$$

若取定 $xf - fx = 0$，则得

$$\frac{d}{dt}(xp - px) = -\frac{c}{M}(xp - px). \tag{6}$$

由 (6) 式得量子化方案为

$$xp - px = i\hbar e^{-ct/M}. \tag{7}$$

按 (7) 式量子化的结果，以 $\bar{x}(t)$ 为例:

$$\bar{x}(t) = \frac{1}{M\Omega}\int_0^t \exp(-c(t-t')/2M)\sin\Omega(t-t')f(t')dt' + \sqrt{\frac{\hbar}{M\Omega}}\, e^{-ct/2M}\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\Sigma a_n^*\sqrt{n}\ a_{n-1}}{\Sigma a_n^* a_n}e^{i\Omega t} + \frac{\Sigma a_{n-1}^*\sqrt{n}\ a_n}{\Sigma a_n^* a_n}e^{-i\Omega t}\right]. \tag{8}$$

前一项为由 $f(t)$ 驱动的经典强迫振动，后一项为与初值相联系的量子效应. 当时间 t 很长时，这一项会由于阻尼而趋近于零. 亦即一量子体系与经典的热浴相互作用后，最终均变成经典的了. 该量子化方案所存在的另一困难，即文献[2]指出的，当 c 显含时间 t，经典动量要发生跳变.

2. 文献[2]的量子化方案

文献[2]假定 x 与 f 是不对易的，且满足如下方程:

$$xf - fx = i\hbar c/M. \tag{9}$$

于是 (6) 式为

$$\frac{d}{dt}(xp - px) = 0,$$

量子化方案为

$$xp - px = i\hbar. \tag{10}$$

这样做明显存在矛盾，因按 (9) 式得

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{1}{i\hbar}[x, f] = c/M, \quad f = \frac{c}{M}p + \tilde{F}(x). \tag{11}$$

代入 (5) 式得

$$\dot{p} = -Kx + \tilde{F}(x). \tag{12}$$

而 (12) 式已经不是阻尼振子运动方程，而是无阻尼振子运动方程，当 $\tilde{F}(x) = 0$ 即为简谐振子运动方程.

3. 仿激光开系的阻尼振子量子化方案

设坐标系不是静止的，而是以 $g(t)$ 的速度在浮动，则运动方程为

$$\dot{x} = p/M + g(t), \quad \dot{p} = -cp/M - Kx + f(t). \tag{13}$$

于是有

$$\frac{d}{dt}(xp - px) = -\frac{c}{M}(xp - px) + (gp - pg) + (xf - fx). \tag{14}$$

现将运动方程写为

$$\dot{x} = -\frac{\nu}{2}x + i[-i(p/M + \nu x/2)] + g, \quad \nu = c/M,$$

$$\dot{p}/M + \frac{\nu\dot{x}}{2} = -\frac{\nu}{2}\left(p/M + \frac{\nu x}{2}\right) - \Omega^2 x + \frac{\nu}{2}g + f/M, \quad \Omega^2 = \frac{K - c^2/4M}{M}.$$

令

$$\xi^* = \sqrt{\frac{M}{2\hbar\Omega}}\,(\Omega x - i(p/M + \nu x/2)),$$

$$\xi = \sqrt{\frac{M}{2\hbar\Omega}}\,(\Omega x + i(p/M + \nu x/2)); \tag{15}$$

$$F^* = \sqrt{\frac{M}{2\hbar\Omega}}\left(\Omega g - i\left(\frac{\nu}{2}g + f/M\right)\right),$$

$$F = \sqrt{\frac{M}{2\hbar\Omega}}\left(\Omega g + i\left(\frac{\nu}{2}g + f/M\right)\right). \tag{16}$$

由运动方程及 (15)，(16) 式便得

$$\dot{\xi} = (-i\Omega - \nu/2)\xi + F,$$

$$\dot{\xi}^* = (i\Omega - \nu/2)\xi^* + F^*. \tag{17}$$

方程 (17) 已与激光开系方程 (2) 取一致的形式. 由 (17) 式易算出

$$\frac{d}{dt}(\xi\xi^* - \xi^*\xi) = -\nu(\xi\xi^* - \xi^*\xi) + (\xi F^* - F^*\xi) + (F\xi^* - \xi^*F). \tag{18}$$

仿照激光开系，将 (18) 式对无规力求平均

$$\frac{d}{dt}\langle[\xi,\xi^*]\rangle=-\nu\langle[\xi,\xi^*]\rangle+\langle[\xi,F^*]\rangle+\langle[F,\xi^*]\rangle. \tag{18'}$$

参照对易规则(3)式,可取定如下的对易关系:

$$\langle[\xi,\xi^*]\rangle=1,\quad \langle[\xi,F^*]\rangle=\langle[F,\xi^*]\rangle=\nu/2. \tag{19}$$

很明显(19)式满足(18)′式，此即仿激光开系的阻尼振子量子化方案．由上面的讨论，我们看到，按(2),(3)式激光开系的 F, F^+ 中包含了作用于热浴的算子 B_ω^+, B_ω，体现了与周围环境的相互作用,故不可对易．文献[1]的方案一方面讨论由阻尼标志的开系，另一方面又未能体现与环境的相互作用，取定 $xf-fx=0$，故出现困难．文献[2]虽取了 $xf-fx\doteq 0$ 的假定,但不全面，于是又回到无阻尼情形．在仿激光开系方案中，我们增添了坐标系的浮动速度 $g(t)$ 并仿激光开系进行了量子化,便克服了这一困难．下面将在(17),(19)式基础上求解 Schrödinger 方程.

三、仿激光开系的 Schrödinger 方程的解与求力学量平均值

由(17),(19)式并考虑到

$$\frac{d\xi}{dt}=\frac{1}{i\hbar}[\xi,H]=(-i\Omega-\nu/2)\xi+F,$$

$$\frac{d\xi^*}{dt}=\frac{1}{i\hbar}[\xi^*,H]=(i\Omega-\nu/2)\xi^*+F^*, \tag{20}$$

便得出

$$H=\hbar\Omega\xi^*\xi+\hbar\Omega/2-i\hbar\xi F^*+i\hbar\xi^*F. \tag{21}$$

事实上,将(21)式代人(20)式是满足的．现参照文献[1],解 Schrodinger 方程

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t}=H\psi. \tag{22}$$

应用(19)式及 $\xi=\frac{\partial}{\partial\xi^*}$, 便得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+(i\Omega-\nu/2)\xi^*\frac{\partial}{\partial\xi^*}\right)\psi$$

$$=\left[-\frac{\nu}{2}\xi^*\frac{\partial}{\partial\xi^*}-\nu-i\frac{\Omega}{2}+F\xi^*-F^*\frac{\partial}{\partial\xi^*}\right]\psi. \tag{23}$$

令 $\eta^*=-(i\Omega-\nu/2)t+\ln\xi^*$, 则

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+(i\Omega-\nu/2)\xi^*\frac{\partial}{\partial\xi^*}\right]\eta^*=0. \tag{24}$$

将 ψ 分解为齐次解 $\phi(-\tilde\beta^*+e^{\eta^*})$ 与非齐次解 $\exp(\alpha+e^{\eta^*}\beta e^{-\nu t})$ 之积,即

$$\psi(\eta^*,t)=\phi(-\tilde\beta^*+e^{\eta^*})\exp(\alpha+e^{\eta^*}\beta e^{-\nu t}), \tag{25}$$

便有

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+F^*\frac{\partial}{\partial\xi^*}\right)\psi=\left(-\frac{\nu}{2}\xi^*\frac{\partial}{\partial\xi^*}-i\frac{\Omega}{2}-\nu+F\xi^*\right)\psi. \tag{26}$$

令

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+F^*\frac{\partial}{\partial \xi^*}\right)(-\tilde{\beta}^*+e^{\eta^*})=-\frac{\partial\tilde{\beta}^*}{\partial t}+F^*\frac{e^{\eta^*}}{\xi^*}=0,$$

便有

$$\tilde{\beta}^*=\beta_0^*+\int_0^t \exp[(-i\Omega+\nu/2)t']F^*(t')dt'=\beta_0^*+\beta^*, \tag{27}$$

式中 $\beta_0^*=\beta_0^*(\xi_0,\xi_0^*)$ 待定．由 (25)—(27) 式，得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+F^*\frac{\partial}{\partial \xi^*}+\frac{\nu}{2}\xi^*\frac{\partial}{\partial \xi^*}\right)(\alpha+e^{\eta^*}\beta e^{-\nu t})$$
$$=-\frac{i\Omega}{2}-\nu-\frac{\nu}{2}\xi^*\frac{\partial}{\partial\xi^*}\ln\phi+F\xi^*. \tag{28}$$

设

$$\phi_n=(-\tilde{\beta}^*+e^{\eta^*})^n, \tag{29}$$

则 (28) 式为

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\frac{\partial\beta}{\partial t}e^{\eta^*-\nu t}+\left(\frac{F^*}{\xi^*}-\nu/2\right)e^{\eta^*}\beta e^{-\nu t}=-i\frac{\Omega}{2}-\nu-\frac{n\nu}{2}+F\xi^*. \tag{30}$$

令

$$\frac{\partial\beta}{\partial t}=\exp(i\Omega t+\nu t/2)\cdot F,\quad \beta=\int_0^t\exp[(i\Omega+\nu/2)t']\cdot F(t')dt' \tag{31}$$

则有

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t}=-\frac{i\Omega}{2}-\nu-\frac{n\nu}{2}+\left(\frac{\nu\xi^*}{2}-F^*\right)\beta\,\exp(-i\Omega t-\nu t/2). \tag{32}$$

考虑到

$$\xi^*=\xi_0^*\exp[(i\Omega-\nu/2)t]+\int_0^t F^*(t')\exp(i\Omega-\nu/2)(t-t')\cdot dt', \tag{33}$$

又假定 $F(t)$, $F^*(t')$ 具有 (3) 式热浴模型求平均后的性质

$$\langle F^*(t)F(t')\rangle=\nu n_\omega\delta(t-t'),$$
$$\langle F^*\beta e^{(-i\Omega-\nu/2)t}\rangle=\nu/2\,n_\omega,$$
$$\langle \xi^*\beta e^{(-i\Omega-\nu/2)t}\rangle=e^{-\nu t}\int_0^t\nu n_\omega e^{\nu t'}dt'\simeq n_\omega, \tag{34}$$

代入 (32) 式得

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t}=-i\Omega/2-\nu-n\nu/2. \tag{35}$$

又注意到

$$-\tilde{\beta}^*+e^{\eta^*}=-\beta_0^*-\beta^*+e^{-i\Omega t+\nu t/2}\xi^*=-\beta_0^*+\xi_0^*,$$

取 $\beta_0^*=-\xi_0+\xi_0^*$，便得

$$-\tilde{\beta}^*+e^{\eta^*}=\xi_0. \tag{36}$$

按热浴模型 (2) 式，F^*，F 只依赖于作用于热浴的算符 B_ω, B_ω^+，而不依赖于 ξ_0, ξ_0^*，故 ξ_0, ξ_0^* 与 β, β^* 为可易．由 (25)—(36) 式得

$$\phi_n(\eta^*,t)=\phi_n(\xi_0)\exp\left[\xi^*\beta e^{-(i\Omega+\nu/2)t}-\left(\frac{i\Omega}{2}+\nu+\frac{n\nu}{2}\right)t\right].$$

同理得 $\phi_n^*(\eta, t) = \exp\left[\beta^* e^{(i\Omega-\nu/2)t}\xi + \left(i\Omega - \nu - \frac{n\nu}{2}\right)t\right]\phi_n^*(\xi_0^*)$. ϕ, ϕ^* 中的因子 $\exp[-(i\Omega+\nu/2)t]$, $\exp[(i\Omega-\nu/2)t]$ 在求平均时将被去掉，故 ϕ_n, ϕ_n 可简写为

$$\phi_n(\eta^*, t) = \phi_n(\xi_0 e^{-\nu t/2})\exp[\xi^*\beta e^{-(i\Omega+\nu/2)t}],$$
$$\phi_n^*(\eta, t) = \exp[\beta^* e^{(i\Omega-\nu/2)t}\xi]\phi_n^*(\xi_0^* e^{-\nu t/2}). \tag{37}$$

(37) 式中已不显含参量“n”，故 ϕ, ϕ 的下角标“n”可去掉．亦即 (37) 式中的 ϕ_n 可换为一般的 $\phi = \Sigma c_n\phi_n$．现应用 Taylor 展开及 $\xi = \partial/\partial\xi^*$ 可得

$$e^{b\xi}[f_1(\xi, \xi^*)f_2(\xi, \xi^*)] = f_1(\xi, \xi^*+b)f_2(\xi, \xi^*+b)$$
$$= f_1(\xi, \xi^*+b)e^{b\xi}f_2(\xi, \xi^*). \tag{38}$$

又考虑到

$$\xi_0^* e^{-\nu t/2} = \xi^* e^{-i\Omega t} - \beta^* e^{-\nu t/2},$$
$$\xi_0 e^{-\nu t/2} = \xi e^{i\Omega t} - \beta e^{-\nu t/2}; \tag{39}$$

并设

$$O(\xi, \xi^*) = \Sigma a_{mn}\xi^{*m}\xi^n, \tag{40}$$

则由 (37)—(40) 式得

$$\phi^* O\phi = \exp[\beta^* e^{(i\Omega-\nu/2)t}\xi]\phi^*(\xi_0^* e^{-\nu t/2})\Sigma a_{mn}\xi^{*m}\xi^n$$
$$\times\ \phi(\xi_0 e^{-\nu t/2})\exp[\xi^*\beta e^{-(i\Omega+\nu/2)t}]$$
$$= \phi^*(\xi^* e^{-i\Omega t})O(\xi + \beta e^{-(i\Omega+\nu/2)t}, \xi^* + \beta^* e^{(i\Omega-\nu/2)t})\phi(\xi e^{i\Omega t})\exp[e^{-\nu t}\beta^*\beta]. \tag{41}$$

将这结果与文献 [1] 的相应结果比较，多了一因子 $e^{-\nu t/2}$ 及 $\exp[e^{-\nu t}\beta^*\beta]$．应用 β^*, β 的表式 (27), (31) 及 (34)，得 $\exp[e^{-\nu t}\beta^*\beta] = \exp\left[\nu n_\infty\int_0^t e^{-\nu(t-t')}dt'\right]$．这个因子的存在不影响下面求平均，因分子、分母均有这因子而约去．参照文献 [1] 定义算符

$$Ae^{-i\Omega t}\phi(\xi e^{i\Omega t}) = \xi\phi(\xi e^{i\Omega t}).$$

求振子位移 $x = \sqrt{\frac{\hbar}{2M\Omega}}(\xi + \xi^*)$ 的平均值

$$\bar{x} = \frac{\int\phi^* x\phi}{\int\phi^*\phi} = \frac{1}{\sqrt{2}}[\bar{A}e^{-i\Omega t} + \beta e^{-\nu t/2 - i\Omega t} + \bar{A}^* e^{i\Omega t} + \beta^* e^{-\nu t/2 + i\Omega t}]$$
$$= \frac{1}{M\Omega}\int_0^t e^{-\nu(t-t')/2}\sqrt{\frac{\hbar M\Omega}{2}}[(F + F^*)\cos\Omega(t-t')$$
$$+ i(F^* - F)\sin\Omega(t-t')]dt'$$
$$+ \sqrt{\frac{\hbar}{2M\Omega}}\left[\frac{\Sigma a_n^*\sqrt{n}\ a_{n-1}}{\Sigma a_n^* a_n}e^{-i\Omega t} + \frac{\Sigma a_{n-1}^*\sqrt{n}\ a_n}{\Sigma a_n^* a_n}e^{i\Omega t}\right]$$
$$= \frac{1}{M\Omega}\int_0^t e^{-\nu(t-t')/2}\left[\Omega M g\cos\Omega(t-t') + \left(\frac{\nu M}{2}g + f\right)\sin\Omega(t-t')\right]dt'$$
$$+ \sqrt{\frac{\hbar}{2M\Omega}}\left[\frac{\Sigma a_n^*\sqrt{n}\ a_{n-1}}{\Sigma a_n^* a_n}e^{-i\Omega t} + \frac{\Sigma a_{n-1}^*\sqrt{n}\ a_n}{\Sigma a_n^* a_n}e^{+i\Omega t}\right]. \tag{42}$$

将这结果与文献 [1] 的结果相比．有两点不同，一是 F, F^* 为无规力算符，不是可易的

经典力学量．另一是（42）式中表现量子起伏的两项，不再具有阻尼因子 $e^{-\frac{\nu}{2}t}$．仅在经典阻尼振荡的第一项保留着阻尼因子．我们还注意到上面结果可作如下推广．即在 F，F^* 中分别加上 f, f^*，f, f^* 为有规的，并与 ξ, ξ^* 为可对易，故有

$$\tilde{F} = F + f, \quad \tilde{F}^* = F^* + f^*,$$

$$\langle[\xi, \tilde{F}^*]\rangle = \langle[\xi, F^*]\rangle = \nu/2, \quad \langle[\tilde{F}, \xi^*]\rangle = \langle[F, \xi^*]\rangle = \nu/2. \tag{43}$$

故（19）式仍成立，又由（34）式

$$\langle \tilde{F}^* \tilde{\beta} e^{(-i\Omega-\nu/2)t}\rangle = \frac{\nu n_\omega}{2} + f^*(t)\int_0^t \exp\{-(i\Omega+\nu/2)(t-t')\}\cdot f(t')dt' = \frac{\nu n_\omega}{2} + Q,$$

$$\langle \xi^* \tilde{\beta} e^{(-i\Omega-\nu/2)t}\rangle = n_\omega + e^{-\nu t}\int_0^t\int_0^t \exp\{[(\nu t' + \nu t'')/2] - i\Omega(t'-t'')\}$$

$$\cdot f(t')f^*(t'')dt'dt'' = n_\omega + R. \tag{44}$$

参照（32）式，α 增加了一项 $\int\left(\frac{\nu}{2}R - Q\right)dt$．正如前面已提到，这项增加的因子

$$\exp\left[\int\left(\frac{\nu R}{2} - Q\right)dt\right]$$

将在分子、分母出现，被约掉，不影响求平均．（42）式仍成立．

参　考　文　献

[1] 彭桓武，物理学报，**29**(1980)，1084.
[2] 朱如曾，物理学报，**30**(1981)，1410.
[3] H. Haken, Handbuch der Physik Band, XXV/2C, Licht and Materie Ic (1970).
[4] 谭维翰，物理，**10**(1980)，193.

QUANTUM THEORY OF A DAMPED HARMONIC OSCILLATOR SIMULATING LASER OPEN SYSTEM

TAN WEI-HAN
(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

WANG XUE-WEN　XIE CHENG-GANG　ZHANG GUAN-MEI
(Shanghai University of Science and Technology)

ABSTRACT

We have analysed the quantization schemes presented in references [1, 2] for a damped harmonic oscillator and found out that there are some defects in volved in these schemes. In order to remedy these defects, we assume the coordinate system fluctuating with a velocity $g(t)$ in addition to damping force $f(t)$ proportional to the velocity and suggest a method of quantization for this system based on the full quantum theory of lasers. It is proved that the usual Heisenberg relation $xp-px=i\hbar$ can be maintained, but the quantum term in statistical average value of physical variable does not damp as shown in reference [1].