

相干光在嵌有随机粉粒和麻坑的 表面上的主反射场

程 路 刘 志 国

(南开大学物理系)

1982 年 4 月 26 日收到

提 要

运用“随机随机游动”模型导出了相干光波射在嵌有随机粉粒和麻坑的表面(表面本身也有随机起伏)上时,其主反射场的期望值的表达式,并以正态分布为例作了计算。

一、引 言

关于相干光在漫射表面上的散射,已有不少文献作了论述(例如文献[1—6])。漫射表面指的是整个表面几何形状的随机起伏遵从同一种统计分布。而在许多实际问题中会遇到下述情况:在比较规则的表面上随机分布着大量粉粒和麻坑。例如,激光腔在工作中,其端镜的内表面被粒子不断轰击而出现越来越多的微小麻坑,同时,腔壁物质被轰出大量微小粉粒而溅落到镜面上。这些坑、粒的平均线度远小于波长,且只占据端镜面域的一小部分,其它部分(下称基面)仍为原来镜面;这时不能认为全面域的起伏遵从同一统计分布,因而不可按上述漫射表面处理。

本文从统计观点出发,引进所谓“随机随机游动”的概念,对此问题进行研究,导出主反射场(期望场)的普遍表达式。然后以坑、粒的半径皆呈正态分布的情况作为例子,作了具体计算。

二、统 计 模 型

虽然麻坑和粉粒的形状也是无规的,但在统计意义下,可将麻坑视为半球面、将颗粒视为球形(图 1)来处理。设麻坑的随机半径 r 的概率密度为 $p_1(r)$, 颗粒的随机半径 ρ 的概率密度为 $p_2(\rho)$, 基面高度的随机偏离量 h 的概率密度为 $p(h)$ 。设表面总面积为 S_0 , 麻坑占据的总面积为 αS_0 , 颗粒的横截面占据的总面积为 βS_0 , 则基面总面积为 $S = (1 - \alpha - \beta)S_0$, 于是

$$\sum_i \pi r_i^2 = \alpha S_0, \quad (1)$$

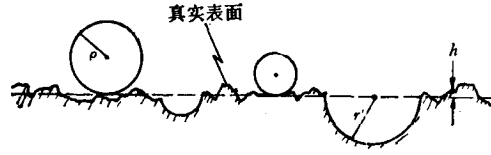


图 1

$$\sum_k \pi \rho_k^2 = \beta S_0, \quad (2)$$

其中 r_j 和 ρ_k 分别为各个麻坑和颗粒的半径。按照各态历经假设, 可以认为每个 r_j 均遵从 $p_1(r)$ 的分布, 每个 ρ_k 均遵从 $p_2(\rho)$ 的分布。

设入射相干波在理想表面 F 上(图 2)的表达式为

$$W_0(P) = A_0(P) e^{i\varphi_0(P)}, \quad (3)$$

其中 P 为 F 上的点; 并设入射角为 θ 。由于半径为 b 的半球面的平均高度为 $2b/3$, 故可将第 j 个麻坑(面积为 πr_j^2) 的反射场集中到 Q_j 点, Q_j 到 F 上相应点 P_j 的距离为 $2/3 r_j$ 。于是取样点 P_j 处的反射场的复振幅可写为

$$\tilde{A}_1(P_j) = W_0(P_j) R_1 \pi r_j^2 \exp i \left(\frac{2\pi}{\lambda} 2 \cdot \frac{2}{3} r_j \cos \theta \right), \quad (4)$$

其中 R_1 为麻坑表面的反射系数; $2 \cdot \frac{2}{3} r_j \cos \theta$ 为实际光程与理想光程之差¹⁾。

与此同理, 第 k 个颗粒(截面积为 $\pi \rho_k^2$) 的

前半球面的反射场, 可集中到 Q_k 点来处理, Q_k 到 P_k 的距离为 $\frac{5}{3} \rho_k$ 。于是取样点 P_k 处的反射场的复振幅可写为

$$\tilde{A}_2(P_k) = W_0(P_k) R_2 \pi \rho_k^2 \exp i \left(-\frac{2\pi}{\lambda} 2 \cdot \frac{5}{3} \rho_k \cos \theta \right), \quad (5)$$

其中 R_2 为颗粒表面的反射系数。

至于基面, 可将其分为许多足够小的面元 Δs (例如面积小于 λ^2), 于每一面元上取一点 Q_m , Q_m 到 P_m 的距离为 h_m , 则取样点 P_m 处反射场的复振幅为

$$\tilde{A}(P_m) = W_0(P_m) R \Delta s \exp i \left(-\frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2 h_m \cos \theta \right), \quad (6)$$

R 为基面的反射系数。以上各式中 r, ρ, h 的取值范围分别为

$$0 < r < \infty, \quad 0 < \rho < \infty, \quad -\infty < h < \infty. \quad (7)$$

显然有

1) 参见文献[7]第 1572 页推论 3, 文献[7]中的 r 即本文的 θ 。

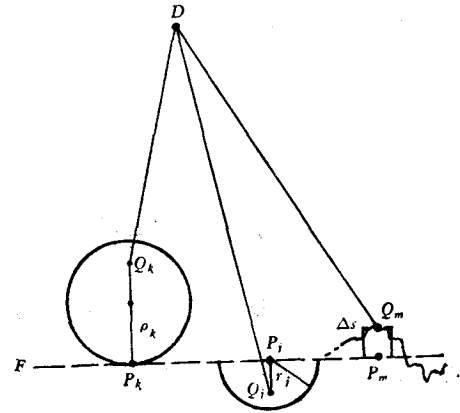


图 2

$$\sum_m \Delta s = (1 - \alpha - \beta) S_0; \quad (8)$$

并且 r, ρ, h 皆与 $W_0(P)$ 统计无关.

将表达式 (4), (5), (6) 分别视为由取样点 P_i, P_k, P_m 发出的子波, 则在某一考察点 D , 这些子波的和贡献为

$$W(D) = \sum_i \tilde{A}_1(P_i) \frac{\exp i \left(\frac{2\pi}{\lambda} d_i \right)}{d_i} + \sum_k \tilde{A}_2(P_k) \frac{\exp i \left(\frac{2\pi}{\lambda} d_k \right)}{d_k} \\ + \sum_m \tilde{A}(P_m) \frac{\exp i \left(\frac{2\pi}{\lambda} d_m \right)}{d_m},$$

其中 d_i, d_k, d_m 分别为 P_i, P_k, P_m 到 D 的距离. 对于远场点 D , 可取 $1/d_i = 1/d_k = 1/d_m = 1/d$, d 为 D 到面 F 的距离. 于是上式成为

$$W(D) = U_1(D) + U_2(D) + U(D), \quad (9)$$

其中

$$U_1(D) = \frac{\pi R_1}{d} \sum_i W_0(P_i) \exp i \left(\frac{2\pi}{\lambda} d_i \right) r_i^2 \exp i \left(\frac{8\pi}{3\lambda} r_i \cos \theta \right), \quad (10)$$

$$U_2(D) = \frac{\pi R_2}{d} \sum_k W_0(P_k) \exp i \left(\frac{2\pi}{\lambda} d_k \right) \rho_k^2 \exp i \left(-\frac{20\pi}{3\lambda} \rho_k \cos \theta \right), \quad (11)$$

$$U(D) = \frac{\pi R \Delta s}{d} \sum_m W_0(P_m) \exp i \left(\frac{2\pi}{\lambda} d_m \right) \exp i \left(-\frac{4\pi}{\lambda} h_m \cos \theta \right). \quad (12)$$

r_i, ρ_k, h_m 与 d_i, d_k, d_m 统计无关.

三、主场表达式

$W(D)$ 的数学期望 $\langle W(D) \rangle$ 对应着主反射场. 由 (9) 式可知

$$\langle W(D) \rangle = \langle U_1(D) \rangle + \langle U_2(D) \rangle + \langle U(D) \rangle. \quad (13)$$

由 (10) 式又知

$$\langle U_1(D) \rangle = \frac{\pi R_1}{d} \sum_i \left\langle W_0(P_i) \exp i \left(\frac{2\pi}{\lambda} d_i \right) r_i^2 \exp i \left(\frac{8\pi}{3\lambda} r_i \cos \theta \right) \right\rangle. \quad (14)$$

由于 r_i 与 $W_0(P_i), d_i$ 统计无关, 故

$$\langle U_1(D) \rangle = \frac{\pi R_1}{d} \sum_i \left\langle W_0(P_i) \exp i \left(\frac{2\pi}{\lambda} d_i \right) \right\rangle \left\langle r_i^2 \exp i \left(\frac{8\pi}{3\lambda} r_i \cos \theta \right) \right\rangle. \quad (15)$$

又因 r_i 的概率密度为 $p_1(r)$, 故上式中第二个期望因子为

$$\left\langle r_i^2 \exp i \left(\frac{8\pi}{3\lambda} r_i \cos \theta \right) \right\rangle = \int_0^\infty r^2 p_1(r) \exp i \left(\frac{8\pi}{3\lambda} r \cos \theta \right) dr. \quad (16)$$

此值可以提到 (15) 式的求和号以外. 剩下的因子

$$\sum_i \left\langle W_0(P_i) \exp i \left(\frac{2\pi}{\lambda} d_i \right) \right\rangle \quad (17)$$

可以按照下述分析求出. 我们知道, 表达式

$$\frac{1}{d} \pi r_i^2 W_0(P_i) \exp i \left(\frac{2\pi}{\lambda} d_i \right) \quad (18)$$

乃是理想表面 F 上取样点 P_i (它代表一个面积 πr_i^2) 的反射子波对 D 点的贡献(假定面 F 的反射系数为 1)。这个问题具有两层随机的含义:

- 1) P_i 点在面 F 上的位置是随机的, 到处作匀概率密度分布;
- 2) 相应的变量 r_i 也是随机的, 概率密度为 $p_1(r)$, 且与 P_i 位置无关。

我们把这样的相幅矢量在复平面上的叠加称为“随机随机游动”。

假设麻坑占满表面, 即 $\sum_i \pi r_i^2 = S_0$, 则(18)式对 i 求和正是理想表面的反射波在 D

点的值[以 $W_0(D)$ 表示]; 而实际上 $\sum_i \pi r_i^2 = \alpha S_0$, 因而可以证明(见附录),

$$\sum_i \left\{ \frac{1}{d} \pi r_i^2 \left\langle W_0(P_i) \exp i \left(\frac{2\pi}{\lambda} d_i \right) \right\rangle \right\} = \alpha W_0(D). \quad (19)$$

而由 r_i 与 P_i, d_i 无关又可得

$$\left\langle r_i^2 W_0(P_i) \exp i \left(\frac{2\pi}{\lambda} d_i \right) \right\rangle = \langle r_i^2 \rangle \left\langle W_0(P_i) \exp i \left(\frac{2\pi}{\lambda} d_i \right) \right\rangle,$$

且

$$\langle r_i^2 \rangle = \int_0^\infty r^2 p_1(r) dr,$$

故(19)式成为

$$\frac{\pi}{d} \sum_i \left\langle W_0(P_i) \exp i \left(\frac{2\pi}{\lambda} d_i \right) \right\rangle = \frac{\alpha W_0(D)}{\int_0^\infty r^2 p_1(r) dr}. \quad (20)$$

于是由(15), (16)及(20)式得

$$\langle U_1(D) \rangle = \alpha R_1 W_0(D) \frac{\int_0^\infty r^2 p_1(r) \exp i \left(\frac{8\pi}{3\lambda} r \cos \theta \right) dr}{\int_0^\infty r^2 p_1(r) dr}. \quad (21)$$

同理亦可得出

$$\langle U_2(D) \rangle = \beta R_2 W_0(D) \frac{\int_0^\infty \rho^2 p_2(\rho) \exp i \left(-\frac{20\pi}{3\lambda} \rho \cos \theta \right) d\rho}{\int_0^\infty \rho^2 p_2(\rho) d\rho}. \quad (22)$$

对于(12)式的 $U(D)$ 求期望与此类似(且由于不含 h_m^2 因子而更简单些), 可得

$$\langle U(D) \rangle = (1 - \alpha - \beta) R W_0(D) \int_{-\infty}^\infty p(h) \exp i \left(-\frac{4\pi}{\lambda} h \cos \theta \right) dh. \quad (23)$$

四、 $p_1(r), p_2(\rho), p(h)$ 均为正态分布的情况

设

$$p_1(r) = \frac{2}{\sqrt{2\pi} \sigma_r} e^{-r^2/2\sigma_r^2}, \quad (r > 0), \quad (24)$$

$$p_2(\rho) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma_\rho} e^{-\rho^2/2\sigma_\rho^2}, \quad (\rho > 0), \quad (25)$$

$$p(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_h} e^{-h^2/2\sigma_h^2} \quad (-\infty < h < \infty), \quad (26)$$

则

$$\int_0^\infty r^2 p_1(r) dr = \sigma_r^2, \quad \int_0^\infty \rho^2 p_2(\rho) d\rho = \sigma_\rho^2. \quad (27)$$

设 r, ρ, h 均远小于 λ (激光腔端镜的实际情况如此), 则可近似取

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{8\pi}{3\lambda} r \cos\theta\right) &= 1 - \frac{32\pi^2}{9\lambda^2} r^2 \cos^2\theta, \\ \sin\left(\frac{8\pi}{3\lambda} r \cos\theta\right) &= \frac{8\pi}{3\lambda} r \cos\theta, \end{aligned} \quad (28)$$

于是

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty r^2 p_1(r) \exp i\left(\frac{8\pi}{3\lambda} r \cos\theta\right) dr \\ &= \int_0^\infty r^2 p_1(r) \cos\left(\frac{8\pi}{3\lambda} r \cos\theta\right) dr + i \int_0^\infty r^2 p_1(r) \sin\left(\frac{8\pi}{3\lambda} r \cos\theta\right) dr \\ &= \left(\sigma_r^2 - \frac{32\pi^2}{3\lambda^2} \sigma_r^4 \cos^2\theta\right) + i \frac{32\sqrt{\pi}}{3\sqrt{2}\lambda} \sigma_r^3 \cos\theta. \end{aligned} \quad (29)$$

同理

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \rho^2 p_2(\rho) \exp i\left(-\frac{20\pi}{3\lambda} \rho \cos\theta\right) d\rho \\ &= \left(\sigma_\rho^2 - \frac{200\pi^2}{3\lambda^2} \sigma_\rho^4 \cos^2\theta\right) - i \frac{80\sqrt{\pi}}{3\sqrt{2}\lambda} \sigma_\rho^3 \cos\theta, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\int_{-\infty}^\infty p(h) \exp i\left(-\frac{4\pi}{\lambda} h \cos\theta\right) dh = 1 - \frac{8\pi^2}{\lambda^2} \sigma_h^2 \cos^2\theta. \quad (31)$$

将(27), (29), (30), (31)式代入(21), (22), (23)式, 再全部代入(13)式, 于是得

$$\begin{aligned} \langle W(D) \rangle &= W_0(D) \left\{ [(1-\alpha-\beta)R + \alpha R_1 + \beta R_2 - \frac{8\pi^2}{3} ((1-\alpha-\beta)Rh_c^2 \right. \\ &\quad \left. + 4\alpha R_1 r_c^2 + 25\beta R_2 \rho_c^2)] + i \frac{8\sqrt{\pi}}{3\sqrt{2}} [4\alpha R_1 r_c - 10\beta R_2 \rho_c] \right\}, \end{aligned} \quad (32)$$

其中

$$h_c = \frac{\sigma_h}{\lambda} \cos\theta, \quad r_c = \frac{\sigma_r}{\lambda} \cos\theta, \quad \rho_c = \frac{\sigma_\rho}{\lambda} \cos\theta. \quad (33)$$

若令

$$\langle W(D) \rangle = W_0(D) \mathcal{R} e^{i\phi}, \quad (34)$$

其中 $\mathcal{R}, \phi$ 皆为实值, 则

$$\mathcal{R} = \left\{ [(1-\alpha-\beta)R + \alpha R_1 + \beta R_2 - \frac{8\pi^2}{3} ((1-\alpha-\beta)Rh_c^2 + 4\alpha R_1 r_c^2 + 25\beta R_2 \rho_c^2)]^2 \right.$$

$$+ \left[\frac{8\sqrt{\pi}}{3\sqrt{2}} (4\alpha R_1 r_c - 10\beta R_2 \rho_c) \right]^{1/2}, \quad (35)$$

$$\phi = \arctan \left\{ \left[\frac{8\sqrt{\pi}}{3\sqrt{2}} (4\alpha R_1 r_c - 10\beta R_2 \rho_c) \right] / \left[(1 - \alpha - \beta)R + \alpha R_1 + \beta R_2 - \frac{8\pi^2}{3} ((1 - \alpha - \beta)R h_c^2 + 4\alpha R_1 r_c^2 + 25\beta R_2 \rho_c^2) \right] \right\}. \quad (36)$$

就是说,对主反射场而言,坑、粒的存在相当于造成以下两个因素的影响:

1. 使理想表面 F 的反射系数从 R 下降为 $\mathcal{R}$;
2. 使理想表面 F 在反射时发生位相跃变 ϕ , 这等效于使面 F 发生一个轴向位移 Δl

$$\Delta l = \frac{\lambda}{4\pi \cos \theta} \phi. \quad (37)$$

五、实例计算

取 $R = 1$, $R_1 = R_2 = 0.5$, $\theta = 0$; 并以

$$\eta = 1 - \frac{\mathcal{R}^2}{R^2} = 1 - \mathcal{R}^2 \quad (38)$$

表示激光腔内一个端镜上的损耗率, 分别进行了以下几项计算:

1) 设 $r_c = \rho_c = 0$, 得 η 作为 h_c 的函数曲线如图 3 所示. 这是未染坑、粒时由端镜表面本身的起伏造成的损耗率.

2) 单由粉粒造成的损耗率 ($h_c = r_c = 0$) 作为 ρ_c 的函数 $\eta_\rho(\rho_c)$ 和单由麻坑造成的损耗率 ($h_c = \rho_c = 0$) 作为 r_c 的函数 $\eta_r(r_c)$ 示于图 4. 相对面积取 $\alpha = \beta = 0.005$. 图 4 中虚线是坑、粒同时存在(条件同上)且基面的 $h_c = 0.03$ 时, 三者造成的总损耗率作为 r_c (取 $\rho_c = r_c$) 的函数 η .

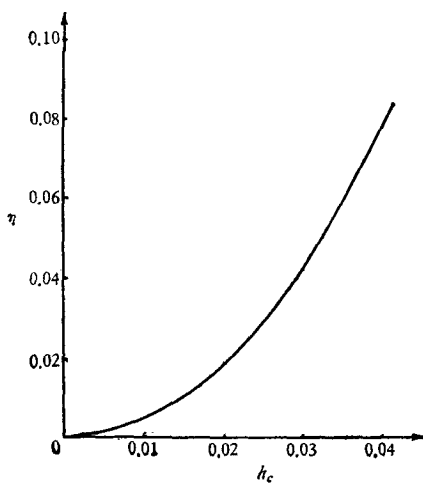


图 3

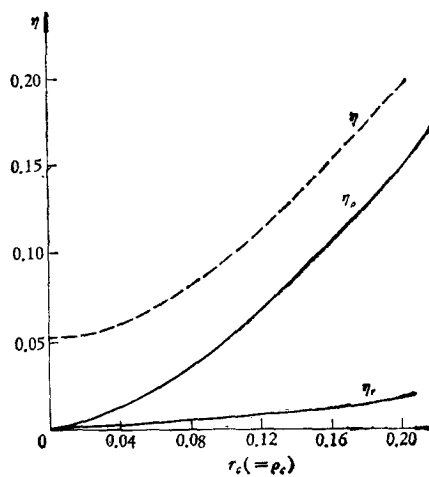


图 4

以上两图中的曲线大体呈抛物线形状。

3) 设 $h_c = 0$, 对于一系列 $r_c = \rho_c$ 值, 由坑、粒共同造成的损耗率随 $\alpha = \beta$ 的函数曲线如图 5 所示。虚线为最上一条曲线再添上 $h_c = 0.03$ 后的总 η 。

4) 设 $h_c = r_c = 0$, 对于一系列 ρ_c 值, η_p 随 β 的函数曲线如图 6 所示(虚线意思同上)。

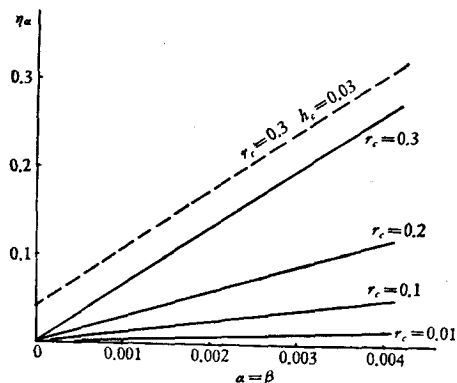


图 5

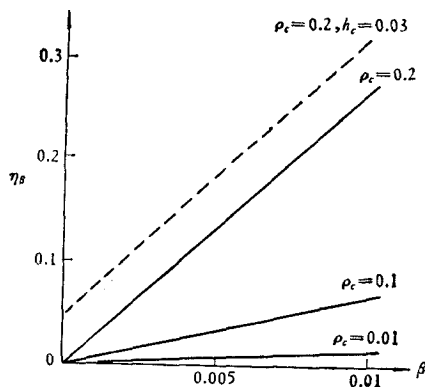


图 6

5) 当单有粉粒时 ($h_c = r_c = 0$), 对于一系列 ρ_c 值, 算出了 $|\Delta l/\lambda|$ [见(37)式] 随 β 的函数曲线如图 7 所示。由(36)式看出, 坑、粒同时存在时造成的 ψ , 一般说来比单有粉粒时的 ψ 值为小。

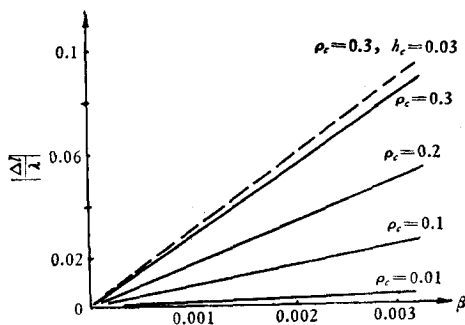


图 7

以上三图中的曲线大体均为过原点的直线。

六、讨 论

内腔气体激光器的反射镜在工作过程中被损伤和污染的现象是普遍存在的。镜面污染主要是由于放电时产生的阴极溅射, 溅射的粉粒漂落到镜面上。同时, 反射膜系材料在带电粒子轰击下会发生分解, 造成粉尘分解物和腐蚀坑。南京工学院激光研究组用电子显微镜拍摄了端镜上粉尘和麻坑的照片; 南开大学激光研究组在腔内充氢放电实验中发现

激光器寿命缩短,经初步分析后认为相当重要的原因是充氢后加速了反射膜材料的分解,从而加速了腔镜质量的变坏。南京工学院激光研究组观察到,软膜反射镜工作几千小时后,膜及周围玻璃壁上已有 Zn, S 等单质微粒出现(它们正是膜系材料中的物质)。

因此,国内一些单位近来正在形成一种看法:在工艺保证气体激光器腔内的气体成分和总气压变化甚微的条件下,激光器腔镜在工作中受损伤和污染是其输出功率下降的重要(甚至主要)原因。鉴于此,若能从理论上导出工作电流与产生坑、粒之间的关系,以及坑、粒的统计参数与激光输出功率之间的关系,则用加大工作电流来做加速寿命实验就有了一定的理论根据。本文即初步导出了坑、粒统计分布与激光器损耗率 η 的关系。

附 录

先任意取定某一半径值 r_i , 设其中心点位于理想表面 F 上的 P_i 点, 则该取样点的反射波对 D 点的贡献为

$$\frac{\pi r_i^2}{d} W_0(P_i) \exp i \left(\frac{2\pi}{\lambda} d_i \right), \quad (\text{A} \cdot 1)$$

其中 d_i 为 P_i 到 D 的距离。固定 r_i 值而令 P_i 点在总面域 S_0 上作均匀概率随机分布, 令

$$N_i = \frac{S_0}{\pi r_i^2}, \quad (\text{A} \cdot 2)$$

则 $W_0(P_i) \exp i \left(\frac{2\pi}{\lambda} d_i \right)$ 对于所有 P_i 的期望值为

$$\left\langle W_0(P_i) \exp i \left(\frac{2\pi}{\lambda} d_i \right) \right\rangle_i = \frac{1}{N_i} \sum_{i=1}^{N_i} W_0(P_i) \exp i \left(\frac{2\pi}{\lambda} d_i \right). \quad (\text{A} \cdot 3)$$

下标 i 表示对 i 求期望。由于从 1 到 N_i 求和相当于以 πr_i^2 的面元覆盖全 S_0 , 故由物理意义可知

$$\frac{\pi r_i^2}{d} \sum_{i=1}^{N_i} W_0(P_i) \exp i \left(\frac{2\pi}{\lambda} d_i \right) = W_0(D). \quad (\text{A} \cdot 4)$$

该式与 (A·3), (A·2) 式联立, 可得

$$\left\langle W_0(P_i) \exp i \left(\frac{2\pi}{\lambda} d_i \right) \right\rangle_i = \frac{d}{S_0} W_0(D). \quad (\text{A} \cdot 5)$$

另一方面, (A·1) 式先对 i 求期望、再对所有 i 求和, 可得

$$\sum_j \left\{ \frac{1}{d} \pi r_j^2 \left\langle W_0(P_i) \exp i \left(\frac{2\pi}{\lambda} d_i \right) \right\rangle_i \right\} = \frac{1}{d} \left[\frac{d}{S_0} W_0(D) \right] \sum_j \pi r_j^2 = \frac{W_0(D)}{S_0} \alpha S_0 = \alpha W_0(D),$$

此即(19)式。在正文中, P, d 的下标仍写为 j 而未换成 i , 不过, 由于 P_i, d_i 与 r_i 无关, 故凡是对

$$W_0(P) \exp i \left(\frac{2\pi}{\lambda} d \right)$$

求期望, 都是在上述的下标 i 的意义下求期望。

参 考 文 献

- [1] J. W. Goodman, Statistical Properties of Laser Speckle patterns. in J. C. Dainty (ed.), Laser Speckles and Related Phenomena (Springer-Verlag, 1975).
- [2] J. C. Dainty, The Statistics of Speckle patterns, in E. Wolf (ed.), Progress in Optics, Vol. XIV (Amsterdam, 1977).
- [3] W. T. Welford, Opt. Quant. Elect., 7(1975), 413.
- [4] J. W. Goodman, Opt. Commun., 14(1975), 324.
- [5] T. Asakura and J. Ohtsubo, Optik, 46(1976), 19.
- [6] 程 路, 物理学报, 27 (1978), 651.
- [7] 程 路、张炳泉, 物理学报, 29 (1980), 1570.

THE MAIN REFLECTED WAVE FIELD OF THE COHERENT LIGHT FROM SURFACES WITH SMALL CRATERS AND PARTICLES

CHENG LU LIU ZHI-GUO

(Department of Physics, Nankai University)

ABSTRACT

The general expression of the expectation of the main reflected wave field of the coherent light from surfaces with randomly distributed small craters and particles is deduced with a statistical model called "randomly random walk". Curves are computed for the case of normal probability density distribution.