

# 有磁辫等离子体的双撕裂模研究

董家齐

(中国西南物理研究所)

1983年8月24日收到

## 提 要

在电磁流体力学范围内研究了与磁辫相联系的反常电子粘滞性效应所驱动的双撕裂模的线性行为。采用分区处理方法得到了该模式的一个近似色散关系。如果在  $x = \pm x_c$  处的两个有理面间的距离足够小 [ $x_c/a \ll (k_y a)^{-1/3} R^{-1/3}$ ]，则所得增长率的变化规律为  $\tau_0^{-1/3}$ ，随着该距离的增大，增长率过渡为  $\tau_r^{-1/3}$  定标。 $\tau_0^{-1/3}$  定标被证明为与撕裂层中不变  $\psi$  近似的失效有关。

## 一、引 言

在磁约束等离子体中，由于存在各种小幅度磁场扰动，磁力线往往扭结成像头发辫一样的形状，称为磁辫。这种辫结磁场结构已被作为托卡马克等离子体中所观察到的很多现象（反常电子热传导，破裂不稳定性及逃逸电子行为等）的可能起因而被广泛研究过<sup>[1-5]</sup>。

如果磁辫是由准稳小幅度扰动引起，则其不仅可能会导致反常电子热传导，而且还可能会导致平行于平衡磁场的电子动量横越该磁场的反常输运，即电子的平行粘滞系数的反常增大<sup>[1,2]</sup>。此时，在广义欧姆定律中，电子的平行粘滞项不能忽略。本文中，我们假设辫结磁场的影响就是通过反常电子粘滞系数来体现的，由此引出有磁辫等离子体所特有的双撕裂模式并进而讨论其线性行为。

电阻撕裂模是在托卡马克放电中广泛观察到的一种模式，它对托卡马克装置的等离子体行为有着十分重要的影响。这种模式已被广泛而深入地研究过。研究表明， $m \geq 2$  的电阻撕裂模式的线性增长率与等离子体的电阻率的关系为  $\gamma_r \sim S^{-3/5}$ ，其中  $S = \tau_r/\tau_H$  为等离子体的磁雷诺数， $\tau_r = 4\pi a^2/c\eta$  和  $\tau_H = a/cA$  分别为线度为  $a$  的等离子体的电阻扩散时间和阿耳芬时间， $\eta$  为等离子体的电阻率； $m = 1$  和双撕裂模式的线性增长率  $\gamma_r \sim S^{-1/3}$ 。所谓双撕裂模就是当载流等离子体中同时存在靠得很近的两个满足条件  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0$  的有理面时所发生的撕裂模式。电阻双撕裂模的线性行为的研究可见文献[6]。

由反常电子粘滞性引起的撕裂模也被作为破裂不稳定性的可能起因而被研究<sup>[7,8]</sup>。已经发现， $m \geq 2$  和  $m = 1$  的电子粘滞性撕裂模式的线性增长率的变化规律分别为  $\gamma \sim R^{-1/3}$  和  $\gamma \sim R^{-1/5}$ ，其中， $R = \tau_0/\tau_H$  为流体动力学雷诺数， $\tau_0 = 4\pi a^4(n_e e)^2/c^2\nu_e$  为等离子体电流的粘滞性扩散特征时间， $\nu_e$  为平行于平衡磁场的电子粘滞系数。本文应用文献

[6]中所采用的方法研究由电子的反常粘滞性引起的双撕裂模的线性行为,因为所得方程比较复杂,没有求得精确解,只得到了一个近似解.由此近似解,我们可以讨论问题的主要方面,得到了比较理想的结果.这些结果表明,由粘滞性引起的双撕裂模与电阻双撕裂模有着十分类似的线性行为.当两个  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0$  的有理面靠得很近时,发生双撕裂,其线性增长率  $\gamma \sim R^{-1/5}$ ; 如果两个有理面离得比较远,则不发生双撕裂,模式按  $\gamma \sim R^{-1/3}$  的规律增长.由前一种情况向后一种情况的过渡大约发生在  $\alpha x_s \sim (\alpha^4/R)^{1/5}$  时,这里,  $\alpha$  为扰动波数,  $2x_s$  为两个有理面间的距离.

## 二、平衡位形和 MHD 方程组

我们考察载流等离子体平板,平衡等离子体速度  $\mathbf{V}_0 = 0$ , 平衡磁场

$$\mathbf{B}_0(x) = B_{0y}(x)\hat{y} + B_{0z}(x)\hat{z}, \quad (1)$$

其中  $B_{0y}(x)$  在  $x = \pm x_s$  处为零,等离子体电流在  $z$  方向. 等离子体平板在  $x$  方向的特征线度为  $a$ . 假设等离子体不可压缩,则我们可以引进磁通量函数  $\phi(x, y, t)$  和流体速度势函数  $\psi(x, y, t)$  分别满足

$$\mathbf{B}_\perp = \nabla\phi \times \hat{z} \quad (2)$$

$$\mathbf{V}_\perp = \nabla\psi \times \hat{z}. \quad (3)$$

计及电子的粘滞性以后,欧姆定律可以写为

$$\mathbf{E} = \eta\mathbf{j} - \frac{1}{c} \mathbf{V} \times \mathbf{B} - \frac{v_c}{(en_e)^2} \nabla^2 \mathbf{j}. \quad (4)$$

由此式及(2)式和法拉弟电磁感应定律不难得到其  $z$  分量为

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = -\mathbf{V} \cdot \nabla\phi + \frac{c^2}{4\pi} \eta \nabla^2 \phi - \frac{v_c c^2}{4\pi(n_e e)^2} \nabla^4 \phi. \quad (5)$$

等离子体的运动方程的  $z$  分量给出

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \phi) = -(\mathbf{V} \cdot \nabla) \nabla^2 \phi + \frac{1}{4\pi\rho} [\nabla(\nabla^2 \phi) \times \nabla\phi] \cdot \hat{z}. \quad (6)$$

方程(5)和(6)就是我们所要采用的主要方程. 取扰动量为  $f \sim f(x) \exp(ik_y y + \gamma t)$  的形式,则得方程(5)和(6)的线性化形式为

$$\gamma\phi_1 = V_x B_{0y}(x) + \frac{c^2}{4\pi} \eta_0 \left( \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} - k_y^2 \phi_1 \right) - \frac{c^2 v_c}{4\pi(n_e e)^2} \left( \frac{\partial^4 \phi_1}{\partial x^4} + k_y^4 \phi_1 \right), \quad (7)$$

$$\rho\gamma \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - k_y^2 \psi \right) = -\frac{i}{4\pi} k_y B_{0y}'(x) \phi_1 + \frac{ik_y}{4\pi} B_{0y}(x) \left( \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} - k_y^2 \phi_1 \right), \quad (8)$$

其中,我们已取  $\eta$  和  $\rho$  为常数. 以  $a$ ,  $B_0$  和  $\tau_H = \sqrt{4\pi\rho a}/B_0$  分别作为长度, 磁场和时间的无量纲化参量,将方程(7)和(8)无量纲化,我们得

$$\gamma\tau_H \phi_1 = \gamma\tau_H \xi B_{0y}(x) + \frac{1}{S} \left[ \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} - \alpha^2 \phi_1 \right] - \frac{1}{R} \left[ \frac{\partial^4 \phi_1}{\partial x^4} + \alpha^4 \phi_1 \right], \quad (9)$$

$$(\gamma\tau_H)^2 \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \alpha^2 \xi \right) = \alpha^2 B_{0y}''(x) \phi_1 - \alpha^2 B_{0y}(x) \left[ \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} - \alpha^2 \phi_1 \right], \quad (10)$$

其中  $\alpha = k_y a$ ,  $\xi = \frac{ik_y}{a\gamma} \phi$ ,  $S = \tau_r/\tau_H$ ,  $R = \tau_v/\tau_H$ , 由方程(5)不难看出,  $\tau_v = 4\pi a^4(n_e e)^2/\nu_e c^2$  就是磁场在等离子体板上粘滞性扩散的特征时间。

### 三、分区处理

方程(9)表明,耗散效应只在  $B_{0y}(x) = 0$  面附近的一个薄层内是重要的,远离这样的面, (9)式的右端的两项与第一项相比可以略去,即耗散效应的影响很小可以不考虑。因此,我们采用在电阻撕裂模分析中经常采用的分区处理方法,在  $B_{0y}(x) = 0$  的奇异面的邻域(称为内区或耗散层)内,求解方程(9);在远离奇异面的区域(称为外区或理想磁流体区)内,求解与(9)式相应的理想 MHD 方程,即令(9)式中的  $S \rightarrow \infty$ ,  $R \rightarrow \infty$  所得的方程。然后使两区中的解拟合而得到色散关系。

先考虑理想磁流体情况,此时,(9)式给出

$$\phi_1 = B_{0y}(x)\xi,$$

代入(10)式得

$$\frac{d}{dx} \left\{ [(\gamma\tau_H)^2 + (\alpha B_{0y}(x))^2] \frac{d\xi}{dx} \right\} = \alpha^2 [(\alpha_{0y}(x))^2 + (\gamma\tau_H)^2] \xi, \quad (11)$$

与  $\alpha B_{0y}(x)$  项相比,略去惯性项得

$$\frac{d}{dx} \left[ (\alpha B_{0y}(x))^2 \frac{d\xi}{dx} \right] = \alpha^4 B_{0y}^2(x) \xi. \quad (12)$$

以  $\alpha^2 x_s^2$  作为小参量(即假设  $\alpha^2 x_s^2 \ll 1$ ) 将  $\xi$  展开如下:

$$\xi = \xi_0 + \xi_1 + \dots,$$

则到最低级,(12)式给出

$$\frac{d}{dx} \left\{ [\alpha B_{0y}(x)]^2 \frac{d\xi_0}{dx} \right\} = 0. \quad (13)$$

因位移  $\xi_0$  对  $x = 0$  面是对称的,而且  $|x| = x_s$  是奇异面,(13)式的解可以写为[9]

$$\begin{aligned} \xi_0(x) &= \xi_{00} = \text{常数} \quad |x| < x_s; \\ \xi_0(x) &= 0 \quad |x| > x_s. \end{aligned} \quad (14)$$

这是与双撕裂相对应的理想磁流体不稳定性——双扭曲的典型位移<sup>[6]</sup>。一级解由下列方程给出:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi_{\infty}} \frac{d\xi_1}{dx} &= \left( \frac{\alpha}{B_{0y}(x)} \right)^2 \int_0^x B_{0y}^2(x') dx' \quad |x| < x_s, \\ \frac{1}{\xi_{\infty}} \frac{d\xi_1}{dx} &= \left( \frac{\alpha}{B_{0y}(x)} \right)^2 \int_0^{x_s} B_{0y}^2(x') dx' \quad |x| \geq x_s. \end{aligned} \quad (15)$$

在  $x = x_s$  面附近,我们把  $B_{0y}(x)$  展成幂级数并略去(11)式的右端两项,则得与(14)式衔接的解

$$\xi = \frac{1}{2} \xi_{\infty} \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} \arctan [\alpha B'_{0y}(x - x_s) / \gamma \tau_H] \right\}, \quad (16)$$

其中  $B'_{0y} = B'_{0y}(x_s)$ . 现在, 如果令由(16)式得到的  $d\xi/dx$  在  $\alpha B'_{0y}(x - x_s) / \gamma \tau_H \rightarrow -\infty$  的极限下与由(15)式给出的  $d\xi_1/dx$  在  $x \rightarrow x_s^-$  的极限下相等, 就得到双扭曲模的增长率

$$\gamma_H \tau_H = - \left( \frac{\pi \alpha^3}{B'_{0y}} \right) \int_0^{x_s} B_{0y}^2(x') dx', \quad (17)$$

这是纯 MHD 驱动能的一个度量.  $\gamma_H < 0$ , 可见平板位形中的双扭曲模是稳定的. 但是, (17)式的右端正比于  $(\alpha x_s)^3$ , 在  $x_s \rightarrow 0$  的极限下, 双扭曲模变成边缘稳定的, 耗散效应可以使得这种边缘稳定的双扭曲模去稳定化, 从而产生双撕裂模. 考虑耗散效应, 在外区, 我们采用理想 MHD 方程和由此得到的解(14)和(15)式. 在内区, 与  $d^2/dx^2$  相比, 略去  $\alpha^2$  并把  $B_{0y}(x)$  在  $x = x_s$  面附近展开成幂级数, 则方程(9)和(10)就变为

$$(\gamma \tau_H)^2 \xi'' = -\alpha^2 B'_{0y}(x - x_s) \phi_1'', \quad (18)$$

$$(\gamma \tau_H) \phi_1 = \gamma \tau_H B'_{0y}(x - x_s) \xi + \frac{1}{S} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^4 \phi_1}{\partial x^4}, \quad (19)$$

其中两撇代表对  $x$  的二阶微商.

作变换  $x - x_s \rightarrow x$ ,  $\phi_1/B'_{0y} \rightarrow \phi_1$ ,  $\xi \rightarrow -\xi$ , 则方程(18)和(19)变为

$$\xi'' = \frac{x}{\lambda^2} \phi_1'', \quad (20)$$

$$\phi_1 = -x\xi + \frac{\varepsilon}{\lambda} \phi_1'' - \frac{\sigma}{\lambda} \phi_1^{(4)}, \quad (21)$$

其中  $\lambda = \gamma \tau_H / \alpha B'_{0y}$ ,  $\varepsilon = 1/S\alpha B'_{0y}$ ,  $\sigma = 1/\alpha B'_{0y} R$ . 这就是我们在内区所要求解的方程组, 其边界条件是在  $|x| \rightarrow \infty$  时与外区解拟合. 这组方程可以化为关于  $\xi$  的一个六阶方程

$$-\lambda \sigma \left[ \frac{24}{x^5} \xi'' - \frac{24}{x^4} \xi^{(3)} + \frac{12}{x^3} \xi^{(4)} - \frac{4}{x^2} \xi^{(5)} + \frac{1}{x} \xi^{(6)} \right] + \lambda \varepsilon \left[ \frac{2}{x^3} \xi'' - \frac{2}{x^2} \xi^{(3)} + \frac{1}{x} \xi^{(4)} \right] - 2\xi' - \left( x + \frac{\lambda^2}{x} \right) \xi'' = 0, \quad (22)$$

它应有六个线性独立的解. 不难看出, 在  $|x| \rightarrow \infty$  的极限下, 其中一个解的渐近形式为  $\xi = \text{常数} / \frac{1}{x}$ , 即  $d\xi/dx = \text{常数}/x^2$ . 这个解与外区解拟合得很好. 我们将其写为

$$\xi = \frac{1}{2} \xi_{\infty} + \xi_{\text{odd}}(x). \quad (23)$$

将外区解(15)式写为

$$\frac{1}{\xi_{\infty}} \frac{d\xi}{dx} = -\frac{\lambda_H}{\pi} \frac{1}{x^2}, \quad (24)$$

则

$$\lambda_H = -\pi \frac{\alpha^2}{B_{0y}^2} \int_0^{x_s} B_{0y}^2(x') dx'. \quad (25)$$

此时, (23)式中的  $\xi_{\text{odd}}(x)$  应满足的边界条件为

$$\frac{x^2}{2} \frac{d}{dx} (\ln \xi_{\text{odd}}) = -\frac{1}{\pi} \lambda_H \quad x \rightarrow -\infty \quad (26)$$

或

$$\frac{x^2}{2} \frac{d}{dx} (\ln \xi_{\text{odd}}) = \frac{1}{\pi} \lambda_H, \quad x \rightarrow \infty$$

因为  $\xi_{\text{odd}}$  为  $x$  的奇函数,  $x \rightarrow -\infty$  和  $x \rightarrow \infty$  分别表示朝  $x$  减小的方向和  $x$  增大的方向离开  $x = x_s$  的奇异面。

对给定的  $\lambda, \sigma$  和  $\varepsilon$  值, 在条件(26)式和  $\xi_{\text{odd}}(0) = 0$  以及对  $\phi_1$  所加的边界条件下, 可以数值求解方程组(20)和(21), 得到对给定的  $\varepsilon$  和  $\sigma$  值,  $\lambda$  与  $\lambda_H$  的关系曲线, 就是色散曲线。本文不涉及这方面的工作。本文中, 我们限于考虑仅仅由等离子体的电子粘滞性引起的双撕裂模并试图对这种模式的线性行为进行解析分析。

在(20), (21)式中, 令  $\varepsilon = 0$ , 得到

$$\xi'' = \frac{x}{\lambda^2} \phi_1, \quad (27)$$

$$\phi_1 = -x\xi - \frac{\sigma}{\lambda} \phi_1^{(4)}. \quad (28)$$

为了解此方程组, 与文献[9]中的处理相类似, 引进函数

$$\chi(x) = x\phi_1' - \phi_1 = \lambda^2 \frac{d\xi}{dx} + \chi_\infty, \quad (29)$$

则(27)和(28)式可以化为一个方程

$$\sigma\lambda \left[ \frac{d^4\chi}{dx^4} - \frac{4}{x} \frac{d^3\chi}{dx^3} + \frac{8}{x^2} \frac{d^2\chi}{dx^2} - \frac{8}{x^3} \frac{d\chi}{dx} \right] + (\lambda^2 + x^2)\chi = x^2\chi_\infty, \quad (30)$$

其中  $\chi_\infty$  为常数, 可以由解的渐近行为确定如下:

由(28)式可得

$$\begin{aligned} \xi &= -\frac{\phi_1}{x} - \frac{\sigma}{\lambda} \frac{1}{x} \frac{d^4\phi_1}{dx^4} \\ &= -\frac{1}{x} \chi(x) + \int_x^\infty \frac{1}{x} \frac{d\chi}{dx} dx - \frac{\sigma}{\lambda} \frac{1}{x} \left[ \frac{2}{x^3} \frac{d\chi}{dx} - \frac{2}{x^2} \frac{d^2\chi}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d^3\chi}{dx^3} \right]. \end{aligned}$$

当  $x \rightarrow -\infty$  时,  $\xi \rightarrow \xi_\infty$ , 所以

$$\xi_\infty \simeq \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x} \frac{d\chi}{dx} dx \simeq 2 \int_0^\infty \frac{1}{x} \frac{d\chi}{dx} dx.$$

$x \rightarrow -\infty$  时,  $\frac{d\xi}{dx} \rightarrow$  常数/ $x^2$ , 我们定义  $\left. \frac{d\xi}{dx} \right|_{x \rightarrow -\infty} = -\chi_\infty/x^2$ , 与(26)式给出的

$$\begin{aligned} \left. \frac{x^2}{2} \frac{d}{dx} (\ln \xi_{\text{odd}}) \right|_{x \rightarrow -\infty} &= \left. \frac{x^2}{2} \frac{1}{\xi_{\text{odd}}} \frac{d\xi_{\text{odd}}}{dx} \right|_{x \rightarrow -\infty} = \left. \frac{x^2}{2} \frac{1}{\xi_\infty} \frac{d\xi}{dx} \right|_{x \rightarrow -\infty} \\ &= \frac{-1}{\pi} \lambda_H \end{aligned}$$

比较, 得到

$$\chi_\infty = \frac{1}{\pi} \lambda_H \xi_\infty \simeq \frac{2\lambda_H}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\chi}{dx} \frac{dx}{x}. \quad (31)$$

此式可以作为方程(30)的解所必须满足的边界条件。

下面讨论方程(30)的解。在理想磁流体极限下,  $\sigma \rightarrow 0$ , (30) 式的解为

$$\chi = \frac{x^2}{\lambda^2 + x^2} \chi_\infty, \quad (32)$$

代入条件(31)式得

$$\lambda = \lambda_H,$$

即扰动为理想磁流体模式。

在理想磁流体模式为边缘稳定的情况下,  $\lambda_H = 0$ ,  $\chi_\infty = 0$ , (30) 式成为

$$\sigma \lambda \left[ \frac{d^4 \chi}{dx^4} - \frac{4}{x} \frac{d^3 \chi}{dx^3} + \frac{8}{x^2} \frac{d^2 \chi}{dx^2} - \frac{8}{x^3} \frac{d \chi}{dx} \right] + (\lambda^2 + x^2) \chi = 0. \quad (33)$$

精确到  $x^3$  的量级, 其解为

$$\chi = A \exp[-x^2/2^{6/5}\sigma^{2/5}], \quad \lambda = \sigma^{1/5}/2^{2/5}. \quad (34)$$

代入(31)式确定  $A$ , 得到

$$\chi = -\frac{\xi_\infty \sigma^{1/5}}{\sqrt{\pi} x^{2/5}} \exp[-x^2/2^{6/5}\sigma^{2/5}]. \quad (35)$$

(34) 式给出, 在理想磁流体模式为边缘稳定的情况下, 由电子的平行粘滞性引起的双撕裂模的增长率为

$$\gamma = \frac{1}{2^{2/5}} (\alpha B'_{0y})^{4/5} \frac{1}{\tau_H^{4/5} \tau_V^{1/5}}, \quad (36)$$

与  $m = 1$  的模式的增长率相同<sup>[7]</sup>。

为了对(30)式的解作统一的研究, 我们作变换  $\zeta = x^2/\lambda^{1/3}\sigma^{1/3}$ ,  $\hat{\lambda} = \lambda/\sigma^{1/5}$ , 把方程(30)化为

$$\zeta^2 \frac{d^4 \chi}{d\zeta^4} + \zeta \frac{d^3 \chi}{d\zeta^3} - \frac{1}{4} \frac{d^2 \chi}{d\zeta^2} + \frac{1}{16} (\hat{\lambda}^{5/3} + \zeta) \chi = \zeta \chi_\infty. \quad (37)$$

下面我们求这个方程的近似解。首先, 与(34)式相类比, 略去方程中含有  $\zeta^2$  的项。其次, 假设方程有如下形式的近似解:

$$\chi = A \left\{ 1 + B \int_0^1 t^l (1+t)^m \exp \left[ -\frac{\zeta}{\alpha'} \left( \frac{1-t}{1+t} \right) \right] dt \right\}, \quad (38)$$

并把它代入方程(37)来确定待定常数  $A$ ,  $B$ ,  $l$ ,  $m$  和  $\alpha'$ 。结果得

$$A = \chi_\infty, \quad B = -\frac{\hat{\lambda}^{5/3}}{2^{m+1}\alpha'}, \quad l = \frac{\hat{\lambda}^{5/3}}{3\alpha'} - \frac{13}{12}, \quad m = \frac{\hat{\lambda}^{5/3}}{3\alpha'} + \frac{5}{4}, \quad \alpha' = 2^{4/3}. \quad (39)$$

将这样得到的近似解代入(31)式, 得到色散关系

$$\lambda = \lambda_H \left\{ \frac{\hat{\lambda}^{5/2}}{16 \cdot 2^{(\frac{\hat{\lambda}^{5/3}}{3\alpha'} + \frac{1}{4})}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\hat{\lambda}^{5/3}}{6\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{12}\right)}{\Gamma\left(\frac{\hat{\lambda}^{5/3}}{6\sqrt[3]{2}} + \frac{17}{12}\right)} \cdot F\left(-\frac{\hat{\lambda}^{5/3}}{6\sqrt[3]{2}} - \frac{3}{4}, \frac{\hat{\lambda}^{5/3}}{6\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{12}, \frac{\hat{\lambda}^{5/3}}{6\sqrt[3]{2}} + \frac{17}{12}, -1\right) \right\}, \quad (40)$$

其中  $F$  为超几何函数<sup>[10]</sup>

$$F(a, b, c, z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} \frac{z^n}{n!}.$$

不难验证, (40) 式中的  $F$  是绝对收敛的. 由此得到的近似色散曲线, 即  $\hat{\lambda}$  与  $\hat{\lambda}_H$  间的关系曲线见图 1. 由图 1 可见, 对小的  $\hat{\lambda}$  值, 这里的近似处理结果与对  $m = 1$  的模所完成的数值计算结果符合得很好, 对  $\hat{\lambda}$  比较大的情况, 两者相差比较大, 但变化的趋势还是比较一致的. 小的  $\hat{\lambda}$  值对应于  $\hat{\lambda}_H < 0$  或  $\hat{\lambda}_H \approx 0$  的情况, 也就是理想磁流体双扭曲模为稳定或接近稳定的情况. 正是在这两种情况下, 研究由耗散效应引起的双撕裂模才显得比较重要, 因此, 这里的近似处理对研究由电子的粘滞性引起的双撕裂模是合适的.

色散关系(40)式可以进一步写为如下的近似形式:

$$\lambda = \lambda_H \left\{ \frac{\hat{\lambda}^{5/2}}{16 \cdot \sqrt[4]{2} \left(1 + \frac{\hat{\lambda}^{5/3}}{6\sqrt[3]{2}} \ln 2\right)} \left[ 1 + \frac{\left(\frac{\hat{\lambda}^{5/3}}{6\sqrt[3]{2}} + \frac{3}{4}\right) \left(\frac{\hat{\lambda}^{5/3}}{6\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{12}\right)}{\frac{\hat{\lambda}^{5/3}}{6\sqrt[3]{2}} + \frac{17}{12}} \right] \times \frac{\Gamma\left(\frac{\hat{\lambda}^{5/3}}{6\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{12}\right)}{\Gamma\left(\frac{\hat{\lambda}^{5/3}}{6\sqrt[3]{2}} + \frac{17}{12}\right)} \right\}. \quad (41)$$

由此不难得到两种特例:

- 1) 如果  $\lambda_H = 0$ , 则  $\hat{\lambda} = 1/2^{2/5}$

即

$$\lambda = \sigma^{1/5}/2^{2/5},$$

与(34)式完全相同.

- 2) 如果  $\hat{\lambda}_H < 0$ , 且  $|\hat{\lambda}_H| \gg 1$ , 则由色散曲线可见  $\hat{\lambda} \ll 1$ , 此时(41)式给出

$$\lambda = \text{常数} \cdot \frac{\sigma^{1/3}}{\lambda_H^{2/3}}. \quad (42)$$

现在讨论这里所讨论的撕裂模在什么条件下按(34)式发展, 在什么情况下由(34)式过渡到(42)式. 为此, 将(27)式对  $x$  微商两次得到

$$\xi^{(4)} = \frac{x}{\lambda^2} \phi_1^{(4)} + \frac{2}{\lambda^2} \phi_1^{(3)}.$$

将(38)式中的  $\phi_1^{(4)}$  代入上式得

$$\xi^{(4)} = \frac{x}{\lambda\sigma} [-\phi_1 + x\xi] + \frac{2}{\lambda^2} \phi_1^{(3)}.$$

比较两式两边的  $\xi$  项, 不难得到耗散层的厚度为

$$\Delta \cong (\lambda\sigma)^{1/6} \cong [\gamma\tau_H/(\alpha B'_{0y})^2 R]^{1/6}. \quad (43)$$

必须指出, 我们前面得到的色散曲线只有在条件  $\Delta \ll x$ , 下才能成立, 因为只有在此条件

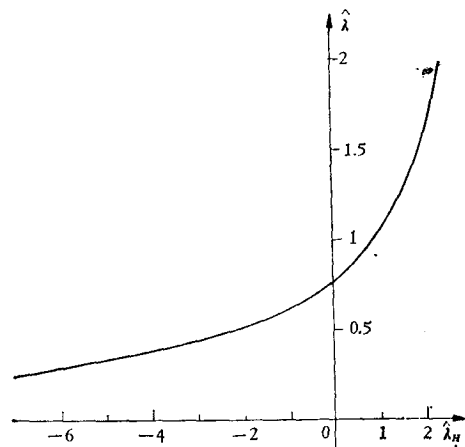


图 1 由方程(40)得到的色散曲线

下,我们才能将耗散层中的解与外区解(15)式拟合。同时,我们的外区解又是在  $\alpha x_s \ll 1$  的假设下得到的,记住这一点也很重要。

按定义

$$\hat{\lambda} = \frac{\lambda}{\sigma^{1/5}} = \gamma\tau_H(R/\alpha^4 B_{0y}^{\prime 4})^{1/5}, \quad (44)$$

$$\hat{\lambda}_H = \lambda_H/\sigma^{1/5} = \gamma_H\tau_H(R/\alpha^4 B_{0y}^{\prime 4})^{1/5}, \quad (45)$$

根据(17)式及其下面的讨论,当  $|x_s| \ll 1$  时,  $|\hat{\lambda}_H| \ll 1$ , 所以

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{2^{2/5}}.$$

此时,(43)式给出

$$\gamma\tau_H \simeq 0.8(\alpha^4 B_{0y}^{\prime 4}/R)^{1/5}, \quad (46)$$

增长率按  $R^{-1/5}$  定标。

条件  $|\hat{\lambda}_H| \ll 1$  和  $\Delta \ll x_s$  给出(假设  $B_{0y}' = 1$ )

$$\left(\frac{\alpha}{R}\right)^{1/5} \ll \alpha x_s \ll \left(\frac{\alpha^4}{R}\right)^{1/15}. \quad (47)$$

当  $x_s \gg 1$ , 从而  $|\hat{\lambda}_H| \gg 1$  和  $\hat{\lambda} \ll 1$  时,得到

$$\gamma\tau_H = (\text{常数}/(\gamma_H\tau_H)^{2/3})(\alpha^4 B_{0y}^{\prime 4}/R)^{1/3}, \quad (48)$$

增长率按  $R^{-1/3}$  定标。

条件  $|\hat{\lambda}_H| \gg 1$  和  $\alpha x_s \ll 1$  给出

$$\left(\frac{\alpha^4}{R}\right)^{1/15} \ll \alpha x_s \ll 1. \quad (49)$$

可见,由  $R^{-1/5}$  定标到  $R^{-1/3}$  定标的过渡大约发生在  $\alpha x_s \sim \left(\frac{\alpha^4}{R}\right)^{1/15}$  时。

另外,我们可以估计由粘滞性引起的电流扩散通过撕裂层所需的时间

$$\tau_\Delta \simeq \frac{\Delta^4}{\nu_c} = \Delta^4 \tau_H R, \quad (50)$$

结果

$$\gamma\tau_\Delta = \gamma(\gamma\tau_H/\alpha^2 B_{0y}^{\prime 2} R)^{2/3} \tau_H R = \hat{\lambda}^{5/3}.$$

如果 MHD 模式为边缘稳定的,  $\hat{\lambda} \simeq 1$ , 电流扩散通过撕裂层所需的时间与撕裂模的增长时间在量级上相同,此时,在撕裂层内  $\phi_1$  为常数的近似不适用,模式的增长率由(46)式给出。如果 MHD 模式是稳定的,则  $\hat{\lambda} \ll 1$ , 即  $\gamma\tau_\Delta \ll 1$ , 撕裂模增长的特征时间远大于电流扩散通过撕裂层所需的时间,  $\phi_1$  在撕裂层内可以近似作为常量处理。此时,增长率由(48)式给出。

#### 四、结论和讨论

由上面的分析,我们看到,在本文所考虑的平衡位形中,存在两种由电子的平行粘滞性引起的撕裂模,其增长率分别按  $R^{-1/5}$  和  $R^{-1/3}$  定标。严格说来,只有前一种模式才是所谓的双撕裂模。它是由相距很近的两个  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0$  的有理面上的扰动互相加强而发展成

来的,其增长率比一般的撕裂模式高,模结构也与一般模式不一样.在后一种模式的情况下,虽然两个相邻的有理面处都有扰动发展,但这两种扰动互不干扰,各自按照一般撕裂模式的结构和增长率发展.两种模式中究竟哪种发展,主要由两个奇异面间的距离决定.由一种模式向另一种模式的过渡大约发生在

$$\frac{x_s}{a} \sim (k_y a)^{-11/15} R^{-1/15}$$

的地方.两个奇异面间的距离远小于此值,就有双撕裂模发展,反之,则只有一般的撕裂模出现.

由电子粘滞性引起的电流扩散通过撕裂层所需的时间与双撕裂的增长时间同量级,因此,双撕裂的发展是与撕裂层中的不变 $\psi$ 近似的失效密切相关的.

作者感谢四川大学数学系陆文端教授在数学方面所给予的帮助.

### 参 考 文 献

- [ 1 ] T. H. Stix, *Phys. Rev. Lett.*, **36**(1976), 521; *Nucl. Fusion*, **18**(1978), 353.
- [ 2 ] A. B. Rechtster and M. V. Rosenbluth, *Phys. Rev. Lett.*, **40**(1978), 38.
- [ 3 ] J. D. Callen, *Phys. Rev. Lett.*, **39**(1970), 1540;  
B. B. Kadomtsev, *Физика плазмы*, **1** (1975), 938.
- [ 4 ] B. V. Waddell *et al.*, *Phys. Fluids*, **22**(1979), 896.
- [ 5 ] J. D. Strachan, *Nucl. Fusion*, **16**(1976), 743.
- [ 6 ] P. L. Prichett, Y. C. Lee and J. F. Drake, *Phys. Fluids*, **23**(1980), 1368.
- [ 7 ] P. H. Rutherford, *Tearing Modes in Tokamaks*, in *Fusion pt. A. v. 1*.
- [ 8 ] P. K. Kaw *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **43** (1979), 1398.
- [ 9 ] B. Coppi, R. Galvao, R. Rosenbluth and P. Rutherford, *Физика плазмы*, **2** (1976), 965.
- [ 10 ] Milton Abramowitz and Irene A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, (1966), P. 556—558.

## DOUBLE TEARING MODE IN PLASMA WITH MAGNETIC BRAIDING

DONG JIA-QI

(*Southwestern Institute of Physics, Leshan, Sichuan, China*)

ABSTRACT

The linear behavior of the double tearing mode driven by anomalous electron viscosity effects associated with magnetic braiding is investigated within the framework of MHD. A two-space-scale analysis is performed and the result is used to obtain an approximate dispersion relation for the mode. If the separation of the rational surfaces at  $x = \pm x_s$  is sufficiently small,  $x_s/a \ll (k_y a)^{-11/15} R^{-1/15}$ , the growth rate is predicted to scale as  $R^{-1/5}$ . With increasing separation the mode makes a transition to  $R^{-1/3}$  scaling, where  $R = \tau_\nu/\tau_H$ . The  $R^{-1/5}$  scaling is shown to be correlated with violation of the constant- $\psi$  approximation.